ENSEÑANZA DE LAS
CIENCIAS

REVISTA DE INVESTIGACIÓN Y EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS

vol. 41, n. 2, junio 2023

EDICIÓN

Departamentos de: Didáctica de las Ciencias y las Matemáticas de la Universitat Autònoma de Barcelona, Didáctica de las Matemáticas de la de la Universitat de València, Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales de la Universitat de València.

La Revista Enseñanza de las Ciencias es una revista en español, publicada desde 1983. Riguroso sistema doble ciego de evaluación. Amplia red de revisores científicos. Gestión profesional de los artículos a través de la plataforma OJS. Formato digital on-line. Publica en abierto, el texto completo es accesible de forma gratuita. No cobra a los autores de los artículos publicados.

INDEXACIÓN

CARHUS+	ERIHPLUS	**JCR-WOS SSCI (ISI)**	Scimago
CIRC	FECYT	LATINDEX (Catálogo)	Scopus
DIALNET plus	Google	MathEduc	
DICE	Scholar	MIAR	
	IRESIE	REBIUM	

Diseño del interior y maquetación:
Celso Hernández de la Figuera y Gómez

Gestión editorial:
Felipe Corredor Álvarez

Recepción de originales:
http://ensciencias.uab.es/about/submissions#onlineSubmissions

Correo electrónico
r.ensenanza.ciencias@uab.cat

ISSN (impreso): 0212-4521 e ISSN (digital): 2174-6486
Depósito legal: B-12373-1983

ÍNDICE

INVESTIGACIONES DIDÁCTICAS

INNOVACIONES DIDÁCTICAS

ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS 41-2 (2023), 5-24
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5691
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

El alumnado de educación infantil ya sabe lo que es un virus

Early Childhood Education Students Already Know What a Virus Is

María Antonia López-Luengo
Facultad de Educación de Segovia (UVa)
mariaantonia.lopez@uva.es

Esther Paños, José Reyes Ruiz-Gallardo
Facultad de Educación de Albacete (UCLM), Instituto Botánico. UCLM.
esther.panos@uclm.es, josereyes.ruiz@uclm.es

RESUMEN • Este trabajo busca identificar qué conocimientos sobre los virus se generaron de modo informal durante la pandemia del SARS-CoV-2 entre los escolares de educación infantil. Para ello, se analizan las respuestas de una entrevista estructurada llevada a cabo por las tutoras en las aulas y los dibujos realizados por el alumnado. Los participantes fueron 241 escolares de las aulas de infantil de 3 a 5 años. Los resultados apuntan a que la pandemia ha favorecido un conocimiento más realista sobre los virus, aunque ligado a uno concreto, el coronavirus. Los virus son situados mayoritariamente en el medio exterior y entendidos como agentes dañinos. Por último, los medios de comunicación destacan como principal fuente de información.

PALABRAS CLAVE: Educación infantil; Virus; Dibujos; Concepciones científicas; COVID-19.

ABSTRACT • This paper seeks to identify what knowledge about viruses was generated informally during the SARS-CoV-2 pandemic among pre-school children. To this end, we analyzed the responses to a structured interview conducted by the tutors in the classrooms, and drawings made by the pupils. The participants were 241 children from early childhood education in 3- to 5-year-old classrooms. The results suggest that the pandemic has favored a more realistic knowledge of viruses, although linked to one specific virus, the coronavirus. Viruses are mostly located in the external environment and understood as harmful agents. Finally, the mass media stand out as the main source of information.

KEYWORDS: Early childhood education; Viruses; Drawings; Scientific conceptions; COVID-19.

Recepción: abril 2022 • Aceptación: enero 2023 • Publicación: junio 2023

López-Luengo, M. A., Paños, E. y Ruiz-Gallardo, J. R. (2023). El alumnado de educación infantil ya sabe lo que es un virus. *Enseñanza de las Ciencias*, *41*(2), 5-24. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5691

INTRODUCCIÓN

La situación de pandemia vivida desde los primeros meses del año 2020 ha popularizado multitud de términos epidemiológicos y microbiológicos. A través de los medios de comunicación, la ciudadanía ha recibido explicaciones científicas sobre procesos de infección, desarrollo técnico de vacunas, evolución vírica y medidas de higiene que justifican restricciones y protocolos rígidos en las actividades colectivas, entre las que destacan los procesos educativos.

Desde la didáctica de las ciencias experimentales nos interesa identificar qué conocimientos ha generado tal proceso de alfabetización científica informal, porque, sin duda, deben ser tenidos en cuenta durante la escolarización, dado el importante papel que juega la infancia en el establecimiento de los modelos conceptuales. La investigación didáctica llevada a cabo durante las últimas décadas del siglo XX mostró que durante los primeros años de vida se generan teorías implícitas, persistentes en la edad adulta, que pueden producir rechazo ante nueva información, si esta entra en conflicto con los conocimientos establecidos en la infancia (véanse para el ámbito de la biología los trabajos de Carey, 1985, e Inagaki y Hatano, 2002).

A pesar de que algunos investigadores afirman que el mayor desarrollo del conocimiento biológico se produce después de los 7 años (Duschl et al., 2007), eso no impide que se trabaje con anterioridad. Por otro lado, incluir explícitamente conocimientos científicos durante el momento en el que se están formando las teorías ingenuas puede ser una gran oportunidad para detectar cómo se comprenden los procesos y los posibles malentendidos, antes de que esta información se interiorice y sea resistente al cambio (Driessnack y Gallo, 2013).

Importancia de la educación en microbiología

La investigación ha aportado pruebas de que la diferenciación conceptual entre seres vivos y no vivos aparece muy temprano en el desarrollo (Margett y Witherington, 2011). Esto abre caminos para la inclusión curricular de contenidos que se consideraban inalcanzables durante la etapa de educación infantil, en concreto, en este dominio conceptual específico de la biología.

El trabajo de revisión y de investigación realizado por Kalish (1996) ya aportó pruebas de que los niños menores de 7 años reconocen los gérmenes como mecanismos invisibles de causalidad de enfermedad, lo que explica el contagio y la contaminación (justificantes de hábitos higiénicos aprendidos sin explicación), y sugiere que utilizan una teoría (conectora de ideas y explicativa de fenómenos) para razonar en el ámbito de la biología. Sin embargo, la microbiología no está incluida directamente en los currículos oficiales para las primeras etapas educativas, tal es el caso de España.

Recientemente, desde las sociedades científicas internacionales, se ha reclamado su inclusión en los currículos escolares desde educación infantil hasta la educación secundaria, dada la relevancia social de los conocimientos sobre microbiología tanto en el ámbito sanitario, para un uso adecuado de los antibióticos y ante el grave peligro de la no vacunación, como por su prevalencia y relevancia en los ecosistemas y en muchos procesos industriales (Timmis et al., 2019). Es la primera cuestión, la higiénico-sanitaria, la que más iniciativas previas ha tenido en la generación de materiales escolares. En este sentido, destaca el proyecto internacional e-bug.eu (desde 2006 hasta la actualidad), dirigido inicialmente a la educación primaria y secundaria y ampliado recientemente también a la educación infantil (3-16 años), y el proyecto Microbiological@mind de la Universidad de Turín (Scalas et al., 2017), dirigido a la educación primaria. Sin embargo, también hay trabajos que reclaman un mayor equilibrio entre el tratamiento curricular de los microorganismos desde el ámbito sanitario y el ecológico e industrial (por ejemplo, Ballesteros et al., 2018, y Simard, 2021).

El extraordinario impacto de los microorganismos en la calidad de vida también ha motivado investigaciones sobre las concepciones y las representaciones gráficas de los niños sobre estos seres vivos, normalmente centradas en su impacto en la salud. Así, el estudio más antiguo hallado es el de Nagy (1953), que concluye que los gérmenes se representan como animales más o menos realistas tipo gusano o tipo artrópodo (vulgarmente llamados «bichos») (10-11 años), o de modo abstracto mediante puntos, círculos, cuadrados, etc. (5-9 años).

Microorganismo es un término científico que incluye grupos taxonómicos muy diferentes: protozoarios, hongos, bacterias, arqueas, algas y virus. Más allá de la controversia de si los virus son o no son seres vivos, en general, son considerados microorganismos (Timmis et al., 2019; Simard, 2021). El conocimiento de esta terminología más precisa y su significado constituyen un primer paso en el proceso de alfabetización científica en este ámbito que supera la denominación de *germen*, más imprecisa y ligada a la enfermedad, empleada en estudios más antiguos (Nagy, 1953; Kalish, 1996; Jones y Rua, 2006). Trabajos más recientes emplean los términos científicos para explorar las concepciones de la población escolar y confirman los tipos de representación hallados por Nagy (1953).

Muy pocos de estos trabajos exploran la comprensión de esta terminología entre menores de 7 años. Prokop et al. (2016) analizan la posible relación entre la experiencia previa con la enfermedad y la concepción de los microorganismos de los 4 a los 8 años cuando se solicita dibujar un bacilo. Domínguez et al. (2018) estudian las concepciones sobre los microorganismos, su diversidad y su importancia biológica, de niños de 4 a 6 años en sus interacciones con adultos, tanto en el ámbito de educación formal como en el informal (museo de ciencias). López-Luengo et al. (2021) abordan el conocimiento de los términos *microorganismo*, *microbio*, *virus*, *bacteria* y *hongo*, así como su relación con los hábitos de higiene y la influencia de la metodología empleada en el aula, en escolares de 4 y 5 años. Estos dos últimos trabajos muestran que los niños pequeños tienen un conocimiento previo sobre los términos *bacteria* y *virus*, son capaces de relacionarlos con la causa de enfermedades y están interesados en fenómenos biológicos microscópicos. Todo ello demanda un mayor y mejor tratamiento educativo que aproveche la capacidad de la primera infancia para adquirir conocimientos científicos.

Virología en las aulas

Los trabajos que investigan exclusivamente el tratamiento educativo de los virus son escasos, centrados en adolescentes o universitarios, así como muy recientes. Se derivan de pandemias como la del VIH (Mutonyi y Kendrick, 2011), u otras epidemias como la del Ébola y la del virus Zika, de gran repercusión mediática (Simon et al., 2017). Estos estudios detectan dificultades entre los estudiantes para la diferenciación entre virus y bacterias y reclaman una enseñanza de la virología más intensa y menos fragmentada.

El gran impacto de la COVID-19 en la infancia ha generado interés en estudiar las concepciones infantiles sobre un virus concreto y la necesidad de apoyos educativos y emocionales (Provenzi et al., 2020). Unos pocos de estos trabajos se centran en evaluar la comprensión de los niños más pequeños sobre el virus causante de la enfermedad mediante sus dibujos. Así, Martinerie et al. (2021) analizan los dibujos del SARS-CoV-2 que realizan niños franceses (de 5 a 17 años) cuando acuden al hospital en el verano de 2020 (19 tienen entre 5 y 6 años); Kahuroa et al. (2021) estudian, mediante expresiones artísticas, las teorías en acción de niños de 4 años sobre el causante de la COVID-19 en Nueva Zelanda a su vuelta al colegio tras el confinamiento; por último, Bonoti et al. (2022) estudian las representaciones y las explicaciones que dan sobre el virus niños griegos de entre 4 y 10 años durante el confinamiento de la primavera de 2020. Si bien el tamaño muestral respecto a las primeras edades en los dos primeros trabajos es pequeño, todos apuntan a que los niños han alcanzado un conocimiento del término *virus* y una representación más realista que los hallados en trabajos más antiguos. Asimismo, muestran que los niños tienen una concepción holística y multidimensional del coronavirus que incluye no solo las características del virus, sino también sus consecuencias sociales y emocionales.

Con ello, el interés del trabajo aquí presentado se justifica en que la investigación centrada en la comprensión de conceptos y fenómenos biológicos en la infancia temprana es exigua y resulta necesario completar y contrastar los resultados de los pocos trabajos que se han publicado recientemente sobre el virus SARS-CoV-2 en diferentes lugares del mundo. Las preguntas de investigación propuestas son: ¿Qué idea tienen los escolares de 3-5 años sobre los virus, durante la pandemia? ¿Dónde los ubican y qué creen que hacen? ¿Cuál es, principalmente, su fuente de información?

METODOLOGÍA

Diseño de la investigación

La investigación es cualitativa, ya que la información se obtiene a través de entrevistas individualizadas (Cook y Reichardt, 1986; Gay, 1996) y busca explicar el fenómeno a través de narraciones (Gay, 1996), usando las respuestas abiertas de los participantes. El estudio, además, tiene carácter exploratorio y descriptivo. Los participantes se han seleccionado a través de relaciones de trabajo previas con miembros de los colegios involucrados y, por tanto, el muestreo es no probabilístico de conveniencia (Bryman, 2016).

Participantes

Participan 241 alumnos de los tres cursos de educación infantil (3, 4 y 5 años), de 13 colegios de seis provincias españolas (Albacete, Ciudad Real, Segovia, Toledo y Valencia). De estos colegios, 5 se ubican en zonas rurales. El resto lo hace en municipios de más de 10.000 habitantes. La tabla 1 detalla el número de alumnos según el grupo de edad al que pertenecen.

Tabla 1.
Distribución de participantes por sexo y grupo de edad

	Curso de EI			
	3 años	4 años	5 años	Total
Niñas	42	50	40	132
Niños	32	53	24	109
Total	74	103	64	241

Recogida de información

Se realizó mediante una entrevista estructurada individual, de 5 preguntas de respuesta corta y apoyada en el uso del dibujo. Los trabajos de Byrne (2011), Faccio et al. (2013) y Mutonyi y Kendrick (2011) utilizan una herramienta similar. La eficacia del empleo del dibujo en los diseños experimentales para la investigación con o sobre la infancia ha sido destacada en múltiples investigaciones, dada la conexión que parece existir entre dibujar y pensar, especialmente en esta etapa (Salmon y Lucas, 2011).

La entrevista se inició con dos preguntas abiertas: «¿Qué es un virus?» y «¿Dónde has oído hablar de virus?». Tras ello se pidió al escolar que dibujase un virus. El alumnado tenía a su disposición lápices de colores, pero no hubo una petición expresa del uso del color.

Tras la realización del dibujo, la entrevista continuó con otras tres preguntas abiertas para aclarar algunos de los elementos del dibujo: «¿Dónde está o dónde puede estar el virus que has dibujado?», «¿Cómo se llama ese virus?» y «¿Qué está haciendo ese virus?».

Procedimiento

Las entrevistas se realizaron entre noviembre de 2020 y febrero de 2021. Los primeros meses coincidieron con el final de la segunda ola de la infección por la COVID-19 en España, y los últimos, en la tercera. Para que el alumnado se sintiese cómodo, las entrevistas se plantearon como una actividad escolar y se realizaron por las docentes del aula. Al inicio de la investigación se explicó el contenido del cuestionario y el procedimiento que había que seguir a cada una de las maestras implicadas. Ellas decidieron cuál era el momento oportuno para su realización. Asimismo, coincidieron en que era mejor anotar las respuestas y no grabar las entrevistas para evitar que se sintieran intimidados y fueran menos sinceros.

Diversos trabajos han confirmado que cuando los niños trabajan juntos es muy probable que unos sigan el modelo de otros (Deguara y Nutbrown, 2018). Para evitarlo, se pidió a las maestras que esta tarea la realizaran individualmente, al igual que procedieron Prokop et al. (2016). Tanto las entrevistas como los dibujos se realizaron dentro del aula, en una mesa individualizada y situada junto a la de la maestra, quien recogió por escrito las respuestas de los participantes.

Finalmente, las docentes tenían la instrucción de transcribir textualmente las palabras del participante, anotando, marginalmente, si observaban algún gesto llamativo, titubeos, comentarios espontáneos o alguna observación sobre la historia personal del escolar que pudiera haber influido en su dibujo y en sus respuestas. Para ello, disponían de una ficha personal, aunque anónima, que incluía las preguntas, el nombre del centro, edad y sexo del niño. En su cara posterior se realizó el dibujo del virus.

Análisis de datos

A partir de las definiciones de *virus*, se realizó un análisis de las palabras con significado léxico. Además, para el conjunto de respuestas de cada pregunta se identificaron una serie de categorías que, siguiendo un enfoque inductivo, surgieron al examinar y reexaminar las respuestas de los participantes buscando patrones y aspectos recurrentes (Friese, 2019). Con respecto al dibujo, se realizó un análisis descriptivo, aunque también se categorizó la forma según el mismo planteamiento inductivo, metodología ya empleada en investigaciones previas similares (Bonoti et al., 2022; Ballesteros et al., 2018; Byrne, 2011). Las diferentes categorías surgidas al analizar tanto las respuestas abiertas como los dibujos se detallan en los resultados.

Tras el análisis descriptivo, se realizaron análisis inferenciales contrastando los grupos y sus diferentes respuestas mediante tablas de cruce y la aplicación del test chi cuadrado (χ^2). Se consideró la existencia de diferencias estadísticas entre los grupos y sus respuestas para un p-valor inferior a 0,05. En tales casos, se usó el estadístico V de Cramer para medir el tamaño de efecto (nulo: < 0,1; bajo: 0,1-0,3; medio: 0,3-0,5; alto: > 0,5 (Betancourt y Caviedes, 2018)).

RESULTADOS

Los datos se interpretaron para responder a las preguntas de investigación inicialmente propuestas: «¿Qué idea tienen los escolares de 3-5 años sobre los virus, durante la pandemia?», «¿Dónde los ubican y qué creen que hacen?» y «¿Cuál es, principalmente, su fuente de información?». El análisis de las dos fuentes de datos –entrevistas y dibujos– permitió definir las categorías recogidas en la tabla 2.

Tabla 2.
Categorías definidas para el análisis de las preguntas y el dibujo

Preguntas	
Pregunta	Categorías
¿Qué es un virus?	Bicho, indefinido, microorganismo, animal, forma, otros.
¿Dónde has oído hablar de virus?	*Medios de comunicación*, *entorno familiar*, *centro educativo*, *otros*.
¿Dónde está o puede estar el virus que has dibujado?	*Exterior*, *interior*, *cuerpo humano*, *todas partes*, *suelo*, *otros*.
¿Cómo se llama ese virus?	*Coronavirus*, *nombre propio*, *virus/bacteria*, *otros*.
¿Qué está haciendo ese virus?	Función negativa hacia el ser humano, otros.
Dibujo	
Aspecto	*Coronavirus*, *bacteria*, *otros*.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para cada pregunta de investigación.

¿Qué idea tienen los escolares de 3 a 5 años sobre los virus durante la pandemia?

Los datos provienen de los dibujos y de las respuestas a las preguntas primera y tercera: «¿Qué es un virus?» y «¿Cómo se llama el virus que has dibujado?».

¿Qué es un virus?

La mayoría de los participantes fue capaz de decir qué es un virus (226). Únicamente 15 alumnos no dieron respuesta alguna. Es preciso tener en cuenta, además, que 7 de las definiciones repitieron el concepto definido, por ejemplo: «un virus», «el virus» o «un virus malo, muy malo». Curiosamente, del grupo que no lo definió, solo un niño pertenecía al primer curso de infantil (3 años), mientras que los 9 y 5 restantes eran de las clases de 4 y 5 años, respectivamente. El análisis de las definiciones, por tanto, se hizo sobre el total de los alumnos que contestaron a esta pregunta (n = 226): 73 del grupo de 3 años, 94 del de 4 años y 59 de 5 años.

Tras el análisis de las palabras con significado léxico incluidas en las definiciones de virus, la más repetida es «bicho» (o sus variaciones de número y diminutivo), que aparece en 88 ocasiones. Es más, muchas definiciones se apoyan exclusivamente en el uso de este término, señalando que un virus es «un bicho». Se aprecia una mayor tendencia a incluir esta palabra en el grupo de los alumnos más pequeños (58,9 %), al contrastar con los otros dos grupos (29,78 y 28,81 % en 4 y 5 años, respectivamente). El estadístico extraído de la aplicación de una tabla cruzada entre los tres grupos indica que hay diferencias significativas ($\chi^2 = 24{,}54$; $p < {,}001$; $V = 0{,}323$). La comprobación pareada muestra diferencias entre los grupos de 3 años frente a los de 4: $\chi^2 = 18{,}92$; $p < {,}001$; $V = 0{,}334$ y 3 frente a 5 años: $\chi^2 = 16{,}96$; $p < {,}001$; $V = 0{,}355$, pero no entre los de 4 frente a 5 años: $\chi^2 = 0{,}68$; $p = {,}975$, por lo que se confirma la diferencia de respuesta entre los menores y sus compañeros de 4 y 5 años.

La tabla 3 detalla el resto de las palabras más frecuentes y su porcentaje dentro de cada grupo de edad. Destaca, especialmente, el uso del adjetivo «malo», de forma similar en las tres edades, y de los términos «algo», empleado como sustantivo, y «cosa», al tratar de describir qué es el virus, mayoritariamente en los grupos de 4 y 5 años.

Tabla 3.
Número de palabras más repetidas en las definiciones por grupo de edad

Palabra	*Nº de definiciones*	*% dentro del grupo de edad (n)*		
		3 años	4 años	5 años
Bicho	88	58,9 (43)	29,78 (28)	28,81 (17)
Malo	46	20,55 (15)	22,34 (21)	18,64 (11)
Algo	32	0	24,47 (23)	15,25 (9)
Cosa	19	1,37 (1)	10,64 (10)	13,56 (8)
Coronavirus	17	2,74 (2)	8,51 (8)	11,86 (7)
Virus	17	9,59 (7)	7,45 (7)	5,08 (3)
Contagiar	15	2,74 (2)	3,19 (3)	16,95 (10)

n: número de respuestas.

Con respecto al modelo de definición empleado, las 226 respuestas se categorizaron excluyendo las 7 definiciones que describían al virus como «virus». En los tres grupos de edad los porcentajes son muy similares, como se muestra en la tabla 4, en la que se describen las categorías extraídas tras el análisis de las definiciones (*Bicho, Indefinido* –para las que lo definen como «algo», «una cosa»–, *Microorganismo* –cuando hablan de bacteria, coronavirus, o germen–, *Animal*, *Forma* –definición descriptiva que hace referencia a la forma, por ejemplo «un círculo malo»– y *Otros* –que incluye términos variados como «enfermedad», «persona», «volcán» y «contagio», o respuestas como verbos y adjetivos, por ejemplo, «ir al médico» o «verde»–).

Tabla 4.
Definiciones de virus por categorías y ejemplos, por grupos de edad (219 respuestas categorizadas)

Categoría (n)						
Aula	Bicho (85)	Indefinido (55)	Microorg. (23)	Animal (9)	Forma (9)	Otros (38)
3 años	49,41 %	1,81 %	43,48 %	55,56 %	11,11 %	28,95 %
	«Un bicho» «Un bicho malo» «Un bichito y nos pica»	«Una cosa que pica a los nenes malos y se los come»	«Son gérmenes» «Es una bacteria»	«Es un animal malo» «Un animal	«Un círculo que pone a las personas malitas»	«Es el jefe de los virus porque tiene corona»
4 años	30,59 %	61,82 %	21,74 %	44,44 %	66,67 %	39,47 %
	«Un bichito verde» «Un bicho superpequeño»	«Una cosa invisible» «Algo pequeño»	«El coronavirus (todos dicen esto)»	«Animalito» «Es un animal muy malo»	«Un círculo malo» «Un círculo, muchos palitos y circulitos»	«Una enfermedad» «Un volcán»
5 años	20 %	36,36 %	34,78 %	0	22,22 %	31,58 %
	«Un bicho» «Es un bicho malo que puede matar a la gente»	«Algo que infecta a la gente» «Una cosa que mata»	«Una bacteria» «Un coronavirus que infecta a las personas»	-	«Una bola» «Una bola de bacterias»	«Una pandemia» «Un contagio que está en la calle»

n: número de definiciones.

De las 226 definiciones recogidas, 89 atribuyen al virus una acción, función o propósito. La mayoría incluye una acción con consecuencias en los seres humanos (68 de 89), normalmente mediante verbos como infectar, contagiar, ponernos malos, picar e incluso matar. Por ejemplo, «es un bicho y nos puede picar» (grupo de 3 años), «es invisible y pone a las personas malitas» (grupo de 4 años), o «el virus es una cosa que hace contagiarse a las personas» (grupo de 5 años). El resto describe acciones principalmente de movimiento («una cosa que se mete en la boca» –alumna de 5 años–; «unos bichitos muy pequeños que se ven con microscopio y vuelan» –alumno de 4 años–; «una mosca y vuela y es grande» –alumno de 3 años–).

Finalmente, es importante destacar que 32 definiciones incluyen alguna referencia al tamaño del virus o directamente indican que es invisible, y la mayoría pertenece al grupo de alumnos de 4 años (7 en 3 años, 23 en 4 años y 2 en 5 años). Algunos ejemplos de estas definiciones son: «es un bicho pequeño» (alumna de 3 años), «una cosa invisible» (alumna de 4 años) o «una cosita muy pequeña que es verde y que infecta a la gente» (alumno de 5 años).

Dibujos de virus

A pesar de las diferencias en las habilidades de motricidad fina de los participantes y, por tanto, en su capacidad para realizar dibujos, el análisis de las representaciones elaboradas permite clasificarlas en tres categorías dentro de todos los grupos de edad: *Coronavirus*, aquellas que presentan rasgos característicos de estos, como son su forma esférica y la presencia de espículas, simbolizadas con líneas, círculos u otros elementos; *Bacteriana*, las que están realizadas mediante formas curvas cerradas; y *Otros*, que recoge aquellos garabatos que no se pueden interpretar y otras representaciones diferentes a la solicitada, como de animales o personas. La mayoría de los participantes han realizado dibujos dentro de la categoría *Coronavirus* (170 de 241). La siguiente categoría es la forma *Bacteriana*, en la que se incluyen 37 dibujos. Finalmente, 34 dibujos se categorizan como *Otros*. Los porcentajes se describen en la tabla 5. En las figuras 1-3 se incluyen ejemplos de dibujos dentro de cada categoría por grupo de edad.

Tabla 5.
Categorías de los dibujos de un virus,
porcentaje total por tramo de edad y porcentaje en el grupo de edad

Categoría (n)						
	Coronavirus (170)		Bacteria (37)		Otros (34)	
Aula	% total	% grupo de edad	% total	% grupo de edad	% total	% grupo de edad
3 años	16,47	37,84	72,97	36,49	55,88	25,68
4 años	47,65	78,64	21,62	7,77	41,18	13,59
5 años	35,88	95,31	5,41	3,13	2,94	1,56

n: número de dibujos.

En todos los grupos de edad la mayoría de los dibujos se agrupan dentro de la categoría *Coronavirus*, y destaca especialmente que, en el nivel de 5 años, todos los dibujos excepto tres se incluyen en ella.

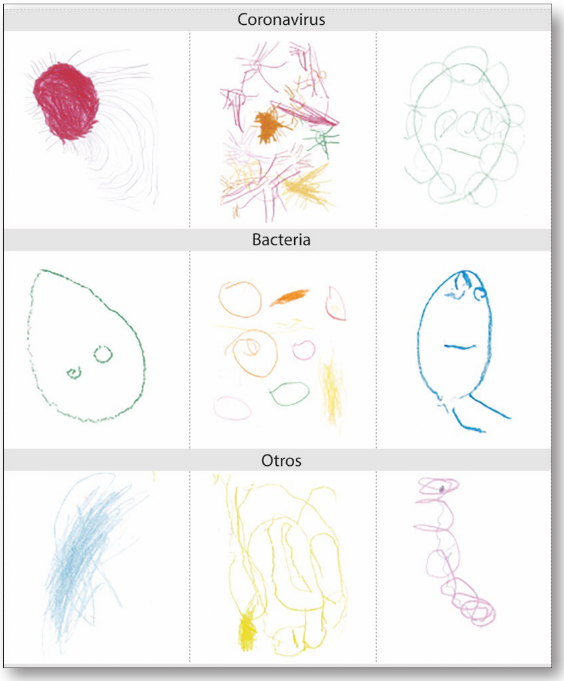


Fig. 1. Ejemplo de dibujos por categorías, grupo de 3 años.

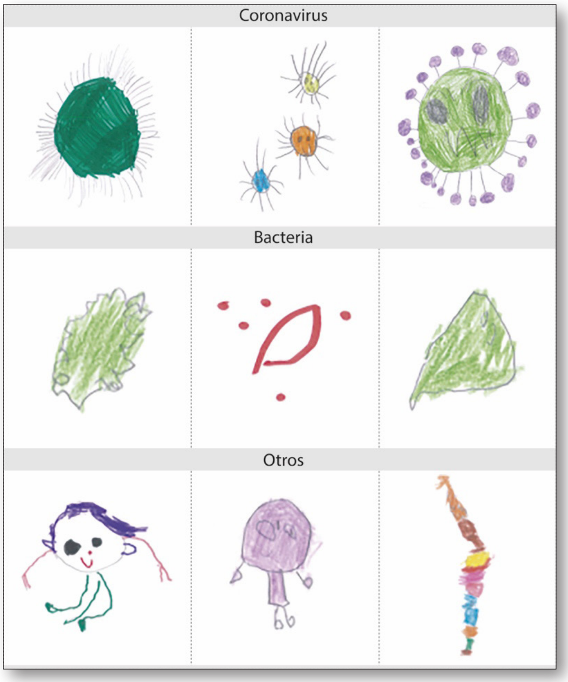


Fig. 2. Ejemplo de dibujos por categorías, grupo de 4 años.

Más de un tercio del alumnado (90 de 241) ha dibujado el virus con características antropomórficas (17 alumnos de 3 años, 46 de 4 y 27 de 5). La mayoría (82,22 %) incluye únicamente rasgos faciales, principalmente ojos y boca; los restantes presentan extremidades. Es destacable que, en 16 de los dibujos con rasgos faciales, la boca tiene gesto amenazante; todos estos dibujos, excepto uno, pertenecen a la categoría *Coronavirus*.

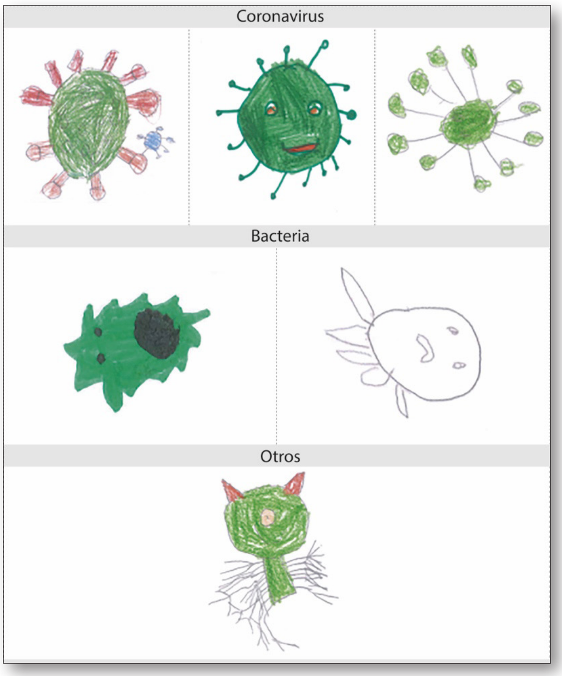


Fig. 3. Ejemplo de dibujos por categorías, grupo de 5 años.

Los resultados del análisis del empleo del color en los dibujos se recogen en la tabla 6. Destaca que solo 23 alumnos dejaran su dibujo sin colorear. Los 218 restantes lo colorearon de manera espontánea, ya que no había ninguna instrucción al respecto. El color verde fue el empleado mayoritariamente, en particular por los grupos de 4 y 5 años. El grupo de 3 años utilizó principalmente múltiples colores. Solo 1 niño utilizó el gris y 4 el negro para colorear su dibujo, ninguno de ellos de las clases de 3 años.

Tabla 6.
Colores empleados en los dibujos en el total y por grupos de edad

Grupo de edad (% dentro del grupo)				
Color	Total (*n* = 241)	3 años (*n* = 74)	4 años (*n* = 103)	5 años (*n* = 64)
Ninguno	23 (9,54)	4 (5,41)	11 (10,68)	8 (12,50)
Verde	81 (33,61)	12 (16,22)	25 (24,27)	44 (68,75)
Multicolor	44 (18,26)	20 (27,03)	22 (21,36)	2 (3,13)
Azul	25 (10,37)	11 (14,86)	12 (11,65)	2 (3,13)
Rojo	18 (7,47)	8 (10,81)	8 (7,77)	2 (3,13)
Morado	14 (5,81)	4 (5,41)	10 (9,71)	-
Naranja	10 (4,15)	6 (8,11)	3 (2,91)	1 (1,56)
Rosa	10 (4,15)	5 (6,76)	4 (3,88)	1 (1,56)
Marrón	6 (2,49)	1 (1,35)	3 (2,91)	2 (3,13)
Amarillo	5 (2,07)	3 (4,05)	2 (1,94)	-
Negro	4 (1,66)	-	2 (1,94)	2 (3,13)
Gris	1 (0,41)	-	1 (0,97)	-

n: número de dibujos.

Denominación que recibe el virus de su dibujo

Un total de 14 alumnos no asigna nombre a su dibujo, y manifiesta, por ejemplo, que «no tiene nombre», o «no lo sé». La mayoría de las respuestas obtenidas (137 de 227) indica que el nombre del virus es «coronavirus», o «COVID» (categoría *Coronavirus*). El resto lo llama *Virus* o *Bacteria*, aunque también hay 25 alumnos que le asignan un *Nombre propio*, mayoritariamente el suyo, como «Diego» o «Alejandro». En la categoría *Otros* se incluyen nombres muy variados como «bichito», «infectante», «ratón» o incluso «cagarruta». Los porcentajes por tramo de edad se incluyen en la tabla 7. Los alumnos de los grupos de 3 y 4 años son los que más asignan un nombre propio. No obstante, a pesar de la aparente discrepancia, no hay diferencias estadísticas entre los grupos de edad en esta variable ($\chi^2 = 5{,}432$; $p = {,}49$).

Tabla 7.
Categorización de las respuestas a la pregunta «¿Cómo se llama el virus que has dibujado?», porcentaje por grupos de edad sobre 227 respuestas

Categoría (n)				
Aula	Coronavirus (137)	Nombre propio (25)	Virus/Bacteria (29)	Otros (35)
3 años	34,31	32	31,03	27,78
4 años	34,31	44	51,72	50,00
5 años	31,39	24	17,24	22,22

n: número de respuestas.

¿Dónde ubican los virus y qué creen que hacen?

Este apartado recoge los datos resultantes del análisis de las preguntas cuarta y quinta de la entrevista: «¿Dónde está el virus que has dibujado?» y «¿Qué está haciendo?».

Solo 7 participantes no saben explicar dónde se encuentra el virus que han dibujado y, curiosamente, ninguno es del grupo de los más pequeños. Casi todos los que sí lo hacen indican un único lugar (206 de 241), mientras que el resto añade más opciones. Se tiene en cuenta la primera respuesta de ubicación para el análisis general de las respuestas.

La categoría *Exterior* incluye los casos que mencionan el nombre de una ciudad, «la calle» o «el parque»; *Interior* indica que el virus dibujado está «en casa» o «en la clase», por ejemplo; *Cuerpo humano* se refiere a este o a cualquiera de sus partes: como «en la boca», «en la piel», «en las personas»; algunos alumnos afirman que está en *Todas partes*; la categoría *Suelo* se establece por su frecuencia, no permite distinguir si se vincula con el interior o el exterior; finalmente, *Otros* incluye respuestas variadas como «en los murciélagos» o «en la televisión». Los detalles por grupo de edad se describen en la tabla 8. Lo más llamativo es que son los alumnos más pequeños quienes sitúan principalmente al virus en el interior, algo que solo mencionan 2 alumnos del grupo de 5 años. La categoría *Cuerpo humano* es especialmente mencionada en el grupo de 4 años.

Tabla 8.
Categorización de las respuestas a la pregunta «¿Dónde está el virus que has dibujado?», porcentaje por grupos de edad sobre un total de 241 respuestas

	Categoría (n)					
Aula	Exterior (138)	Interior (36)	Cuerpo humano (25)	Todas partes (14)	Suelo (7)	Otros (14)
3 años	30.43	63,89	12	21,43	28,57	7,14
4 años	45,65	30,56	52	50,00	14,29	42,86
5 años	23,92	5,56	36	28,57	57,14	50,00

n: número de respuestas.

Únicamente 4 alumnos (3 del grupo de 4 años y 1 del de 5) manifiestan no saber qué está haciendo el virus que han dibujado. Aunque las respuestas son muy variadas, se generó una categoría para las respuestas que asignaban al virus una *Función negativa hacia el ser humano*, empleando expresiones como «ponernos malos», «atacar a la gente», «se come a las personas» o incluso «matar a la gente» (145 de las respuestas: 42 de 3 años, 61 de 4 años y 42 de 5 años). El resto de las respuestas quedan incluidas en la categoría *Otros*: no se focalizan en lo solicitado («el virus es malo, hay que lavarse las manos» –alumna de 3 años–) o refieren acciones excesivamente heterogéneas («jugando», «viajar», «comiendo», «luchando», «está saltando», «subiéndose a los árboles»).

¿Cuál es su fuente de información principal?

Se obtuvieron 224 respuestas a la pregunta «¿Dónde has oído hablar de virus?», ya que 17 alumnos (solo 1 del grupo de 3 años) manifestaron no haber oído hablar de virus ni saber dónde, y no respondieron o hicieron un comentario no relacionado con la pregunta planteada. La generalidad del alumnado (182) indicó únicamente una fuente de información, 20 nombraron 2, 11 refirieron 3, 8 (todos ellos de 3 años) mencionaron 4, y 3 alumnos citaron 5. El análisis de los datos se centró en la primera fuente expresada.

La categoría con mayor número de respuestas es *Medios de comunicación* (91 de 224). El 59,34 % de respuestas se refirieron, específicamente, a la televisión. El 28,57 % indicó que lo había oído «en las noticias»; 6 alumnos mencionaron que fue a través de un vídeo; la radio y el móvil los refirieron 2 y 3 alumnos, respectivamente.

El *Entorno familiar* es la segunda categoría con más respuestas (75 de 224). Un tercio de los participantes señala su casa como fuente de información, sin concretar más. La «mamá» es la siguiente fuente más nombrada dentro de esta categoría, con un 26,66 % de las respuestas (aunque es llamativo que solo aparece en los grupos de 3 y 4 años), frente al 8 % que representa el «papá»; un 20 % manifestó haberlo escuchado de ambos progenitores. Finalmente, 9 alumnos mencionan otros miembros de la familia, mayoritariamente los abuelos.

El *Centro educativo* lo señalan 24 alumnos como origen de su información, y la gran mayoría (79,16 %) empleó los términos «cole» o «clase». El resto nombró directamente a la profesora. Dos participantes del grupo de 4 años dieron otras respuestas, como «en mi recreo» o «vino la mamá de David a contarnos cosas de los virus». Ningún alumno del grupo de 5 años nombró el centro educativo en primer lugar.

Por último, la categoría *Otros* incluye 34 de las 224 respuestas. Se mencionaron «la calle» (9 alumnos), y otros lugares específicos como «la piscina», «el parque» o personas («de la gente del pueblo»).

La tabla 9 detalla los resultados distribuidos por grupos de edad e incluye algunos ejemplos adicionales en cada tramo. Para el alumnado de menor edad, las principales fuentes de información sobre virus fueron el *Entorno familiar* y el *Centro educativo*, mientras que en los grupos de 4 y 5 años destacan los *Medios de comunicación.* En el caso de 4 años, la segunda es *Centro educativo*; sin embargo, como ya se mencionó, ningún niño de 5 años lo refirió como primera fuente.

La prueba Chi cuadrado muestra que, efectivamente, estas diferencias son estadísticamente significativas ($\chi^2 = 57{,}96$; $p < {,}001$; $V = 0{,}509$). Al realizarse el análisis entre grupos, en todos los casos se mantienen estas diferencias: 3 frente a 4 años ($\chi^2 = 32{,}736$; $p < {,}001$; $V = 0{,}443$), 3 y 5 años ($\chi^2 = 49{,}844$; $p < {,}001$; $V = 0{,}619$) y 4 y 5 años ($\chi^2 = 8{,}856$; $p < {,}05$; $V = 0{,}242$). Es muy llamativo cómo el tamaño de efecto es mayor cuanto mayor es la diferencia de edad.

Tabla 9.
Respuestas a la pregunta «¿Dónde has oído hablar de virus?», porcentaje por grupos de edad sobre un total de 224 respuestas

	Categoría (n)			
Aula	Medios de comunicación (91)	Entorno familiar (75)	Centro educativo (24)	Otros (34)
3 años	10,99	57,33	58,33	17,64
	«En las noticias» «En la tele en mi casa»	«En mamá y papá» «Lo ha dicho mamá»	«En el colegio, en la clase» «En el cole»	«En la calle» «En el parque»
4 años	48,35	29,33	41,67	52,94
	«En la tele y es morado» «Lo dijeron en las noticias»	«En casa» «Me lo dijo mamá, hay que usar mascarilla»	«En el cole» «A la profe»	«En mi pueblo» «En una estación de trenes»
5 años	40,66	13,33	0	29,41
	«En las noticias del coronavirus» «En el telediario»	«En mi casa, porque me lo dicen siempre» «Me lo dijo papá»		«En un bar» «A la gente de mi pueblo»

n: número de respuestas.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El resultado más destacable de esta investigación es el alto porcentaje de niños que reconoce la palabra *virus*, es capaz de dar una definición y, al pedirle su nombre, lo llama «coronavirus» (o COVID). Esto es algo especialmente relevante si consideramos los resultados obtenidos por estudios previos a esta pandemia. Así, López-Luengo et al. (2021) encontraron que la mitad de los niños de entre 4 y 5 años reconocía el término *virus*, aunque pocos daban una definición; lo que sí hicieron el 90 % de los participantes en nuestro estudio. También se identificaron dificultades entre los escolares de niveles educativos superiores en el empleo del término *virus*: en el trabajo de Jones y Rua (2006), ninguno de los alumnos de primaria lo utilizó al definir «germen»; en el de Byrne (2011), solo el alumnado de 11 y 14 años lo empleó al referirse a los microorganismos.

Nuestro estudio muestra que el término «bicho» se utiliza con mayor frecuencia para definir virus en todas las edades. No obstante, son los menores (aula de 3 años) quienes lo emplean en mayor medida, con un tamaño de efecto moderado. Silvana (2022) encuentra un uso metafórico de este término en adultos, para evitar nombrar al coronavirus y el miedo que produce. El mismo comportamiento ha aparecido en enfermedades como el sida, en el que la población adulta (en este caso, gitana) lo refería como el «bicho» (Otegui, 2006). Según el *Diccionario de la lengua española*, *bicho* tiene como primera acepción: «Animal pequeño, especialmente un insecto». Las siguientes acepciones carecen de connotaciones negativas, salvo cuando aplica a una persona. Sin embargo, Silvana (2022) indica que es un hiperónimo que, entre otros, se aplica a cualquier alimaña. Sería necesario un abordaje específico para sostener que los participantes de nuestro estudio asignan un valor negativo al término «bicho».

Nuestros resultados coinciden con lo hallado por Bonoti et al. (2022) durante el confinamiento: la mayor parte de los niños de su estudio describieron el coronavirus de modo realista refiriéndolo como un germen o identificándolo con enfermedad. Todo ello parece apoyar la idea de Domínguez et al. (2018): cuando los niños pequeños tienen acceso al conocimiento científico, son capaces de asignar significado a la terminología científica. Nuestros resultados procedentes de los dibujos también refuerzan esta afirmación, ya que son más realistas y similares a los arquetipos mostrados por los medios de comunicación, principal fuente de información mencionada por los niños. Se observa, pues, que la pandemia ha podido suponer un enorme avance en el conocimiento infantil sobre los virus.

Aun siendo representaciones más realistas, aparecen rasgos antropomórficos, principalmente boca y ojos, al igual que en el trabajo de Martinerie et al. (2021). No obstante, su frecuencia es muy inferior a lo hallado en investigaciones sobre microrganismos previos a la pandemia (Byrne, 2011; Byrne et al., 2009; Prokop et al., 2016; Ballesteros et al., 2018; Ruiz-Gallardo y Paños, 2018; López-Luengo et al., 2021), probablemente debido a la gran exposición a las imágenes del coronavirus en los medios de comunicación.

Byrne (2011) encontró que los niños de 11 y 14 años no distinguían virus de bacterias. Trabajos recientes (Bonoti et al., 2022; Martinerie et al., 2021) hallan lo mismo cuando estudian las representaciones infantiles del coronavirus. Nuestros resultados del análisis de los dibujos y de las definiciones son coherentes, ya que la categoría *Microorganismos* es la segunda más frecuente en la categorización de los dibujos y las definiciones de virus en varios casos se apoyan en la palabra *bacteria*. La aparición de la misma confusión hallada por Byrne (2011), como resultado de nuestro trabajo, realizado en edades mucho más tempranas, supone un avance en el conocimiento científico infantil y debe tenerse en cuenta en las intervenciones didácticas, para ayudar a superar este error conceptual desde los niveles educativos iniciales.

En general, se observa cierta imprecisión en las definiciones infantiles de virus, donde se emplean palabras como «cosa» o «algo», o se refieren las formas con las que han visto representado al coronavirus («bola», «círculo»). No obstante, esta indefinición aparece también entre adolescentes y adultos (Simon et al., 2017). Ello induce a pensar en una falta de conocimiento en todas las edades y en la necesidad de realizar un esfuerzo por aclarar qué son los virus.

Se ha sugerido que los dibujos de los niños representan no solo su comprensión conceptual, sino también sus intereses (Deguara y Nutbrown, 2018) y sentimientos respecto de aquello que representan (Vasey et al., 2012; Bonoti et al., 2019). En este sentido, llama la atención la concordancia entre los dibujos obtenidos en nuestro estudio, que a menudo reflejan bocas de enfado o amenaza, y el alto número de definiciones que emplean la palabra «malo» y verbos de acción negativa: «infectar», «contagiar», «poner malos», «picar» e incluso «matar», para expresar qué es lo que hace el virus de su dibujo. Otras investigaciones realizadas durante la pandemia hallan referencias similares (Kahuroa et al., 2021; Martinerie et al., 2021; Bonoti et al., 2022). Esta visión negativa ya se veía en trabajos previos (Byrne, 2011; Byrne et al., 2009; Ballesteros et al., 2018; López-Luengo et al., 2021; Molina et al., 2021). No obstante, en estos estudios aparecen también comentarios positivos, ausentes en el nuestro, quizá debido a que abordaban los microorganismos en general y, además, se realizaron antes de la pandemia. En nuestro caso, ha de considerarse el efecto de esta pandemia y el continuo sesgo hacia las noticias negativas sobre los virus que los participantes han podido escuchar.

Finalmente, destaca el elevado número de definiciones que se refieren a que los virus son tan pequeños que no se ven o, directamente, utilizan la palabra *invisible*. Encontramos referencias similares en los trabajos de Kahuroa et al. (2021), Martinerie et al. (2021) y Bonoti et al. (2022).

Según nuestro trabajo, el alumnado infantil señala que los virus se encuentran principalmente en el exterior, contrastando con resultados prepandémicos, si bien los estudios previos no son totalmente comparables: se realizaron sobre microorganismos en general y distinto rango de edad. Jones y Rua (2006) encontraron que, independientemente de la edad de los participantes, los gérmenes están en cualquier parte, mientras que los resultados de Prokop et al. (2016), Ballesteros et al. (2018), Faccio et al. (2013) y López-Luengo et al. (2021) sitúan a los microorganismos principalmente en el cuerpo humano.

Esta diferencia de nuestros resultados con los de trabajos previos nos conduce a considerar la hipótesis de que las medidas tomadas para controlar la pandemia, fundamentalmente el confinamiento, han influido en esta visión. Los dibujos infantiles, en los que se representan las burbujas sociales como una muralla frente al virus que está fuera, apoyarían esta concepción (Kahuroa et al., 2021). No obstante, también concuerdan con la propuesta de Banks (1990, citado en Malchiodi, 1998): la concepción de la enfermedad oscila entre ser algo externo (monstruos) en los niños menores, como los de nuestro estudio, a ser algo interno (patógenos celulares que actúan en el interior del cuerpo) en los mayores. Por tanto, son necesarias más investigaciones para confirmarlo.

Respecto a la fuente de aprendizaje, este estudio muestra que, a pesar de la corta edad del alumnado participante, los medios de comunicación son el origen principal. La influencia de estos medios, en concreto de la televisión, surge tanto si se responde a dónde has oído hablar del virus como a dónde está el virus que has dibujado. La familia es la segunda fuente más nombrada. Es notable cómo la frecuencia es inversa a la edad del niño, concentrándose particularmente en los menores. Esto tiene especial sentido, dado que los de 3 años están comenzando su escolarización y los de 4 pasaron buena parte del curso anterior en sus hogares. Sorprende la escasez de referencias al colegio (poco más del 10 %), que es nula en 5 años.

En relación con el aprendizaje en la escuela, el currículo oficial de Educación Infantil no especifica que se deba trabajar sobre los microorganismos en las aulas de esta etapa (Real Decreto 114/2004; Real Decreto 95/2022). En este sentido, Bandiera (2007) encuentra en adolescentes que, en ausencia de contenidos de microbiología en el currículo escolar, la televisión es la fuente fundamental de conocimiento. Sus resultados parecen haberse reproducido en los niños menores en este tiempo de pandemia.

El currículo oficial español sí menciona el tratamiento de las características de los seres vivos y los hábitos de higiene, íntimamente relacionados con los microorganismos y, en buena medida, con los acontecimientos sucedidos. Así pues, la terrible situación sanitaria ofrecía una excelente oportunidad para desarrollar tanto conocimientos como hábitos en el colegio. No podemos conocer hasta qué punto se aprovechó esta situación en las aulas de educación infantil para desarrollar tales aprendizajes, dado que constituía un centro de interés favorecedor. No obstante, los resultados de este estudio apuntan a que fue poco aprovechado. Quizá la gravedad de la situación y el desconcierto inicial, pero también el hecho de pasar más tiempo toda la familia en casa, debido al confinamiento forzoso, hicieron a los niños más permeables a la preocupación de los padres y a la abundante información ofrecida en los noticieros.

Tanto la categorización de los dibujos como de las definiciones de lo que es un virus apoyan la idea de los medios de comunicación como fuente de aprendizaje, ya que casi tres cuartas partes de los participantes han representado algo reconocible como un coronavirus, con forma similar a las imágenes ofrecidas por los noticieros. Asimismo, la categoría *Forma* en la definición del término *virus* recoge las respuestas de 9 participantes que se refieren a la forma esférica, y la categoría *Microrganismo* recoge respuestas directas del término *coronavirus*. Los trabajos recientes no preguntan por la fuente de información, pero Bonoti et al. (2022) y Martinerie et al. (2021) encuentran que la mayoría de los niños representan el virus de un modo muy similar al expuesto por los medios de comunicación desde el inicio de la pandemia. Todo ello contrasta con trabajos prepandémicos, donde las categorías más frecuentes en la representación de los microorganismos eran las abstractas, geométricas, antropomórficas y de animales (Byrne et al., 2009; Byrne, 2011; Prokop et al., 2016; Ballesteros et al., 2018; López-Luengo et al., 2021; Molina et al., 2021).

Así, puede inferirse que los participantes estaban muy expuestos a esta información y que han aprendido claramente de estos medios. En apoyo a la influencia de la información recibida, López-Luengo et al. (2021) ya observaron cómo, tras una intervención didáctica donde el bacteriófago fue mostrado como prototipo de virus, esta fue la representación más frecuente en los dibujos de los participantes, incluso en una prueba realizada a largo plazo.

A pesar de que los niños no tenían instrucciones de colorear su dibujo, prácticamente todos lo hicieron, lo que contrasta con trabajos previos, en los cuales la frecuencia de dibujos coloreados fue muy inferior (Prokop et al., 2016; Ballesteros et al., 2018). Bedard (1999) sostiene que colorear los dibujos indica motivación hacia el tema, por lo que podríamos pensar que el interés infantil por los microorganismos ha crecido notoriamente. No obstante, este efecto también puede deberse a la influencia de los medios de comunicación, que apoyan sus explicaciones con imágenes de virus coloreados. Con todo, es destacable que la frecuencia de dibujos coloreados de nuestro estudio también es superior a la hallada en trabajos realizados durante la primera ola (Martinerie et al., 2021). Tal vez el paso del tiempo ha incrementado la exposición de los niños a las imágenes mediáticas y, por tanto, su percepción del color.

Kress y van Leeuwen (2003) consideran que la literatura sobre el significado emocional del color es inconsistente, aunque sí destacan su empleo como elemento en la emisión de mensajes. Armitage y Allen (2015) muestran que los niños, al igual que los adultos, no son estrictamente realistas en sus dibujos: cuando carecen de modelos de semejanza se remiten a las señales intencionales. Así, los colores seleccionados por los niños podrían ser construcciones socioculturales resultado de la retórica visual empleada por los creadores de imágenes (Smith y Joffe, 2013). Por ejemplo, los publicistas caracterizan como monstruos verdes a los peligrosos gérmenes que habitan el WC. Joubert y Wasserman (2020), al analizar las ilustraciones de la prensa de Sudáfrica entre enero y junio de 2020, encontraron que el rojo y el verde eran los colores dominantes en la representación del SARS-CoV-2, además de la antropomorfización del virus con expresiones diabólicas, lo que sin duda influyó en la población.

Nuestro trabajo sitúa el verde como el color predilecto para representar los virus entre los escolares de las clases de 4 y 5 años, mientras que los de las clases de 3 años mayoritariamente realizaron una representación multicromática, al igual que hicieran los niños con poca experiencia personal respecto a infecciones (Prokop et al., 2016). Los colores oscuros asociados a la depresión y a la experiencia con la enfermedad (Prokop et al., 2016) apenas aparecen en nuestro trabajo. El verde también aparece como dominante en los trabajos realizados durante la pandemia (Maritiniere et al., 2021; Kahuroa et al., 2021), a pesar de que ni el verde ni ningún otro color, lógicamente, han sido reportados como característico del coronavirus, algo que sí ha sucedido con su morfología (Joubert y Wasserman, 2020). La aparición de este color en estudios realizados sobre SARS-CoV-2 en países tan distantes como España, Francia y Nueva Zelanda y su aparición también como uno de los colores predominantes en estudios prepandémicos sobre microorganismos (Ballesteros et al., 2018), así como el hecho de ser elegido por los creadores de animaciones en distintos países, nos inducen a pensar en un sentido y uso transcultural del color verde con esta motivación que requeriría más estudios. Jolley (2010) recoge de los trabajos de Burkitt coincidencias transculturales en otros temas en relación con el uso del color en la infancia.

De modo general, los resultados del estudio nos llevan a concluir, con relación a la primera pregunta de investigación («¿Qué idea tienen los escolares de 3-5 años sobre los virus, durante la pandemia?»), que la pandemia ha fomentado en los escolares de las aulas de 3-5 años el conocimiento sobre los virus, y ha dejado una idea más realista, aunque polarizada en cuanto al arquetipo y papel jugado por el coronavirus, y siempre negativa, como causante de enfermedad. En relación con la segunda cuestión («¿Dónde los ubican y qué creen que hacen?»), los participantes piensan, mayoritariamente, que los virus están en el exterior (en la calle, el parque, la ciudad), quizá debido a que ven los aislamientos y sus grupos burbuja como barreras frente al virus. Además, como se ha comentado, les atribuyen una función negativa como agentes malignos y siempre sesgada hacia los seres humanos. Finalmente, su fuente de información (tercera pregunta de investigación) son los medios de comunicación, en especial la televisión, mientras que llama la atención el exiguo peso del colegio.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer el trabajo generoso de recogida de datos realizado por las maestras de educación infantil (Raquel, Isabel, Espe, Mª José, Carmen, Rus, Verónica, María, Emi, Aída y Charo) y el del alumnado participante.

El estudio ha sido parcialmente realizado gracias a las ayudas del plan propio UCLM, de financiación de actividades de investigación, cofinanciadas por FEDER, concedida al grupo de investigación Botánica, Etnobiología y Educación (Ref: 2021-GRIN-30982).

REFERENCIAS

Armitage, E. y Allen, M. L. (2015). Children's Picture Interpretation: Appearance or Intention? *Developmental Psychology*, *51*(9), 1201-1215.
http://dx.doi.org/10.1037/a0039571

Ballesteros, M. I., Paños, E. y Ruiz-Gallardo, J. R. (2018). Los microorganismos en la educación primaria. Ideas de los alumnos de 8 a 11 años e influencia de los libros de texto. *Enseñanza de las ciencias, 36*(1), 79-98.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2274

Bandiera, M. (2007). Micro-organisms: Everyday knowledge predates and contrasts with school knowledge. En R. Pintó y D. Couso (Eds.), *Contributions from science education research* (pp. 213-224). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5032-9_16

Bedard, N. (2003). *Cómo interpretar los dibujos de los niños*. Sirio.

Betancourt, A. C. y Caviedes, I. L. (2018). Metodología de correlación estadística de un sistema integrado de gestión de la calidad en el sector salud. *Signos: Investigación en sistemas de gestión, 10*(2), 119-139.
https://doi.org/10.15332/s2145-1389.2018.0002.07

Bonoti, F., Christidou, V. y Papadopoulou, P. (2022). Children's conceptions of coronavirus. *Public Understanding of Science, 31*(1), 1-18.
https://doi.org/10.1177/09636625211049643

Bonoti, F., Christidou, V. y Spyrou, G. M. (2019). «A smile stands for health and a bed for illness»: Graphic cues in children's drawings. *Health Education Journal*, *78*(7), 728-742.
https://doi.org/10.1177/0017896919835581

Bryman, A. (2016). *Social research methods*. Oxford University Press.

Byrne, J. (2011). Models of micro-organisms: children's knowledge and understanding of micro-organisms from 7 to 14 years old. *International Journal of Science Education*, *33*(14), 1927-1961.
https://doi.org/10.1080/09500693.2010.536999

Byrne, J., Grace, M. y Hanley. P. (2009). Children's anthropomorphic and anthropocentric ideas about micro-organisms. *Journal of biological education*, *44*(1), pp. 37-43.
https://doi.org/10.1080/00219266.2009.9656190

Carey, S. (1985). *Conceptual change in childhood*. MIT Press

Cook, T. D. y Reichard, C. S. (1986). *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa*. Morata.

Deguara, J. y Nutbrown, C. (2018) Signs, symbols and schemas: understanding meaning in a child's drawings. *International Journal of Early Years Education, 26*(1), 4-23.
https://doi.org/10.1080/09669760.2017.1369398

Dominguez, C. R. C., Leporo, N., Tino De Franco, M., Inglez, G. C.; Gonçalves, V. M. y Bizerra, A. F. (2018). Learning about Microorganisms in Childhood: Four to Six-Year-Old Children's Voice in Kindergartens and Museums. *Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências*, *18*(1), 1-25.
https://doi.org/10.28976/1984-2686rbpec20181811

Driessnack, M. y Gallo, A. M. (2013). Children 'Draw-and-Tell' Their Knowledge of Genetics. *Pediatric Nursing, 39*(4), 173-180.

Duschl, R., Schweingruber, H. y Shouse, A. (2007). *Taking Science to School: Learning and Teaching Science in Grades K-8 Committee on Science Learning, Kindergarten through Eighth Grade*. National Academies Press.
https://doi.org/10.17226/11625

Faccio, E., Costa, N., Losasso, C., Cappa, V., Mantovani, C., Cibin, V., Andrighetto, I. y Ricci, A. (2013). What programs work to promote health for children? Exploring beliefs on microorganisms and on food safety control behavior in primary schools. *Food control*, *33*(2), pp. 320-329.
https://doi.org/10.1016/j.foodcont.2013.03.005

Friese, S. (2019). *Qualitative data analysis with ATLAS.ti*. SAGE Publications Limited.

Gay, L. R. (1996). *Educational Research: Competencies for Analysis and Application*. Merrill.

Inagaki, K. y Hatano, G. (2002). *Young children's naïve thinking about the biological world*. Psychology Press.
https://doi.org/10.4324/9780203759844

Jolley, R. P. (2010). *Children and Pictures: Drawing and Understanding*. Wiley-Blackwell.

Jones, M. G. y Rua, M. J. (2006). Conceptions of germs. Expert to novice understandings of microorganisms. *Electronic Journal of Science Education*, *10*(3). https://ejrsme.icrsme.com/article/view/7741

Joubert, M. y Wasserman, H. (2020). Spikey blobs with evil grins: Understanding portrayals of the coronavirus in South African newspaper cartoons in relation to the public communication of science. *Journal of Science Communication*, *19*(7), A08.
https://doi.org/10.22323/2.19070208

Kahuroa, R., Mitchell, L., Ng, O. y Johns, T. (2021). Children's working theories about Covid-19 in Aotearoa New Zealand. *European Early Childhood Education Research Journal*, *29*(1), 6-20.
https://doi.org/10.1080/1350293X.2021.1872672

Kalish, C. W. (1996). Preschoolers' Understanding of Germs as Invisible Mechanisms. *Cognitive Development*, *11*, 83-106.

Kress, G. y van Leeuwen, T. (2003). *Reading images. The grammar of visual design*. Routledge.

López-Luengo, M. A., González-Díaz, E., Paños, E. y Ruiz-Gallardo, J. R. (2021). Microorganismos y hábitos de higiene. ¿Se aprende más en la Educación Infantil mediante fichas? *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, *18*(2), 2302.
https://doi.org/10.25267/rev_eureka_ensen_divulg_cienc.2021.v18.i2.2302

Malchiodi, C. A. (1998). *Understanding children's drawings*. The Guilford Press.

Margett, T. E. y Witherington, D. C. (2011). The nature of Preschoolers' concept of living and artificial objects. *Child Development*, *82*(6), 2067-2082.
https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2011.01661.x

Martinerie, L., Bernoux, D., Giovannini-Chami, L. y Fabre, A. (2021). Children's Drawings of Coronavirus. *Pediatrics*, *148*(1).
https://doi.org/10.1542/peds.2020-047621

Molina J., Paños E. y Ruiz-Gallardo J. R. (2021) Microorganismos y hábitos de higiene. Estudio longitudinal en los cursos iniciales de Educación Primaria. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, *18*(2), 2201.
https://doi.org/10.25267/rev_eureka_ensen_divulg_cienc.2021.v18.i2.2201

Mutonyi, H. y Kendrick, M. E. (2011). Cartoon drawing as a means of accessing what students know about HIV/AIDS: An alternative method. *Visual Communication*, *10*(2), 231-249.
https://doi.org/10.1177/1470357211398447

Nagy, M. H. (1951). Children's ideas of the origin of illness. *Health Education Journal*, *9*, 6-12.

Otegui, R. (2006). Virus, bichos y drogas: Las formas sociales del VIH-SIDA en la comunidad gitana española. *Desacatos*, *20*, 53-76.

Prokop P., Fančovičová J. y Krajčovičová A. (2016). Alternative Conceptions about Microorganisms are Influenced by Experiences with Disease in Children, *Journal of Biological Education*, *50*(1), 61-72.
https://doi.org/10.1080/00219266.2014.1002521

Provenzi, L., Baroffio, E., Ligabue, S. y Borgatti, R. (2020). The little professor and the virus: Scaffolding children's meaning making during the COVID-19 emergency. *Frontiers in Psychiatry*, *11*, 817.
https://doi.org/10.3389/fpsyt.2020.00817

Real Decreto 114/2004, de 23 de enero, por el que se establece el currículo de la Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado, 32*, 6 de febrero, 5041-5050. Referencia: BOE-A-2004-2221.
https://www.boe.es/eli/es/rd/2004/01/23/114/con

Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado*, *28*, de 2 de febrero de 2022, Referencia: BOE-A-2022-1654.
https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/02/01/95/con

Ruiz-Gallardo, J. R. y Paños, E. (2018). Primary school students' conceptions about microorganisms. Influence of theoretical and practical methodologies on learning. *Research in Science & Technological Education*, *36*(2), 165-184.
https://doi.org/10.1080/02635143.2017.1386646

Salmon, A. K. y Lucas, T. (2011). Exploring Young Children's Conceptions about Thinking. *Journal of Research in Childhood Education*, 25(4), 364-375.
https://doi.org/10.1080/02568543.2011.605206

Scalas, D., Roana, J., Mandras, N., Cuccu, S., Banche, G., Marra, E., … y Cuffini, A. (2017). The Microbiological@mind project: a public engagement initiative of Turin University bringing microbiology and health education into primary schools. *International Journal of Antimicrobial Agents*, *50*, 588-592.
https://doi.org/10.1016/j.ijantimicag.2017.05.008

Silvana, M. (2022). De barbijos y burbujas. El «bicho» y sus metáforas. *Jornaler@s*, *5*, 224-234.

Simard, C. (2021). Microorganism education: misconceptions and obstacles. *Journal of Biological Education*.
https://doi.org/10.1080/00219266.2021.1909636

Simon, U. K., Enzinger, S. M. y Fink, A. (2017). «The evil virus cell»: Students' knowledge and beliefs about viruses. *PLoS ONE*, *12*(3), e0174402.
https://doi.org/10.1371/journal.pone.0174402

Smith, N. y Joffe, H. (2013). How the public engages with global warming: A social representations approach. *Public Understanding of Science*, *22*(1), 16-32.
https://doi.org/10.1177/0963662512440913

Timmis, K., Cavicchioli, R., García, J. L., Nogales, B., Chavarría, M., Stein, L., McGenity, T. J., Webster, N., Singh, B. K., Handelsman, J., de Lorenzo, V., Pruzzo, C., Timmis, J., Ramos Martín, J. L., Verstraete, W., Jetten, M., Danchin, A., Huang, W., Gilbert, J., … y Harper, L. (2019). The urgent need for microbiology literacy in society. *Environmental Microbiology*, *21*(5), 1513-1528.
https://doi.org/10.1111/1751-7915.13619

Vasey, M. W., Vilensky, M. R., Heath, J. H., Harbaugh, C. N., Buffington, A. G. y Fazio, R. H. (2012). It was as Big as My Head, I Swear! Biased Spider Size Estimation in Spider Phobia. *Journal of Anxiety Disorders*, *26*(1), 20-24.
https://doi.org/10.1016/j.janxdis.2011.08.009

Early Childhood Education Students Already Know What a Virus Is

María Antonia López-Luengo
Facultad de Educación de Segovia (UVa)
mariaantonia.lopez@uva.es

Esther Paños, José Reyes Ruiz-Gallardo
Facultad de Educación de Albacete (UCLM), Instituto Botánico. UCLM.
esther.panos@uclm.es, josereyes.ruiz@uclm.es

This study seeks to expand the scarce research focused on the understanding of microbiological concepts and phenomena in early childhood. It is especially necessary to complete and contrast the results of the few studies that have been published recently on the SARS-CoV-2 virus in different parts of the world, and identify what knowledge about viruses was generated informally during the pandemic among pre-school children. Three research questions drive this work: What ideas do 3 to 5 years old school children have about viruses during the pandemic? Where do they place virus and what do they think viruses do? What is their main source of information?

The methodological approach is qualitative. Participants are 241 early childhood education children (aged 3 to 5 years old) from sixteen public schools, 5 of them belonging to small rural communities in five Spanish provinces (Albacete, Ciudad Real, Segovia, Toledo and Valencia) and their teachers. The teachers collected data in their own classroom. Individual children's drawings as well as structured interviews were used. The interview open questions were: What is a virus? Where have you heard anything about viruses? Where is the virus that you have drawn? What is its name? and What is the virus doing? Following previous research, drawings and open questions have been analyzed and categorized. Dimensions of each category were assigned after an inductive expert analysis of the answers and drawings collected. After a descriptive analysis, an inferential analysis between age groups took place using the Chi-Square test.

Regarding the first research question findings, it is remarkable the high percentage of children who recognize the word *virus*, give a definition, and call it «coronavirus». There is some imprecision in children's definitions of viruses, using words such as «thing» or «something»; but these do not differ from what has previously been found at older ages. The most popular word to describe viruses is «bug». The high number of definitions that refer to viruses being so small that they cannot be seen or use the word «invisible» is remarkable, too. Drawings are more realistic than those found in studies prior to the COVID-19 pandemic and similar to the media archetypes. It is striking to note the concordance between the anthropomorphic drawings obtained in our study, which reflect angry or threatening expressions, and the high number of definitions that use negative action verbs, such as «infect», «get sick», «sting» and even «kill», to express what the virus in their drawing does. Similar references appear in other researches carried out during the pandemic.

As for the second question, participants mostly think that viruses are outdoors (in the street, the park, the city), perhaps because they see isolation and their bubble groups as barriers to the virus.

Finally, the mass media is the main source of learning for the participants, especially television. The influence of television arises both when answering where they heard about the virus and where the virus they have drawn is. Family is the second most named source. It is notable how the frequency is inverse to the age of the child. There are surprisingly few references to school, which is nil at age 5. Our results point out that the terrible sanitary situation was a missed opportunity to connect microbiology content knowledge and hygiene habits at school.

ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS 41-2 (2023), 25-45
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5585
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Construcción de un modelo sofisticado de energía en futuros docentes de física

Construction of a Sophisticated Model of Energy in Pre-service Secondary School Physics Teachers

Macarena Soto Alvarado
Pontificia Universidad Católica de Chile, Facultad de Educación, Santiago, Chile
macarena.soto@uc.cl

Digna Couso Lagarón
Universidad Autónoma de Barcelona, Facultad de Educación, Barcelona, España
digna.couso@uab.cat

RESUMEN • En esta investigación nos hemos centrado en analizar el nivel de sofisticación y tipo de modelo de energía que construyen futuros docentes de física (FD) chilenos a través de una secuencia de enseñanza y aprendizaje centrada en la modelización. Para ello, analizamos las producciones escritas de los FD en un momento inicial y final de la formación para identificar qué ideas sobre la energía experimentaban una mayor sofisticación en términos del modelo de energía objeto de enseñanza. Los resultados evidencian que los FD construyen un modelo de energía equilibrado en las ideas de naturaleza de la energía, transferencia y degradación, con un alto nivel de dominio. Sin embargo, se detectan dificultades en la comprensión de la idea de conservación de la energía. Estos resultados permiten reflexionar en torno a cómo superar estas dificultades en la formación docente y en la enseñanza de la energía en la escuela.

PALABRAS CLAVES: Energía; Formación inicial docente; Modelización; Modelo científico escolar.

ABSTRACT • In this research we have focused on analyzing the level of sophistication and the type of model of energy that pre-service secondary school physics teachers build through a teaching and learning sequence focused on modeling. In order to do this, we analyzed the written productions of pre-service secondary school physics teachers at an initial and final moment of their training in order to identify which ideas related to energy experienced greater sophistication in terms of the targeted model of energy. The results exhibit that most of the pre-service teachers build a balanced model of energy regarding the ideas of nature of energy, energy transfer and energy degradation, with a good command of these ideas. Nonetheless, difficulties are detected in the understanding of the idea of conservation of energy. These results allow us to reflect on how to overcome these difficulties in both teacher education and school energy teaching.

KEYWORDS: Energy; Pre-service teacher education; Modeling; School scientific model.

Recepción: noviembre 2021 • Aceptación: octubre 2022 • Publicación: junio 2023

Soto Alvarado, M. y Couso Lagarón, D. (2023). Construcción de un modelo sofisticado de energía en futuros docentes de física. *Enseñanza de las Ciencias*, *41*(2), 25-45. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5585

INTRODUCCIÓN

La energía es uno de los conceptos más relevantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las ciencias: está presente transversalmente en la mayoría de los currículos escolares y es una de las grandes ideas científicas que se pueden adquirir en la escolarización obligatoria (Doménech-Casal, 2018). La visión energética de los fenómenos, así como de sus conceptos asociados (transferencia, degradación y conservación) son algunos de los contenidos científicos más utilizados en situaciones de nuestra vida cotidiana por su capacidad de dar explicación a múltiples fenómenos de nuestro entorno (López y Pintó, 2012; Soto et al., 2017). Su comprensión puede ser útil para que el conjunto de estudiantes desarrolle razonamientos científicos y puedan predecir, opinar y tomar decisiones fundamentadas sobre problemáticas socialmente relevantes para la formación de ciudadanos (García-Carmona y Criado, 2010; López-Simó y Couso, 2022; Marzábal et al., 2021).

Dada la potencialidad de aplicar una visión energética de los fenómenos, muchas investigaciones en didáctica de las ciencias han explorado los procesos de construcción del modelo de energía, y han identificado complejidades intrínsecas que obstaculizan su aprendizaje. Estas complejidades se pueden asociar principalmente a la polisemia del concepto de energía (Doménech-Casal, 2018; López y Pintó, 2012), a las múltiples concepciones alternativas de estudiantes, profesores y textos escolares (Doménech-Casal, 2018; Doménech et al., 2013; Pintó et al., 2005) y al reduccionismo conceptual evidenciado en algunos currículos, como es el caso del chileno, en el que la enseñanza de las ideas relacionadas con la energía se reducen a la criticada (Millar, 2005) noción de «transformación de energía» (Soto, 2019; Soto et al., 2019).

Considerando la relevancia del modelo de energía y las dificultades del estudiantado para construir adecuadamente este modelo, el rol del profesorado es clave para su desarrollo en el contexto escolar. Sin embargo, algunas evidencias muestran que el profesorado en formación y en ejercicio aborda con superficialidad este modelo en sus clases (Doménech et al., 2013). Trabajos previos prueban que, en general, el estudio de la energía se centra básicamente en la idea de transformación y conservación (Doménech et al., 2013), lo que evidencia la necesidad de un mayor conocimiento didáctico del contenido sobre el tema. De hecho, las ideas asociadas a la transferencia y degradación de la energía que la literatura considera adecuadas no suelen formar parte de la enseñanza de la energía (Millar, 2005), siendo la degradación de la energía una de las ideas del modelo más difíciles de comprender por el profesorado en ejercicio (Pintó et al., 2005). En ese contexto podemos decir que tanto libros de texto y materiales didácticos, así como docentes, suelen comunicar una visión de la energía incompleta y alejada de los fenómenos cotidianos, como el consumo de combustibles o la crisis energética, que son imposibles de explicar por medio de la idea de conservación de la energía (López et al., 2019; Solbes y Tarín, 1998).

Los antecedentes presentados justifican la importancia de contar con docentes que hayan construido un modelo científico escolar de energía lo suficientemente sofisticado (coherente con el modelo científico y sensible al conocimiento didáctico sobre el tema) y que posibilite su quehacer docente en la etapa de 12 a 16 años. Para ello, en este estudio exploraremos qué modelos de energía construyen docentes de Física en formación en Chile y en qué nivel de desarrollo conceptual se encuentran respecto a las ideas científicas del modelo escolar de energía objeto de enseñanza y aprendizaje. El contexto del estudio es la participación de los futuros docentes en una secuencia de enseñanza y aprendizaje (SEA) diseñada iterativamente y centrada en la modelización.

MARCO TEÓRICO

Modelo científico escolar de energía

El concepto de modelo está cargado de polisemia en el ámbito de la enseñanza de las ciencias (Oh y Oh, 2011). En didáctica de las ciencias se usa la idea de modelo científico generalmente para referirnos a una representación simplificada y parcial de objetos, procesos o fenómenos que usamos para describirlos, predecirlos, interpretarlos o explicarlos (Oh y Oh, 2011). Desde la mirada semanticista (Adúriz-Bravo, 2012), un modelo científico puede servir como intermediario entre la teoría que queremos que el estudiantado aprenda y el mundo de los fenómenos que deseamos que modelice.

Desde la perspectiva de la actividad científica escolar (ACE), los modelos científicos escolares (MCE) son las versiones escolarmente adecuadas de los modelos científicos (de la ciencia erudita) que son objeto de enseñanza y aprendizaje (Izquierdo-Aymerich y Adúriz-Bravo, 2003; Hernández et al., 2015). Estos MCE son de naturaleza conceptual o teórica e incluyen las ideas científicas más abstractas y centrales de las disciplinas que se pueden aplicar a multitud de fenómenos. Por ejemplo, el MCE del sistema solar no es una maqueta o simulación del sistema solar, sino las ideas científicas que esa maqueta o simulación ponen en juego para que el alumnado pueda aprenderlas. Además, un MCE central, como el de ser vivo, no solo se aplica a la diversidad de seres vivos, sino que permite, a su vez, construir otros MCE útiles, como el de mamífero o el de bacteria. Desde esta perspectiva, los MCE centrales para la alfabetización científica de la ciudadanía son pocos, pero muy potentes (Izquierdo-Aymerich y Adúriz-Bravo, 2003; Marzábal et al., 2021), ya que permiten construir diversos MCE de utilidad al aplicarse a diferentes conjuntos de fenómenos y se corresponden con las formas de mirar los fenómenos de las disciplinas (Couso, 2020).

En relación con la construcción de un MCE central de energía, es importante mencionar que han existido diversos enfoques sobre cómo conceptualizar la energía en el contexto escolar, desde propuestas que invitan a abordar la energía como una especie de sustancia cuasi material, como la capacidad de realizar un trabajo o como la capacidad de producir cambios, las cuales han sido reportadas en revisiones realizadas por diversos investigadores (por ejemplo, López y Pintó, 2012; Doménech-Casal, 2018). Sin embargo, estos enfoques han mostrado ciertas inconsistencias que han obstaculizado la comprensión del modelo energético (Doménech et al., 2013). Con la intención de superar estas limitaciones, Ogborn (1986) propone centrar la enseñanza de la energía en los *energy related concepts* o conceptos asociados a la energía, es decir, en las ideas de transferencia, conservación y degradación de la energía. Esta propuesta, compartida por varios autores tanto en el ámbito internacional como en nuestro contexto (Doménech et al, 2013; Doménech-Casal, 2018; López y Pintó, 2012; Millar, 2005, 2015; Soto et al., 2019), ha sido foco de interés por la coherencia que muestra con la ciencia, su capacidad de uso en la explicación de un amplio abanico de fenómenos de forma competencial y por ser una visión útil para estudiantes de 12 a 16 años (Soto et al., 2019).

Inspirándonos en la propuesta de Ogborn (1986), López y Pintó (2012) y López-Simó y Couso (2022), en la tabla 1 presentamos las principales ideas que componen el MCE de energía que promovemos en esta investigación.

Tabla 1.
Ideas que componen el MCE de energía

Naturaleza de la energía	La energía está asociada al estado/configuración de un sistema. Cuando varía el estado de un sistema varía la energía que le asociamos al sistema.
Transferencia de la energía	Todo cambio en el estado/configuración de un sistema o parte de un sistema que conlleva un aumento de la energía lleva asociado otro cambio en el estado/configuración de otro sistema o parte de sistema en el que disminuye la energía (y viceversa). A esto le llamamos transferencia de energía. Estas transferencias pueden realizarse mediante los mecanismos de trabajo o calor, que no son equivalentes en cuanto a su capacidad de transferir energía útil.
Degradación de la energía	La energía se degrada irreversiblemente perdiendo la capacidad para generar nuevos cambios, disminuyendo así la energía útil de un sistema.
Conservación de la energía	La energía total de un sistema se conserva en sistemas totalmente aislados, mientras que en los no aislados no se conserva.

Evolución del modelo de energía a través de la modelización

En su razonamiento espontáneo, los y las estudiantes usan ideas de un modelo de energía propio que no siempre son coherentes con el MCE de energía objeto de aprendizaje. Sin embargo, a través de la enseñanza, estas ideas se pueden ir sofisticando. Desde la perspectiva de desarrollo conceptual, diremos que los y las estudiantes aprenden cuando sus ideas evolucionan desde versiones más sencillas a más elaboradas, aproximándose cada vez más a las ideas del MCE objeto de aprendizaje (Couso, 2014).

La forma en la que los modelos del alumnado se crean y se van sofisticando se denomina modelización. Modelizar, en una primera acepción (Oliva, 2019), hace referencia a la construcción de modelos por parte de los propios estudiantes y a su progresión al interactuar con el mundo y con los demás. Al modelizar, los modelos del alumnado se proponen y refuerzan de acuerdo con su grado de ajuste al mundo, se ponen en duda en caso de desajustes y se refinan para adaptarse mejor a la realidad y conforme a nuevas ideas. En este proceso, los modelos de los y las estudiantes pueden evolucionar a modelos más cercanos al MCE objeto de aprendizaje mediados por el andamiaje docente. Esta visión de modelización como progresión de modelos es el principal foco de este artículo, orientado a establecer niveles de sofisticación de cada una de las ideas del MCE de energía del que dieron evidencia los futuros docentes (FD desde ahora).

Modelización también tiene otras acepciones. Desde nuestra perspectiva, y siguiendo a Oliva (2019), consideramos la modelización como una práctica científica clave que, junto con la indagación y la argumentación, conforman las esferas de actividad de la ciencia erudita en la que el alumnado debería participar en la ciencia escolar (Osborne, 2014). Es decir, modelizar es una práctica en la que el alumnado debe involucrarse no solo para aprender contenidos conceptuales (los MCE clave ya mencionados), sino también para aprender a modelizar y conocer más sobre la modelización (Schwarz et al., 2009). Desde el marco ACE, esto implica participar en actividades de carácter dialógico, en las que se promueve que el alumnado haga, hable y piense de manera similar o análoga a la usada en la ciencia para construir sus explicaciones personales de los fenómenos del mundo (Izquierdo et al., 1999). En nuestra investigación, esta idea implica que los FD experimenten en su formación, en primera persona, la participación en prácticas científicas auténticas que impliquen la construcción, uso y revisión de un modelo de energía no solo para aprender este modelo, sino también para aprender a modelizar y a reconocer el papel de la modelización en la ciencia y en el aprendizaje de las ciencias.

Reconocer la importancia de la modelización en el desarrollo conceptual (véase el aprendizaje de un *tema* como la mejora de los modelos del alumnado relevantes en este) y como práctica central de la ciencia (la modelización en cuanto que una de las formas en las que la ciencia genera y avanza su conocimiento) tiene también influencia en las propuestas didácticas (es decir, la manera en la que se enseña y aprende tanto los modelos relevantes como a modelizar y sobre modelización). Así, siguiendo a Oliva (2019), consideramos la enseñanza y aprendizaje basado en la modelización un enfoque didáctico privilegiado para el aprendizaje de modelos y para la apropiación de y reflexión sobre la práctica de la modelización. La idea tras el enfoque de enseñanza y aprendizaje centrado en la modelización, a diferencia de otros enfoques únicamente interesados por los modelos, es que pasamos de una enseñanza y aprendizaje centrados en los productos de la ciencia a un enfoque enfocado a la participación activa en los procesos científicos (Duschl y Grandy, 2012).

Varios autores han analizado el proceso de modelización y han propuesto ciclos de instrucción centrada en la modelización para favorecer este proceso de construcción de modelos en el aula (por ejemplo, Garrido Espeja, 2016; Hernández et al., 2015; Schwarz et al., 2009).

En esta investigación nos alineamos con el ciclo propuesto en la tesis de Garrido Espeja (2016) y actualizado en Couso (2020), en el que se define tanto cuál es la práctica de modelización que se quiere promover en los alumnos en cada una de las fases como la situación didáctica que el profesorado debería plantear en clase para alcanzar el objetivo didáctico de modelización en los y las estudiantes. Este ciclo está compuesto por seis fases de instrucción que se describen en la figura 1.

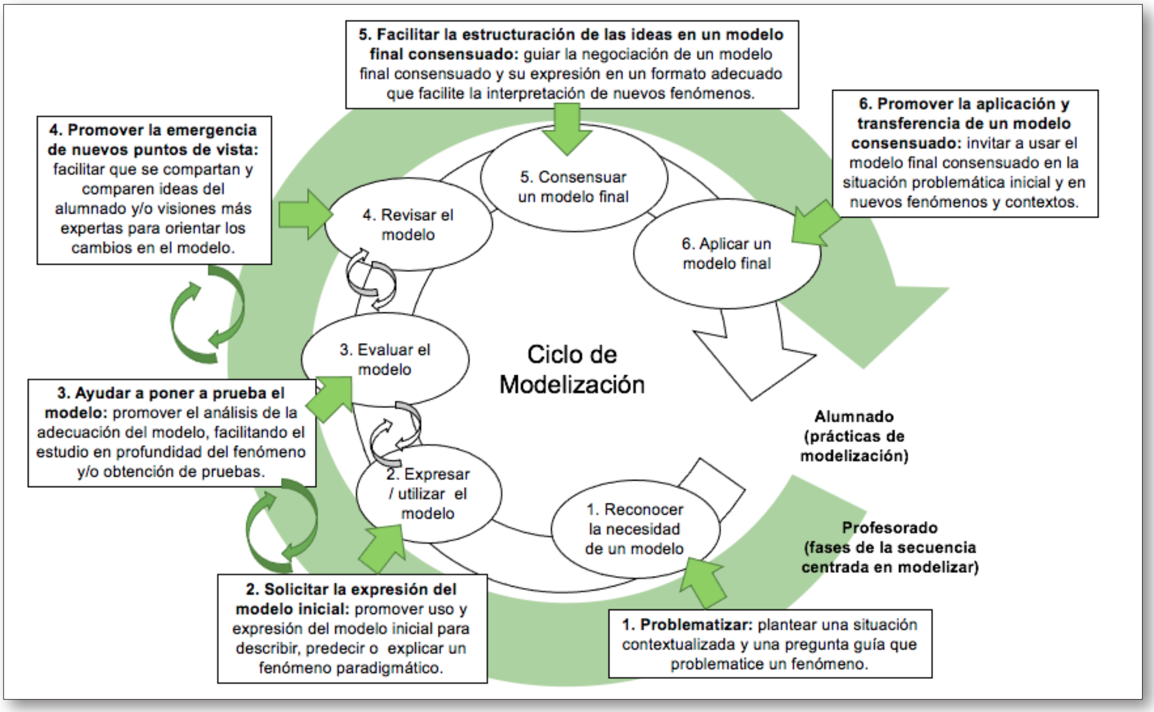


Fig. 1. Ciclo de modelización propuesto por Garrido Espeja (2016) y actualizado en Couso (2020).

Pese a la relevancia de la construcción de modelos, la experiencia muestra que el uso de la modelización no es habitual en las aulas de nivel medio y superior y que incluso es más escasa en las etapas iniciales de la educación obligatoria (Acher et al., 2007). Algunos de los principales motivos son la resistencia del profesorado de ciencias a superar los modelos tradicionales de enseñanza y aprendizaje basados en la transmisión de conocimientos (Bonil y Márquez, 2011). También la poca coherencia que existe entre la enseñanza que se brinda en la formación inicial de docentes (FID) de ciencia frente a cómo esperamos que enseñen en el aula escolar a sus estudiantes (Martínez-Chico et al., 2015), así como las limitaciones y los desafíos observados en el profesorado respecto a sus visiones sobre modelos y modelización cuando han intentado incorporarlas en sus aulas (Jiménez-Tenorio et al., 2016).

La transición hacia una visión contextualizada de la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias sigue siendo un desafío en la FID. Es por ello por lo que se requiere identificar y caracterizar estrategias efectivas que promuevan la modelización. Algunos estudios han explorado estrategias que promoverían la transformación de las creencias, los conocimientos y las prácticas de los FD de ciencias (por ejemplo, Schwarz et al., 2009; Martínez-Chico et al., 2014). Entre estas estrategias, ha mostrado potencial el modelamiento de los enfoques de enseñanza. Es decir, el hecho de proporcionar oportunidades a los FD mientras experimentan en primera persona los enfoques de enseñanza que se espera que ellos posteriormente utilicen en el aula. Por estos motivos, resaltamos la relevancia de fomentar la modelización en la FID de ciencia, ya que a través de este proceso los FD podrán construir modelos más coherentes con los MCE, podrán entender el valor, la utilidad y las limitaciones de los modelos y la modelización (Aragón et al., 2014), y podrán analizar su posible uso en sus futuras clases.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Sobre la base de los antecedentes presentados, nos hemos planteado la siguiente pregunta de investigación:

1. ¿Qué modelo de energía tienen los futuros docentes de física al inicio y al final de una SEA centrada en la modelización y orientada a construir un MCE de energía?

METODOLOGÍA

Contexto de la investigación y diseño de la SEA

Esta investigación es de tipo cualitativa-interpretativa, con un enfoque de estudio de caso exploratorio (Yin, 2003) y una perspectiva práctica, ya que los resultados tienen como finalidad incidir en la mejora de una asignatura de una carrera de FID de física de una universidad chilena. Mediante el estudio de caso se busca identificar características distintivas en este contexto de FID específico. Decidimos integrar una visión cuantitativa de las representaciones y un análisis cualitativo de los datos sin realizar análisis estadísticos por el tamaño reducido de nuestra muestra.

Para identificar el modelo de energía de los FD en un momento inicial y final de la SEA centrada en la modelización de un MCE de energía, fue necesario acceder a sus producciones escritas. Tomamos como casos a los 22 FD que cursaban dicha asignatura en esta carrera universitaria. Estos participantes cursaban segundo año de formación, sus edades fluctuaban entre los 19 y los 24 años y, como desafortunadamente ocurre con frecuencia entre el profesorado en formación de secundaria de la especialidad de física en este contexto, predominó la presencia del sexo masculino en la muestra (18 hombres frente a 4 mujeres).

La SEA diseñada se compuso por 4 sesiones de 180 minutos cada una de ellas, y cada sesión siguió la lógica del ciclo de modelización de la figura 1 aplicado a la construcción de las ideas del MCE de energía descrito en la tabla 1. El esquema de la SEA utilizada, publicada en Soto (2019) y Soto et al. (2021), se explica a continuación y se resume en la figura 2.

La organización y secuenciación de las ideas del MCE de energía, para el diseño de la SEA, se basó en los resultados de las investigaciones de Soto et al. (2017) y Neumann et al. (2013) acerca de progresiones de aprendizaje para el modelo de energía. De acuerdo con lo anterior, decidimos en la primera sesión promover la construcción de la idea de naturaleza de la energía (ES). En la segunda y tercera sesión, invitar a la construcción de la idea de transferencia de energía (WQ), dedicando dos sesiones a este concepto para profundizar en los mecanismos diferenciados de transferencia de energía por calor (Q) y trabajo (W) y brindar un abordaje de los fenómenos desde una mirada macroscópica y microscópica. En la cuarta sesión decidimos promover en conjunto las ideas de degradación (D) y conservación de la energía (C), considerando que la literatura reporta (por ejemplo, López y Pintó, 2012; Couso et al., 2005) la relación entre estas ideas, y sugiere que sean abordadas a la par para una comprensión adecuada de los fenómenos.

Para promover en la primera sesión la construcción de la idea ES, utilizamos el contexto de la generación de electricidad en centrales hidroeléctricas con la intención de que los FD identificaran los diferentes estados/configuraciones del sistema y las posibilidades de cambios asociados a determinadas interacciones. Les presentamos distintas configuraciones (por ejemplo, agua a elevada temperatura, agua cayendo desde una altura, otro líquido más calórico cayendo desde una altura, etc.) para describir las características de los sistemas y asociar más o menos energía a los sistemas en función de su estado. También, les solicitamos calcular la cantidad de energía del sistema y escoger cuál era la configuración más apropiada para hacer girar con mayor rapidez una turbina en una central hidroeléctrica. Se esperaba que los FD identificaran que solo es posible medir variaciones de energía (por ejemplo, cambios de temperatura o de rapidez) y no el valor de la energía en términos absolutos en cada situación. A la vez, pedimos que identificaran que, aunque existan configuraciones a las que asociemos una mayor cantidad de energía, no necesariamente podremos aprovechar esa energía: por ejemplo, aunque el agua a elevada temperatura tenga asociada una mayor cantidad de energía que el agua a temperatura ambiente, esta configuración no es aprovechable para hacer girar con mayor rapidez una turbina, como sí lo es la diferencia de altura. Posteriormente, el diseño propone que los FD pongan a prueba sus modelos iniciales experimentalmente con un montaje que simula el funcionamiento de una central hidroeléctrica y con el análisis de los cambios que ocurren a lo largo de una cadena energética. De este modo, se pretendía que los FD centraran la mirada en las variables que aumentan o disminuyen en relación con un cambio y no en el habitual etiquetado de tipos de energía, que no permiten llegar a la comprensión del fenómeno (Soto et al., 2019).

En la segunda sesión, abordamos el análisis de los diferentes cambios en el estado/configuración de un sistema asociados a transferencias de energía por calor (Q) en el contexto de la aislación de los alimentos dentro de un bolso térmico. Propusimos analizar los cambios de unas partes del sistema a otras (análisis de cadenas energéticas) para promover que los FD centraran la atención en las transferencias de energía y no en los tipos de energías y sus transformaciones. Asimismo, las actividades pretendían que los FD identificaran la configuración/estado de un sistema antes y después de cada cambio, para evidenciar la naturaleza del cambio, en este caso, cambios de temperatura en las partes del sistema por la interacción de cuerpos a distintas temperaturas. Posteriormente, los FD ponían a prueba sus modelos iniciales experimentalmente identificando qué variables inciden en el proceso de transferencia de energía a través de calor (por ejemplo, la interacción de cuerpos aislantes y conductores, la interacción de cuerpos con una gran o menor diferencia de temperatura entre ellos, etc.).

En la tercera sesión, abordamos el análisis de los diferentes cambios en el estado/configuración de un sistema asociados a transferencias de energía por trabajo (W) en el contexto de choques de automóviles. Las actividades propuestas pretendían (al igual que la sesión recién descrita) que los FD identificaran la configuración/estado de un sistema antes y después de un cambio, para evidenciar la naturaleza del cambio, en este caso desplazamientos o deformaciones por acción de fuerzas. Los FD podían poner a prueba sus modelos iniciales experimentalmente e identificaban qué variables inciden en el proceso de transferencia de energía a través de trabajo (como la interacción de cuerpos de naturaleza más o menos deformable; la intensidad de la fuerza, etc.) para refinar sus modelos.

Finalmente, la cuarta sesión se enfocó en el análisis de cadenas energéticas para potenciar la construcción de las ideas D y C en el contexto del análisis del calentamiento y enfriamiento de un disco de frenos en el proceso de frenada de un automóvil (Soto et al., 2019). Se esperaba que los FD analizaran el «camino de la energía» (Millar, 2015) asociado al proceso de frenada de un automóvil aplicando las ideas del modelo de energía construidas en las sesiones anteriores y que incorporaran las nuevas ideas del modelo. Para construir la idea D se promovió el análisis de una cadena energética en torno a la pregunta «¿de qué otras maneras se podría aprovechar la energía en cada etapa de la cadena de cambios?». Así, los FD podrían identificar la disminución de la calidad y utilidad de la energía a lo largo de un proceso y concluir que el aprovechamiento de energía no es siempre el mismo, depende de cómo se haya transferido la energía, y que la gama de nuevos cambios posibles se reduce en cada etapa. Por otra parte, para construir la idea C se planteó una analogía que consistía en que los FD imaginaran que podían seguir el camino de la energía durante el proceso de la frenada de un coche (asumiendo que disponían de 50 J iniciales) y podían ir etiquetando «cuánta energía» asociaban a cada parte del sistema en cada etapa. Los FD representaron posteriormente esta distribución de la energía en cada etapa de la cadena de cambios con vasos de agua y etiquetas (López y López, 2022). Se esperaba que esta actividad promoviera la discusión sobre «¿cómo está la energía?» y «¿cuánta hay en cada momento?», es decir, si está cada vez más distribuida en las distintas partes del sistema (la energía se disipa en el aire, la rueda, la mesa), y si en todas las etapas la suma total sigue siendo la inicial (50 J) (Soto et al., 2019).

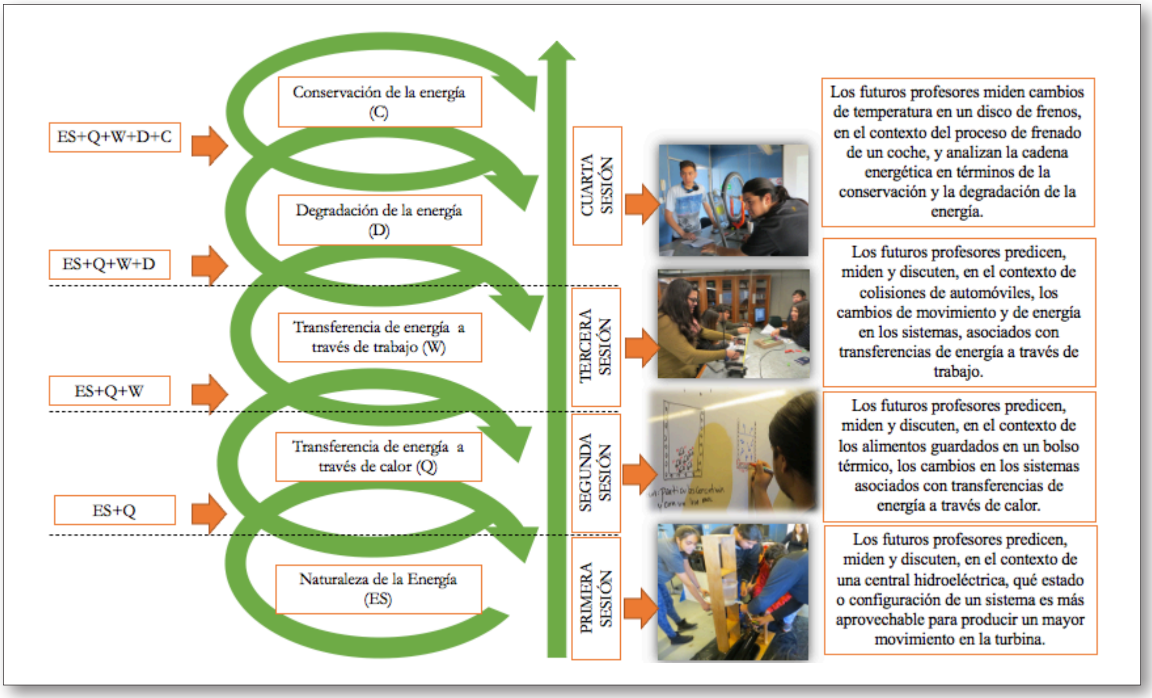


Fig. 2. Esquema de la SEA centrada en la modelización para la construcción del MCE de energía.

Recolección y análisis de datos

Los datos recolectados corresponden a las producciones escritas de los FD en el contexto de las sesiones descritas. A lo largo de cada sesión se propusieron preguntas distintas, pero substancialmente equivalentes, en las que los FD dieron explicación a cada uno de los fenómenos planteados utilizando alguna o todas sus ideas del modelo de energía. En la figura 3 se presenta el contraste entre las preguntas realizadas en un momento inicial y el final de la recolección de datos.

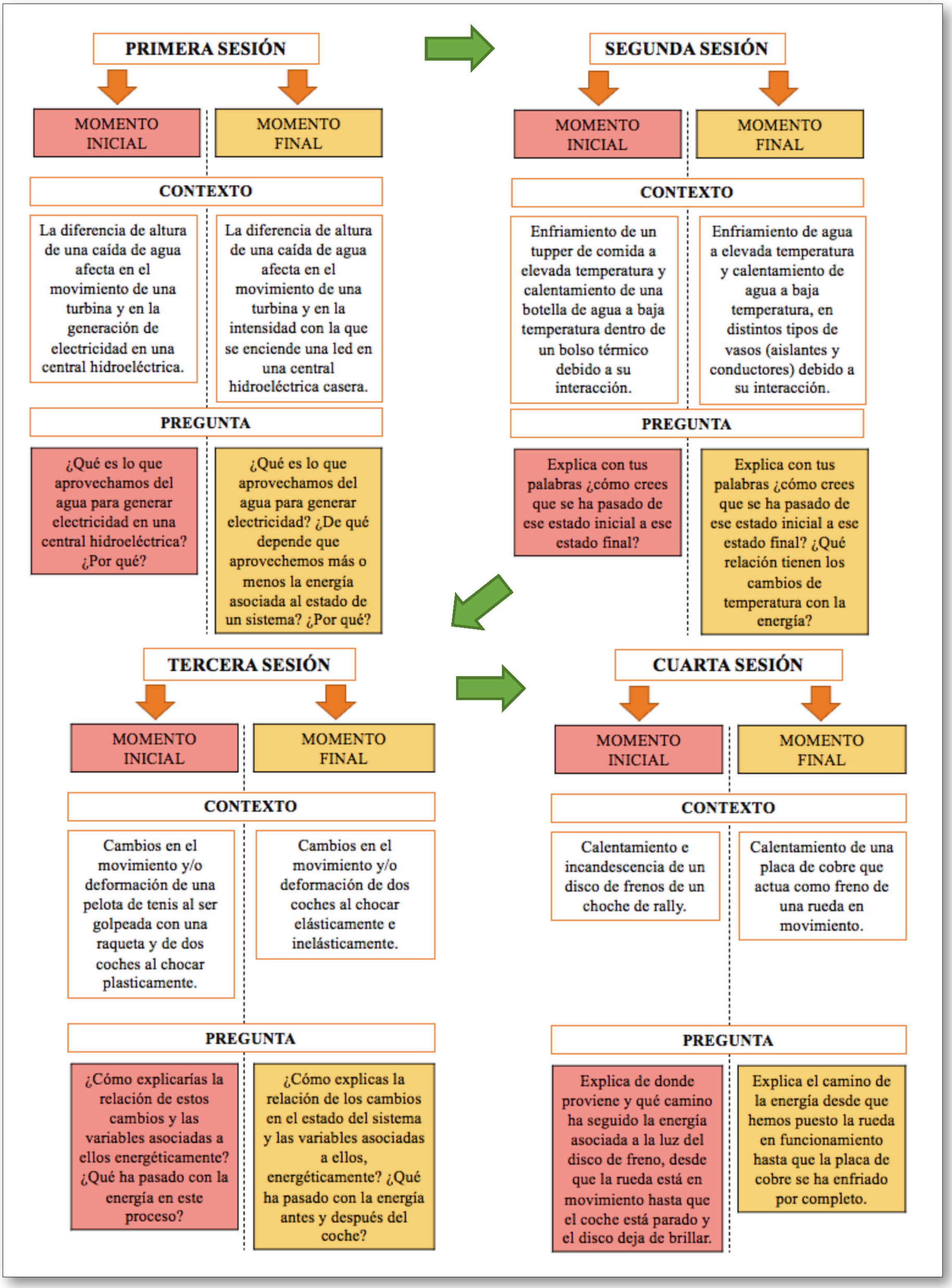


Fig. 3. Ejemplos de preguntas utilizadas para la recolección de datos.

A partir de las producciones de los FD y basándose en la literatura, planteamos categorías de análisis respecto a los estadios en los que se encontraban las diferentes ideas del modelo de energía que aplicaba el alumnado. Estos estadios fueron ordenados, para cada una de las ideas de modelo de energía, desde aquellas ideas menos sofisticadas y alejadas del MCE de energía (estadio 1) hasta aquellas más sofisticadas o coherentes con el MCE objeto de estudio (estadio 4) (véase tabla 2). Con estos estadios se pudo realizar un seguimiento de la evolución que experimentó cada una de las ideas del modelo de energía en un momento inicial y final para todos los FD participantes. Se pueden encontrar más detalles sobre cómo se construyeron estos estadios y ejemplos asociados a cada uno en el estudio de Soto (2019).

Tabla 2.
Estadios de cada idea del modelo de energía desde ideas
menos sofisticadas (estadio 1) a ideas más coherentes con el MCE de energía (estadio 4)

Estadio	*Naturaleza de la energía*
ES4	La energía se asocia al cambio de estado o configuración de un cuerpo o sistema.
ES3	La energía se asocia al estado del sistema.
ES2	La energía está en los sistemas y causa su estado.
ES1	La energía está en los objetos.

Estadio	*Transferencia de la energía*
WQ4	En los cambios la energía se transfiere de unos sistemas o partes del sistema a otros, con trabajo y calor.
WQ3	La energía se transfiere de unos sistemas o partes del sistema a otros, identificando aspectos relacionados con el trabajo o calor.
WQ2	La energía se transfiere de unos sistemas o partes del sistema a otros. Pueden mencionar que el dispositivo potencia la transferencia.
WQ1	La energía se transforma de un tipo a otro. También pueden señalar que el calor, las fuerzas o la temperatura son las que se transfieren.
WQ0	Los cambios se producen por agentes mecánicos como la fricción.

Estadio	*Degradación de la energía*
D4	La energía se degrada a medida que un sistema va perdiendo capacidad para generar nuevos cambios. Cuando la energía se degrada, la utilidad de esta disminuye.
D3	La energía cada vez es menos aprovechable para generar nuevos cambios, porque se ha disipado.
D2	No identifica el aprovechamiento, solo menciona que la energía se disipa.
D1	No identifica que el aprovechamiento es menor a lo largo de una cadena energética.

Estadio	*Conservación de la energía*
C4	La cantidad de energía total se conserva, de manera que la energía que gana o pierde un sistema siempre corresponde a la pérdida o ganancia de energía de otro sistema o del entorno.
C3	La cantidad de energía total se conserva, pero no se identifican la pérdida o ganancia de otro sistema.
C2	La cantidad de energía total no se conserva, debido a que se disipa a lo largo de los cambios.
C1	La cantidad de energía total no se conserva. Pueden mencionar que se gasta o pierde.

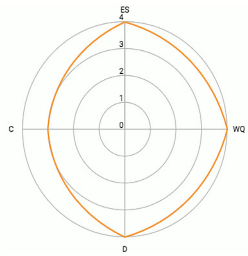
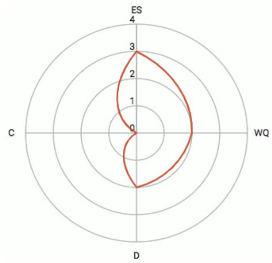
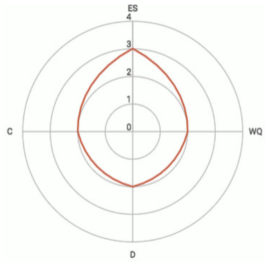
Para comparar los modelos de energía usados por los FD, realizamos un segundo análisis de los datos y se codificó el tipo de modelo y el grado de sofisticación del modelo de energía de cada FD sobre la base de unas categorías construidas *ad hoc*. Así, definimos los niveles alto, medio, básico y bajo de sofisticación de las ideas del modelo de energía de los FD, los cuales se complementaron con categorías que nos permitieron caracterizar la tipología del modelo: equilibrado, incompleto y altamente incompleto.

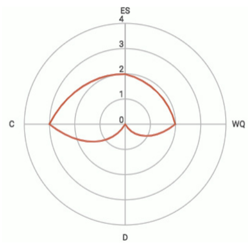
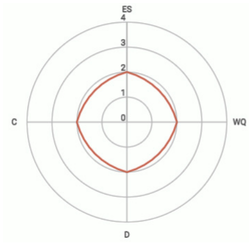
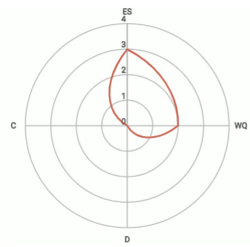
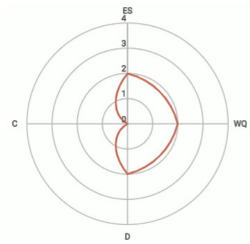
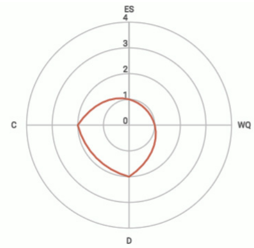
En la tabla 3 definimos estas categorías y las acompañamos con ejemplos de los FD, los cuales fueron representados a través de unas gráficas radiales que dan a conocer las ideas del modelo de energía en los ejes coordenados. En la parte superior del eje de las ordenadas representamos la idea de naturaleza de la energía (ES); en la parte inferior de este, la idea de degradación de la energía (D). A la derecha del eje de las abscisas representamos la idea de transferencia de la energía (WQ), y a la izquierda de este, la idea de conservación de la energía (C). La numeración en los ejes representa el estadio de cada idea en el que se sitúan las producciones de los FD.

Las gráficas construidas para cada FD en un momento inicial y final caracterizan los modelos de energía de los FD desde dos puntos de vista. Por una parte, el nivel de sofisticación de las ideas del modelo de energía se observa a través de la amplitud de la representación gráfica: modelos de más nivel de sofisticación se representarían con figuras más grandes. Por otro lado, el tipo de modelo se observa a través de su forma: modelos más equilibrados y completos que incluyen todas las ideas del MCE se representan con formas más regulares y redondeadas.

Es importante mencionar que los niveles de sofisticación y tipos de modelos son categorías independientes y se pueden dar variadas combinaciones entre ellas. Por ejemplo, un FD podría evidenciar un nivel de sofisticación alto, medio, básico o bajo y presentar un tipo de un modelo equilibrado, mientras que otro FD podría dar evidencias de un nivel medio o básico y presentar un tipo de modelo incompleto. Asimismo, hay combinaciones que no son viables.

Tabla 3.
Nivel de sofisticación del MCE de energía, tipo de modelo y ejemplos asociados

Ejemplos de respuestas de los FD			
Nivel de sofisticación de las ideas del MCE de energía	Tipo de modelo		
Alto: Los FD demuestran un nivel alto de sofisticación de las ideas del modelo energético cuando en sus producciones usan todas las ideas del modelo de energía y dos o más ideas se encuentran en los estadios 3 o 4.	No es posible esta combinación	No es posible esta combinación	 A1. Nivel alto y modelo equilibrado
Medio: Los FD demuestran un nivel medio de sofisticación de las ideas del modelo energético cuando sus producciones indican que una o dos ideas del modelo de energía se encuentran en los estadios 3 o 4. El resto de las ideas se hallan en estadios inferiores o en algunos casos se observa que los FD obvian una idea del modelo.	No es posible esta combinación	 A15. Nivel medio y modelo incompleto	 A11. Nivel medio y modelo equilibrado

Ejemplos de respuestas de los FD			
Básico: Los FD demuestran un nivel básico de sofisticación de las ideas del modelo energético cuando sus producciones señalan que dos o más ideas del modelo no superan el estadio 2. Algunos FD pueden también no mencionar una idea del MCE de energía.	No es posible esta combinación	 A12. Nivel básico y modelo incompleto	 A4. Nivel básico y modelo equilibrado
Bajo: Los FD demuestran un nivel bajo de sofisticación de las ideas del modelo energético cuando sus producciones prueban que las ideas del modelo de energía no superan el estadio 2 o cuando no mencionan dos o más ideas del MCE de energía.	 A9. Nivel bajo y modelo altamente incompleto	 A10. Nivel bajo y modelo incompleto	 A5. Nivel bajo y modelo equilibrado
	Altamente incompleto: Los FD demuestran un modelo altamente incompleto de la energía cuando en sus producciones no mencionan dos o más ideas del modelo de energía.	Incompleto: Los FD demuestran un modelo de energía incompleto cuando en sus producciones evidencian un cierto dominio de tres ideas del MCE de energía y no mencionan una de ellas.	Equilibrado: Los FD demuestran un modelo equilibrado de la energía cuando en sus producciones evidencian un cierto dominio de todas las ideas del MCE de energía.

Los procesos de análisis de las respuestas de los FD descritos anteriormente fueron inicialmente realizados por las investigadoras principales y posteriormente puestos a prueba a través de una triangulación con investigadoras externas al estudio.

RESULTADOS

Niveles de sofisticación del MCE de energía de los FD

En la tabla 2 presentamos los estadios del modelo de energía que nos permitieron identificar cuántos FD se situaron en cada estadio para cada idea del MCE de energía en un momento inicial y final. Estos resultados fueron comunicados en Soto et al. (2021) y sobre la base de estos realizamos un segundo análisis utilizando las categorías de la tabla 3, que nos permitieron contrastar los FD entre sí a través de la categorización de su nivel de sofisticación y tipo de modelo. Estos resultados son los que presentamos a continuación.

Respecto al nivel de sofisticación del MCE de energía de los FD, identificamos que en un momento inicial ninguno de ellos da evidencias en sus producciones de un nivel alto de sofisticación de las ideas del MCE, por lo que se interpreta de sus explicaciones una sofisticación básica (11) o baja (8). Es decir, sus producciones muestran que la mayor parte de las ideas de sus modelos no superan el estadio de sofisticación 2 o que incluso no mencionan aspectos de dos o más ideas del modelo, respectivamente.

En este momento inicial se aprecian, sobre todo, limitaciones en el nivel de sofisticación de las ideas de conservación y degradación de la energía.

En el análisis del nivel de sofisticación del MCE de energía en un momento final, la situación cambia drásticamente considerando que 17 de los FD dan evidencia de un nivel de sofisticación alto y 5 de ellos de un nivel medio de sofisticación del MCE energético. Es decir, la mayor parte de sus ideas se encuentran en los estadios 3 o 4 o solo manifiestan dificultades en la construcción de una idea del modelo, respectivamente. En la figura 5 se puede observar el contraste del nivel de sofisticación del MCE de energía entre el momento inicial (a la izquierda de la gráfica) y final (a la derecha de la gráfica).

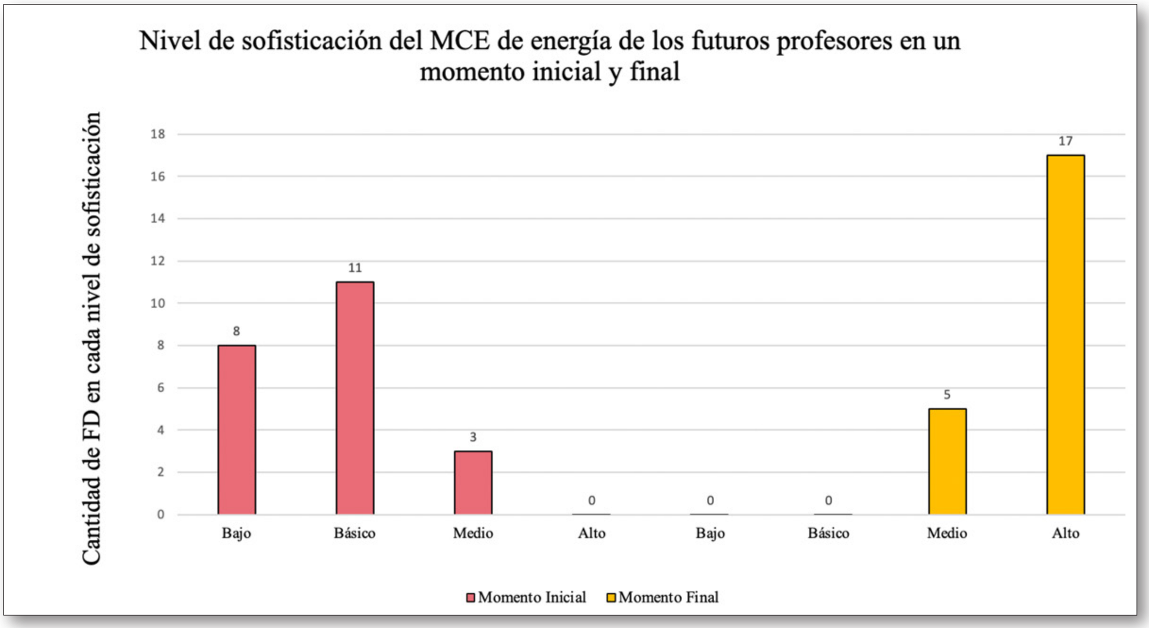


Fig. 5. Contraste del nivel de sofisticación del MCE de energía en el momento inicial y final.

Analizando en detalle qué ocurrió con la sofisticación de cada una de las ideas del MCE de energía, observamos que la idea de naturaleza de la energía comenzó siendo muy sofisticada en las producciones de los FD, tal como se puede apreciar en la respuesta de A1:

> Asocio el estado de reposo y movimiento como variables que influyen directamente en la energía; la velocidad la relaciono con energía cinética; las partículas del agua están en un movimiento constante y exaltado y la temperatura se relaciona con la energía de acuerdo con la capacidad calorífica de los cuerpos.

Y finalizó siendo aún más sofisticada: «Representa a nivel macro la variación de energía de acuerdo con la altura, respecto al sistema de referencia. Existe una relación continua delimitada por un sistema de referencia, es decir, la energía depende directamente del estado del sistema». En ese sentido, esta idea no experimentó una gran evolución. Esto lo atribuimos, principalmente, al diseño de las actividades planteadas, ya que promovían pensar y discutir explícitamente desde los inicios de la SEA en torno a cómo estaban los sistemas, qué características tenían o qué variables físicas se les podían asociar a lo largo de una cadena energética, lo que orientó a los FD a alejarse de la idea intuitiva de concebir la energía como una substancia perteneciente a los cuerpos.

En cuanto a la idea de transferencia de la energía, observamos que en un momento inicial de la SEA algunos de los FD explicaban los fenómenos en términos de transformaciones de energía (A12: «La energía se transforma en cada cambio y se manifiesta de distinta manera») o tipos de energía, sin incluir una visión de transferencia de energía entre partes de un sistema y asociada a los cambios que experimentan estas partes del sistema. Sin embargo, al proponer actividades que explícitamente promovían pensar en términos de cambios en los estados de un sistema e intentar reconocer la naturaleza de estos cambios, es decir, si se generaban por la acción de fuerzas que provocaban desplazamientos/deformaciones o si se generaban por la interacción de cuerpos a distintas temperaturas, los FD fueron incorporando las nociones de transferencia de la energía entre partes de un sistema y posteriormente asociaron estos cambios a transferencias de energía a través de trabajo o calor:

> A12: La temperatura ambiente no afectaría en el cambio de la energía que ocurre en el interior. En el interior hay una transferencia de energía en pro del equilibrio térmico, el tupper cede energía a la botella de agua y el yogurt (…) La energía se ha transferido a través del choque; el trabajo realizado por el tenista permite golpear la pelota y transferirle energía.

Esta idea fue la que experimentó una mayor evolución y todos los FD finalizaron la SEA reconociendo al menos uno de los dos mecanismos de transferencia de energía. Sin embargo, el mecanismo de trabajo fue el que presentó mayores dificultades, al ser considerado por algunos FD como una forma de disipación de la energía, tal como lo han corroborado otros estudios (Pintó et al., 2005).

Por otra parte, la idea de degradación de la energía es otra de las ideas que experimentó una mayor evolución, pues la SEA promovió que todos los FD que la obviaban en un momento inicial comenzaran a mencionarla en sus explicaciones al final. Así, en la mayoría del alumnado, la sofisticación de esta idea alcanzó el estadio 3; es decir, llegaron a mencionar que la energía cada vez es menos aprovechable para generar nuevos cambios porque se ha disipado. En contraste, la idea de conservación de la energía fue poco mencionada por los FD, en un momento tanto inicial como final.

El aumento de respuestas que incluyen la degradación de la energía y no su conservación lo asociamos principalmente a la cotidianidad de la primera idea, pues es habitual convivir con fenómenos de degradación de la energía, así como con la asociación de energía a combustible, lo que nos puede llevar a pensar que la energía se pierde o gasta en todo proceso. Sin embargo, se observó que a partir del uso de analogías bien escogidas (Oliva y Aragón, 2009) durante la cuarta sesión de la SEA (actividad de etiquetado de vasos descrita anteriormente), los FD comenzaron a incluir la conservación de la energía en sus explicaciones:

> A1: No toda la energía que se transfiere es útil y aprovechable para un mecanismo en particular. La energía útil depende del dispositivo, del estado del sistema y la función que le queremos dar. La energía es transferida a través de trabajo y es aprovechable y útil, mientras que al final ese calentamiento y enfriamiento por calor es inútil y poco aprovechable. En este caso el calentamiento y el enfriamiento representan disipaciones de energía. Por lo tanto, a lo largo del proceso, la cantidad de energía útil y aprovechable disminuye. Esta cantidad de energía sobrante se degrada, pero no se pierde. Solo es de menos calidad. Esta energía tiene a homogeneizarse según la naturaleza física de las cosas.

Estos resultados nos hacen valorar la importancia de seguir trabajando con los FD, en otras asignaturas, la idea de disminución de la energía útil, pues es la que permite explicar múltiples fenómenos socialmente relevantes hoy, como por qué la energía se está agotando o por qué hay un desperdicio de ella (Pintó et al., 2005, López-Simó y Couso 2022). Asimismo, es un reto buscar nuevos fenómenos paradigmáticos que requieran el uso de la conservación de la energía, y resulta necesario plantear peguntas explícitas en torno a esta idea, considerando que no surge espontáneamente en las explicaciones de los FD.

En la figura 6 presentamos dos ejemplos de la evolución de los modelos de energía aplicados por dos FD. El estudiante A1 experimentó una sofisticación desde un nivel básico hasta un nivel alto, pues en sus explicaciones todas las ideas del modelo de energía, pero principalmente la idea de degradación de la energía, evolucionaron. Por otra parte, el estudiante A17 nos remite a aquellos FD que un momento final no alcanzaron el nivel de sofisticación alto por presentar dificultades en la comprensión de la idea de conservación de la energía.

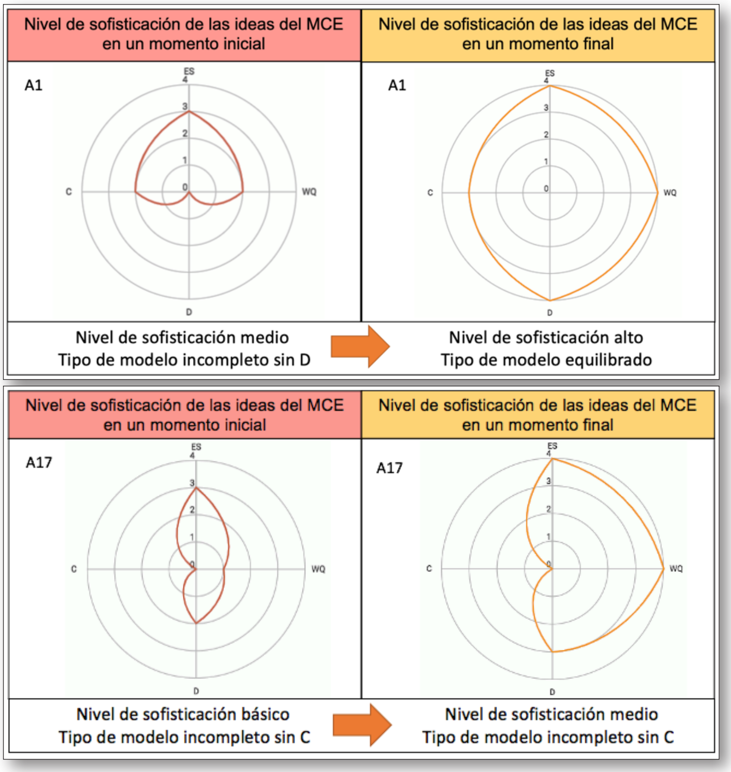


Fig. 6. Ejemplo de la evolución del nivel de sofisticación del MCE de energía del estudiante A1 y A17.

Tipo de modelo de energía de los FD

Respecto al tipo de modelo, en el análisis del momento inicial observamos que 5 de los FD dieron evidencias de un modelo equilibrado en el que todas las ideas del modelo de energía objeto de aprendizaje se mencionaban en estadios similares de sofisticación, manteniendo un patrón geométrico regular. En ese momento predominó el porcentaje de FD que dieron evidencia de un modelo incompleto que obviaba la conservación de la energía (8) y de un modelo altamente incompleto que obviaba dos o más ideas del modelo (6). También, 3 FD presentaron un modelo incompleto sin la degradación de la energía. En un momento final, esta situación cambió y predominaron los FD que dieron evidencia de un modelo equilibrado (17). Sin embargo, 5 de los docentes en formación presentaron un modelo incompleto que obviaba la conservación de la energía. En la figura 7 presentamos la comparativa entre los tipos de modelos iniciales y finales.

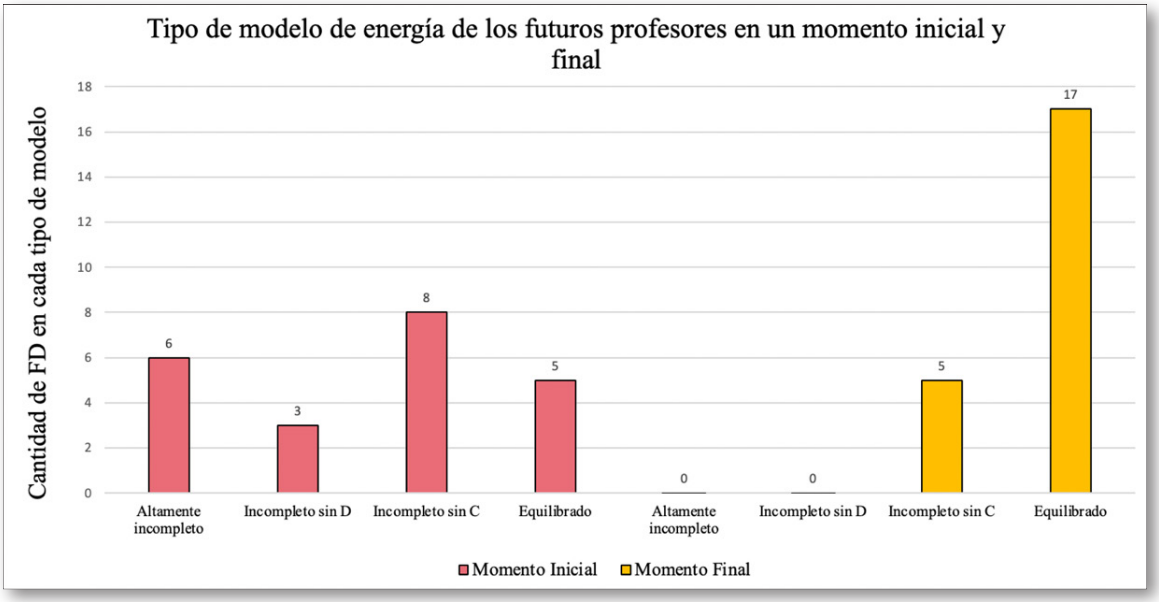


Fig. 7. Contraste del tipo de modelo de energía de los FD en un momento inicial y final.

En la figura 8 se puede observar al estudiante A4 con un modelo inicial y final equilibrado, pero con ideas más sofisticadas en un momento final. Y también podemos observar el cambio que experimentó A13 desde un modelo altamente incompleto hasta un modelo equilibrado.

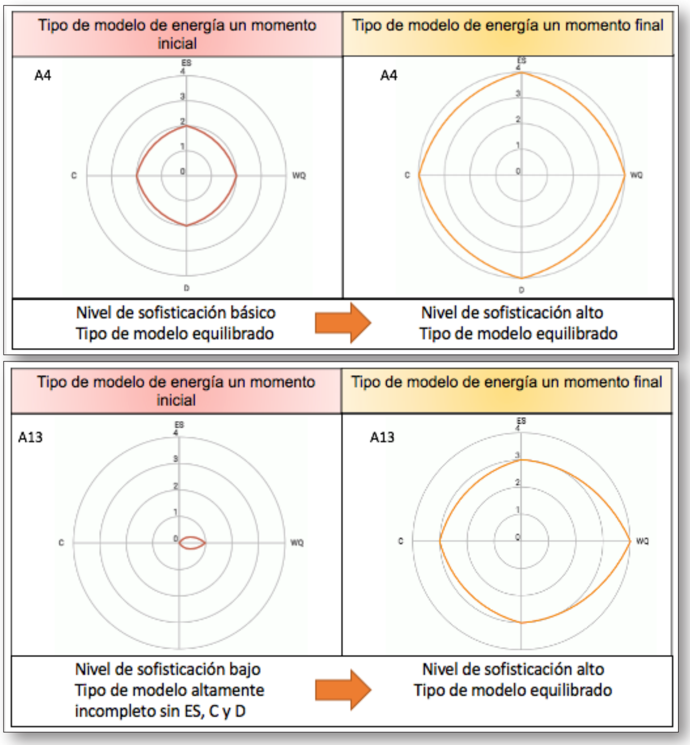


Fig. 8. Ejemplo del tipo de modelo en un momento inicial y final del estudiante A4.

CONCLUSIONES

La modelización es un enfoque didáctico relevante para la construcción del conocimiento científico, en particular los modelos científicos (escolares) (Oliva, 2019), y ofrece oportunidades a los estudiantes para aprender a hacer ciencia y comprender cómo funciona esta. En ese sentido, en este trabajo hemos aportado una breve secuencia didáctica modelizadora sobre energía, delimitando las ideas claves del MCE que se trabajan en dicha secuencia y hemos analizado cómo se han movilizado los modelos de energía de los FD de física al vivenciarla.

En términos generales, hemos visto que una SEA intencionadamente diseñada –en la que los FD puedan pensar, actuar y comunicar ante fenómenos paradigmáticos potentes; en la que se trabajen las ideas del modelo de energía en progresión; en la que se incluyan preguntas relevantes que requieran de la expresión y uso del modelo para interpretar los resultados y generar explicaciones sobre los fenómenos y en la que se promuevan discusiones en grupos pequeños para la revisión y consenso del modelo– permite la sofisticación de los modelos de energía de los FD y la construcción de un modelo equilibrado de energía. Esto aporta evidencias, tal como se ha reportado en otros estudios (por ejemplo, Garrido Espeja, 2016; Jiménez-Liso et al., 2021), de la relevancia del diseño para que los y las estudiantes puedan sofisticar sus modelos de forma autónoma, pero con el suficiente andamiaje.

Sin embargo, pese a que a lo largo de la SEA propuesta se incluían diversidad de contextos, una variedad de oportunidades de aprendizaje relacionadas con la modelización, y demandas cognitivas similares para cada idea, estas no fueron condiciones suficientes para desarrollar un MCE equilibrado y suficientemente sofisticado de energía. El desempeño del profesorado en formación reveló que las ideas de conservación y degradación de la energía son más abstractas y requieren otras oportunidades de aprendizaje. Esto señala la importancia de descomponer el MCE de energía en diferentes ideas que puedan abordarse juntas, pero también por separado para enfatizar aquellas que representan más dificultades (Soto et al., 2021). Asimismo, identificamos que, aunque los FD tengan en mente o incluso mencionen al comienzo de la SEA que «la energía se conserva» de forma rutinaria o memorística, estos no utilizarán esta idea para modelar su mundo (describirlo, predecirlo o explicarlo), si no encontramos situaciones que lo hagan necesario.

Por otra parte, consideramos fundamental que los FD puedan vivenciar procesos de modelización en primera persona, tal como también lo resaltan Martínez-Chico et al. (2014), y que en ellos puedan desarrollar ideas de energía más coherentes o cercanas a este MCE, pues así tendrán mayores posibilidades de seleccionar, adaptar y diseñar materiales educativos e implementarlos en el aula de manera que sus estudiantes superen algunas de las dificultades mencionadas en el marco teórico respecto a la energía.

Sin embargo, a través de nuestros resultados no podemos garantizar que los FD en sus próximas clases en el aula escolar enseñen con el modelo de energía construido a través de esta SEA modelizadora, incluso aunque muestren que valoran esta propuesta (Garrido et al., 2022). En ese sentido, consideramos necesario potenciar una metarreflexión durante la formación inicial de profesores que promueva una mayor clarificación conceptual y didáctica de la enseñanza de la energía (López et al., 2019), para que puedan mejorar sus versiones del modelo de energía, aprendan cómo enfocar didácticamente su enseñanza y pensar en nuevos fenómenos paradigmáticos para abordarla, y sepan cómo integrar las diferentes versiones del modelo en los diferentes niveles o áreas disciplinares en la escuela. Sin embargo, para el cumplimiento de esta tarea, también es necesario promover espacios de colaboración con la ayuda de los expertos (formadores de profesores) donde se puedan discutir las propias propuestas didácticas de los FD, refinar otros diseños didácticos y aportar nuevas ideas en discusiones productivas, para que los FD vayan desarrollando a lo largo de su formación su conocimiento pedagógico del contenido.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido financiada por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades (PGC2018-096581-B-C21) y llevada a cabo dentro del grupo de investigación ACELEC (2017SGR1399) y por el proyecto Fondecyt Iniciación n.° 11220317, financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) del Gobierno de Chile.

REFERENCIAS

Acher, A., Arcà, M. y Sanmartí, N. (2007). Modelling as a Teacher Learning Process for Understanding Materials: A Case Study in Primary Education. *Science Education*, *91*(1), 398-418. https://doi.org/10.1002/sce.20196

Adúriz-Bravo, A. (2012). A «Semantic» View of Scientific Models for Science Education. *Science & Education*, *22*(7), 1593-1611. https://doi.org/10.1007/s11191-011-9431-7

Aragón M., Oliva-Martínez J. y Navarrete A. (2014). Desarrollando la competencia de modelización mediante el uso y aplicación de analogías en torno al cambio químico. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(3), 337-356.

Bonil, J. y Márquez, C. (2011). ¿Qué experiencias manifiestan los futuros maestros sobre las clases de ciencias?: Implicaciones para su formación. *Revista de educación (Madrid)*, (354), 447-472.

Couso, D. (2014). De la moda de «aprender indagando» a la indagación para modelizar: una reflexión crítica. En *26EDCE. Investigación y transferencia para una educación en ciencias: Un reto emocionante* (pp. 1-28). Huelva: Servicio de Publicaciones Universidad de Huelva.

Couso, D. (2020). Aprender ciencia escolar implica construir modelos cada vez más sofisticados de los fenómenos del mundo. En D. Couso, M. R. Jiménez-Liso, C. Refojo y J. A. Sacristán (Coords.), *Enseñando Ciencia con Ciencia*. Penguin Random House / FECYT & Fundación Lilly.

Doménech-Casal, J. (2018). Concepciones de alumnado de secundaria sobre energía: una experiencia de aprendizaje basado en proyectos con globos aerostáticos. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *36*(2), 191-213. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2462

Doménech J., Limiñana R. y Menargues A. (2013). La superficialidad en la enseñanza del concepto de energía: una causa del limitado aprendizaje alcanzado por los estudiantes de bachillerato. *Enseñanza de Las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *3*, 103-119.

García-Carmona, A. y Criado, A. M. (2010). La competencia social y ciudadana desde la educación científica: una experiencia en torno al debate de la energía nuclear. *Investigación en la Escuela*, *71*, 25-38.

Duschl, R. A. y Grandy, R. (2012). Two Views About Explicitly Teaching Nature of Science. *Science and Education*, *22*, 2109-2139. https://doi.org/10.1007/s11191-012-9539-4

Garrido Espeja, A. (2016). *Modelització i models en la formació inicial de mestres de primària des de la perspectiva de la pràctica científica*. Universitat Autònoma de Barcelona. https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2016/hdl_10803_399837/age1de1.pdf

Garrido, A., Soto, M. y Couso, D. (2022). Formación inicial de docentes de ciencia: posibles aportes y tensiones de la modelización. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *40*(1), 87-105. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3286

Hernández M. I., Couso, D. y Pintó, R. (2015). Analyzing Students' Learning Progressions Throughout a Teaching Sequence on Acoustic Properties of Materials with a Model-Based Inquiry Approach. *Journal of Science Education and Technology*, *24*(2-3), 356-377. https://doi.org/10.1007/s10956-014-9503-y

Izquierdo-Aymerich, M. y Adúriz-Bravo, A. (2003). Epistemological Foundations of School Science. *Science and Education*, *12*, 27-43.

Izquierdo M., Sanmartí, N. y Espinet, M. (1999). Fundamentación y diseño de las prácticas escolares de ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *17*(1), 45-59.

Jiménez-Liso, M. R., Delgado, L., Castillo-Hernández, F. J. y Baños, I. (2021). Contexto, indagación y modelización para movilizar explicaciones del alumnado de secundaria. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *39*(1), 5-25.

Jiménez-Tenorio, N., Aragón-Nuñez, L., Blanco-López, A. y Oliva, J. M. (2016). Comprensión acerca de la naturaleza de los modelos por parte de profesorado de ciencias de secundaria en formación inicial. *Campo Abierto*, *35*(1), 121-132.

López-Simó, V. y Couso, D. (2022). Un currículo operativo con 10 ideas clave sobre energía para construir a lo largo de la escolaridad. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, *19*(3), 3501. https://doi.org/10.25267/Rev_Eureka_ensen_divulg_cienc.2022.v19.i3.3501

López V., Ferres, D. y Couso, D. (2019). L'ensenyament sobre energia a Catalunya. Estat actual, necessitats detectades i reptes de futur. Institut Català d' Energia. https://icaen.gencat.cat/ca/detalls/publicacio/20200124_pub_EnsenyamentSobreEnergia

López, V. y López, Ò. (2022). Modelitzem la transferència, degradació i conservació de l'energia amb gots d'aigua i una safata. *Ciències: revista del professorat de ciències de Primària i Secundària*, (44), 21-27.

López, V. y Pintó, R. (2012). Ensenyar energia a secundària. *Recursos de Física*, (1971), 1-9.

Martínez-Chico, M., Jiménez-liso, M. R. y López-Gay, R. (2014). La indagación en las propuestas de formación inicial de maestros: análisis de entrevistas a los formadores de Didáctica de las Ciencias Experimentales. *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *32*(3), 591-608. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1376

Martínez-Chico, M., Jiménez Liso, M. R. y López-Gay Lucio-Villegas, R. (2015). Efecto de un programa formativo para enseñar ciencias por indagación basada en modelos, en las concepciones didácticas de los futuros maestros. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, *12*(1), 149-166.

Marzábal, A., Delgado, V., Moreira Seguel, P., Merino Rubilar, C., Cabello, V., Manrique, F., Soto, M., Cuellar, L. e Izquierdo, D. (2021). Los modelos materia, reacción química y termodinámica como núcleos estructurantes de una química escolar orientada a la formación ciudadana. *Educación Química*, *32*(5), 109-126. http://dx.doi.org/10.22201/fq.18708404e.2021.5.78135

Millar, R. (2005). *Teaching about energy Teaching about energy Teaching about energy*. University of York, Department of Educational Studies.

Millar, R. (2015). La Enseñanza en materia de energía: desde los conocimientos cotidianos hasta la formación científica. *Alambique, Didáctica de las Ciencias Experimentales*, *80*, 8-16.

Neumann, K., Viering, T., Boone, W. J. y Fischer, H. E. (2013). Towards a learning progression of energy. *Journal of Research in Science Teaching*, *50*(2), 162-188. https://doi.org/10.1002/tea.21061

Ogborn, J. (1986). Energy and Fuel: The Meaning of «The Go of Things». *School Science Review*, *68*(242), 30-35.

Oh, P. y Oh, S. (2011). What teachers of science need to know about models: An overview. *International Journal of Science Education*, *33*(8), 1109-1130. https://doi.org/10.1080/09500693.2010.502191

Oliva J. M. y Aragón M. (2009). Aportaciones de las analogías al desarrollo de pensamiento modelizador de los alumnos en química. *Educación Química*, *20*(1), 41-54. https://doi.org/10.1016/S0187-893X(18)30006-5

Oliva, J. M. (2019). Distintas acepciones para la idea de modelización en la enseñanza de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias didácticas*, *37*(2), 5-24. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2648

Osborne J. (2014). Teaching Scientific Practices: Meeting the Challenge of Change. *Journal of Science Teacher Education*, *25*(2), 177-196. https://doi.org/10.1007/s10972-014-9384-1

Pintó R., Couso D. y Gutiérrez R. (2005). Using research on teachers' transformations of innovations to inform teacher education. The case of energy degradation. *Science Education*, *89*(1), 38-55. https://doi.org/10.1002/sce.20042

Schwarz C., Reiser B., Davis E., Kenyon L., Achér A., Fortus D., … Krajcik J. (2009). Developing a learning progression for scientific modeling: Making scientific modeling accessible and meaningful for learners. *Journal of Research in Science Teaching*, *46*(6), 632-654. https://doi.org/10.1002/tea.20311

Solbes J. y Tarín, F. (1998). Algunas dificultades en torno a la conservación de la energía. *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *16*(3), 387-397.

Soto, M. (2019). *Influencia de una propuesta formativa centrada en la modelización en la evolución del modelo científico escolar de energía en futuros docentes de física y matemática*. Universitat Autònoma de Barcelona. https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2019/hdl_10803_667161/mbsa1de1.pdf

Soto M., Couso D. y López V. (2019). Una propuesta de enseñanza-aprendizaje centrada en el análisis del camino de la energía «paso a paso». *Revista Eureka Sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, *16*(1), 1202-1. https://doi.org/10.25267/Rev

Soto M., Couso D., López, V. y Hernández, M. I. (2017). Promoviendo la apropiación del modelo de energía en estudiantes de 4º de ESO a través del diseño didáctico. *Ápice. Revista de Educación Científica*, *1*(1), 90-106. https://doi.org/10.17979/arec.2017.1.1.2003

Soto, M., Couso, D. y Pintó, R. (2021). Modeling in Pre-service Secondary School Teacher Education: developing an School Scientific Model of Energy. *Journal of Physics: Conference Series 1929*(1), 012087. IOP Publishing. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1929/1/012087

Yin, R. (2003). *Case study research design and methods* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Construction of a Sophisticated Model of Energy in Pre-service Secondary School Physics Teachers

Macarena Soto Alvarado
Pontificia Universidad Católica de Chile, Facultad de Educación, Santiago, Chile
macarena.soto@uc.cl

Digna Couso Lagarón
Universidad Autónoma de Barcelona, Facultad de Educación, Barcelona, España
digna.couso@uab.cat

Energy is one of the most relevant concepts in the science teaching and learning process: it is present transversally in most science school curricula and is one of the greatest scientific ideas to be learned in mandatory schooling. Its understanding can be useful for students to predict, give their opinion and make informed decisions about socially relevant problems (López-Simó & Couso, 2022; Marzábal et al., 2021).

On account of its potential, several investigations have explored the construction processes of the model of energy, identifying intrinsic complexities that hinder its learning, some of which are: *a*) the polysemy/ambiguity of the concept of energy (López & Pintó, 2012); *b*) the multiple alternative conceptions of students, teachers and school texts (Doménech-Casal, 2018; Doménech et al., 2013; Pintó et al., 2005) and *c*) the conceptual reductionism evidenced in some curricula, in which the teaching of energy is reduced to the criticized notion of «energy transformation» (Millar, 2005; Soto et al., 2019).

The relevance of the model of energy and the difficulties mentioned above led us to focus this research on the initial training of educators, considering that it is necessary for them to master a school scientific model of energy consistent with the scientific model and which enables their teaching to work in the 12-16 years-old stage. To do this, we explored which models of energy were constructed by pre-service physics teachers in Chile after participating in a teaching and learning sequence (TLS) focused on modeling. We consider modeling to be an essential scientific practice to build abstract school scientific models such as the model of energy. But, in addition, we consider that offering future teachers the possibility of experiencing modeling in the first person can allow them to learn how to do science and understand how it works, as well as favor the acquisition of tools that contribute to the development of their pedagogical content knowledge.

In general terms, the results showed that participation in scientific modeling practices through an intentionally designed TLS contributes to the sophistication of energy models of the pre-service teachers and to the construction of a balanced model of energy. However, despite the fact that diversity of contexts, variety of learning opportunities related to modeling, and similar cognitive demands were included throughout the proposed TLS in order to address each of the ideas of the model of energy, these conditions were not sufficient to develop a sophisticated and balanced SSM of energy in all students. The performance of pre-service teachers revealed that the ideas of energy conservation and degradation are more abstract and require other learning opportunities.

We consider it essential to promote opportunities for the construction of disciplinary knowledge in the initial training of science teachers, as we have done in this research. But it is also crucial to generate instances of explicit reflection with future teachers on the modeling process and the teaching and learning methodology they have experienced, in order to favor the transfer of this approach to the classroom.

ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS 41-2 (2023), 47-69
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5764
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Análisis de la comprensión y razonamiento epistémico de los estudiantes sobre los equilibrios de solubilidad

Analysis of Students' Epistemic Reasoning and Understanding of the Solubility Equilibrium

M. Consuelo Domínguez Sales
Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Facultad de Magisterio, UV
consuelo.dominguez-sales@uv.es • https://orcid.org/0000-0001-9820-4543

Oskar González-Mendia
Departamento de Pintura, Facultad de Bellas Artes (UPV/EHU)
oskar.gonzalezm@ehu.eus • https://orcid.org/0000-0001-6495-1815

Jenaro Guisasola
Departamento de Física Aplicada, Universidad del País Vasco (UPV/EHU)
jenaro.guisasola@ehu.eus • https://orcid.org/0000-0002-0817-3905

Daniel Zuazagoitia
Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales, Facultad de Educación y Deporte (Sección Magisterio) (UPV/EHU)
daniel.zuazagoitia@ehu.eus • https://orcid.org/0000-0001-9954-7855

RESUMEN • Los equilibrios de solubilidad constituyen un contenido esencial del currículum educativo de química introductoria. Para detectar las dificultades de aprendizaje del alumnado respecto a la forma en que se alcanza dicho equilibrio y qué sucede durante este proceso, se ha diseñado un cuestionario de preguntas abiertas. Las respuestas se analizaron mediante un análisis fenomenográfico, lo que permitió definir categorías interpretativas del conjunto del alumnado. El análisis epistemológico de los argumentos ofrece «explicaciones intermedias» entre ideas ingenuas e ideas científicas, además de respuestas fragmentadas e inconsistencia interna. Los resultados muestran que la comprensión de los equilibrios de solubilidad se ve dificultada por deficiencias en la comprensión de los conceptos de equilibrio, solubilidad de una sal y saturación de la disolución, así como los problemas para relacionarlos.

PALABRAS CLAVE: Equilibrios de solubilidad; Solubilidad; Saturación; Curvas de solubilidad; Categorías explicativas.

ABSTRACT: • Solubility equilibria constitute an essential content of the introductory chemistry curriculum. To detect students' learning difficulties regarding how such equilibrium is reached and what happens during this process, an open-ended questionnaire was designed. The answers were analysed by means of a phenomenographic analysis, which made it possible to define interpretative categories of the student body. The epistemological analysis of the arguments offers «intermediate explanations» between naive and scientific ideas, as well as fragmented answers and internal inconsistency. Our results show that the understanding of solubility equilibria is hampered by deficiencies in the understanding of the concepts of equilibrium, salt solubility and saturation of a solution as well as by difficulties to relate all these concepts.

KEYWORDS: Solubility equilibria; Solubility; Saturation; Solubility curves; Explanatory categories.

Recepción: agosto 2022 • Aceptación: enero 2023 • Publicación: junio 2023

Domínguez Sales, M. C., Guisasola, J., González-Mendia, O. y Zuazagoitia, D. (2023). Análisis de la comprensión y razonamiento epistémico de los estudiantes sobre los equilibrios de solubilidad. *Enseñanza de las Ciencias*, *41*(2), 47-69.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5764

INTRODUCCIÓN

Los equilibrios de solubilidad están presentes tanto en fenómenos de la vida cotidiana (formación de estalactitas o residuos calcáreos en tuberías) como en los relativos a la salud (caries o problemas renales). En los laboratorios de química son necesarios para identificar iones, predecir la formación de precipitados al mezclar disoluciones o separar sustancias mediante la técnica de precipitación fraccionada. Por ello, conocer las dificultades de comprensión que su estudio genera en los estudiantes es fundamental para diseñar el currículum de los cursos introductorios de Química General.

Diferentes investigaciones han señalado la existencia de dificultades en la comprensión de los equilibrios de solubilidad (Onder y Geban, 2006; Setiowati et al., 2018), y han mostrado que su estudio no es trivial (Raviolo, 2001). Pese a ello, la enseñanza tradicional se centra más en la resolución de problemas cuantitativos que en la comprensión significativa de los conceptos implicados y la relación entre ellos (Nakhleh, 1993; Bilgin et al., 2009).

El presente estudio añade a las investigaciones ya realizadas sobre los equilibrios de solubilidad un análisis sobre la necesidad de ligar el estudio de este proceso con la comprensión de los conceptos de solubilidad de una sal y saturación de una disolución, así como la relación entre ambos. Para llevarlo a cabo nos hemos basado en la teoría constructivista de aprendizaje, en particular, en el enfoque de teoría marco, que defiende empíricamente que los estudiantes de química elaboran sus ideas mediante un proceso de razonamiento epistémico hasta alcanzar la comprensión de un concepto (Vosniadou, 2012). Conocer mejor las concepciones de los estudiantes y sus modelos epistémicos «intermedios» sobre el tema permitirá elaborar actividades que les salgan al paso y se puedan utilizar en los programas de enseñanza basados en las metodologías activas que proponen los actuales currículos educativos (Tahirsylaj et al., 2015).

La siguiente sección muestra una revisión de la literatura existente sobre dificultades de comprensión de los conceptos de solubilidad y equilibrios de solubilidad y plantea las preguntas que dejan abiertas y generan esta investigación. A continuación, se explican el marco teórico y la metodología utilizada, para luego pasar al contexto de la investigación, el cuestionario utilizado, sus objetivos y las razones aceptadas como válidas. Finalmente, se muestran los resultados obtenidos y la evidencia de las categorías definidas para finalizar con las conclusiones del trabajo.

ESTUDIOS PREVIOS SOBRE DIFICULTADES DEL ALUMNADO EN LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE SOLUBILIDAD Y LOS EQUILIBRIOS DE SOLUBILIDAD

Los equilibrios de solubilidad constituyen un tema abstracto y de difícil comprensión porque requieren un adecuado manejo de las disoluciones (Çalik et al., 2010; Prieto et al., 1989), de los conceptos que estas implican (Dahsah y Coll, 2007) y de otras ideas básicas subyacentes. Posteriormente, se ofrece una revisión de la literatura referente a las dificultades relativas a la solubilidad, al concepto de equilibrio y a los equilibrios de solubilidad.

Dificultades de comprensión de los conceptos de solubilidad y saturación

Diferentes trabajos han mostrado dificultades de comprensión del concepto de solubilidad entre los estudiantes de secundaria, que consideran que un aumento del disolvente aumenta la solubilidad de la sal (Blanco y Prieto, 1997; Uzuntiryaki y Geban, 2005), tal vez porque observan que añadir más agua a una disolución permite disolver más cantidad de sólido. También se han manifestado dificultades entre el profesorado, como no tener en cuenta el efecto de la temperatura sobre la solubilidad (Onder y Geban, 2006).

El concepto de saturación es otra fuente de problemas de comprensión, tanto en estudiantes de bachillerato (Adadan y Sabasci, 2012) como en universitarios de primer año de grados de ciencias e ingeniería (Mulford y Robinson, 2002), que consideran que una disolución saturada se convierte en sobresaturada cuando se evapora parte de esta, o bien que una disolución que contiene soluto sin disolver en el fondo está sobresaturada (Adadan y Sabasci, 2012). Ante esta situación de soluto en el fondo sin disolver, alumnos universitarios afirmaron que quedaría una disolución saturada al filtrar la disolución (Pinarbasi y Campolat, 2003). En otros trabajos manifestaron que su concentración aumentaría al añadir más soluto a la disolución (Mulford y Robinson, 2002; Krause y Tasooji, 2007; Krause y Isaacs-Sodeye, 2013).

Algunos autores han apuntado que la dificultad de comprensión del fenómeno de la saturación podría derivar de una deficiente comprensión conceptual (Krause y Tasooji, 2007), como muestra el hecho de que a los estudiantes les resulte más fácil calcular la solubilidad que explicar su significado (Muchson et al., 2020), en línea con los trabajos que afirman que la capacidad de resolver problemas matemáticos no presupone la comprensión de los conceptos ocultos tras estos (Nakhleh, 1993; Nurrembern y Pickering, 1987; Sawrey, 1990; Johnstone, 2010).

Otra dificultad manifestada por estudiantes de secundaria es la confusión entre las disoluciones saturadas e insaturadas y las disoluciones concentradas y diluidas. Çalik (2005) opina que la causa puede ser su uso en el lenguaje diario; Adadan y Savasci (2012) lo achacan a la complejidad del concepto de concentración a nivel simbólico, y otros autores aducen el hecho de que se trata de una propiedad intensiva que, además, hace uso de la proporcionalidad inversa para el volumen de la disolución (Stavy, 1981; Johnstone, 2010; De Berg, 2012; Raviolo et al., 2022).

Dificultades en la comprensión del concepto de equilibrio

El equilibrio químico es difícil de asimilar tanto por su abstracción (Tyson et al., 1999; Kousathana y Tsaparlis, 2002) como por la tendencia del alumnado a aplicar los conceptos implicados, memorizando algoritmos sin una comprensión real (Quílez, 2004). Además, la experiencia previa con reacciones completas genera dificultades para comprender las reacciones de equilibrio (Hackling y Garnett, 1985; Pedrosa y Dias, 2000) y para diferenciar entre ambas (Wheeler y Kass, 1978). Algunos alumnos no pueden entender que, en el equilibrio, la reacción directa deje de avanzar, a pesar de la existencia de reactivos (Hernando et al., 2003), y otros creen que se dan proporciones aritméticas entre las concentraciones de reactivos y productos (Gorodetsky y Gussarsky, 1986; Hackling y Garnett, 1985).

La variación de las velocidades de ambas reacciones plantea muchos problemas al alumnado. Algunos consideran que la velocidad de la reacción directa aumenta con el tiempo, desde que se mezclan los reactivos hasta alcanzar el equilibrio (Hackling y Garnett, 1985); otros confunden la velocidad con el alcance de la reacción (Wheeler y Kass, 1978), mientras que otros suponen que la reacción inversa no comienza hasta que no se agotan los reactivos de la reacción directa (Gorodetsky y Gussarsky, 1986; Wheeler y Kass, 1978; van Driel et al., 1998), por lo que olvidan que en el equilibrio las dos reacciones tienen lugar simultáneamente.

La dificultad para relacionar los diferentes niveles de interpretación supone otro obstáculo importante. Así, el alumnado de secundaria que, a nivel macroscópico sabe que el soluto molido se disuelve más rápidamente, no es capaz de visualizar en el nivel de estudio submicroscópico, la interacción entre las partículas del soluto y el disolvente (Çalik, 2005), no sabe dibujar sus posiciones relativas en la disolución (Çalik et al. 2005; Devetak et al., 2009), mantiene el modelo de continuidad que se aprecia a nivel macroscópico (Prieto et al., 1989) o no tiene en cuenta que las partículas están en continuo movimiento (Lee et al., 1993). Precisamente, esta falta de percepción del movimiento continuo de las partículas es una de las que interfiere en la idea del equilibrio dinámico, lo que lleva a pensar, tanto a estudiantes de bachillerato (Gorodetsky y Gussarsky, 1986; Gussarsky y Gorodetsky, 1990) como a universitarios (Thomas y Schwenz, 1998), que cuando se alcanza el equilibrio no se produce ninguna reacción.

Dificultades en la comprensión de los equilibrios de solubilidad

Numerosas investigaciones han señalado la existencia de dificultades en la comprensión de los equilibrios de solubilidad, aunque se han centrado fundamentalmente en el estudio de problemas numéricos relacionados con el producto de solubilidad (Setiowati et al., 2018; Nakiboğlu y Nakiboğlu, 2019; Muchson et al., 2020).

Los estudios que se centran en el proceso del equilibrio inciden en la falta de comprensión de la variación de velocidades de las reacciones directa e inversa. En unos casos, los estudiantes manifiestan que no hay reacción de precipitación antes del equilibrio, que la velocidad de disolución aumenta con el tiempo desde que se mezcla el sólido con el disolvente hasta que se establece el equilibrio, que la disolución se detiene al alcanzar el equilibrio o incluso que en el equilibrio no hay precipitación ni disolución (Onder y Geban, 2006; Cam y Geban, 2013).

En cuanto a las posibles causas de las dificultades, algún autor señala que los equilibrios de solubilidad suman a las dificultades de comprensión del equilibrio la de los cálculos que conllevan (Onder y Geban, 2006), la necesidad de comprender la relación entre los conceptos de solubilidad y disolución saturada (Setiowati et al., 2018) o la incapacidad para diferenciar entre equilibrio químico y equilibrio físico (Tyson et al., 1999), cuestión crucial ya que, en los últimos, a una temperatura determinada, la saturación de la disolución no permite que aumente su concentración, aunque se adicione más sólido a la mezcla en equilibrio, situación que no se produce en el equilibrio químico.

Las dificultades detectadas no solo incluyen contenidos conceptuales, sino también razonamientos incompletos y, con frecuencia, la ausencia de argumentos basados en la metodología científica. Estos elementos epistemológicos y ontológicos se deben tener en cuenta, puesto que no se puede esperar que el alumnado asimile los contenidos conceptuales si no se tienen en consideración los aspectos procedimentales y ontológicos (Chi et al., 1994). Así pues, en este estudio hemos planteado la comprensión de los elementos epistemológicos en el razonamiento como construcción del conocimiento mediante la repetición de los procesos científicos. Se consideran razonamientos epistemológicamente favorables a los objetivos del currículo aquellos que razonan a partir de los datos aportados en la pregunta, el conocimiento previo de la teoría, la comprobación de los supuestos que hacen argumentando con evidencias, así como la preocupación por la coherencia explicativa. Aunque se pueden definir más elementos epistemológicos de la actividad científica, aquí mencionamos los que han guiado el análisis de las cuestiones propuestas en esta investigación (Hammer, 1994; Hofer y Pintrich, 1997; Guisasola et al., 2008).

Para evitar las dificultades expuestas, Raviolo (2001) aconseja acostumbrar a los estudiantes a establecer conexiones apropiadas entre conceptos y describir los fenómenos en los tres niveles de representación. Los libros de texto, sin embargo, presentan los contenidos en capítulos diferentes, sin aludir, en muchas ocasiones, a la relación entre ellos. Por ejemplo, el texto de Química Introductoria de Chang et al. (2010) utiliza la definición cuantitativa de la solubilidad en el capítulo 4 (p. 125), para predecir la formación de un precipitado. En el capítulo 12 define los tipos de disoluciones (p. 514) y ofrece la definición cualitativa de solubilidad (p. 516) y las curvas de solubilidad (p. 521). Finalmente, estudia los equilibrios de solubilidad en el capítulo 16 (p. 735). Esta falta de relación puede llevar al alumnado a considerar que no existe conexión entre ellos, cuando en realidad están todos interrelacionados, como muestra la figura 1.

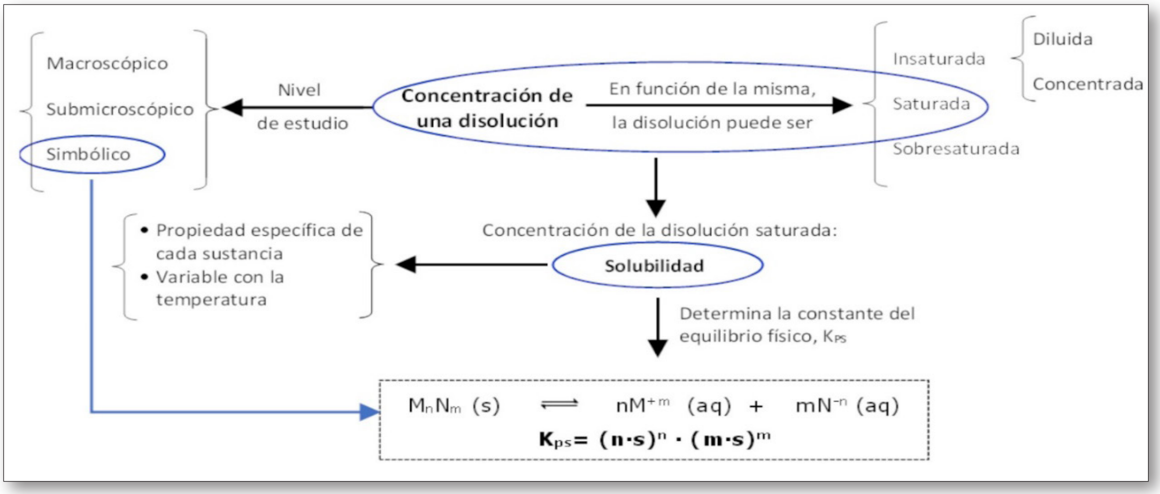


Fig. 1. Interrelación entre conceptos relativos a los equilibrios de solubilidad.

Los estudios revisados muestran que hay pocas investigaciones centradas en la comprensión de los equilibrios de solubilidad y los conceptos subyacentes, por lo que en este trabajo nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

– ¿Cómo entienden los estudiantes los equilibrios de solubilidad y qué razonamientos epistemológicos utilizan para explicarlos?
– ¿Entienden el papel que juegan en estos los conceptos de solubilidad de una sal y de saturación de una disolución? ¿Son capaces de establecer la relación entre todos ellos?

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

La metodología utilizada para responder a las preguntas de investigación se basa en la teoría socio-constructivista del aprendizaje, entendida como construcción del conocimiento (Driver, 1989), que reconoce las formas de expresión oral y escrita como instrumentos de medición entre el plano social y el personal (Vygotsky, 1978; Wandersee et al., 1994; Taber, 2006; Leach y Scott, 2008). Nuestro trabajo enfoca el aprendizaje en términos de desarrollo de un razonamiento causal complejo y un proceso de modelado riguroso (Scott et al., 2008). Las concepciones de los estudiantes se describen tanto en términos de su interpretación sobre el fenómeno estudiado como del razonamiento utilizado para comprenderlas (Vosniadou, 2012).

De acuerdo con el marco teórico descrito, para indagar sobre las dificultades de los estudiantes, este trabajo utiliza un cuestionario de preguntas abiertas. Para responderlas es necesario utilizar un razonamiento creativo, basado en contenidos científicos, frente a un razonamiento imitativo, memorizado, basado en un algoritmo o en propiedades superficiales (Lithner, 2008). Por ello, se ha animado al alumnado a responder sin limitaciones de espacio.

Ha participado en la investigación una muestra de conveniencia formada por dos grupos de diferente nivel. Por una parte, 185 estudiantes de bachillerato (en adelante EB) de diferentes institutos de la Comunidad Valenciana, cuyos resultados se ofrecen agrupados, dado que el estadístico chi cuadrado no ha ofrecido diferencias significativas en las frecuencias de las diferentes categorías. Por otra parte, 97 estudiantes de primer curso del grado en Física (en adelante EU), que cursaban la asignatura Química II en la Facultad de Ciencia y Tecnología de la UPV/EHU. Todos ellos cumplimentaron el cuestionario en periodo de clase, dos semanas después de haber estudiado el tema «Equilibrios de solubilidad» durante el curso académico 2017-2018.

El método utilizado para examinar las respuestas ha sido el análisis fenomenográfico, considerado como una forma consistente para describir y explicar la variación en las concepciones del alumnado (Marton, 1981; Marton y Booth, 1997), mediante métodos cualitativos, con entrevistas y/o cuestionarios de preguntas abiertas, y que ha sido ampliamente utilizado en la investigación sobre didáctica de la química (Ebenezer y Erickson, 1996; Ebenezer y Fraser, 2001; Çalik, 2005).

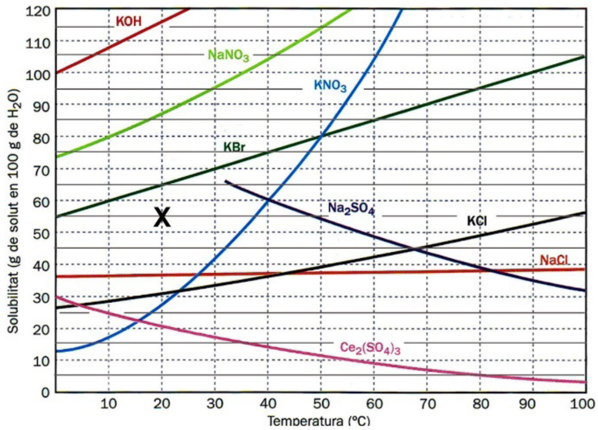
Las respuestas de los estudiantes se han analizado en conjunto, considerando las diferentes formas de percibir y entender la realidad como categorías que la describen (Marton, 1981), y se han categorizado según criterios fenomenográficos: *a*) cada categoría revela algo distintivo sobre una forma de entender el tema en cuestión; *b*) las categorías están lógicamente relacionadas, típicamente como una jerarquía estructuralmente inclusiva de relaciones; *c*) la variación crítica de la experiencia observada en los datos está representada por un conjunto de categorías lo más pequeño posible (Marton y Booth, 1997, pp. 125-126). Para determinarlas, uno de los investigadores generó un borrador con las categorías obtenidas en cada cuestión a partir de las respuestas de los estudiantes. La comparación de estas categorizaciones con las de otros dos investigadores ofreció un elevado consenso con un coeficiente kappa de Cohen de 0,88, lo que indica una alta fiabilidad. Las diferencias en las descripciones de las categorías o en la colocación de las respuestas se resolvieron a partir de la única evidencia de la comprensión manifestada por el estudiante en su respuesta. Las categorías finales se definieron mediante un proceso iterativo de consenso. El conjunto de categorías nos ha permitido ampliar el conocimiento del proceso de comprensión de los fenómenos analizados (Rivard, 1994), al tiempo que ha servido para explicitar el razonamiento epistémico que justifica esta comprensión (Prain y Hand, 1999).

DISEÑO EXPERIMENTAL

El instrumento utilizado ha sido un cuestionario de preguntas abiertas. Se trata de un tipo de preguntas muy apropiado porque, además de responder, el alumnado debe justificar su respuesta, lo que permite identificar las concepciones alternativas junto a sus razones subyacentes (Treagust, 1988). Para su validación se recabó la opinión de tres profesores universitarios y tres de educación secundaria que impartían estos niveles educativos y que consideraron adecuados tanto los objetivos como los contenidos. Las sugerencias propuestas se recogieron en una segunda versión, que mantenía los objetivos iniciales y fue utilizada en un estudio piloto con 30 estudiantes de cada nivel, que consideraron que las cuestiones eran claras y comprensibles.

Descripción del cuestionario

El cuestionario está formado por seis cuestiones abiertas, que se describen a continuación junto a sus objetivos y las explicaciones que debe ofrecer el alumnado. Las tres primeras cuestiones (C1, C2 y C3) se acompañan de una gráfica de curvas de solubilidad de diferentes sales (figura 2). Sus objetivos son indagar si los estudiantes reconocen que cada sustancia posee una curva de solubilidad diferente y saben leer su valor en función de la temperatura y el volumen del disolvente. En la (C1) este valor se lee sobre la propia curva de solubilidad; en la (C2), por debajo de la curva de solubilidad, donde se encuentran las regiones que representan disoluciones no saturadas; y en la (C3), por encima de esta, en la que se representan las disoluciones sobresaturadas (Petrucci et al., 2011, p. 568).



Utiliza la información que proporciona la gráfica para responder, razonadamente:

C1. Qué cantidad de $NaNO_3$ se puede disolver en 0,2 L de agua a 10 ºC.

C2. El punto indicado con una X en la gráfica, ¿representa una disolución no saturada de KBr?

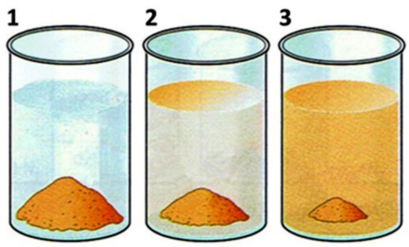
C3. El punto indicado con una X sobre la gráfica, ¿representa una disolución sobresaturada de KNO_3 ?

Fig. 2. Cuestiones C1, C2 y C3 y gráfica de solubilidad que las acompaña.

La cuestión cuatro (C4) dice así: «Explica el significado cualitativo del concepto de solubilidad». Su objetivo es averiguar si el alumnado entiende que el concepto responde a la necesidad de disponer de «una medida de la cantidad de soluto que se disolverá en cierto disolvente a una temperatura específica» (Chang, 2010, p. 516), o bien se limitan a la definición cuantitativa, expresada como la «máxima cantidad de un soluto que se disolverá en una cantidad dada de disolvente, a una temperatura específica» (Chang, 2010, p. 125) o como «la concentración de la disolución saturada» (Petrucci et al., 2011, p. 568). Las respuestas permitirán ver si relacionan este concepto con la información que ofrecen las curvas de solubilidad (Chang, 2010, p. 522; Petrucci et al., 2011, p. 568).

La cuestión cinco (C5) analiza el proceso de disolución a nivel macroscópico, mientras que la seis (C6) profundiza en el momento en el que se alcanza el equilibrio. Ambas cuestiones (figura 3) se acompañan de una imagen que muestra tres instantes del proceso.

La imagen representa el proceso de disolución del bromuro de cobre (CuBr) a 25 ºC, desde que se añade al agua (1) hasta que ya no se disuelve más (3).



C5. Representa, en cada uno de los tres recipientes, ayudándote de flechas de diferente longitud:

(a) la velocidad de disociación de los iones de la sal y

(b) la velocidad de precipitación de los iones en la disolución.

Justifica brevemente el motivo de tu respuesta.

C6. Explica por qué, llegados al punto (3), la sal no se disuelve más.

Fig. 3. Enunciado de las cuestiones C5 y C6.

El objetivo de la C5 es averiguar si el pensamiento del alumnado sobre las velocidades de disolución y precipitación en esas etapas es asimilable al aceptado en los textos científicos (figura 4) (Petrucci et al., 2011, p. 568).

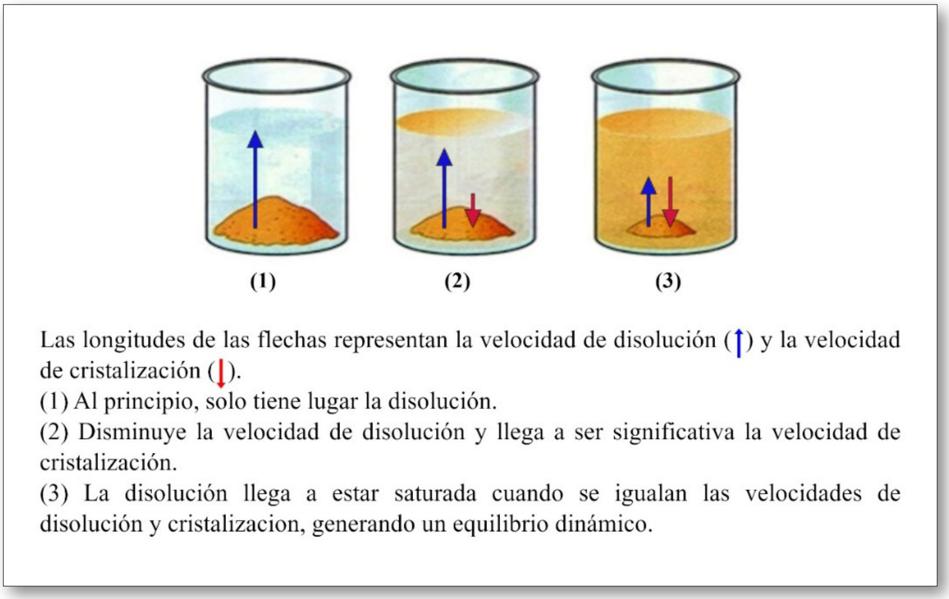


Fig. 4. Explicación de la formación de una disolución saturada (C5).

Finalmente, el objetivo de la C6 (véase figura 3) es averiguar si los estudiantes reconocen que en el tercer recipiente hay una sal en equilibrio físico con su disolución, y si pueden relacionar los conceptos implicados (Petrucci et al., p. 568), como se muestra en la figura 5.

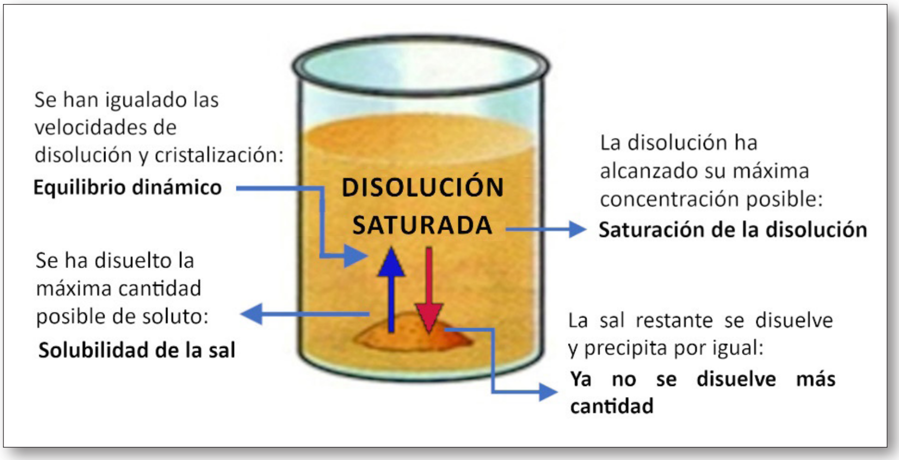


Fig. 5. Conceptos implicados en el equilibrio físico de una sal con su disolución.

RESULTADOS

El análisis de las respuestas del alumnado ha permitido elaborar un conjunto de categorías para cada cuestión. Se ha asignado una letra a cada una de ellas, desde la A, que indica una compresión correcta de conceptos y razonamientos, hasta respuestas incoherentes sin sentido lógico, pasando por categorías «intermedias» en función del grado de comprensión mostrado y la riqueza de las respuestas.

Los resultados de cada cuestión, con sus correspondientes categorías, se exponen en las figuras 6, 8, 9, 10 y 12. En ellas, tanto los porcentajes de las categorías como de las subcategorías están referidos al total de la muestra.

Interpretación de las curvas de solubilidad

Resultados de la cuestión C1 (véase figura 6)

Categoría A: Respuestas académicamente correctas. El alumno lee correctamente la gráfica, realiza la conversión pertinente para 0,2 l de agua, y obtiene un resultado de 160 g. El elevado número de respuestas correctas manifiesta, en principio, una adecuada comprensión del concepto y del nivel simbólico de expresión matemática.

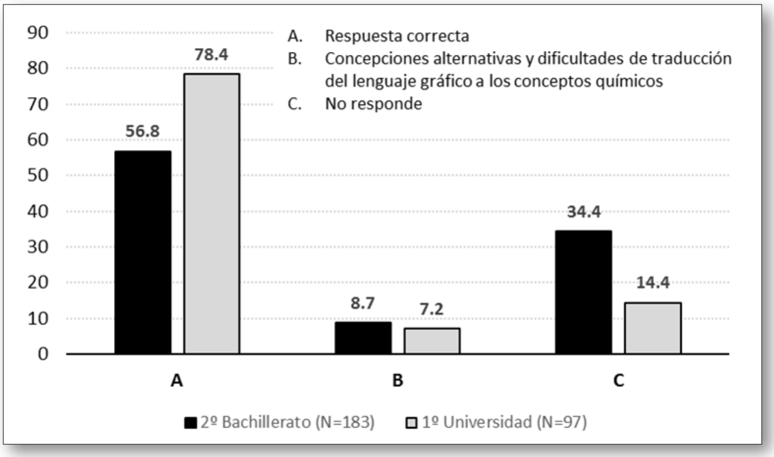


Fig. 6. Categorías y porcentaje de respuestas para cada categoría de la cuestión C1.

Categoría B: Comprensión parcial con concepciones alternativas. Menos del 9 % de las respuestas, que realizan interpretaciones incorrectas de las curvas de solubilidad o manifiestan dificultad para traducir el lenguaje gráfico al lenguaje conceptual químico.

Ejemplos:

> Lo mismo que con 0,1 l, valiéndonos de la información de la gráfica podemos observar que su solubilidad es 80 g/ml a 10 ºC, si en vez de poner 100 ponemos 200 la solubilidad cambia, pero la cantidad de $NaNO_3$ no (EU 91).

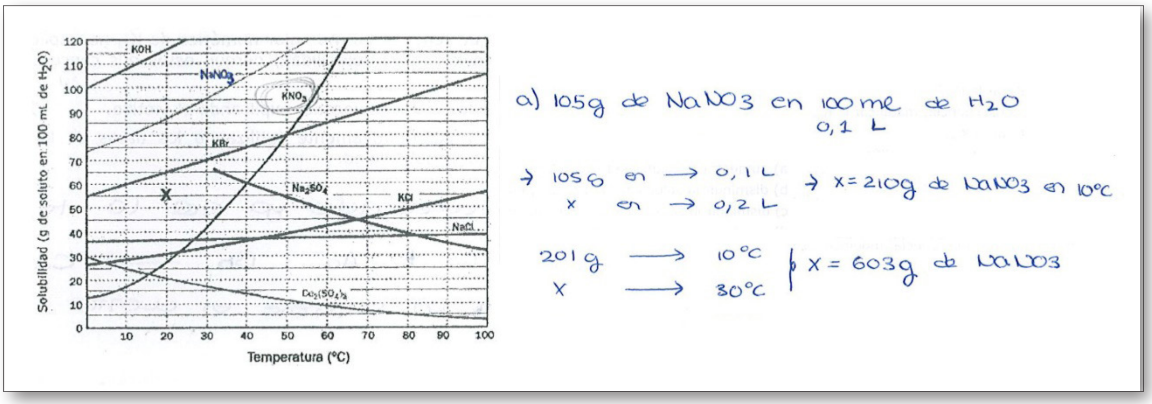


Fig. 7. Respuesta a la C1, cat. B, del alumno EB 215.

Resultados de las cuestiones C2 y C3 (véase figura 8)

C2 y C3 han generado la misma categorización, por lo que sus resultados se ofrecen conjuntamente.

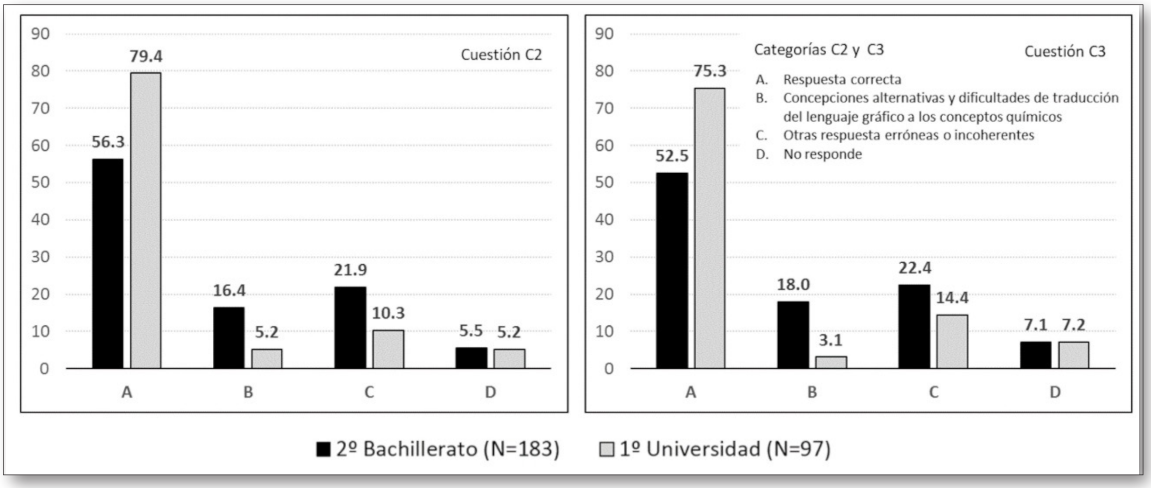


Fig. 8. Categorías y porcentaje de respuestas a las cuestiones C2 (izquierda) y C3 (derecha).

Categoría A: Respuestas que incluyen todos los componentes válidos, bien cualitativos, en función de que la X esté por encima o por debajo de la curva de solubilidad, o bien cuantitativos, que en el caso de C2 supone explicar que en 100 ml de agua a 20 ºC se pueden disolver 65 g y solo se han disuelto 55 g, por lo que la X representa una disolución insaturada. En la C3, referente al KNO_3, se pueden disolver como máximo unos 25 g de la sal en 100 ml de agua a 20 ºC, por lo que el valor indicado por X representa una disolución sobresaturada.

Categoría B: Manifiestan comprensión parcial con diferentes concepciones alternativas. Algunas son de tipo conceptual, como confundir la capacidad de disolverse con la velocidad de la disolución (estudiado también por Wheeler y Kass, 1978), o identificar la solubilidad de la sustancia con cualquier valor de la concentración de la disolución. Otros manifiestan errores de trasposición incorrecta del lenguaje gráfico al lenguaje conceptual químico, como asociar el concepto de saturación con la inclinación de la curva.

Ejemplos de categoría B para C2 y C3:

> No, porque la KBr mantiene un crecimiento constante y regular a medida que aumenta la temperatura (EB 117; C2, cat. B).
>
> Sí, solo hace falta una solubilidad de 27,5 a 20 ºC para que esté saturada y la X marca una solubilidad de 55 (EU 26; C3, cat. B).

Categoría C: Explicaciones sin coherencia lógica en la argumentación.

Ejemplo. Respuesta a la C2:

> No está saturada, ya que no se satura, por eso está fuera de la línea (EB 219; C2, cat. C).

Significado atribuido al concepto de solubilidad

Resultados de la cuestión C4 (véase figura 9)

Esta cuestión ha generado un amplio abanico de visiones del alumnado, lo que pone de manifiesto su dificultad para ofrecer una definición conceptual de la solubilidad.

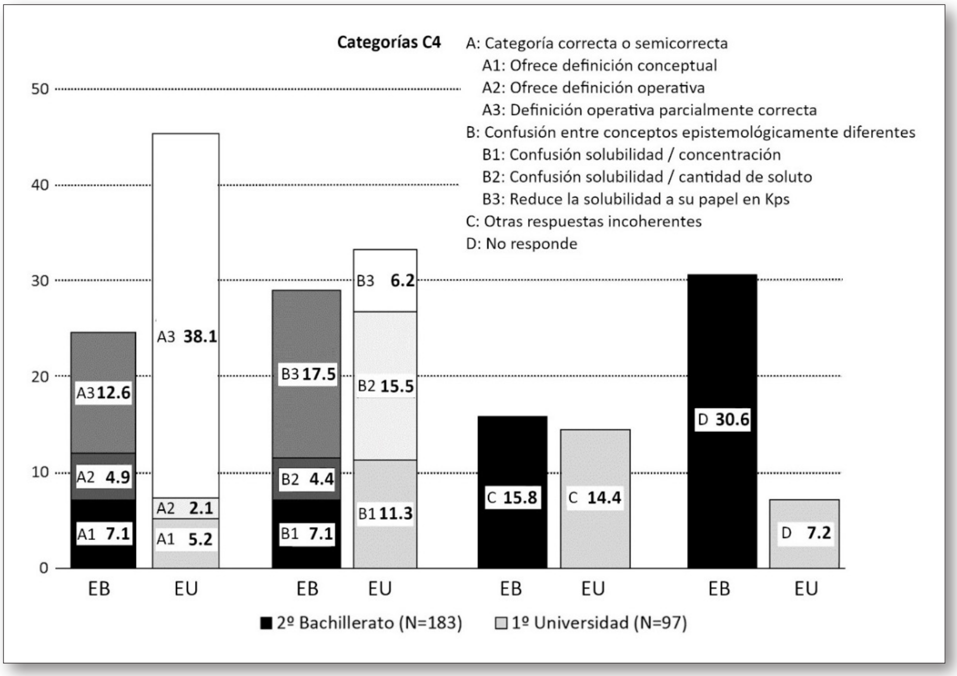


Fig. 9. Categorías y porcentaje de respuestas para la cuestión C4.

Categoría A: Aunque la pregunta solicitaba la definición cualitativa, se han incluido en esta categoría todas las definiciones correctas para la solubilidad, organizadas en tres subcategorías que, en total, no alcanzan el 25 % de los EB y el 50 % de los EU:

A1. Respuestas que ofrecen la definición cualitativa solicitada.
A2. Respuestas que ofrecen una definición cuantitativa correcta.
A3. Respuestas de tipo cuantitativo, que omiten citar la dependencia de la solubilidad respecto de la temperatura.

Ejemplos:

La solubilidad (s) de un compuesto se refiere a la cantidad de ese compuesto que se puede disolver a una determinada temperatura en un determinado volumen de disolvente (EU 19, C4, cat. A2).

La solubilidad se representa con la letra s y es la cantidad máxima (en gramos o moles) que se puede disolver en un volumen concreto. Está relacionado con la K_{PS} (EU 53, C4, cat. A3).

Categoría B: Respuestas que confunden el concepto de solubilidad con otros epistemológicamente diferentes. Agrupan alrededor de un tercio del alumnado, organizado en tres subcategorías:

B1. Identifican la solubilidad con cualquier concentración de la disolución.
B2. Entienden la solubilidad como la cantidad de soluto, en masa, sin considerar el volumen de disolución.
B3. No atribuyen significado propio a la solubilidad, sino que la definen como uno de los términos que aparecen en la definición operativa de K_{PS}.

Ejemplos:

La solubilidad indica los gramos de soluto que se disuelven por un volumen dado de disolvente (EU 26; C4, cat. B1).
La solubilidad son los gramos que se pueden disolver de una sustancia (EB 117; C4, cat. B2).
La solubilidad es los moles partido litros en relación con la K_{PS}(EB 19; C4, cat. B3).

Categoría C: Explicaciones que manifiestan razonamientos imitativos, memorísticos y sin significado ni coherencia lógica. Agrupa alrededor de un 15 % de los alumnos de cada una de las muestras.

Categoría D: No responden a la pregunta, lo que pone de manifiesto cierto déficit cognitivo subyacente respecto al concepto de solubilidad. Recoge casi un tercio de los EB y un 7,2 % de los EU, lo que pone de manifiesto la mejora cognitiva experimentada por el alumnado universitario.

¿Cómo entienden los estudiantes el equilibrio de solubilidad?

Resultados de la cuestión C5 (véase figura 10)

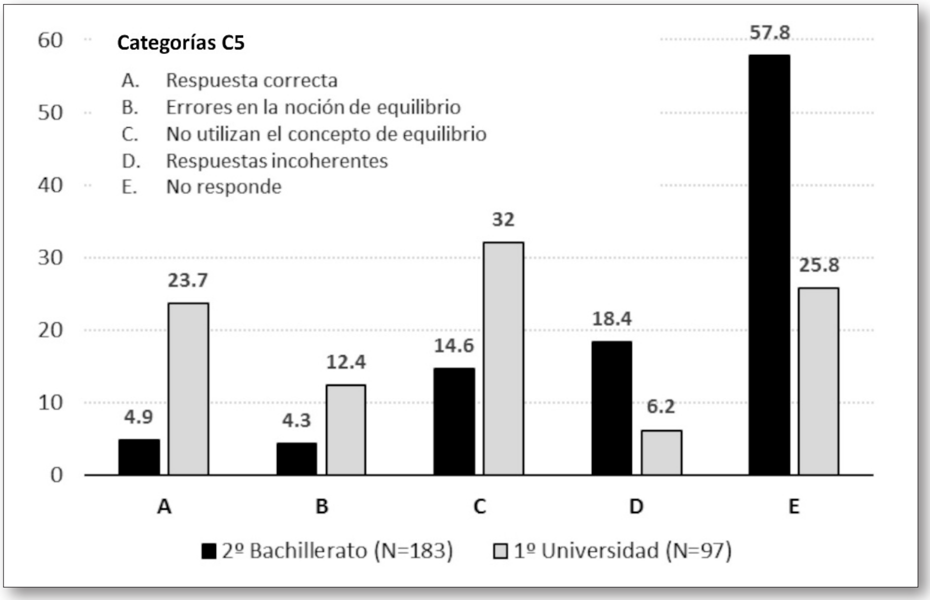


Fig. 10. Categorías y porcentaje de respuestas para cada categoría de la cuestión C5.

Categoría A: Respuestas correctas de acuerdo con la explicación ofrecida en la figura 4. No alcanzan el 5 % de los EB ni el 25 % de los EU, lo que manifiesta una clara mejora de los últimos.

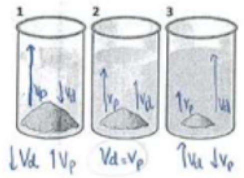
Categoría B: Errores que ponen de manifiesto la falta de comprensión del equilibrio, como verbalizar su existencia sin comprender como se alcanza o situarlo en el recipiente (2).

Ejemplos: Se muestran en la figura 11.

Categoría C: Manifiestan desconocimiento del concepto de equilibrio, así como dificultades epistemológicas con argumentaciones macroscópicas de distintos grados de complejidad, como otorgar al líquido la capacidad para «aceptar» más o menos soluto o confundir entre disolución saturada y sobresaturada. Suponen alrededor del 15 % de los EB y el 30 % de los EU.

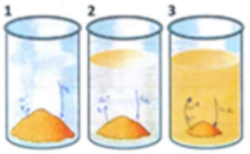
Ejemplos: Se muestran en la figura 11.

Cat. B. NO ENTIENDE QUÉ SIGNIFICA EL EQUILIBRIO DE SOLUBILIDAD



Cuando el soluto está más disociado, quiere decir que habrá menos precipitado (EB 145)

Cat. B. NO ENTIENDE COMO SE ALCANZA EL EQUILIBRIO DE SOLUBILIDAD

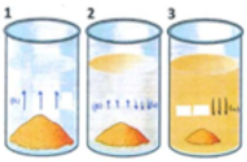


La velocidad de disociación aumenta y la de precipitación decrece hasta que ambas velocidades son iguales. En ese momento se alcanza el equilibrio (EU 59)

Cat. B. CONSIDERA QUE EL EQUILIBRIO SE PRODUCE EN EL RECIPIENTE (2)

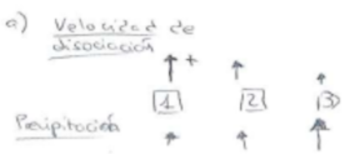
1) Se disuelve
2) Se produce el equilibrio
3) Precipita (EB 12)

Cat. C. DESCONOCE EL CONCEPTO DE EQUILIBRIO.
RECONOCE REACCIÓN DIRECTA E INVERSA



a) Al principio los iones empiezan a disociarse rápido y disolverse. Luego, al acercarse al punto de saturación van más despacio y luego cuando en la disolución no se puede disolver más, no hay movimiento.
(b) Al principio solo se da la disociación, luego al llegar el punto de saturación los iones comienzan a precipitar a gran velocidad (EU 64)

Cat. C. DESCONOCE EL CONCEPTO DE EQUILIBRIO.
CONFUNDE DISOLUCIÓN SATURADA Y SOBRESATURADA



Cuando avanza una reacción cada vez hay más cantidad de soluto disuelto y es más difícil acabar de disociar lo que queda, entonces baja la velocidad. Mientras que si se está llegando al grado de sobresaturación la reacción comienza a precipitar e irá en aumento (EB 157).

Fig. 11. Ejemplos de las categorías B y C de la cuestión C5.

Categoría D: Recoge las respuestas sin coherencia lógica.

Categoría E: No responden a la pregunta.

Es significativo que la suma de las categorías D y E supone un 76,2 % de los EB y un 32,0 % de los EU, valores que reflejan la enorme dificultad de los estudiantes para entender cómo se alcanza el equilibrio.

Resultados de la cuestión C6 (véase figura 12)

Ofrece las explicaciones del alumnado relativas a la situación de equilibrio.

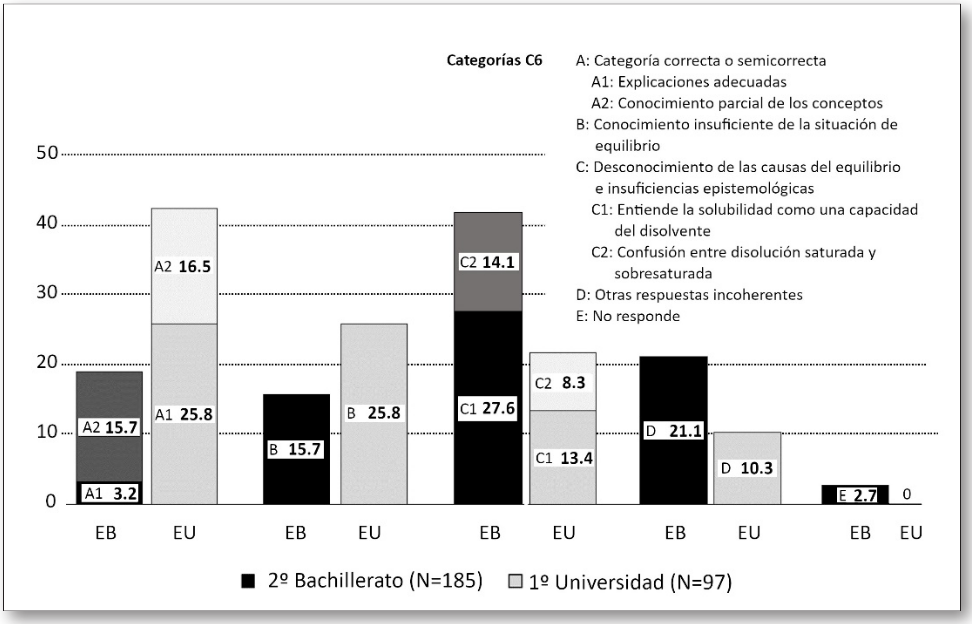


Fig. 12. Categorías y porcentaje de respuestas para las categorías de la cuestión C6.

Categoría A: Se ha estructurado en dos subcategorías que recogen las respuestas correctas. En total suponen un 18,9 % de los EB y un 42,3 % de los EU.

A1. Relacionan la saturación de la disolución en equilibrio con la solubilidad de la sal.

A2. Explican correctamente el fenómeno, pero lo hacen de manera parcial, solo en términos de la solubilidad de la sal o bien indicando que la disolución está saturada, sin explicar el significado de esta afirmación.

Ejemplos:

> Llegado cierto punto (3) la disolución se encuentra saturada. Esto quiere decir que ya no se puede disolver más bromuro de cobre, aunque el sistema siga estando a 25 ºC, ya que no es motivo para que tenga que disolverse del todo (EB 133; C6, cat. A1).
>
> Porque la disolución ha llegado al punto de saturación (EU 50; C6, cat. A2).

Categoría B: Agrupa las respuestas que manifiestan un conocimiento parcial del fenómeno, y lo justifican de manera inadecuada y, en ocasiones, errónea. En total suponen un 15,7 % de los EB y un 25,8 % de los EU.

Ejemplos:

> En el punto (3) la sal no se disuelve más porque el sistema ha alcanzado el equilibrio, lo cual quiere decir que cesa la reacción. En una disolución, la sal deja de disociarse en sus iones (EB 142; C6, cat. B).
>
> Ya que el bromuro de cobre tiene una constante de solubilidad en esa temperatura y ésta determina su solubilidad en agua (EU 29; C6, cat. B).

Categoría C: Ignoran el equilibrio y manifiestan diferentes concepciones alternativas relacionadas con los conceptos de solubilidad o de saturación. Representan un total de 41,7 % de los EB y el 21,7 % de los EU.

> C1. Sostienen que la solubilidad es una capacidad del disolvente.
>
> C2. Consideran que se ha disuelto más soluto del permitido, por lo que confunden disolución saturada con sobresaturada. Esta dificultad también ha aparecido en cuestiones anteriores, así como en otras investigaciones (Pinarbasi y Campolat, 2003; Adadan y Savasci, 2012).

Ejemplos:

> La sal deja de disolverse porque las moléculas de agua han captado todas las moléculas de sal que han podido, pero como había mucha sal no se ha podido disolver toda, independientemente de la temperatura (EB 105; C6, cat. C1).
>
> Porque la sal ha superado el punto de solubilidad y por lo tanto la disolución está sobresaturada y no se puede disolver más (EU 66; C6, cat. C2).

DISCUSIÓN

El análisis conjunto de las respuestas pone de manifiesto que las dos muestras de estudiantes, EB y EU, poseen las mismas concepciones alternativas y similares dificultades de comprensión y razonamiento, aunque en diferentes porcentajes. En general, los EU ofrecen más respuestas correctas y menos ideas incoherentes, además de dejar menos preguntas sin contestar, lo que es un resultado esperable, por tratarse de la segunda vez que abordan su estudio.

La C1 tiene el objetivo de determinar si el alumnado reconoce la idea de solubilidad existente tras el nivel simbólico de las curvas de solubilidad. Ha respondido correctamente más del 55 % de los EB y del 75 % de los EU, aunque conviene señalar que, pese a su escasa dificultad conceptual, alrededor del 40 % de los EB y del 20 % de los EU manifiestan dificultades para leer la gráfica o bien no responden a la pregunta (figura 6, categorías B y C).

Las cuestiones dos y tres (C2 y C3) aumentan ligeramente la demanda cognitiva respecto a la C1, ya que, además de leer la gráfica, el alumnado debe trasponer el lenguaje simbólico a la idea cualitativa de concentración de una disolución. Aunque los porcentajes de respuestas correctas son similares a los de C1, el alumnado manifiesta mayores dificultades, tanto para el concepto de disolución insaturada (C2) como para el de sobresaturada (C3) (figura 6, categoría B). La aparición de respuestas incoherentes en C2 y en C3, inexistentes en C1, podría ser indicativo de una respuesta memorística a C1, lo que muestra una falta de razonamiento basado en evidencias científicas. La falta de comprensión conceptual en estas cuestiones coincide con los resultados de otros estudios (Tan et al., 2002; Othman et al., 2008).

La cuestión C4 profundiza en las concepciones de los estudiantes al solicitar una definición cualitativa del concepto de solubilidad, que únicamente el 7,1 % de los EB y el 5,2 % de los EU han podido ofrecer. En cambio, alrededor del 20 % de los EB y el 40 % de los EU han optado por ofrecer la definición cuantitativa (figura 9, categorías A2 y A3). Estos resultados coinciden con los obtenidos en otras investigaciones (Muchson et al., 2020), lo que apunta a que la enseñanza tradicional se centra más en la resolución de problemas cuantitativos (Nakhleh, 1993) que en mostrar la necesidad del concepto. Asimismo, casi un tercio de los estudiantes confunden la solubilidad con otros conceptos relacionados, pero epistemológicamente diferentes (figura 9, C4, categoría B), lo que manifiesta una comprensión deficiente. Ninguna de las respuestas ha relacionado la solubilidad con las curvas de solubilidad, pese a haber utilizado la imagen en las cuestiones anteriores. Investigaciones previas muestran resultados coincidentes con nuestro estudio (Blanco y Prieto, 1997; Mulford y Robinson, 2002; Çalik, 2005; Adadan y Sabasci, 2012).

Cuando se indaga en la cuestión C5 sobre la interpretación macroscópica del proceso para alcanzar el equilibrio, encontramos que lo interpretan adecuadamente menos del 5 % de los EB y un 25 % de los EU. Alrededor del 15 % de los EB y el 30 % de los EU (figura 9, categoría C), en lugar de describir las velocidades, ofrecen una descripción macroscópica del proceso, basada en ideas incorrectas de la saturación de la disolución o de la solubilidad de la sal. Cabe destacar que la mayoría de EB (75 %) y más del 30 % de los EU (figura 9, categorías D-E) responden sobre la base de las ideas inconexas y sin coherencia, o simplemente no responden. Los resultados de la cuestión C6 corroboran la necesidad de comprender los conceptos de solubilidad y saturación para poder explicar y razonar adecuadamente el equilibrio de solubilidad, ya que solo un 20 % de los EB y un 40 % de los EU han respondido correctamente, al tiempo que en torno al 50 % del total de estudiantes ha puesto de manifiesto dificultades epistemológicas referidas a los conceptos de solubilidad, saturación y equilibrio (figura 12, categorías B-C). Entre las concepciones alternativas encontradas, resalta la confusión entre disolución saturada y sobresaturada, que aparece en algunas de las respuestas a C5 y a C6 (véanse las figuras 10 y 12), en consonancia con lo encontrado en otros trabajos (Çalik, 2005; Mulford y Robinson, 2002; Adadan y Sabasci, 2012).

CONCLUSIONES

En este estudio hemos tratado de contestar a las preguntas de investigación sobre cómo utilizan los estudiantes los conceptos de solubilidad y saturación en los equilibrios de solubilidad. Los resultados obtenidos en la cuestión C5 permiten afirmar que un porcentaje importante del alumnado manifiesta dificultades para explicar desde el nivel de estudio macroscópico cómo varían las velocidades hasta alcanzar el equilibrio. Asimismo, las respuestas a la cuestión C6 muestran desconocimiento de lo que sucede en el equilibrio y llevan a pensar que el alumnado no relaciona macroscópicamente la situación de equilibrio con la saturación de la disolución, que a su vez está determinada por la solubilidad de la sal. Todo esto podría ser un indicador de un aprendizaje memorístico de estos conceptos, que impide su adecuada comprensión (Viennot, 2001). En efecto, los resultados de las cuestiones C1 a C4 ponen de manifiesto que una cantidad significativa de EB y EU manifiesta dificultades de comprensión en la definición conceptual de solubilidad, así como dificultades epistemológicas de interpretación al pasar del lenguaje gráfico al simbólico en las curvas de solubilidad para la disolución insaturada y sobresaturada.

Cabe destacar que los argumentos y procedimientos utilizados por los estudiantes en las diferentes categorías de respuesta muestran diferentes tipos de razonamiento, desde aquellos basados en recuerdos memorísticos y concepciones fragmentadas, sin poder explicativo ni coherencia, hasta los que llegan a explicaciones «intermedias» alternativas, pero que manifiestan una cierta preocupación por la consistencia interna, y que, con la orientación adecuada, podrían avanzar hacia modelos epistémicos científicos (Vosniadou, 2019).

El estudio tiene limitaciones relacionadas con la muestra de estudiantes, el país donde se realizó y los temas y representaciones utilizados. No pretendemos generalizar los resultados de este estudio a estudiantes de todos los contextos en todo el mundo. Sin embargo, las características de los estudiantes analizados en este estudio han sido compartidas a nivel internacional en estudios anteriores (véase sección de discusión). Los resultados de este estudio podrían conectar con experiencias de los instructores e investigadores de otros contextos y con lo que pueden observar en sus estudiantes. Sería interesante ampliar el alcance de esta investigación a otros países y estudiantes de diferentes cursos empleando métodos cuantitativos y manteniendo la perspectiva dada por el marco metodológico de la fenomenografía.

Otra limitación del estudio es la falta de un análisis comparativo entre las respuestas ofrecidas por estudiantes de bachillerato y universidad, que no se ha abordado en este artículo porque el objetivo central de este era averiguar sus concepciones alternativas y verificar si se mantienen las mismas, aspecto que se ha confirmado. Ir más allá de la constatación de un cierto progreso de aprendizaje entre las dos muestras sobrepasaría el espacio disponible para el trabajo.

Las dificultades encontradas podrían deberse, como apuntan algunas investigaciones, a que la enseñanza tradicional presta más atención a la resolución de problemas cuantitativos que a la comprensión significativa de los conceptos, lo que dificulta el aprendizaje (Nakhleh, 1993). Por ello, como implicación para la enseñanza sugerimos, como paso previo al estudio de los equilibrios de solubilidad, recordar los siguientes aspectos: *a*) el significado cualitativo de solubilidad, como una capacidad de cada sustancia que limita su poder de disolución; *b*) trabajar con las curvas de solubilidad, planteando diferentes supuestos para su resolución y brindando oportunidades al alumnado para que verbalice los significados de solubilidad y saturación, con ejemplos numéricos extraídos de las curvas; *c*) recordar el significado macroscópico del equilibrio químico.

La explicación teórica sobre el equilibrio de solubilidad se debería llevar a cabo estableciendo relaciones entre los conceptos implicados en los tres niveles de representación: el macroscópico explica el fenómeno, que se representa en el nivel simbólico mediante las flechas de velocidad, que varían hasta alcanzar el equilibrio dinámico, que se explica a nivel submicroscópico a través del movimiento constante de partículas. Además, se podría relacionar lo que sucede en la situación de equilibrio con las curvas de solubilidad, y complementar la información con gráficas de velocidad que permitan visualizar que, en el equilibrio, las reacciones directa e inversa adquieren la misma velocidad a una temperatura determinada, lo que implica, a nivel macroscópico, la saturación de la disolución.

REFERENCIAS

Adadan, E. y Savasci, F. (2012). An analysis of 16-17-year-old students' understanding of solution chemistry concepts using a two-tier diagnostic instrument. *International Journal of Science Education*, *34*(4), 513-544.
https://doi.org/10.1080/09500693.2011.636084

Bilgin, I., Şenocak, E., y Sözbilir, M. (2009). The Effects of Problem-Based Learning Instruction on University Students' Performance of Conceptual and Quantitative Problems in Gas Concepts. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *5*(2), 153-164.
https://doi.org/10.12973/ejmste/75267

Blanco, A. y Prieto, T. (1997). Pupils' views on how stirring and temperature affect the dissolution of a solid in a liquid: A cross-age study (12 to 18). *International Journal of Science Education*, *19*(3), 303-315.
https://doi.org/10.1080/0950069970190304

Çalik, M. (2005). A cross-age study of different perspectives in solution chemistry from junior to senior high school. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *3*(4), 671-696.
https://doi.org/10.1007/s10763-005-1591-y

Çalik, M., Ayas, A. y Ebenezer, J. V. (2005). A review of solution chemistry studies: Insights into students' conceptions. *Journal of Science Education and Technology*, *14*(1), 29-50.
https://doi.org/10.1007/s10956-005-2732-3

Çalik, M., Ayas, A. y Coll, R. K. (2010). Investigating the effectiveness of teaching methods based on a four-step constructivist strategy. *Journal of Science Education and Technology*, *19*(1), 32-48.
https://doi.org/10.1007/s10956-009-9176-0

Cam, A. y Geban, O. (2013). Effectiveness of case-based learning instruction on students' understanding of solubility equilibrium concepts. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *44*(44), 97-108.
https://open.metu.edu.tr/handle/11511/53507

Chang, R. (2010). *General chemistry: the essential concepts* (10.ª ed.). Boston: McGraw-Hill.

Chi, M. T., Slotta, J. D. y De Leeuw, N. (1994). From things to processes: A theory of conceptual change for learning science concepts. *Learning and Instruction*, *4*, 27-43.
https://doi.org/10.1016/0959-4752(94)90017-5

Dahsah, C. y Coll, R. K. (2007). Thai Grade 10 and 11 students' conceptual understanding and ability to solve stoichiometry problems. *Research in Science & Technological Education*, *25*(2), 227-241.
https://doi.org/10.1080/02635140701250808

De Berg, K. (2012). A study of first-year chemistry students' understanding of solution concentration at the tertiary level. *Chemistry Education Research and Practice*, *13*, 8-16.
https://doi.org/10.1039/c1rp90056k

Devetak, I., Vogrinc, J. y Glažar, S. (2009). Assessing 16-year-old students' understanding of aqueous solution at submicroscopic level. *Research in Science Education*, *39*(2), 157-179.
https://doi.org/10.1007/s11165-007-9077-2

Driver, R. (1989). Students' conceptions and the learning of science. *International Journal of Science Education*, *11*, 481-490.
https://doi.org/10.1080/0950069890110501

Ebenezer, J. V. y Erickson, G. L. (1996). Chemistry students' conceptions of solubility: A phenomenography. *Science Education*, *80*(2), 181-201.
https://doi.org/10.1002/(SICI)1098-237X(199604)80:2<181::AID-SCE4>3.0.CO;2-C

Ebenezer, J. y Fraser, D. (2001). First year chemical engineering students' conceptions of energy in solution processes: Phenomenographic categories for common knowledge construction. *Science Education*, *85*, 509. https://doi.org/10.1002/sce.1021

Gorodetsky, M. y Gussarsky, E. (1986). Misconceptualization of the chemical equilibrium concept as revealed by different evaluation methods. *European Journal of Science Education*, *8*(4), 427-441.
https://doi.org/10.1080/0140528860080409

Guisasola, J., Furió, C. y Ceberio, M. (2008). Science education based on developing guided research. *Science education in focus*, 173-201.

Gussarsky, E. y Gorodetsky, M. (1990). On the concept «chemical equilibrium»: The associative framework. *Journal of Research in Science Teaching*, *27*, 197-204.
https://doi.org/10.1002/tea.3660270303

Hackling, M. W. y Garnett, P. J. (1985). Misconceptions of chemical equilibrium. *The European Journal of Science Education*, *7*(2), 205-214. https://doi.org/10.1080/0140528850070211

Hammer, D. (1994). Epistemological beliefs in introductory physics. Cognition and instruction, *12*(2), 151-183. https://doi.org/10.1207/s1532690xci1202_4

Hofer, B. K. y Pintrich, P. R. (1997). The development of epistemological theories: Beliefs about knowledge and knowing and their relation to learning. Review of educational research, *67*(1), 88-140. https://doi.org/10.3102/00346543067001088

Hernando, M., Furió, C., Hernández, J. y Calatayud, M. L. (2003). Comprensión del equilibrio químico y dificultades en su aprendizaje. *Enseñanza de las ciencias*, *21*(Extra 0), 111-118.

Johnstone, A. H. (2010). You can't get there from here. *Journal of chemical education*, *87*(1), 22-29. https://doi.org/10.1021/ed800026d

Kousathana, M. y Tsaparlis, G. (2002). Students' errors in solving numerical chemical equilibrium problems. *Chemistry Education Research and Practice*, *3*(1), 5-17. https://doi.org/10.1039/B0RP90030C

Krause, S. y Tasooji, A. (2007). Diagnosing students' misconceptions on solubility and saturation for understanding of phase diagrams. En *Annual Conference & Exposition* (pp. 12-540). https://peer.asee.org/1699

Krause, S. J. y Isaacs-Sodeye, O. (2013). The effect of a visually-based intervention on students' misconceptions related to solutions, solubility, and saturation in a core materials course. En *2013 ASEE Annual Conference & Exposition* (pp. 23-1189). https://peer.asee.org/22574

Leach, J. y Scott, P. H. (2008). Teaching for the conceptual understanding: An approach drawing on individual and sociocultural perspective. En S. Vosniadou (Ed.), *International handbook of research on conceptual change* (pp. 647-675). Nueva York / Londres: Routledge.

Lee, O., Eichunger, D. C., Anderson, C. W., Berkheimer, G. D. y Blakeslee, T. D. (1993). Changing middle school students' conceptions of matter and molecules. *Journal of Research in Science Teaching*, *30*(3), 249-270. https://doi.org/10.1002/tea.3660300304

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 255-276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

Marton, F. (1981). Phenomenography-Describing conceptions of the world around us. *Instructional Science*, *10*, 177-200. https://doi.org/10.1007/bf00132516

Marton, F. y Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Muchson, M., Kurniawati, R., Effendy, E. Agusningtyas, D. y Muntholib, M. (2020). Analysis of high school students' metacognitive knowledge on the topic of solubility and solubility product. *AIP Conference Proceedings* 2215, 1, 020012. https://doi.org/10.1063/5.0000545

Mulford, D. R. y Robinson, W. R. (2002). An inventory for alternate conceptions among first-semester general chemistry students. *Journal of Chemical Education*, *79*(6), 739-744. https://doi.org/10.1021/ed079p739

Nakhleh, M. B. (1992). Why some students don't learn chemistry: Chemical misconceptions. *Journal of chemical education*, *69*(3), 191-196.
https://doi.org/10.1021/ed069p191

Nakhleh, M. B. (1993). Are our students conceptual thinkers or algorithmic problem solvers? Identifying conceptual students in general chemistry. *Journal of Chemical Education*, *70*(1), 52-55.
https://doi.org/10.1021/ed070p52

Nakiboğlu, C. y Nakiboğlu, N. (2019). Exploring prospective chemistry teachers' perceptions of precipitation, conception of precipitation reactions and visualization of the sub-microscopic level of precipitation reactions. *Chemistry Education Research and Practice*, *20*(4), 873-889.
https://doi.org/10.1039/C9RP00109C

Nurrembern, S. C. y Pickering, M. (1987). Concept learning versus problem solving: is there a difference? *Journal of Chemical Education*, *64*(6), 508-510.
https://doi.org/10.1021/ed064p508

Onder, I. y Geban, O. (2006). The Effect of Conceptual Change Texts Oriented Instruction on Students' Understanding of the Solubility Equilibrium Concept. *Hacettepe University Journal of Education*, *30*, 166-173.
https://hdl.handle.net/11511/87725

Othman, J., Treagust, D. F. y Chandrasegaran, A. L. (2008). An investigation into the relationship between students' conceptions of the particulate nature of matter and their understanding of chemical bonding. *International Journal of Science Education*, *30*(11), 1531-1550.
https://doi.org/10.1080/09500690701459897

Pedrosa, M. A. y Dias, M. H. (2000). Chemistry textbook approaches to chemical equilibrium and student alternative conceptions. *Chemistry Education Research and Practice*, *1*(2), 227-236.
https://doi.org/10.1039/A9RP90024A

Petrucci, R. H., Herring, F. G., Madura, J. D. y Bissonnette, C. (2011). *Química General: Principios y aplicaciones modernas* (10.ª ed.). Pearson Education, S. A.

Pinarbasi, T. y Canpolat, N. (2003). Pre-service teacher trainees' understanding of solution chemistry concepts. *Journal of Chemical Education*, *80*(11), 1328-1332.
https://doi.org/10.1021/ed080p1328

Prain, V. y Hand, B. (1999). Students' perceptions of writing for learning in secondary school science. *Science Education*, *83*(2), 151-162.
https://doi.org/10.1002/(sici)1098-237x(199903)83:2<151::aid-sce4>3.0.co;2-s

Prieto, T., Blanco, A. y Rodriguez, A. (1989). The ideas of 11 to 14-year-old students about the nature of solutions. *International Journal of Science Education*, *11*(4), 451-463.
https://doi.org/10.1080/0950069890110409

Quílez, J. (2004). Changes in concentration and in partial pressure in chemical equilibria: students' and teachers' misunderstandings. *Chemistry Education Research and Practice*, *5*(3), 281-300.
https://doi.org/10.1039/B3RP90033A

Raviolo, A. (2001). Assessing students' conceptual understanding of solubility equilibrium. *Journal of Chemical Education*, *78*(5), 629-631.
https://doi.org/10.1021/ed078p629

Raviolo, A., Schroh, N. T. y Farré, A. (2022). La comprensión de estudiantes de primer año de universidad del concepto de concentración expresada en gramos por litro. *Enseñanza de las Ciencias*, *40*(1), 143-159.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3267

Rivard, L. P. (1994). A review of writing to learn in science: Implications for practice and research. *Journal of Research in Science Teaching*, *31*, 969-983. https://doi.org/10.1002/tea.3660310910

Sawrey, B. A. (1990). Concept learning versus problem solving: revisited. *Journal of Chemical Education*, *67*(3), 253-255. https://doi.org/10.1021/ed067p253

Scott, P., Asoko, H. y Leach, J. (2008). Student conceptions and conceptual learning science. En A. K. Abell y N. G. Lederman (Eds.), *Handbook of research on science education*. Nueva York: Routledge.

Setiowati, H., Utomo, S. B. y Ashadi (2018). Students' misconceptions on solubility equilibrium. *Journal of Physics: Conference Series 1022*(1), 012035. IOP Publishing. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1022/1/012035

Stavy, R. (1981). Teaching inverse functions via the concentrations of salt water solution. *Archives de Psychologie*, *49*(191), 267-287.

Taber, K. S. (2006). Constructivism's new clothes: The trivial, the contingent and a progressive research programme into learning of science. *Foundations of Chemistry*, *8*, 189-219. https://doi.org/10.1007/s10698-005-4536-1

Tahirsylaj, A., Niebert, K. y Duschl, R. (2015). Curriculum and Didaktik in 21st century: Still divergent or converging? *European Journal of Curriculum Studies*, *2*(2), 262-281. http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:lnu:diva-62563

Tan, K. C. D., Goh, N. K., Chia, L. S. y Treagust, D. F. (2002). Development and application of a two-tier diagnostic instrument to assess high school students' understanding of inorganic chemistry qualitative analysis. *Journal of Research in Science Teaching*, *39*(4), 283-301. https://doi.org/10.1002/tea.10023

Thomas, P. L. y Schwenz, R. W. (1998). College physical chemistry students' conceptions of equilibrium and fundamental thermodynamics. *Journal of Research in Science Teaching*, *35*(10), 1151-1160. https://doi.org/10.1002/(SICI)1098-2736(199812)35:10<1151::AID-TEA6>3.0.CO;2-K

Treagust, D. F. (1988). Development and use of diagnostic tests to evaluate students' misconceptions in science. *International Journal of Science Education*, *10*(2), 159-169. https://doi.org/10.1080/0950069880100204

Tyson, L., Treagust, D. F. y Bucat, R. B. (1999). The complexity of teaching and learning chemical equilibrium. *Journal of Chemical Education*, *76*(4), 554-558. https://doi.org/10.1021/ed076p554

Uzuntiryaki, E. y Geban, Ö. (2005). Effect of conceptual change approach accompanied with concept mapping on understanding of solution concepts. *Instructional Science*, *33*(4), 311-339. https://doi.org/10.1007/s11251-005-2812-z

Van Driel, J. H., De Vos, W., Verloop, N. y Dekkers, H. (1998). Developing secondary students' conceptions of chemical reactions: The introduction of chemical equilibrium. *International Journal of Science Education*, *20*(4), 379-392. https://doi.org/10.1080/0950069980200401

Viennot, L. (2001). *Reasoning in Physics: The part of common sense.* Springer Science and Business media. https://doi.org/10.5860/choice.39-4641

Vosniadou, S. (2012). Reframing the Classical Approach to Conceptual Change Preconceptions, Misconceptions and Synthetic Models. En B. J. Fraser, K. G. Tobin y C. J. McRobbie (Eds.), *Second International Handbook of Science Education* (vol. I). Londres: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9041-7

Vosniadou, S. (2019). The development of students' understanding of science. *Frontiers in Education*, *4*(32).
https://doi.org/10.3389/feduc.2019.00032

Vygotsky, L. S. (1978). Interaction between learning and development. En M. Gauyain y M. Cole (Eds.), *Readings on the development of children* (pp. 34-40). Scientific American Books.

Wandersee, J. H., Mintzes, J. J. y Novak, J. D. (1994). Research on alternative conceptions in Science. En D. L. Gabel (Ed.), *Handbook of Research on Science teaching and Learning* (pp. 177-210). Macmillan Publications.

Wheeler, A. E. y Kass, H. (1978). Student misconceptions in chemical equilibrium. *Science Education*, *62*(2), 223-232.
https://doi.org/10.1002/sce.3730620212

Analysis of Students' Epistemic Reasoning and Understanding of the Solubility Equilibrium

M. Consuelo Domínguez Sales
Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Facultad de Magisterio, UV
consuelo.dominguez-sales@uv.es
https://orcid.org/0000-0001-9820-4543

Jenaro Guisasola
Departamento de Física Aplicada, Universidad del País Vasco (UPV/EHU)
jenaro.guisasola@ehu.eus
https://orcid.org/0000-0002-0817-3905

Oskar González-Mendia
Departamento de Pintura, Facultad de Bellas Artes (UPV/EHU)
oskar.gonzalezm@ehu.eus
https://orcid.org/0000-0001-6495-1815

Daniel Zuazagoitia
Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales, Facultad de Educación y Deporte (Sección Magisterio) (UPV/EHU)
daniel.zuazagoitia@ehu.eus
https://orcid.org/0000-0001-9954-7855

Solubility equilibria constitute an essential content in the introductory chemistry curriculum. Their understanding requires knowing the mechanism that leads to equilibrium and a good command of the concepts of solubility and saturation, as well as an understanding of their relationship and the role they play in achieving physical solubility equilibrium.

Several studies in didactics have shown difficulties in understanding solubility equilibria and their subsequent concepts, such as salt solubility and solution concentration, at both macroscopic and submicroscopic levels. Understanding chemical equilibrium and how it is achieved also poses problems. Their detection, both in high school and first-year university students, highlights the need to improve teaching in introductory chemistry courses.

The present study contributes to the existing literature on the difficulties in understanding solubility equilibria and points out the need to carry out its study by establishing relationships between the concepts involved in the three levels of representation: the macroscopic level of explanation of the phenomenon, the submicroscopic level, which explains the equilibrium dynamic character and the symbolic level used to describe it, represented in our case by the solubility graphs and the graphical representation of the dissolution and crystallisation rates.

The methodology used in the research shares the social constructivist theory of learning, the latter understood as the construction of knowledge. The study involved a sample of 185 students in baccalarate final year from different schools in the Valencian Community (18 years old) and 97 students in the first year of the Physics degree at the UPV/EHU's Faculty of Science and Technology (19-20 years old). To detect their problems with the concepts involved, a questionnaire was designed with six open-ended questions, which made it possible to identify alternative conceptions and their underlying reasons. The students' answers were categorised by means of a phenomenographic analysis, in which each category reveals something distinctive about a way of understanding the subject in question, through an inclusive hierarchy of relationships.

The analysis of the answers showed that the two samples of students have the same alternative conceptions and similar difficulties in understanding solubility equilibria, although university students show lower percentages of inconsistent answers. The causes of these difficulties are: *a*) deficiencies in understanding the underlying concepts of solubility of a substance and saturation of solutions, and the relationship between both; *b*) a lack of knowledge of how the rates of the direct and reverse reaction vary until equilibrium is reached; and *c*) a lack of knowledge of what happens at equilibrium with respect to the solubility of the salt and the saturation of the solution.

Therefore, as a teaching implication and as a previous step to the study of solubility equilibria, we suggest keeping students aware of: *a*) the qualitative meaning of the solubility, as a capacity of the substance that limits its power of dissolution; *b*) the symbolic level through solubility curves, providing opportunities to verbalise the meaning of solubility and saturation as well as the relationship between them; and *c*) the macroscopic and submicroscopic meaning of chemical equilibrium, to relate it to its dynamic character. The complementation of the study of solubility equilibrium with velocity graphs to represent the way in which it is reached and the visualisation that the equality of the rates of the forward and reverse reactions at a given temperature implies, at a macroscopic level, the saturation of the solution is a factor that limits solubility and prevents an increase in concentration, which does not occur in chemical equilibrium.

ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS 41-2 (2023), 71-92
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5640
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Una estrategia para la formación del profesorado: el caso del cálculo diferencial elemental

A Strategy for Teacher Education: The Case of Elementary Differential Calculus

Catarina Oliveira Lucas
Instituto Politécnico Gaya. ISPGAYA. Portugal
clucas@ispgaya.pt

Alicia Ruiz-Olarría
Departamento de Didácticas Específicas. UAM. España
alicia.ruiz@inv.uam.es

Josep Gascón Pérez
Departamento de matemáticas. UAB. España
josepgasconperez@gmail.com

RESUMEN • Presentamos un trabajo enmarcado en la teoría antropológica de lo didáctico que aborda la relación entre los resultados de la investigación didáctica sobre el estudio escolar de cierto dominio de las matemáticas y el problema docente relativo al qué enseñar y cómo hacerlo en relación con dicho dominio. Nos centramos en el ámbito de la *modelización funcional* y del *cálculo diferencial elemental* y proponemos una estrategia de formación del profesorado que culmina en la construcción de una posible praxeología para la enseñanza, como punto de partida para un cambio de paradigma didáctico en la institución escolar, tan necesario como aplazado.

PALABRAS CLAVE: Formación docente; Fenómenos didácticos; Modelización funcional; Cálculo diferencial elemental.

ABSTRACT • This is a paper framed within the anthropological theory of the didactic that addresses the relationship between the results of didactic research on the school study of a certain domain of mathematics and the teaching problem of what to teach and how to do it in relation to that domain. We focus on the field of functional modelling and elementary differential calculus and propose a teacher training strategy that culminates in the construction of a possible praxeology for teaching, as a starting point for a change in the didactic paradigm in the school institution, as necessary as it has been long overdue.

KEYWORDS: Teacher education; Didactic phenomena; Functional modelling; Elementary differential calculus.

Recepción: febrero 2022 • Aceptación: marzo 2023 • Publicación: junio 2023

Oliveira Lucas, C., Ruiz-Olarría, A. y Gascón Pérez, J. (2023). Una estrategia para la formación del profesorado: el caso del cálculo diferencial elemental. *Enseñanza de las Ciencias*, *41*(2), 71-92.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5640

INTRODUCCIÓN

Existen muchas investigaciones didácticas sobre algunos aspectos del estudio del cálculo diferencial en secundaria y en el primer curso universitario. Entre las investigaciones clásicas podríamos citar las que partían de la constatación de las dificultades con que se encuentran los profesores para enseñar (y los alumnos para aprender) los conceptos básicos del cálculo como, por ejemplo, los de «límite», «continuidad» y «función» (Schwarzenberger y Tall, 1978; Sierpinska, 1985; Sfard, 1989; Cornu, 1991; Dubinsky y Harel, 1992; Artigue y Ervynck, 1992). Una de las primeras explicaciones del origen de dichos errores hace referencia a la confusión entre la *imagen del concepto* y la *definición del concepto* (Tall y Vinner, 1981). Posteriormente, la problemática se amplió para abarcar el análisis de las *dificultades*, *contradicciones*, *confusiones* y *obstáculos cognitivos* que aparecen en la transición del *pensamiento matemático elemental* (PME) al *pensamiento matemático avanzado* (PMA) (Artigue, 1991; Harel y Kaput, 1991). Una de las hipótesis utilizadas para explorar esta transición utilizó la combinación de un *proceso* y el *concepto* producido por encapsulación del proceso, denominada *procept* (Gray y Tall, 1994). Estos objetos son representados por un único símbolo matemático, lo que pone de manifiesto la *naturaleza dual* de los objetos matemáticos y el papel que juega el *simbolismo matemático* en la encapsulación de procesos en objetos (Sfard, 1992). Dado que las tres nociones básicas del cálculo: «función», «derivada» e «integral» (así como la noción fundamental de «límite») son ejemplos de *procepts* (Tall, 1996), el estudio del cálculo elemental requerirá, desde el principio, la suficiente *flexibilidad* para manipular un mismo símbolo, ya sea como representante de un proceso que actúa sobre determinados objetos, ya como una entidad singular a la que se le pueden aplicar otros procesos para obtener nuevos objetos. La potencia del PMA radica, precisamente, en la *utilización flexible de la estructura dual* de los citados objetos matemáticos posibilitada, en parte, por la *ambigüedad* de la notación que se utiliza. La *rigidez* de los procedimientos estandarizados que caracterizan el PME constituye, por tanto, un obstáculo cognitivo muy importante, y explicaría muchos de los *errores conceptuales extravagantes* (Dreyfus, 1991) que presentan la inmensa mayoría de estudiantes en su primer encuentro con el cálculo (sea al final de secundaria o al principio de la universidad).

En los niveles de la enseñanza secundaria, la mayoría de los países ha reconocido la imposibilidad de introducir el cálculo formalmente. La enseñanza se apoya en una concepción dinámica e intuitiva del límite, basada en exploraciones gráficas y numéricas, junto al uso de técnicas de naturaleza algebraica. Esto permite a los alumnos resolver interesantes problemas de variación y optimización. La transición hacia aproximaciones más formales, que tiene lugar en la universidad, representa un salto inmenso, tanto desde el punto de vista conceptual como técnico. Por ejemplo, los alumnos deben reconstruir el significado de la igualdad y comprender que las igualdades en el cálculo diferencial no vienen dadas, necesariamente, como sí ocurre en álgebra, por una serie de equivalencias sucesivas, sino a partir de aproximaciones (como en el límite o la derivada) (Artigue y Ervynck, 1992; Artigue, 1998). Dado que la enseñanza tiende a dejar la responsabilidad exclusiva de la mayoría de estas reorganizaciones a los alumnos, se producen efectos dramáticos para la mayoría de estos, especialmente en la transición secundaria-universidad.

A pesar de la enorme importancia del cálculo para describir los fenómenos del mundo cambiante, como herramienta matemática de la variación, este ha sido entendido (y enseñado) tradicionalmente como el estudio de los procesos de derivación e integración en un contexto simbólico (Cantoral y Reséndiz, 2003). De hecho, como resultado de la transposición didáctica (Chevallard, 1991), los libros de texto presentan definiciones formales de los conceptos centrales del cálculo olvidando el problema de la *variación de un sistema* que está en el origen de dichos conceptos (Bravo y Cantoral, 2012).

Diversas investigaciones proponen estrategias para la enseñanza de la derivada (Artigue et al., 2007; Gavilán, 2005; Bustos Tiemann y Ramos Rodríguez, 2022; García, Gavilán y Llinares, 2012), otras se centran en la enseñanza de la integral (Alanís y Soto, 2012; Cordero, 2005), mientras que, solo en algún caso, se propone un cambio de paradigma en la enseñanza del cálculo (Salinas y Alanís, 2009).

En el ámbito de la teoría APOE (Asiala et al., 1996), existen múltiples investigaciones (Sánchez-Matamoros et al., 2008; Vega Urquieta et al., 2014; Fuentealba et al., 2022) en torno a la comprensión del concepto de derivada y a la tematización del esquema correspondiente. Estos trabajos proporcionan resultados útiles para diseñar procesos de formación del profesorado, pero no se han utilizado sistemáticamente para proponer una estrategia de formación en un *ámbito que integre el cálculo diferencial y la modelización funcional* globalmente considerados. La propuesta que más se aproxima a este objetivo, en el ámbito de APOE, utiliza la modelización funcional en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales a estudiantes universitarios (Trigueros, 2009).

En cuanto al contraste entre los enfoques que proponen APOE y TAD, señalaremos únicamente que ha tenido lugar un fecundo diálogo entre ambas teorías en el que se ha analizado la manera en que cada una de ellas puede contribuir a desarrollar algunas nociones de la otra, sin violentar sus asunciones básicas (Trigueros, Bosch y Gascón, 2011; Bosch, Gascón y Trigueros, 2017), y que se han utilizado los resultados de dicho diálogo para reformular el problema de investigación planteado por APOE sobre la enseñanza y aprendizaje universitario de las funciones de dos variables (Trigueros y Martínez-Planell, 2015).

METODOLOGÍA

El objetivo principal de este trabajo y su aportación consiste en mostrar la importante incidencia de los resultados de la investigación didáctica, presentados en Lucas (2015), sobre el diseño de una estrategia para la formación del profesorado en un ámbito que *incluye, de manera articulada, el cálculo diferencial elemental* (CDE) *y la modelización funcional* (MF) globalmente considerados. Los instrumentos para alcanzar dicho objetivo nos los proporciona la *teoría antropológica de lo didáctico* (en adelante, TAD), que constituye el marco teórico en el que se sitúa este trabajo.

La estrategia de formación del profesorado que proponemos culmina en la elaboración progresiva de una praxeología matemática que contiene ampliamente la praxeología matemática *por enseñar* en el paso de secundaria a la universidad y que, por ser útil en la institución de formación del profesorado, denominamos *praxeología matemática para la enseñanza* (Chevallard y Cirade, 2010). Dicha estrategia general fue propuesta en Ruiz-Olarría (2015) y está esquematizada de manera simplificada en la figura 1. La praxeología matemática *por enseñar* que sirve de base, así como la experimentación con estudiantes de medicina nuclear del correspondiente *recorrido de estudio e investigación* (REI), están descritas con detalle en Lucas (2015).

Para clarificar la relación entre este curso de medicina nuclear y el de formación del profesorado utilizaremos las etapas del esquema de la figura 1. En Lucas (2015) se recorren las etapas (1), (2), (3), (4) y (5) de dicho esquema en el caso particular del CDE y la MF. Este proceso culmina en la etapa (5) con el *curso de medicina nuclear*. Por otra parte, en Ruiz-Olarría (2015) se construye el citado esquema como propuesta de una estrategia general para la formación del profesorado, sin ninguna mención al caso particular del CDE y la MF. El *curso de formación del profesorado* que describiremos en la segunda parte de este trabajo recorre las etapas (1), (6), (7) y (8) del esquema, aplicadas al caso particular del CDE y la MF. Este esquema, globalmente considerado, relaciona los resultados obtenidos en medicina nuclear con el diseño y la gestión de la estrategia para la formación del profesorado.

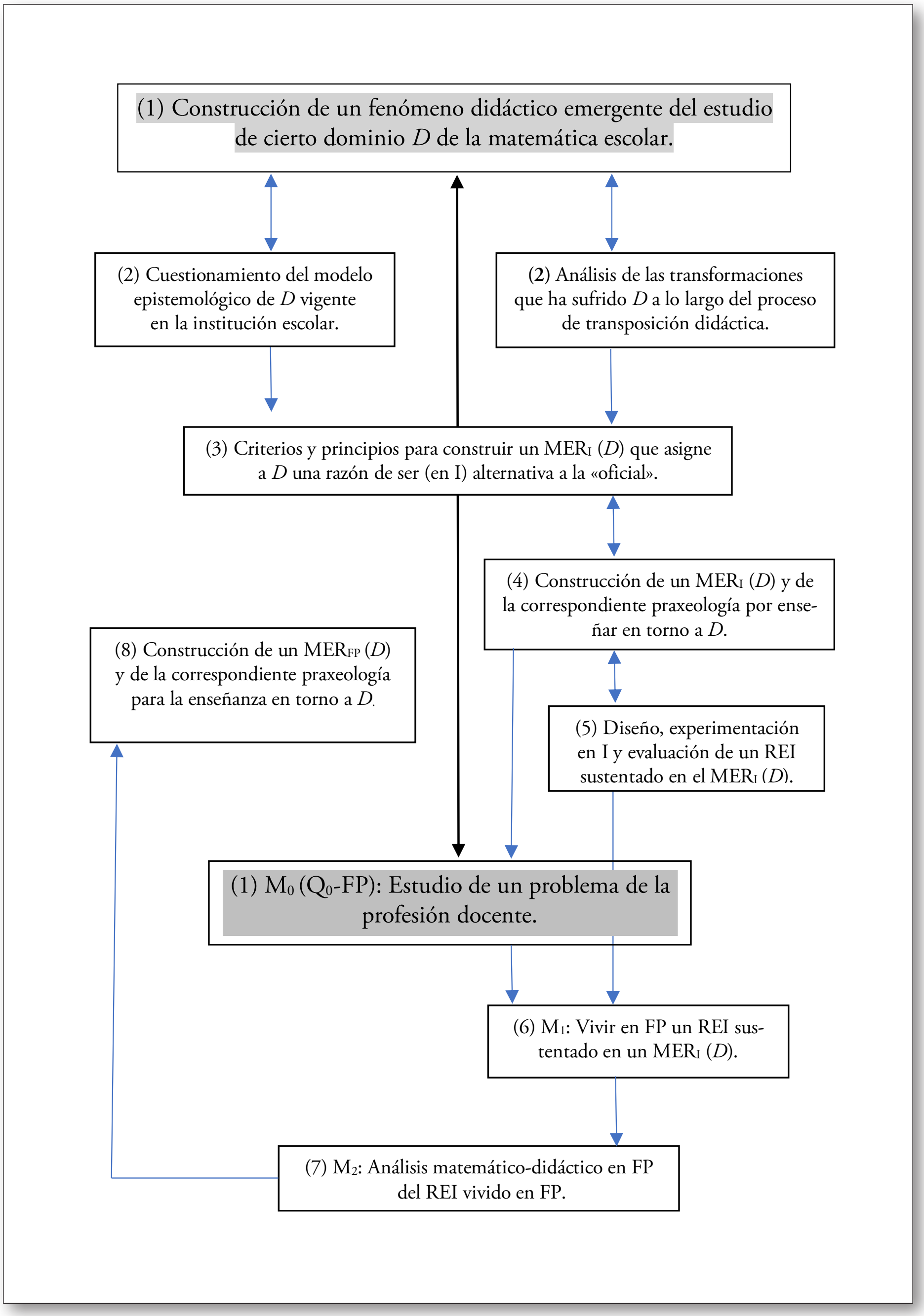


Fig. 1. Esquema de una estrategia para la formación del profesorado.

Nociones de la TAD utilizadas en este trabajo y principales abreviaturas

Praxeología matemática. Está formada por dos bloques inseparables que evolucionan conjuntamente: la *praxis*, que contiene los *tipos de tareas* y las *técnicas* matemáticas (en general no algorítmicas) útiles para llevarlas a cabo; y el *logos*, que es un discurso matemático razonado sobre la praxis que, a su vez, contiene dos niveles sucesivos de descripción, interpretación y justificación de la praxis, la *tecnología* y la *teoría* (Chevallard, 1992).

REI. *Recorrido de estudio e investigación*. Es un proceso de estudio relativamente abierto que parte de una cuestión generatriz Q_0.

REI-FP. *Recorrido de estudio e investigación para la formación del profesorado*. Es un proceso de formación generado por un problema docente Q_0-FP. Está estructurado en una serie de módulos. En este trabajo se describen los módulos M_0, M_1 y M_2.

SU. *Institución escolar situada en el tránsito entre secundaria y la universidad.*

FP. *Institución de formación del profesorado*.

CDE. *Dominio de las matemáticas escolares en torno al cálculo diferencial elemental.*

MF. *Dominio de las matemáticas escolares en torno a la modelización funcional*.

MEV_I (D). *Modelo epistemológico vigente en la institución I en torno a cierto dominio* D *de las matemáticas*. Es una representación de la forma predominante al conceptualizar, interpretar y trabajar con los componentes praxeológicos (tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías) del dominio D en una institución I. Para simplificar la notación, si no hay peligro de confusión, pondremos MEV en lugar de MEV_{SU} (MF).

MER_I (D). *Modelo epistemológico de referencia en la institución I en torno a* D. Es una representación del dominio D, alternativa al MEV. Se construye desde la investigación didáctica como sistema de referencia para analizar el MEV y estudiar los fenómenos emergentes en la actividad matemática escolar sustentada en el MEV. Para simplificar la notación, pondremos MER en lugar de MER_{SU} (MF).

DESCRIPCIÓN DE LAS ETAPAS

En lo que sigue, resumiremos brevemente cada una de las etapas de esta estrategia y las relaciones entre ellas en el caso particular en el que el dominio *D* incluye el CDE y la MF. La primera parte de la estrategia, que comprende las etapas de (1) a (5) del esquema, tiene sentido en sí misma cuando se trata de construir únicamente una *praxeología matemática por enseñar* (por ejemplo, en SU). En cada una de las secciones indicaremos la etapa a la que se refiere según el esquema de la figura 1.

Dialéctica entre la formulación de un problema de la profesión docente y la toma en consideración de un fenómeno didáctico. Etapa 1

La estrategia de formación del profesorado parte de la constatación de un *problema de la profesión docente* que, inicialmente, es el problema relativo al diseño y gestión en la institución escolar SU de la enseñanza y el aprendizaje del CDE.

Simultáneamente, dicha estrategia se inicia con la toma en consideración de un *fenómeno didáctico* emergente en dicho dominio de la matemática escolar, detectado por la investigación didáctica y estudiado en Lucas (2015). Este fenómeno se manifiesta en la ausencia de un trabajo eficaz y práctico de *modelización funcional*, puesto que en SU se trata únicamente con modelos funcionales dados de antemano. Así se explica, en parte, el *aislamiento escolar de la MF respecto del CDE* y las dificultades del sistema educativo (y, por lo tanto, de los profesores) para integrar el estudio del CDE en una praxeología matemática *regional* en torno a la MF.

Este fenómeno didáctico tiene consecuencias «indeseables» desde la perspectiva de la TAD. Dichas consecuencias están relacionadas con el olvido escolar de la fuerte articulación y dependencia mutua entre el CDE y la MF a lo largo del desarrollo histórico de las matemáticas y en la práctica científica de los últimos siglos. La figura 2 esquematiza dicha dependencia.

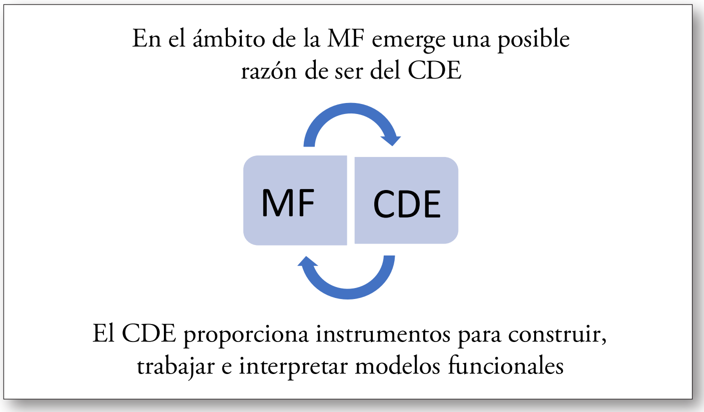


Fig. 2. Dependencia mutua entre la MF y el CDE.

Esta simultaneidad entre la constatación de un problema de la profesión docente relativo a un dominio de la actividad matemática escolar y la toma en consideración de un fenómeno didáctico emergente en dicho dominio no es casual. De hecho, la descripción de un problema docente constituye un componente importante de la base empírica para conceptualizar cierto fenómeno didáctico y, recíprocamente, la toma en consideración del fenómeno en cuestión permite replantear el problema docente como un verdadero problema de investigación didáctica. En nuestro caso, la formulación inicial del problema docente hacía referencia a la *enseñanza del CDE* y, gracias a la toma en consideración del fenómeno didáctico citado, hemos reformulado dicho problema en términos del papel que desempeña (y el que podría desempeñar) el CDE en el ámbito de la MF adecuadamente redefinida. Esta reformulación del problema es crucial y constituye otra de las principales aportaciones de nuestro trabajo.

El proceso de formación del profesorado que propone la TAD gira en torno a dicha simultaneidad (figura 1) y se encarna en un dispositivo de formación que denominamos *recorrido de estudio e investigación para la formación del profesorado* (en adelante, REI-FP) que se estructura en un conjunto de módulos de trabajo (Ruiz-Olarría et al., 2019).

Cuestionamiento de la matemática escolar y caracterización del modelo epistemológico vigente en el tránsito de la secundaria a la universidad. Etapa 2

La formulación del citado fenómeno didáctico y el replanteamiento del problema docente asociado requieren el cuestionamiento de la organización matemática escolar en torno a la MF y, correlativamente, el análisis de las transformaciones que ha sufrido dicho dominio a lo largo del proceso de *transposición didáctica* (Chevallard, 1991) con el fin de caracterizar el *modelo epistemológico vigente* en SU con respecto a la MF (en adelante, MEV). Para ello, deben plantearse cuestiones tales como:

> *¿Qué se entiende en SU por MF? ¿Qué papel se le asigna al CDE con relación a la MF? ¿Cuál es la razón de ser «oficial» que la institución escolar le asigna? ¿Qué actividades matemáticas se llevan a cabo en SU en las que aparezcan el CDE y la MF?*

Criterios para construir un modelo epistemológico de referencia. Etapa 3

El análisis del citado MEV y la clarificación de la razón de ser «oficial» que se asigna a dicho dominio en la matemática escolar aportan, con la ayuda de los instrumentos que proporciona la TAD, algunos criterios y principios necesarios para construir un *modelo epistemológico de referencia MER* que asigne una razón de ser alternativa (o, según el caso, complementaria) a la citada razón de ser oficial. La formulación de estos criterios y principios está basada, simultáneamente, en el análisis del fenómeno didáctico emergente en SU y en el estudio del problema de la profesión docente asociado. La nueva praxeología *por enseñar*, redefinida por el MER, explicita el papel que *podría desempeñar el CDE en el ámbito de la MF*. Los criterios y principios utilizados para construir el MER fueron los siguientes (Lucas, 2015, cap. III, pp. 90-92):

- Explicitar diferentes procesos de construcción, utilización y comparación de los modelos funcionales, la relación entre ellos y el papel que juega el CDE en estos.
- Tomar en consideración las relaciones entre los modelos funcionales discretos y los continuos y completar así el MER presentado en Ruiz-Munzón (2010).
- Como paso previo a la construcción de los modelos funcionales continuos, permitir que se parta de datos discretos y, por tanto, que se trabaje inicialmente con modelos discretos expresados en términos de sucesiones y de ecuaciones en diferencias finitas.
- Si se parte de datos discretos, utilizar diferentes tipos de regresión para pasar de los modelos discretos a los continuos y poder así construir modelos funcionales que ajusten un conjunto de datos discretos.
- Justificar y evaluar el proceso de aproximación de los modelos discretos (ecuaciones en diferencias finitas), mediante modelos continuos (ecuaciones diferenciales).
- Mostrar que, dependiendo de la naturaleza del sistema por modelizar, la aproximación por regresión sobre la *tasa de variación media*, TVM, o la *tasa de variación media relativa*, TVMR, proporciona modelos funcionales relativamente más ajustados y, sobre todo, con mejor capacidad predictiva que los que se obtienen aproximando directamente los datos discretos brutos.
- Poner de manifiesto la economía técnica que supone el paso de lo discreto a lo continuo mostrando, mediante cálculos explícitos, en qué sentido y para responder a qué tipo de cuestiones las técnicas del CDE son más eficientes que las técnicas algebraicas de la matemática discreta.
- Construir y articular diferentes tipos de variación (tanto entre magnitudes discretas como entre magnitudes continuas), definiendo el universo de tipos de variación que se considerar*á*n.
- Utilizar las técnicas del CDE para interpretar en términos del sistema el significado de los parámetros de un modelo funcional.
- Utilizar el CDE para estudiar las propiedades locales de los modelos funcionales construidos (que posteriormente se interpretarán en términos de las variables que definen el sistema modelizado).
- En todos los casos, los procesos de MF se desarrollarán con el objetivo de dar respuesta a una cuestión generatriz suficientemente amplia planteada en términos de un sistema.

Construcción de un MER y de la correspondiente praxeología matemática por enseñar en el tránsito de la secundaria a la universidad. Etapa 4

La estrategia de formación prosigue con la construcción efectiva de un MER a partir de los principios y criterios descritos en la etapa anterior, lo que comporta una redefinición de lo que se entiende en SU por «MF» y un replanteamiento de su relación con el CDE, así como de su posición curricular con respecto al resto de áreas de la matemática escolar. En consecuencia, el MER construido por la investigación delimita, reestructura y redefine una nueva *praxeología por enseñar* en torno a la MF en SU que difiere ampliamente de la praxeología por enseñar *oficial*.

En Lucas (2015), el MER se describió en forma de un *diagrama de actividad* en torno a la MF (figura 3). Así, se reformuló la noción de MF mediante un esquema detallado de los tipos de tareas matemáticas que componen los cuatro estadios del proceso de MF (Chevallard, 1989; Gascón, 2001).

El diagrama de la figura 3 está dividido en los cuatro estadios de dicho proceso, sin prejuzgar una sucesión temporal lineal entre ellos.

Primer estadio: Delimitación o construcción del sistema por modelizar en el que se formulan cuestiones problemáticas y conjeturas.

Segundo estadio: Construcción del modelo matemático y reformulación de las cuestiones iniciales en términos de los elementos del modelo.

Tercer estadio: Trabajo técnico dentro del modelo e interpretación de este trabajo y de los resultados en términos del sistema.

Cuarto estadio: Aparecen nuevas cuestiones problemáticas cuyo estudio requiere llevar a cabo un nuevo proceso de modelización. Diremos que «el modelo se ha independizado del sistema inicial» y ha pasado a jugar el papel de un nuevo sistema, poniendo así de manifiesto el *carácter recursivo del proceso de modelización matemática*.

Además, el diagrama de actividad de la MF (fig. 3) está organizado en dos grandes campos: el *discreto* (parte superior) y el *continuo* (parte inferior). Así, cuando una determinada actividad (o tipo de tareas) está situada sobre la línea ecuatorial, significa que es una actividad de transición o que puede desarrollarse tanto en el campo discreto como en el continuo.

Diseño, experimentación y evaluación de un REI en medicina nuclear. Etapa 5

Una vez construida en el ámbito de la investigación didáctica una versión del MER que, no debe olvidarse, tiene el estatus de *hipótesis científica* que hay que contrastar experimentalmente, la estrategia que estamos describiendo continúa con el diseño, la experimentación y la evaluación en SU[1] de un REI sustentado en dicho MER. Este REI, que se materializa en un curso sobre CDE, parte de una cuestión generatriz Q_0 (figura 5) surgida en el ámbito de la medicina nuclear (Lucas, 2015).

El diseño, la experimentación y la evaluación de este REI han permitido mostrar que una posible razón de ser del CDE surge en el ámbito de la MF, apoyando así la verosimilitud de la *conjetura de Ruiz-Munzón*[2]. En esta experimentación se puso de manifiesto que el CDE no sirve únicamente para manipular y estudiar un modelo funcional dado de antemano, sino que constituye un instrumento esencial para *construir los modelos e interpretarlos en términos del sistema modelizado* (Lucas, 2015, sección 8.1, capítulo III). Los REI «vividos» en SU están constituidos por secuencias de tareas resultantes de una red progresiva de cuestiones y respuestas que permiten:

1. *Dar visibilidad escolar a la* MF en SU, condición imprescindible para justificar el estudio del CDE en dicha institución.
2. *Articular entre sí diferentes praxeologías* matemáticas que surgen habitualmente de forma atomizada (como, por ejemplo, la resolución de las ecuaciones diferenciales, el cálculo de primitivas, y la representación gráfica de funciones), mediante su integración en procesos de MF.
3. *Sobrepasar las limitaciones* de la actividad matemática escolar habitual en torno al estudio del CDE en el ámbito de la MF, descritas en Lucas (2015, cap. III).

1. La experimentación (que puede considerarse como una primera *contrastación experimental* de la hipótesis científica en cuestión) se llevó a cabo en un primer curso de Medicina Nuclear que asimilamos al tránsito de la secundaria a la universidad (SU). Es importante subrayar que los conocimientos sobre el CDE de estos estudiantes al ingresar en la universidad se limitaban al cálculo de derivadas.

2. Recordamos que dicha conjetura se formula abreviadamente como sigue: la «razón de ser» del CDE, esto es, las cuestiones problemáticas que dan sentido al estudio del CDE en la última etapa de la enseñanza secundaria, deberían situarse en el ámbito de la MF (Ruiz-Munzón, 2010).

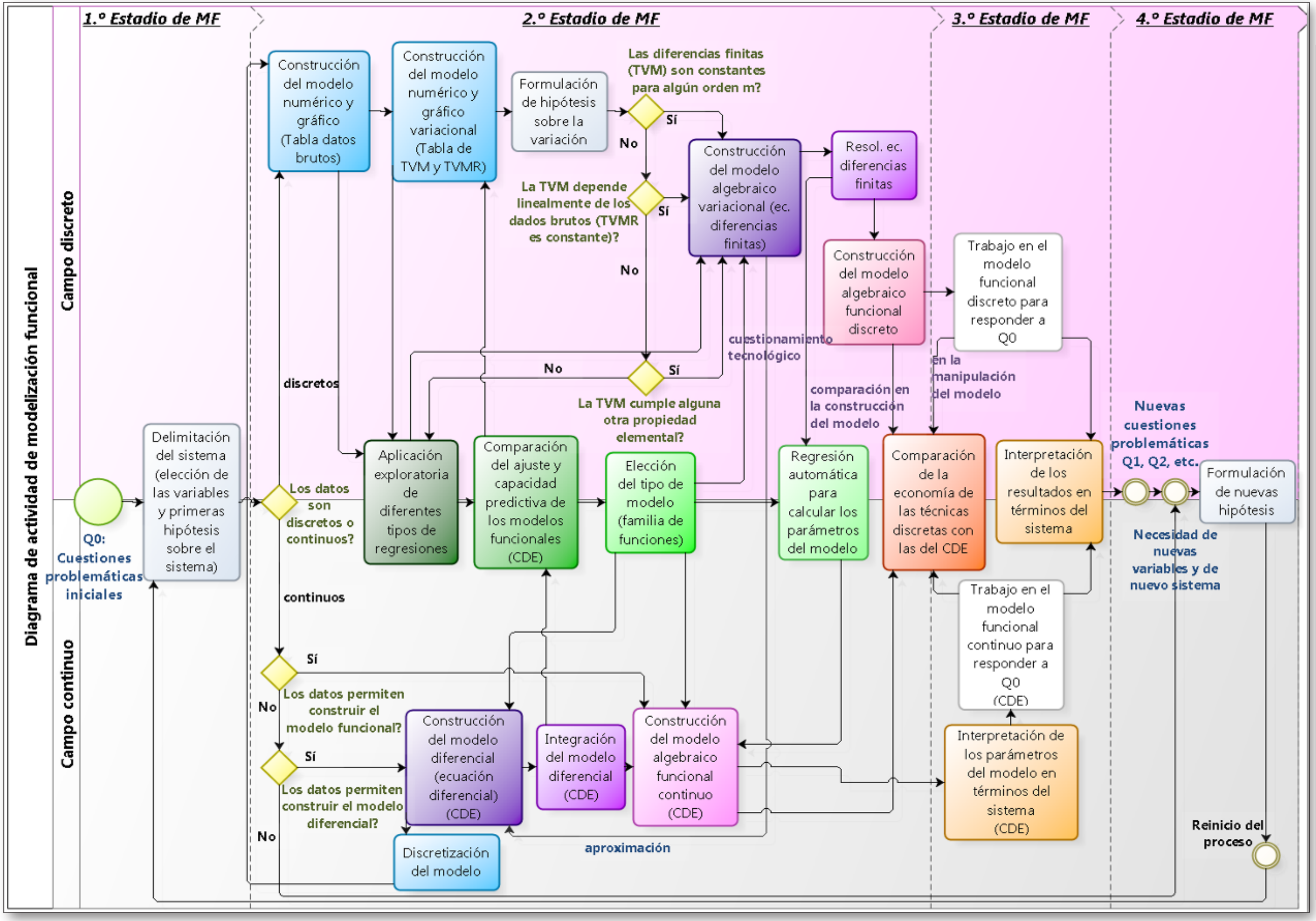


Fig. 3. Diagrama de actividad de la modelización funcional (Lucas, 2015).

La flexibilidad y versatilidad del MER esquematizado mediante un *diagrama de actividad* (figura 3) permite, en consonancia con la institución en que se trabaje, la exploración de todo el MER o de una parte de este.

Vuelta a la etapa 1: estudio de un problema de la profesión docente (Módulo M_0)

Es importante subrayar que el curso de formación del profesorado que describiremos a continuación no constituye una *experimentación* propiamente dicha. Le asignamos el estatus de *estudio exploratorio* con el objetivo de empezar a indagar las condiciones que se requieren y las dificultades que aparecen cuando se pretende fundamentar una estrategia de formación del profesorado en los resultados obtenidos en una investigación didáctica relativa a cierto dominio de la matemática escolar.

Una vez que se ha construido un MER y que se ha experimentado en SU un REI sustentado en este, la estrategia que estamos describiendo (figura 1) propugna utilizar la experiencia y los resultados de dicho proceso para diseñar un REI-FP cuyo objetivo sea posibilitar el estudio del *problema de la profesión* asociado. La formulación de este problema y las primeras etapas de su estudio se llevan a cabo en el módulo M_0 que surge de la cuestión generatriz Q_0-FP, que sintetizamos en los siguientes términos:

Q_0-FP: *¿Qué enseñar y cómo enseñar con relación al CDE en el tránsito entre la secundaria y la universidad*? *¿Qué papel desempeña* (*y cuál podría desempeñar*) *el CDE en el ámbito de la MF*?

La primera tarea que se propone para empezar a estudiar dicha cuestión profesional consiste en indagar cuál es la *respuesta que aporta la institución escolar* a esta y, paralelamente, qué otras posibles respuestas están disponibles en otras instituciones como son la investigación didáctica, la formación del profesorado, los libros de texto, los documentos que es posible encontrar en internet y publicaciones diversas. En el máster de Formación del Profesorado de Secundaria propusimos esta tarea a los profesores en formación en la asignatura Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en matemáticas, en los cursos académicos 2019-2020 (de manera presencial) y 2020-2021 (en línea). En lo que sigue describiremos únicamente los principales rasgos del curso que se desarrolló en 2020-2021 a lo largo de ocho sesiones de ochenta minutos cada una y donde los dieciséis estudiantes matriculados trabajaron agrupados en cuatro grupos que se conformaron por decisión libre de sus miembros. Aproximadamente, el 50 % de los estudiantes eran graduados en matemáticas y el 38 %, graduados en Física, siendo el resto de distintas ingenierías. Los nacidos entre 1995 y 1998 suponían el 69 %, habiendo nacido el resto entre 1982 y 1992.

Los profesores en formación empezaron a estudiar la *respuesta que aporta la institución escolar* a la cuestión profesional Q_0-FP tomando como material empírico diversos libros de texto, documentos oficiales, currículos, pruebas de selectividad, etc. Los estudiantes disponían de un espacio en Moodle en el que reflejaban sus discusiones e iban anotando sus aportaciones, comentarios y conclusiones provisionales. La profesora intervenía en la plataforma, separadamente con cada uno de los grupos, formulando cuestiones sobre los resultados y las afirmaciones no debidamente justificadas. Esta plataforma constituyó el principal instrumento metodológico para recolectar los datos. El estudio culminó en la elaboración, por parte de cada grupo de trabajo, de un *informe* con las primeras respuestas a las citadas cuestiones y posterior *presentación* a la comunidad de estudio por parte del *secretario* del grupo (función que era rotativa entre sus miembros). Este ha sido el método de trabajo llevado a cabo a lo largo de todo el proceso de estudio.

El grupo que estudió el *currículo oficial* (Real Decreto 1105/2014) –que se puede considerar como una parte importante de la repuesta que ofrece la institución de Enseñanza Secundaria a la cuestión Q_0-FP– se centró en los ítems desgranados en los *contenidos* relativos al *Bloque Análisis* de los itinerarios de Ciencias y Humanidades y Ciencias Sociales. La conclusión manifestada al respecto fue la siguiente:

«se recopilan una gran cantidad de definiciones y fórmulas cuya utilidad y cuyo sentido difícilmente podrán comprender los estudiantes de secundaria».

Con relación a los *criterios de evaluación y estándares de aprendizaje* en los currículos de Ciencias Sociales y Humanidades, el grupo responsable de analizarlos concluyó: «aunque se plantea el uso de las funciones como modelos para el estudio de fenómenos sociales y económicos, estos procesos de modelización no se explicitan en absoluto, quedándose en buenas intenciones».

En cuanto a los resultados del análisis de los *libros de texto*, el grupo encargado de esta tarea advirtió en su informe la reiteración excesiva de ciertos tipos de ejercicios, concluyendo que: «el estudio escolar del tema del cálculo diferencial elemental está muy dirigido a preparar la prueba de ingreso a la Universidad».

El grupo encargado de buscar «respuestas» a la cuestión Q_0-FP en *artículos de divulgación y de investigación* –(Rueda et al., 2016; Rojas et al., 2014; Castro y Duarte, 2015)– subrayó que: «estos trabajos resaltan la importancia que tiene el docente para lograr la motivación del alumnado a través de un planteamiento equilibrado de teoría y práctica, el uso de las TIC y el trabajo en grupo».

Asimismo, destacan la relevancia que se pone en «enseñar a pensar, pero sin dar pautas de cómo llevarlo a la práctica en las clases».

Vivir en la institución de formación del profesorado el REI experimentado en la etapa 5 en el curso de Medicina Nuclear (Módulo M1). Etapa 6

En la etapa 1 se formuló un problema de la profesión docente y se empezó a analizar el fenómeno didáctico asociado. A lo largo de las etapas 2, 3 y 4 se fue construyendo un MER en torno a la MF (que da sentido al estudio del CDE), y en la etapa 5 se experimentó (en un curso de Medicina Nuclear) un REI sustentado en dicho MER.

En la etapa 6, que constituye el M_1 del REI-FP, se pretende que los profesores en formación empiecen a construir, mediante un trabajo cooperativo, una respuesta propia a la cuestión Q_0-FP. Como primer paso, se proporciona a los profesores en formación la posibilidad de vivir en carne propia el REI experimentado en la etapa 5 en Medicina Nuclear (Lucas, 2015, cap. V, pp. 243-348). Se pretende que los estudiantes *construyan por sí mismos* una respuesta a la cuestión generatriz Q_0 de dicho REI:

Q_0: *¿Cómo se puede diagnosticar y prever el número de casos de cáncer de tiroides en las poblaciones más próximas a Chernóbil?*

Se supone: 1) que esta respuesta contendrá en cierta forma la proporcionada previamente por los alumnos de SU a la misma cuestión (Lucas, 2015, cap. V, pp. 330-336); y 2) que el trabajo que desarrollarán los profesores en formación para elaborar esta respuesta les permitirá constatar, en vivo, la importancia y hasta la necesidad de utilizar el CDE como instrumento esencial para *construir y estudiar modelos funcionales*. Dicho brevemente, se postula que el trabajo para estudiar y responder a la cuestión Q_0 constituirá un primer paso esencial para que los profesores en formación construyan posteriormente una respuesta propia a Q_0-FP. Para desencadenar el estudio de Q_0 se proponen algunas cuestiones derivadas relativas al decaimiento de los isótopos radiactivos de xenón y de molibdeno.

Todos los grupos se apoyaron en la búsqueda en internet y la utilización de Excel y GeoGebra para la representación de datos y funciones. Con relación a la representación de datos discretos, utilizaron un software para obtener las aproximaciones funcionales o bien las dedujeron de las propias representaciones y las validaron buscando en la web información sobre el decaimiento de los radioisótopos. Ninguno de los grupos de profesores llegó a construir la ecuación en diferencias finitas que llevaría a obtener el modelo algebraico funcional del decaimiento de un isótopo radiactivo.

Los grupos 2 y 3 abordaron el estudio representando las respectivas gráficas de los valores dados de los radioisótopos y concluyeron que el decaimiento del xenón se aproxima por una función exponencial, identificando (erróneamente) el decaimiento del molibdeno con una función lineal decreciente (figura 4).

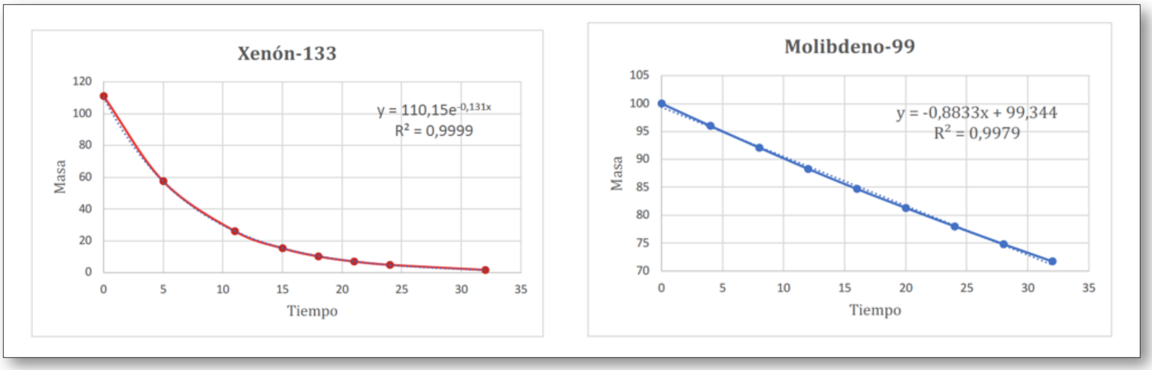


Fig. 4. Producciones del grupo 3.

Los grupos 1 y 4 encontraron en la web la expresión $N(t) = N_0e^{-\lambda t}$, que modeliza la desintegración de un isótopo radiactivo. En todos los casos, evitaron el trabajo con las tasas de variación media y relativa como herramientas para modelizar las desintegraciones de los radioisótopos. No es aventurado suponer que esta evitación se debe a la ausencia de un trabajo sistemático, tanto en el bachillerato como en los grados, de este tipo de datos discretos.

La última etapa del estudio, con la que se pretendía que cada grupo construyera su respuesta a Q_0, giró en torno a los datos numéricos proporcionados por la investigación sobre la incidencia del cáncer en las poblaciones más próximas a Chernóbil. Se les planteó la siguiente versión completa del problema (figura 5).

¿Cómo se puede prever a lo largo del tiempo el número de casos de cáncer de tiroides en las poblaciones más próximas a la antigua central ucraniana de Chernóbil, donde se produjo el accidente nuclear?

¿Que tipos de modelos funcionales podrían caracterizar este sistema?

El modelo que mejor se ajusta a los datos, ¿es el que mejor predice, necesariamente?

Podemos utilizar los datos empíricos proporcionados por investigaciones científicas (http://www.iaea.org/sites/default/files/chernobyl.pdf), como los de la tabla adjunta (la incidencia viene dada con relación a 100.000 habitantes).

AÑO	INCIDENCIA
0	0,1
1	0,5
2	0,3
3	0,45
4	1,3
5	2,8
6	3,5
7	4
8	5,2
9	4,95
10	5,5
11	5,2
12	5,9
13	7,1
14	6
15	6,1
16	7,85

Fig. 5. Enunciado del problema Q_0.

Utilizando Excel o GeoGebra, tres de los cuatro grupos obtuvieron aproximaciones polinómicas, logísticas o exponenciales a partir de los cinco primeros datos brutos (figura 6).

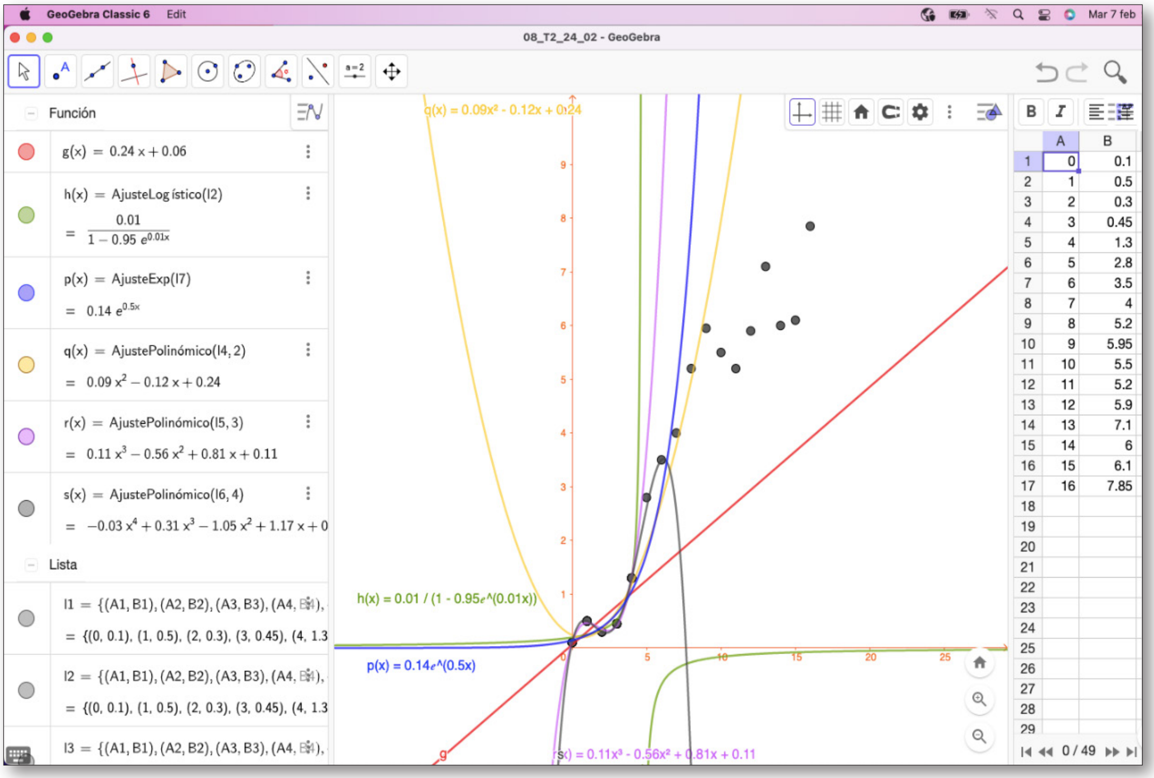


Fig. 6. Modelos funcionales obtenidos a partir de los cinco primeros datos brutos.

Tras un interesante debate sobre la interpretación de los resultados y la bondad de las aproximaciones, se llegó a la conclusión de que *el modelo que mejor se ajusta* a los cinco primeros datos *no es el que proporciona una mejor predicción* (figura 7).

Regresión	*Error de ajuste (cinco datos brutos)*	*Error de predicción (todos los datos)*
p: exponencial	0,14	216,19
h: logística	0,06	
g: lineal	0,17	2,11
q: polinómica (gr 2)	0,13	6,72
r: polinómica (gr 3)	0,01	152,70
s: polinómica (gr 4)	0	316,68

Fig. 7. Errores de ajuste y errores de predicción.

En este punto, y dado que ninguno de los modelos obtenidos por regresión sobre los datos brutos proporcionaba una buena predicción (figuras 6 y 7), la formadora propuso utilizar otras técnicas partiendo de la TVM y la TVMR, argumentando que un modelo funcional viene más caracterizado por el tipo de variación que define, que no por los valores que toma. Sin embargo, los resultados de los grupos utilizando las nuevas técnicas no fueron concluyentes debido, posiblemente, al tipo de sistema considerado.

Analizar el REI vivido (Módulo M_2). Etapa 7

En esta etapa, los profesores en formación retomaron el problema de la profesión docente descrito mediante la cuestión Q_0-FP, así como las respuestas parciales que habían encontrado en el módulo M_0. Estos datos, junto a la descripción de la respuesta a la cuestión Q_0 que figura en Lucas (2015), constituyeron la base empírica de la que disponían para llevar a cabo un análisis matemático-didáctico del REI vivido.

En referencia al *análisis matemático* del REI vivido se propuso de nuevo comparar, en el caso de *otro sistema*, las aproximaciones obtenidas por regresión sobre los datos proporcionados por la TVMR con las que se obtienen cuando se parte de los datos brutos. Se trabajó con los datos relativos a la propagación de los efectos biológicos (genéticos) del accidente en las generaciones futuras y se constató por parte de los cuatro grupos, que los datos expresados mediante las TVMR resultaron los mejores para predecir los tres últimos valores de dichos efectos biológicos (figuras 8 y 9).

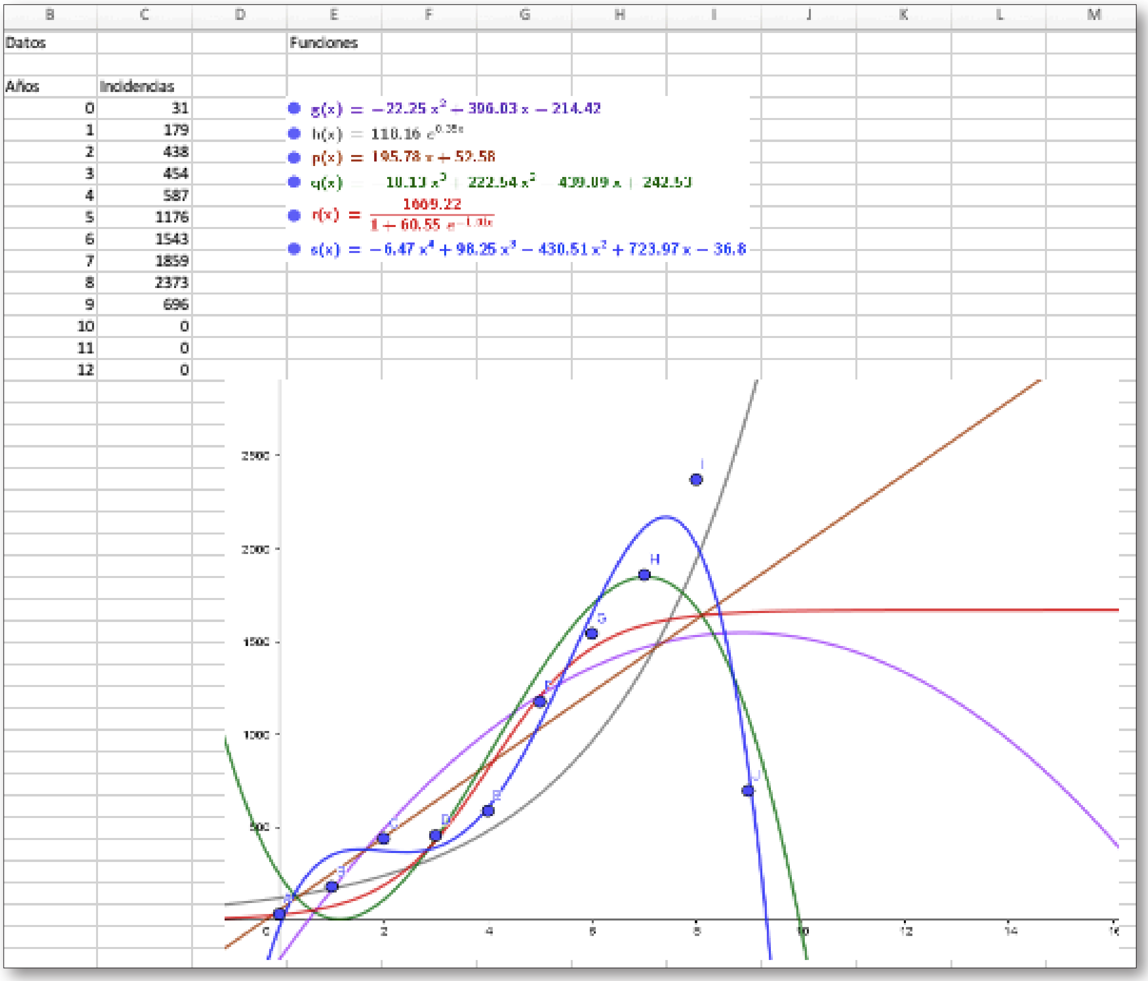
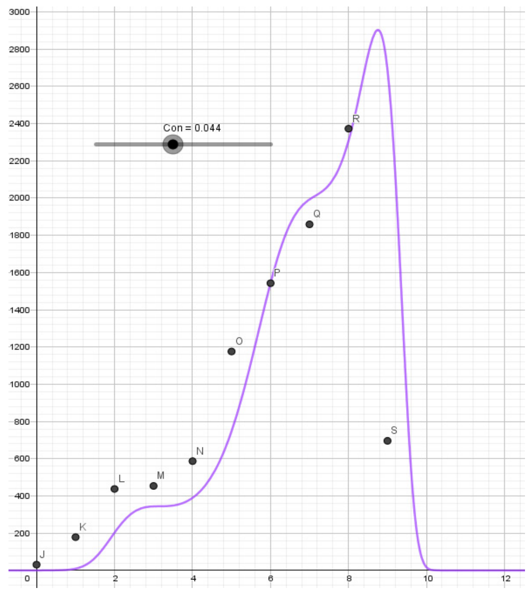


Fig. 8. Modelos funcionales obtenidos a partir de los datos brutos.

Año	Incidencia	TVM Incidencias	TVMR Incidencias
0	31		
1	179	148	4,774193548
2	438	259	1,446927374
3	454	16	0,03652968
4	587	133	0,292951542
5	1176	589	1,003407155
6	1543	367	0,31207483
7	1859	316	0,204795852
8	2373	514	0,276492738
9	696	-1677	-0,706700379
10	0		
11	0		
12	0		

Año	Ajuste de incidencias	Error de Ajuste	
0	0,044	30,956	
1	9,5579	169,4421	
2	203,0501	234,9499	Error medio de
3	344,4542	109,5458	Ajuste
4	389,8171	197,1829	335,93695
5	748,0016	427,9984	
6	1543,3916	0,3916	
7	1993,1701	134,1701	
8	2307,9599	65,0401	
9	2685,6926	1989,6926	
Año	Incidencias	Predicción del Ajuste	
10	0	16,8695	Media de error
11	0	0	de predicción
12	0	0	5,623166667



$$\text{buena}(x) = 0.044\, e^{-0.0004x^7+0.0122x^6-0.1615x^5+1.0464x^4-3.2625x^3+3.3678x^2+4.3789x}$$

Este es, sin lugar a duda, el que mejor predice los datos a futuro

Fig. 9. Modelo funcional obtenido por el grupo 4 a partir de las TVMR.

Se observa que el modelo funcional de la figura 9 (gráfico inferior) se ajusta a los tres últimos datos cuyos valores son nulos. Estos valores no son predichos por ninguno de los modelos funcionales obtenidos a partir de los datos brutos (figura 8).

Con relación al *análisis didáctico* del REI vivido, algunos profesores en formación reconocen, finalmente, que la metodología de trabajo en grupo ha permitido la exposición de distintas perspectivas desde las que enfocar el estudio y la confrontación razonada, ayudando a profundizar la problemática abordada. Sin embargo, el estudio en grupo no ha estado exento de dificultades.

Mientras que algunos estudiantes consideran y valoran positivamente que el trabajo que han realizado ha sido relativamente autónomo, otros consideran que este «exceso» de autonomía les provocó cierta desorientación al principio del curso. Se pusieron así de manifiesto las dificultades para «equilibrar» el reparto de responsabilidades a lo largo del proceso de estudio.

La asunción de una metodología de trabajo que requería considerar todos los resultados como parciales y provisionales, sometidos a posibles modificaciones y rectificaciones, no fue fácil, puesto que chocaba con la cultura didáctico-matemática de los estudiantes.

Finalmente, los profesores en formación se mostraron algo confusos con relación a la forma de implementar (en su futuro trabajo como profesores) la respuesta a la cuestión Q_0-FP. Al final del curso, aunque con muchas dificultades, acabaron reconociendo que, más allá de dar una respuesta a dicha cuestión, el proceso de formación del que habían sido protagonistas perseguía que tomaran contacto con un método de trabajo diferente al usual, en el que se da gran libertad a los alumnos y se les sumerge en un proceso de indagación encaminado a encontrar respuestas de manera relativamente autónoma.

Construcción de una praxeología matemática para la enseñanza. Etapa 8

Más allá de los conocimientos matemáticos por enseñar, en la formación del profesorado (para la enseñanza del CDE y la MF en SU) deben estudiarse cuestiones cuyas respuestas aparecen como necesarias, o al menos útiles, para:

a) Delimitar la actividad matemática escolar en torno a la MF y seleccionar el tipo de modelos funcionales (discretos y continuos) que pueden construirse en SU.
b) Explicitar la razón de ser oficial que el MEV asigna en SU a la MF, el papel que desempeña el CDE y, en definitiva, los fines educativos que se pretenden en SU con su estudio.
c) Interpretar adecuadamente la razón de ser alternativa que el MER propone, así como los nuevos fines educativos asociados a esta redefinición de la MF.
d) Más allá de la MF, relacionar el CDE con los diferentes bloques o áreas de la matemática por enseñar y otros ámbitos de la vida científica, escolar y social.

Se trata de un conjunto de conocimientos, esencialmente «matemáticos», imprescindibles para que los futuros profesores tengan una visión matemático-didáctica que permita dar sentido al estudio del CDE en el ámbito de la MF en SU.

Además de estos conocimientos, que constituyen el núcleo de una praxeología matemática *para la enseñanza* (del CDE y la MF en SU) y que rebasan ampliamente los contenidos de la praxeología matemática *por enseñar* en SU, sería de esperar que en un curso de formación del profesorado de este tipo, y a partir de los datos proporcionados por el análisis matemático del REI vivido, los profesores en formación formularan nuevas cuestiones que comportasen el enriquecimiento progresivo de la praxeología matemática *para la enseñanza* mediante la construcción de nuevos modelos funcionales. Sin embargo, en el curso de formación que estamos describiendo, solo uno de los grupos propuso un desarrollo incipiente de un nuevo modelo (el logístico-continuo), lo que pone de manifiesto la existencia de ciertas *dificultades de origen matemático*. Consideramos que, en todo caso, los nuevos modelos funcionales que tiene sentido estudiar en cada curso de formación concreto deberían ser los propuestos por los propios profesores en formación.

El mecanismo general de dicha ampliación consiste en caracterizar un modelo funcional mediante el *tipo de variación* de la función que lo define y, por tanto, ampliar la clase de modelos funcionales *formulando nuevas hipótesis* (justificadas por la naturaleza del sistema y por los datos que se disponen de este) sobre el tipo de variación del sistema por modelizar.

En lugar de restringirse a un *universo de modelos discretos elementales* propios de SU (Lucas, 2015, sección 1.1, cap. IV), los profesores en formación podrían considerar modelos discretos más generales como, por ejemplo, el *modelo logístico discreto* que se obtiene al suponer que la *variación del sistema* se expresa mediante una función cuadrática de :

$$\Delta_n\, y = y_{n+1} - y_n = b y_n \left(1 + \frac{y_n}{b/k}\right)$$

Análogamente, entre los nuevos modelos continuos, podrían aparecer el *modelo logístico continuo* y el *modelo de crecimiento limitado*, entre otros.

A MODO DE SÍNTESIS: EL PROBLEMA DEL CAMBIO DE PARADIGMA DIDÁCTICO

El fenómeno didáctico[3] descrito (Lucas, 2015; Lucas y Gascón, 2019; Lucas et al., 2017) se manifiesta, entre otras cosas, en la ausencia de un trabajo matemático escolar eficaz dirigido a la construcción de modelos funcionales y en el uso casi exclusivo del CDE para estudiar las propiedades de diversos tipos estereotipados de funciones, lo que comporta el correspondiente aislamiento del CDE respecto de la MF y provoca enormes dificultades para situar la razón de ser del CDE en el ámbito de la MF. Este fenómeno es considerado «indeseable» desde la perspectiva de la TAD porque contradice algunas de sus asunciones básicas relativas a la naturaleza de la actividad matemática y a los fines que asigna a la educación matemática.

Se trata de un fenómeno didáctico que, como todos, condiciona el trabajo de la profesión docente, independientemente del grado en que los profesores sean conscientes de él. En última instancia, y dado que la problemática docente es el punto de partida de cualquier *estrategia* de *formación del profesorado*, es evidente que esta debe basarse, al menos en parte, en los resultados del estudio de los fenómenos didácticos.

En este punto, nos preguntamos: ¿cómo podría diseñarse y gestionarse una estrategia de formación del profesorado que soslaye las consecuencias «indeseables» (desde cierta perspectiva) del fenómeno didáctico que hemos descrito en torno al CDE y la MF? Una posible respuesta la proporciona Ruiz-Olarría (2015), que propone la estrategia general para la formación del profesorado descrita en este trabajo.

El estudio llevado a cabo en Lucas (2015) sugiere la necesidad de un cambio del *paradigma didáctico vigente* (Gascón y Nicolás, 2021a) en SU en torno a la MF, esto es, un cambio del MEV en la dirección marcada por el MER y, correlativamente, una transformación de los *fines educativos* asociados. Estos cambios comportarán modificar los *medios didácticos vigentes* en SU para poner en marcha otros medios que sean útiles para alcanzar los nuevos fines (Gascón y Nicolás, 2017).

Surge así, con fuerza, el problema del *cambio de paradigma didáctico vigente* en una institución escolar. Mientras que en el nivel experimental es posible poner en marcha *localmente* la nueva modalidad de estudio de la MF, basada en un MER alternativo al MEV, tal como se ha puesto de manifiesto en Lucas (2015), para que fuese posible hacerlo a nivel global sería preciso que la comunidad educativa decidiese que ciertos fines educativos son más valiosos que otros y que ciertos fenómenos didácticos deben ser evitados. Se requeriría, además, que dicha comunidad aceptase (y fuese capaz de) poner en marcha unos medios didácticos que podrían ser muy diferentes a los habituales. En definitiva, si se pretende un cambio de paradigma a gran escala (más allá de las experimentaciones locales) sería preciso, además, controlar su impacto sobre la educación matemática en SU globalmente considerada. Nada nos asegura que la nueva forma de conceptualizar la MF y sus nuevas relaciones con el resto de los dominios de la matemática escolar, los nuevos fines educativos asociados al estudio de la MF en SU, así

3. Interpretamos un *fenómeno didáctico* como un conjunto de hechos relacionados con el estudio que se repiten regularmente en determinadas circunstancias y en diferentes instituciones. Se trata de hechos que son, desde cierta perspectiva, sorprendentes y hasta asombrosos, por lo que parecen requerir una explicación (Mosterín y Torretti, 2010).

como los nuevos medios didácticos que se requieren, sean *ecológicamente compatibles* con la educación matemática vigente en SU globalmente considerada (Gascón y Nicolás, 2021b).

Dado que en la institución de FP no existe actualmente una forma asumida y compartida de interpretar el estudio de la MF ni, por tanto, un MEV_{FP} (MF), tal como pone de manifiesto el análisis del contenido de los programas de la asignatura Complementos de Formación Disciplinar, que se imparte en el máster de Formación del Profesorado en las diferentes universidades españolas (Ruiz-Olarría, 2015, cap. 1, sección 3), proponemos iniciar los cambios instaurando en la institución de FP la praxeología para la enseñanza en torno a la MF elaborada según la estrategia esquematizada en la figura 1.

Sin embargo, el diseño y la gestión de este tipo de cursos de formación del profesorado no deja de plantear, como hemos visto, dificultades debidas, entre otros factores, a las incompatibilidades entre la cultura didáctico-matemática de los profesores en formación y el nuevo paradigma didáctico que se pretende instaurar. En nuestro caso, han aparecido incomprensiones y conflictos relacionados con: la forma de articular el trabajo en grupo; el reparto de responsabilidades entre los diferentes miembros de la comunidad de estudio; la graduación y la asunción progresiva de la autonomía de los estudiantes; la adopción de una metodología de trabajo que no considera ningún resultado como definitivo; la forma como los estudiantes deberían implementar la respuesta construida a la cuestión Q_0-FP en su futuro trabajo como profesores; y la utilización de los conocimientos matemáticos de los estudiantes para ampliar la praxeología matemática por enseñar.

En resumen, podemos afirmar que el objetivo (parcial) asignado al estudio exploratorio, implementado en la institución de formación del profesorado, se ha alcanzado en un grado relativamente alto, ya que que hemos puesto de manifiesto algunas condiciones que se requieren y, sobre todo, hemos detectado las principales restricciones que dificultan dicha estrategia de formación. Para seguir profundizando en el análisis de estas restricciones y en su posible superación, será necesario replicar este *estudio exploratorio* con otros grupos de profesores, en otras instituciones y basándolo en la investigación didáctica relativa a diferentes dominios de la matemática escolar.

Para concluir, y en lo que se refiere al objetivo global de este trabajo, consistente en mostrar una forma concreta de utilizar los resultados de la investigación didáctica como base para el diseño de una estrategia de formación del profesorado, consideramos que los logros obtenidos son muy prometedores, aunque limitados, y sugieren que podrían reproducirse en otros dominios.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por los proyectos: PID2021-126717NB-C31, PID2021-126717NB-C32 y PID2021-126717NB-C33.

REFERENCIAS

Alanís, J. A. y Soto, E. (2012). La integral de funciones de una variable: Enseñanza actual. *El Cálculo y su Enseñanza*, *3*, 1-12. https://recacym.org/index.php/recacym/article/view/135

Artigue, M. (1991). Analysis. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 167-198). Kluwer Academic Press.

Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18*(2), 231-262.

Artigue, M. y Ervynck, G. (Eds.) (1992). *Proceedings of Working Group 3 on students' difficulties in calculus*. ICME 7. Université de Sherbrooke.

Artigue, M., Batanero, C. y Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at post-secondary level. En F. K. Lester (Ed.), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1011-1049). Information Age Publishing.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education* (pp. 1-32). American Mathematical Society.

Bosch, M., Gascón, J. y Trigueros, M. (2017). Dialogue between theories interpreted as research praxeologies: the case of APOS and the ATD. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(3), 39-52. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9734-3

Bravo, A. S. y Cantoral, R. (2012). Los Libros de Texto de Cálculo y el Fenómeno de la Transposición Didáctica. *Educación Matemática*, *24*(2), 5-36.

Bustos Tiemann, C. y Ramos Rodríguez, E. (2022). Una mirada sobre conceptos del cálculo desde el conocimiento de los temas del profesorado de matemática de secundaria. *Innovaciones Educativas*, *24*(36), 84-100. https://doi.org/10.22458/ie.v24i36.3893

Cantoral, R. y Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *6*(2), 133-154. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2092478

Castro, F. y Duarte, O. (2015). La enseñanza problémica como estrategia didáctica para el aprendizaje de conceptos de cálculo diferencial. *RECME*, *1*(1), 172-177. http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME

Chevallard, Y. (1989). *Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Étapes d'une recherche*. Publications n.º 16 de l'IREM Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique*: du savoir *savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. y Cirade, G. (2010). Les ressources manquantes comme problème professionnel. En G. Gueudet y L. Trouche (Eds.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 41-55). INRP.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(3), 265-286.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Kluwer Academic Press.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Kluwer Academic Press.

Dubinsky, E. y Harel, G. (Eds.) (1992). *The concept of Function: Some aspects of Epistemology and Pedagogy*. MAA Notes, *25*.

Fuentealba, C., Trigueros, M., Sánchez-Matamoros, G. y Badillo, E. (2022). Los mecanismos de asimilación y acomodación en la tematización de un esquema de derivada. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *21*, 23-44. https://doi.org/10.35763/aiem21.4241

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(2), 129-159. https://dialnet.unirioja.es/ejemplar/145232

Gascón, J. y Nicolás, P. (2017). Can didactics say how to teach? The beginning of a dialogue between the anthropological theory of the didactic and other approaches. *For the Learning of Mathematics*, *37*(3), 9-13.

Gascón, J. y Nicolás, P. (2021a). Incidencia de los paradigmas didácticos sobre la investigación didáctica y la práctica docente. *Educación Matemática*, *33*(1), 7-40. https://doi.org/10.24844/EM3301.01

Gascón, J. y Nicolás, P. (2021b). Relaciones entre la investigación y la acción en didáctica de las matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM)*, *20*, 23-39. https://aiem.es/article/view/v20-aascon-nicolas/4033-pdf-es

García, M., Gavilán, J. M. y Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(3), 219-235.

Gavilán, J. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva* [Tesis de doctorado]. Universidad de Sevilla. https://idus.us.es/handle/11441/53328

Gray, E. y Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*, 115-141.

Harel, G. y Kaput, J. (1991). The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical concepts. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 82-94). Kluwer Academic Press.

Lucas, C., Gascón, J. y Fonseca, C. (2017). Razón de ser del cálculo diferencial elemental en la transición entre la enseñanza secundaria y la universitaria. *REDIMAT*, *6*(3), 283-306. http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2017.2116

Lucas, C. y Gascón, J. (2019). Las tres dimensiones del problema didáctico del cálculo diferencial elemental. *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM)*, *16*, 40-56. https://doi.org/10.35763/paiem.v0i16.277

Lucas, C. (2015). *Una posible «razón de ser» del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional* [Tesis de doctorado]. Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Vigo, España. http://www.investigo.biblioteca.uvigo.es/xmlui/handle/11093/542

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Enseñanza Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, *3*. https://www.boe.es/eli/es/rd/2014/12/26/1105/con

Mosterín, J. y Torretti, R. (2010). *Diccionario de lógica y filosofía de la ciencia*. Alianza Editorial.

Rojas, S., Suárez, S. y Parada, S. (2014). Presaberes matemáticos con los que ingresan estudiantes a la universidad. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1169-1176).

Rueda, J., Parada Rico, S. y Fiallo Leal, J. (2016). Potenciando habilidades mediante un curso de precálculo dirigido a estudiantes de primer ingreso a la Universidad. *Revista Colombiana De Matemática Educativa*, *1*(1b), 148. http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME/article/view/242

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* [Tesis de doctorado]. Universitat Autònoma de Barcelona. https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=22189

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza* [Tesis de doctorado inédita]. Universidad Autónoma de Madrid.

Ruiz-Olarría, A., Bosch, M. y Gascón, J. (2019). Construcción de praxeologías para la enseñanza en la institución de formación del profesorado, *Educación Matemática*, *31*(2), 132-160. http://doi.org/10.24844/EM3102.06

Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *12*(3), 355-382. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362009000300004&lng=es&tlng=es

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(2), 267-296. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2661174

Schwarzenberger, R. y Tall, D. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, *82*, 44-49.

Sfard, A. (1989). Transition from operational to structural conception: the notion of function revisited. *Proceedings of PME XIII*, *3* (pp. 151-158).

Sfard, A. (1992). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *6*(1), 5-67.

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. En A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Kluwer Academic Press.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, *9*(46), 75-87. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=179414894008

Trigueros, M. y Martínez-Planell, R. (2015). Las funciones de dos variables: análisis mediante los resultados del diálogo entre la teoría APOS y la TAD. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 157-171. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1520

Trigueros, M., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD*. An overwiew of ATD (pp. 77-116). Centre de Recerca Matemàtica.

Vega Urquieta, M. A., Carrillo, J. y Soto, J. (2014). Análisis según el modelo cognitivo APOS del aprendizaje construido del concepto de la derivada. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 403-429.
https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a20

A Strategy for Teacher Education: The Case of Elementary Differential Calculus

Catarina Oliveira Lucas
Instituto Politécnico Gaya. ISPGAYA. Portugal
clucas@ispgaya.pt

Alicia Ruiz-Olarría
Departamento de Didácticas Específicas. UAM. España
alicia.ruiz@inv.uam.es

Josep Gascón Pérez
Departamento de matemáticas. UAB. España
josepgasconperez@gmail.com

Every teaching institution constructs, in action, a notion of *study*, i. e. it assumes a way of interpreting the knowledge at stake, privileges certain aims of education and advocates some didactic means which are supposedly useful for achieving these aims. In short, it constructs an outline of a *didactic paradigm*, a particular type of *mode of study* that is difficult to modify, since it is a cultural construction that crystallizes over time and is conditioned by all kinds of factors. Moreover, the type of training of prospective mathematics teachers in this institution is usually traditionally coherent with this joint interpretation of mathematics and mathematics education and ends up shaping a shared culture that evolves in line with the dominant ideology. First, the question arises as to the role that the results of didactic research could play in the possible evolution of this culture in a given direction.

To answer this question, the starting point of this paper is an investigation on a didactic phenomenon, described in Lucas (2015), which manifests itself in the almost exclusive use of *elementary differential calculus* (EDC) to study the properties of different stereotyped functions and, above all, in the absence of school mathematical work that uses the tools of EDC to construct functional models of systems of all kinds (physical, biological, economic, mathematical, etc.) and thus be able to answer the questions posed by the terms of the systems. The analysis of this didactic phenomenon provides us with a representation of the didactic paradigm in force around EDC in the transition from secondary school to university. This paradigm has «undesirables» consequences from the perspective of the *anthropological theory of the didactic* (ATD), in which this study is based, because it contradicts some of its basic assumptions regarding the nature of mathematical activity and the purposes that ATD assigns to mathematics education.

The results of this research suggest that, in order to avoid the aforementioned «undesirables» consequences and give meaning to the study of EDC, we must situate it in the field of *functional modelling*, and that this new way of interpreting EDC will require a change in the current didactic paradigm (Gascón & Nicolás, 2021). We propose, as a first step, to design and experiment a teacher training modality based on the general training strategy proposed in the work of Ruiz-Olarría (2015).

The implementation of this training process has allowed us to show that it is possible to use the results of didactic research to propose directions for changing the current didactic paradigm, always from the perspective of a certain didactic theory. Likewise, the implementation of a teacher training modality based on the aforementioned research results has revealed the conditions required and the restrictions that arise in the management of this type of course due, among other factors, to the incompatibilities between the didactic-mathematical culture of the teachers in training and the new didactic paradigm that is intended to be established.

ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS 41-2 (2023), 93-115
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5645
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Diseño y viabilidad de recursos para enseñar la modelización QSAR en ingeniería química

Design and Viability of Resources for Teaching QSAR Modeling in Chemical Engineering

Nahúm Galindo Vargas
Laboratorio de Biomacromoléculas, Instituto Politécnico Nacional, Santa Cruz Xoxocotlán, Oaxaca, México.
nahum.galindo@gmail.com

Avenilde Romo Vázquez
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.
avenilde.romo@cinvestav.mx

Joaquín Barroso Flores
Instituto de Química, Universidad Nacional Autónoma de México, México.
jbarroso@unam.mx

RESUMEN • La modelización de relaciones cuantitativas estructura-actividad (Quantitative Structure-Activity Relationship, QSAR) es relevante en la ingeniería química, pero aún no figura en la formación. Con el objetivo de diseñar recursos para integrarla, se realizó una investigación enmarcada en la teoría antropológica de lo didáctico y en la metodología de la ingeniería didáctica. Se generó una transposición didáctica de la modelización QSAR. Se analizaron dos currículos universitarios y las rutas didácticas sobre QSAR –clasificación didáctica de saberes por tópico y nivel de complejidad para su estudio–. Con base en ello, se diseñaron dispositivos didácticos: recorridos de estudio e investigación (REI-QSAR) y se mostró su viabilidad para integrarlos en cursos de ingeniería química, por lo que constituye una vía didáctica innovadora para que los futuros ingenieros construyan e interpreten modelos.

PALABRAS CLAVE: Formación de ingenieros químicos; Modelización matemática; QSAR; Recurso didáctico; Teoría antropológica de lo didáctico.

ABSTRACT • The Modeling Quantitative Structure-Activity Relationship (QSAR) is relevant to chemical engineering but it is still not part of the training curricula. With the aim to integrate it, an investigation has been developed using elements of the anthropological theory of the didactic and didactic engineering. The didactic transposition on QSAR modeling has been performed. Two university curricula and the didactic routes on QSAR –didactic classification of knowledge by topic and level of complexity for its study– have been analyzed. Based on this, didactical devices were designed: Study and Research Paths (SRP-QSAR). Its viability of implementation in Chemical Engineering courses was evidenced, constituting an innovative didactic way to allow future engineers to build and interpret models.

KEYWORDS: Chemical engineers training; Mathematical modelling; QSAR; Didactic device; Anthropological theory of the didactic.

Recepción: febrero 2022 • Aceptación: marzo 2023 • Publicación: junio 2023

Galindo Vargas, N., Romo Vázquez, A. y Barroso Flores, J. (2023). Diseño y viabilidad de recursos para enseñar la modelización QSAR en ingeniería química. *Enseñanza de las Ciencias*, *41*(2), 93-115.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5645

INTRODUCCIÓN

La modelización matemática ha desempeñado una función primordial en el desarrollo de la ciencia, de la tecnología y de las ingenierías (Pollak, 2007). Esto ha motivado la elaboración de propuestas didácticas para su enseñanza en todos los niveles educativos. Sin embargo, tanto el estudio internacional ICMI 14, dedicado a la modelización y a sus aplicaciones matemáticas y conducido por la Comisión Internacional de la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI, por sus siglas en inglés), como el decimotercer congreso ICTMA (International Conferences on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications), enfocado en las competencias de modelización matemática en los estudiantes, coinciden en que las actividades de modelización constituyen casos aislados en la enseñanza regular (Blum et al., 2007; Lesh et al., 2010). De hecho, la integración de ejemplos de modelización del mundo real en la educación básica (Lesh et al., 2010) y del mundo laboral y científico en la formación universitaria ha sido señalada como una demanda urgente (Frejd y Bergsten, 2016; Romo y Artigue, 2023).

Y aunque la modelización aparece en la mayoría de los temarios de matemáticas para ciencias, suele relegarse al final del proceso educativo (Barquero y Bosch, 2015) bajo una visión aplicacionista (Barquero et al., 2014). En la formación de futuros ingenieros suele enfocarse en el desarrollo de habilidades por competencias, sin definir claramente las competencias para la modelización (Elizalde y Rosas, 2016). Por ejemplo, el Tecnológico Nacional de México incluye el estudio de los modelos a nivel de conceptos, leyes, principios, postulados y teoremas (Dirección General de Educación Superior Tecnológica, 2012), mientras que la modelización está asociada «implícitamente» a los contenidos procedimentales.

Más específicamente, en la educación química universitaria existe escasa implementación de actividades para analizar, desarrollar y evaluar modelos y, aunque más recientemente se han generado propuestas innovadoras (por ejemplo, Amer et al., 2022), siguen predominando las actividades que recurren a una sobresimplificación de los modelos (Erduran y Duschl, 2004) y que no favorecen la comprensión de las representaciones macro, micro y simbólica, ni tampoco las relaciones entre ellas (Gilbert y Treagust, 2009). La representación macro se refiere a las propiedades, cualidades observables o medibles de un sistema, mientras que la representación micro se refiere a su estructura (composición, geometría y conectividad) (Talanquer, 2018). La representación simbólica, por su parte, incluye los símbolos utilizados para representar los átomos o grupos de ellos y diversas propiedades. Las relaciones estructura-propiedad, que unen las representaciones macro y micro, incluyen el comportamiento biológico, el toxicológico, el fisicoquímico, ya que estas también son propiedades de las sustancias químicas (Roy et al., 2015). En particular, las relaciones estructura-propiedad de biomoléculas resultan clave en la ingeniería química, y es por ello por lo que deberían incluirse en el currículo de formación del ingeniero químico (Favre et al., 2008), aunque algunas investigaciones alertan sobre su complejidad (Cooper et al., 2013; Talanquer, 2018).

Todo lo anterior ilustra la necesidad de generar propuestas didácticas de modelización matemática para la formación del ingeniero químico, que integren ejemplos del mundo científico o laboral contemporáneo y las representaciones macro, micro y simbólica y sus relaciones; es decir, las relaciones estructura-actividad entre las moléculas. Para atender dicha necesidad, se exploró un contexto de investigación en ingeniería química y se identificó una actividad de modelización matemática relevante en la investigación *in silico*[1] para la predicción de propiedades o actividad biológica: la metodología QSAR. Dos preguntas de investigación emergieron: ¿La metodología QSAR puede ser transpuesta a la formación de futuros ingenieros químicos mediante un dispositivo didáctico de modelización matemática? ¿Qué características debe tener dicho dispositivo didáctico para permitir a un profesor

1. Simulación realizada en ambientes informáticos en lugar de realizarla *in vivo* o *in vitro*.

universitario, no experto en QSAR, adaptarlo a las condiciones de su enseñanza? Para abordarlas, se consideraron elementos de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) y la metodología de la ingeniería didáctica. El análisis praxeológico de la modelización QSAR, de planes de estudio universitarios y de las normas didácticas de las instituciones de investigación donde se utiliza la modelización QSAR permitieron operar una transposición didáctica y generar un espectro de propuestas didácticas específicas que requieren ser probadas experimentalmente.

MARCO TEÓRICO

Elementos de la TAD

La TAD ofrece un modelo epistemológico para el análisis de la actividad humana en su dimensión institucional (Chevallard, 1999, 2019). Las instituciones son organizaciones sociales estables (por ejemplo, la escuela, el club deportivo) que enmarcan actividades y las hacen posibles gracias a los recursos que ponen a disposición de sus sujetos; dependiendo de su relación con el conocimiento, pueden ser clasificadas en tres categorías: de producción, de enseñanza y usuarias. Las instituciones de producción o académicas producen saberes (como las matemáticas o la química). Las instituciones de enseñanza son las responsables de transmitir los saberes (mediante cursos de matemáticas, de química, etc.) y las instituciones usuarias son aquellas donde los saberes se utilizan (por ejemplo, en laboratorios, en fábricas, etc.).

La modelización matemática está estrechamente relacionada con la actividad matemática, concebida como una actividad humana que consiste en producir, transformar, interpretar y desarrollar modelos matemáticos (Barquero et al., 2019) en diversas instituciones, y que puede ser analizada mediante un modelo único: la praxeología. Sus cuatro componentes son tipo de tarea T (lo que se hace), técnica τ (la forma en que se hace), tecnología θ (discursos que justifican, explican y validan las técnicas) y teoría Θ (discursos más generales que justifican, explican y validan las tecnologías).

Las praxeologías pueden circular de una institución a otra, sufriendo, en efecto, procesos transpositivos. Cuando una praxeología producida en una institución es importada a otra, esta puede contener elementos de ambas instituciones, por lo que se vuelve mixta (Vázquez et al., 2016). Por ejemplo, la ingeniería química ha importado praxeologías de modelización matemática y las ha adaptado para resolver tareas de dicha ingeniería, como modelar una relación de estructura-actividad. Lo que puede representarse de la siguiente manera: $[T^{iq}, \tau^{miq}, \theta^{miq}, \Theta^{miq}] \leftarrow IQ$, donde la m simboliza los elementos matemáticos, iq los elementos de la ingeniería química e IQ la institución de la ingeniería química, en la cual la praxeología ha sido desarrollada y validada.

Gascón y Nicolás (2022, p. 16) ilustran las instituciones y fases de la transposición didáctica, proceso que transforma los conocimientos académicos en escolares (figura 1, traducción propia y similar a la presentada en Gascón y Nicolás, 2022):

Fig. 1. Instituciones y fases que participan en la transposición didáctica.

De acuerdo con Bosch et al. (2021, p. 142), «el proceso de selección, adaptación, organización y declaración de los saberes que se van a enseñar, empezando por el saber académico y terminando con los materiales didácticos propuestos para determinado curso es denominado transposición didáctica externa (TDE)». La TDE puede estar a cargo del profesor universitario, cuando este es sujeto de las instituciones académicas, de la noósfera[2] y del aula, lo que limita ciertas transposiciones y lleva a cuestionarse: ¿qué análisis praxeológicos permiten transponer una praxeología mixta que se ha identificado como relevante en una institución de ingeniería para ser enseñada?, y ¿qué rol puede jugar en dicha transposición un profesor universitario que no pertenece a las instituciones de investigación, pero sí a la noósfera –por ejemplo, academias que configuran los planes de estudio– y al aula?

Realizar una transposición didáctica de la institución de ingeniería al aula requiere considerar una unidad de análisis, que, de acuerdo con Barquero et al. (2019), incluye un análisis praxeológico de las matemáticas enseñadas en las carreras de ingenieros químicos y la reconstrucción de estructuras praxeológicas que, de acuerdo con esta teoría, podrían existir para que la modelización matemática del QSAR pueda ser integrada, lo que requiere a su vez elucidar la praxeología QSAR, los tipos de tareas que permite resolver, la técnica que constituye el proceso de modelización matemática y el logos asociado, que incorpora elementos matemáticos y de ingeniería. Es decir, un modelo epistemológico de modelización matemática en ingeniería reflejado a través de la praxeología mixta QSAR.

Los recorridos de estudio e investigación (REI)

Los REI constituyen dispositivos didácticos que permiten la integración de la modelización matemática en el aula, con un enfoque de indagación (Barquero et al., 2011). El sistema didáctico asociado está formado por el conjunto de estudiantes X, el conjunto de los guías o profesores Y, y una cuestión, cuyo estudio suele iniciarse por cuestiones derivadas Q_i, lo que permite identificar respuestas existentes $R^\Diamond$ en obras O (artículos de investigación, páginas web, consulta a expertos, etc.) y de nuevas cuestiones. Todos estos elementos y las relaciones entre ellos constituyen el medio didáctico que permite elaborar una respuesta $R^\heartsuit$, no final, pero «significativa» en relación con cierta institución I. Lo que se representa mediante el esquema herbartiano:

$$\left[S(X;Y;Q) \rightarrow \left\{R_1^\Diamond, R_2^\Diamond, R_3^\Diamond, \ldots R_n^\Diamond,\ Q_{n+1}, \ldots Q_m, O_{m+1}, \ldots O_p\right\}\right] \rightarrow R^\heartsuit$$

Los REI son abiertos cuando se desconoce completamente la forma en que Q puede ser estudiada y finalizados cuando se conoce *a priori* al menos una forma de responder Q. Su análisis se hace mediante dialécticas que evidencian el proceso de estudio de la cuestión Q. Estas dialécticas son, por ejemplo, la de las cuestiones y respuestas y la de los *media*-medios. La primera consiste en identificar las subcuestiones derivadas de Q y las respuestas $R^\Diamond$ encontradas que permiten producir $R^\heartsuit$. La segunda consiste en el saber construido al que se considera como producto de una conjetura y que, como tal, debe ponerse a prueba (Costa et al., 2015). Los *media* (del francés *médias*) se refiere a los medios de comunicación masiva: un programa de televisión, un libro o la clase de un profesor. Los medios son recursos o instrumentos desprovistos de intención didáctica (Chevallard, 2004), tomados de los medias, que posibilitan la elaboración de respuestas provisionales hasta construir la respuesta $R^\heartsuit$.

2. Instancia en la que se decide qué enseñar y se crean, por ejemplo, los planes de estudio, y puede estar conformada por profesores universitarios (como academias o departamentos universitarios), pero también por creadores de modelos educativos, educadores y pedagogos, entre otros.

METODOLOGÍA

La metodología de investigación se basa en la ingeniería didáctica, que ofrece una ruta sólida para el diseño e implementación de situaciones didácticas en el aula (Artigue, 2015), y que ha sido adaptada para el diseño de los REI (Barquero y Bosch; 2015; García et al., 2019). Sus cuatro fases son las siguientes: 1) análisis preliminares, 2) diseño del REI y análisis *a priori*, 3) experimentación y análisis *in vivo* y 4) análisis *a posteriori*. En esta investigación se consideraron únicamente las dos primeras fases, debido a que se enfocó en producir un proceso de transposición didáctica externa, para generar el marco para el diseño de los REI y asegurar su validez interna.

Análisis preliminares

De acuerdo con Artigue (2015), esta fase suele enfocarse en los antecedentes que permiten establecer el diseño didáctico, mediante la realización de análisis epistemológicos, institucionales y didácticos de los conocimientos que quieren ser enseñados. Así, en esta fase se analiza el lugar dado a la modelización matemática en la enseñanza universitaria y se ha identificado que los modelos suelen ser enseñados con poca o nula relación con la actividad de modelización matemática en ingeniería, y sin conexión con asignaturas posteriores de dicha especialidad, tanto en las carreras de naturales y de sociales (Barquero y Bosch, 2015) como en las carreras de ingeniería (Bartolomé et al., 2018; Florensa et al., 2018). Para modificar este rol dado a la modelización matemática, Vázquez et al. (2016) y Siero et al. (2022) proponen analizar praxeologías de modelización matemática desarrolladas en instituciones de ingeniería, académicas, escolares y usuarias, es decir, dar cuenta de su epistemología y realizar una transposición didáctica externa sobre ellas para que puedan ser enseñadas en los cursos universitarios, siguiendo tres criterios: que los modelos matemáticos utilizados en estas praxeologías pueden relacionarse con los del plan de estudios (por ejemplo, modelos matriciales, estadísticos, ecuaciones diferenciales); que su desarrollo no requiere conocimientos muy especializados de ingeniería ni una gran experiencia en la resolución de este tipo de tareas ni de maquinaria; y que su abordaje mediante programas de simulación es posible. Con base en lo anterior, en esta investigación los análisis epistemológico, institucional y didáctico se desarrollaron en cuatro pasos:

- *a*) Análisis de la praxeología mixta QSAR.
- *b*) Identificación de una cuestión generatriz en *IQ*.
- *c*) Análisis de instituciones formadoras de ingenieros químicos.
- *d*) Análisis didáctico desde las instituciones usuarias.

Así, en el paso *a*) se eligió estudiar la investigación química, analizando la modelización QSAR a partir de varias praxeologías mixtas y generando preguntas generatrices. Este análisis fue realizado junto con un experto en QSAR y un profesor de química e investigador en matemática educativa (ambos autores de este artículo), para identificar una cuestión generatriz, indicada en el paso *b*). Asimismo, en el paso *c*) se analizaron los planes de estudio de ingeniería química del Tecnológico Nacional de México (TecNM) y de la Universidad Juárez del Estado de Durango, Campus Gómez Palacio (UJED), para conocer la viabilidad de integrar en ellos dispositivos didácticos de modelización matemática basados en QSAR. Finalmente, en el paso *d*) se analizaron las rutas didácticas dictadas en la modelización QSAR generadas en la ingeniería química, que corresponden a propuestas para dar a conocer la modelización QSAR a estudiantes universitarios y de posgrado de ingeniería química.

Marco para el diseño de los REI y análisis *a priori*

Esta fase suele dedicarse al diseño y análisis *a priori* del REI. Sin embargo, en este caso se propone un marco para el diseño de diferentes REI-QSAR. Esto se debe a la naturaleza de la praxeología mixta QSAR que lo sustenta y que es analizada en la fase anterior. Así, se posibilitan diferentes organizaciones didácticas para el aula, que tomarán una forma específica dependiendo de la cuestión generatriz transpuesta considerada. Para ilustrarlo, se realiza el análisis *a priori* de la cuestión generatriz general, mostrando posibles cuestiones derivadas, *media* y medios que posibilitarían su estudio, así como las responsabilidades propuestas para los estudiantes y el profesor. Se precisa que un REI-QSAR abierto difícilmente puede tener lugar en las instituciones analizadas, debido a sus condiciones de enseñanza, cercanas al paradigma de la visita de las obras (Chevallard, 2015).

RESULTADOS

El análisis de la investigación química permitió identificar la modelización QSAR, fundamental en la investigación para la predicción de propiedades o de actividad biológica y cuyo estudio en el aula permitiría relacionar la formación con la investigación, implementar actividades de modelización y posibilitar el estudio de las relaciones estructura-actividad. La amplitud y complejidad de la metodología QSAR permite diversos abordajes didácticos basados en un mismo referente epistemológico de la ingeniería, explicitado, sucintamente en esta comunicación mediante la praxeología mixta QSAR y extensamente en Galindo (2019), la estructura de una cuestión generatriz amplia que permite construir dicha praxeología para diferentes propiedades y grupos de sustancias químicas. Para el análisis de las condiciones y restricciones que permiten la viabilidad institucional del estudio de la cuestión generatriz en la formación de ingenieros químicos se analizaron dos planes de estudios de instituciones mexicanas. Para el diseño del REI-QSAR se analizaron las propuestas de clasificación didáctica generadas en la investigación química para difundir la praxeología mixta QSAR entre investigadores, expertos y noveles, y estudiantes de doctorado en ingeniería química. Con base en ello, se generó un marco general del REI-QSAR, que posibilita producir varias cuestiones generatrices transpuestas y, a su vez, REI-QSAR enfocados en las necesidades de formación y en las condiciones específicas de cada institución educativa y de cada grupo de estudiantes, por lo que el diseño final está a cargo del profesor universitario. Finalmente, se genera un análisis *a priori* de este REI-QSAR en el que se detallan nueve apartados que permiten su implementación en el aula y constituyen una herramienta para el profesor universitario, que no necesariamente es experto en QSAR, interesado en integrar esta actividad de modelización en su aula (sección 4.6).

Análisis de la praxeología mixta QSAR

Se eligió la investigación química y se analizó la praxeología mixta de modelización QSAR, que consiste en la aplicación de métodos matemáticos y estadísticos para el desarrollo de modelos de predicción de actividad biológica o de propiedades de compuestos (Golbraikh et al., 2012). Estos modelos tienen la forma: *Actividad biológica=f(atributos químicos)*, donde los atributos químicos son conocidos como descriptores moleculares (Roy et al., 2015), que pueden ser calculados o determinados experimentalmente. Los modelos QSAR, dependiendo de la variable de respuesta, pueden ser continuos, categóricos o de clasificación (Golbraikh et al., 2012) y los compuestos involucrados pueden ser o no cogenéricos. En la tabla 1 se muestra la praxeología mixta QSAR, cuya tarea de modelización procede de la ingeniería química y cuya técnica de modelización incluye tres grandes pasos: la preparación de los datos, el desarrollo y la validación del modelo. Su logos comprende varios elementos matemáticos y de ingeniería química.

Tabla 1.
Praxeología mixta QSAR

Tipo de tarea T^{iq}
Obtener un modelo de predicción de una propiedad/actividad/toxicidad en función de la estructura química
Técnica de modelización τ^{miq}
a) Preparación de datos: búsqueda o compilación del conjunto de datos (propiedad/actividad del grupo de sustancias), cálculo de descriptores, selección de métodos de análisis de datos supervisado o no supervisado. *b*) Desarrollo del modelo: construcción del modelo mediante el conjunto de datos de entrenamiento, validación del modelo utilizando los conjuntos de prueba, selección de modelos con estadística aceptable y detección de sobreajuste del modelo. *c*) Validación del modelo: predicción sobre el conjunto de datos de evaluación externa.
Tecnologías θ^{m} y θ^{iq}
Grupos funcionales, isomería, confórmeros, enlaces, estructura molecular, propiedad, actividad, toxicidad, índices topológicos, expresiones algebraicas, modelos matemáticos del álgebra matricial, regresión lineal simple o multivariada, análisis de componente principal, mínimos cuadrados parciales, máquinas de vectores de soporte, vecino *k*-ésimo, redes neuronales, métodos de análisis supervisados y no supervisados, elementos de *software* estadístico y matemático, expresiones algebraicas, criterios de validación (coeficiente de correlación, coeficiente de determinación, validación cruzada, pendientes de líneas de regresión, etc.), *y*-aleatorización, expresiones algebraicas, error estándar y absoluto, desviación estándar, etc.
Teorías Θ^{m} y Θ^{iq}
Álgebra, álgebra lineal, estadística, química orgánica, fisicoquímica, elementos que fundamentan el *software* estadístico y matemático, y topología, entre otras.

Identificación de una cuestión generatriz en IQ

Se identificó que el tipo de tarea T^{iq} de la praxeología mixta QSAR tiene su origen en una cuestión generatriz general Q_1: «¿Cuál es el modelo validado más adecuado para predecir la [*propiedad*] del [*grupo de sustancias*] a partir de su estructura?». Esta cuestión puede adaptarse a distintas propiedades/actividades y a diferentes grupos de sustancias (figura 2). El amplio espectro de propiedades que predecir mediante la praxeología mixta QSAR permite su transposición a diversas áreas de formación del ingeniero químico, por ejemplo, la contaminación ambiental, la fisicoquímica, la farmacéutica, los alimentos, etc.

Fig. 2. Cuestión generatriz general para la tarea T^{tq}.

Con el objetivo de determinar si esta cuestión puede ser extrapolada a la enseñanza, se analizaron dos planes de estudio de ingeniería química de instituciones mexicanas.

Análisis de instituciones formadoras de ingenieros químicos

Se analizaron las retículas del plan de estudios de las carreras de ingeniería química del Tecnológico Nacional de México (TecNM) y de la Universidad Juárez del Estado de Durango (UJED).

La mayoría de las carreras de ingeniería tienen dos áreas formativas: la básica y la de especialidad (Macias y Romo, 2014). Las asignaturas del área básica proporcionan herramientas para la especialidad y la práctica profesional, motivo por el cual anteceden a las asignaturas de especialidad. La tabla 2 muestra las asignaturas del área básica del currículo del TecNM y UJED para el programa de ingeniería química (Tecnológico Nacional de México, 2016) e ingeniero químico con especialidad en alimentos (Universidad Juárez del Estado de Durango, 2023), agrupadas en seis áreas: Química, Matemática, Estadística, Fisicoquímica, Computación y Otros (asignaturas cursadas en el semestre, pero con incidencia mínima para el desarrollo del REI).

Tabla 2.
Asignaturas, agrupadas por área, del TecNM y UJED, susceptibles de incidir en el estudio de Q_1.
C: computación, E: estadística, F: fisicoquímica, M: matemáticas, Q: química, O: otros

TecNM	*UJED*
Primer semestre	
Q: Química inorgánica C: Programación O: Taller de ética, Fundamentos de Investigación, Cálculo diferencial, Dibujo asistido por computadora	M: Matemáticas I C: Computación Q: Química inorgánica I, Química orgánica I O: Física I, Metodología de la investigación, Lectura y redacción
Segundo semestre	
M: Álgebra lineal Q: Química orgánica I, Química analítica O: Mecánica clásica, Cálculo integral, Salud y seguridad en el trabajo	Q: Química inorgánica II, Química orgánica II O: Matemáticas II, Física II, Análisis y búsqueda de información, Habilidades del pensamiento, Educación ambiental

TecNM	*UJED*
Tercer semestre	
E: Análisis de datos experimentales F: Termodinámica Q: Química Orgánica II O: Gestión de la calidad, electricidad, magnetismo y óptica	M: Modelación matemática en ciencias químico-biológicas y de ingeniería E: Análisis estadístico de datos Q: Química analítica I F: Fisicoquímica I O: Introducción a los procesos bioquímicos, Recursos Humanos, Liderazgo, Revisión de literatura para investigación
Cuarto semestre	
Q: Análisis instrumental M: Métodos numéricos O: Ecuaciones diferenciales, Mecanismos de transferencia, Ingeniería ambiental, Balance de materia y energía	F: Fisicoquímica II Q: Química Analítica II O: Muestreo y diseño de experimentos, Microbiología general, Bioquímica, Planteamiento del problema de investigación
Quinto semestre	
F: Fisicoquímica I O: Desarrollo sustentable, Ingeniería de costos, Procesos de separación I, Balance de momento, calor y masa	Q: Análisis instrumental F: Termodinámica química O: Toxicología de alimentos, microbiología de alimentos, Ingeniería de procesos alimentarios I, Balance de materia y energía, Bioquímica de alimentos I, Diseño de anteproyecto de Investigación

En el segundo año, los alumnos han cursado o cursarán las materias de Estadística (tercer semestre de ambos programas), Álgebra Lineal (primer semestre de ambos programas), Química inorgánica y Química orgánica (con una alta presencia en el primer año para ambas instituciones), Química analítica y Fisicoquímica. Las asignaturas correspondientes al área química proporcionan a los alumnos conocimiento sobre las estructuras moleculares, sus manifestaciones macroscópicas (propiedades), la simbología necesaria para representarlos, los métodos de análisis gravimétricos, volumétricos e instrumentales.

En Álgebra lineal y en Matemáticas I (TecNM y UJED, respectivamente), los alumnos aprenden a realizar operaciones con matrices. Las asignaturas de Fisicoquímica y Termodinámica proporcionan, en sus primeras unidades, el manejo de sistemas de medida relativos a propiedades de la materia. Análisis de datos experimentales (TecNM) y Análisis estadístico de datos (UJED) abordan el estudio de variables continuas y discretas, parámetros estadísticos, error y análisis estadístico en general. Programación (TecNM) y Computación (UJED) se enfocan en el manejo de equipo informático y *software*. La asignatura de Modelación (UJED) permite a los alumnos adquirir modelos para representar diversos fenómenos.

El estudio de análisis no supervisado de datos y las herramientas para realizarlo (como máquinas de vectores de soporte, vecino *k*-ésimo, redes neuronales, etc.) no tienen presencia en el currículo de ambas instituciones. El uso de descriptores en tres dimensiones (3D) no sería posible en estas instituciones, por los recursos tecnológicos necesarios para su cálculo. Por otro lado, la regresión lineal simple tiene presencia en el currículo, pero no es el caso de la regresión lineal multivariada, el análisis de componente principal o los mínimos cuadrados parciales. Su uso en el estudio de Q_1 estaría supeditado a la comunidad de estudio.

Se observa que en los primeros dos años de formación se estudia la mayor parte de los conocimientos involucrados en el modelo QSAR. Por lo tanto, se considera que la cuestión Q_1 podría ser estudiada, al menos parcialmente, en un grupo de segundo año de Ingeniería química, en tercer o cuarto semestre, lo que permitiría generar nuevos conocimientos y relacionarlos con los estudiados en diversos cursos. Más específicamente, la cuestión Q_1 podría ser estudiada en las asignaturas de Química orgánica II o Análisis de datos experimentales del plan reticular de ingeniería química del TecNM y en las asignaturas de Análisis estadístico de datos o de Modelación matemática en ciencias químico-biológicas y en Ingeniería de la UJED. Es decir, se han identificado los cursos donde la modelización y las técnicas estadísticas de validación de modelos son importantes.

Análisis didáctico de la praxeología mixta QSAR en la investigación química

En el análisis didáctico para el diseño del REI se consultó el libro sobre QSAR titulado *Molecular Descriptors for Chemoinformatics*, publicado por Todeschini y Consonni en 2009. Este libro está dirigido a expertos y profesionales de la investigación, estudiantes de doctorado y jóvenes investigadores que entran al campo de los descriptores o a áreas relacionadas (Todeschini y Consonni, 2009). Para posibilitar el estudio de la modelización QSAR, los autores proponen una clasificación de los saberes de acuerdo con su complejidad dentro de «rutas didácticas», es decir, categorías que incluyen conceptos pertenecientes a tópicos específicos, organizados en niveles de prioridad, y que restringen su enseñanza en universidades o posgrados. Los tópicos son los siguientes: descriptores moleculares, teoría de grafos e índices topológicos, QSAR clásico, diseño de fármacos, construcción del modelo, propiedades experimentales y avances recientes en estrategias QSAR. Los conceptos pertenecientes a cada tópico se clasifican, por su complejidad, en niveles (primero, segundo y superior).

En la tabla 3 se presentan los conceptos, por nivel y tópico, que pueden ser utilizados para el diseño de los REI, debido a que pueden ser abordados y no entran en conflicto con los currículos de las instituciones educativas. Estos pertenecen principalmente al primer y segundo nivel de comprensión de acuerdo con las rutas didácticas de Todeschini y Consonni. Los tópicos de niveles avanzados, destinados a los expertos en modelización QSAR, así como los datos categóricos o de clasificación, análisis de datos no supervisados, descriptores cuánticos, entre otros, no tienen cabida en la formación del ingeniero químico. Esto lleva a no considerarlos para el diseño de los REI, debido a su complejidad y a que posibilitan un estudio mucho más especializado de las relaciones estructura-actividad.

Tabla 3.
Conceptos, por nivel y tópico, utilizados para el diseño de los REI

Descriptores moleculares
Primer nivel: descriptores moleculares, descriptores constitucionales, descriptores de conteo, grafos invariantes, descriptores vectoriales. Segundo nivel: grafo molecular.
Teoría de grafos e índices topológicos
Primer nivel: descriptores moleculares, grafos, grafo molecular, operadores algebraicos, matriz de adyacencia, matriz de distancia, grafos invariantes. Segundo nivel: matrices de moléculas, invariantes locales, grado de vértice, índices de conectividad, conteo de caminos, conteo de vías, índice de Wiener, índice de conectividad de distancia de Balaban.
QSAR clásico
Primer nivel: correlaciones estructura-respuesta.

Construcción del modelo
Primer nivel: correlaciones estructura-respuesta, conjunto de datos, índices estadísticos, validación, selección de variable. Segundo nivel: parámetros de regresión, dominio de aplicabilidad, análisis por consenso.
Propiedades experimentales
Primer nivel: medidas experimentales, propiedades fisicoquímicas.
Avances recientes en estrategias QSAR
Primer nivel: técnicas de validación, dominio de aplicabilidad, análisis por consenso.

Marco para el diseño del REI-QSAR

Una vez identificada y analizada la praxeología mixta QSAR, el diseño de los REI-QSAR debe realizarse considerando las restricciones de las instituciones de formación del ingeniero químico. En los currículos de formación están presentes métodos de análisis supervisados de datos, aquellos donde se cuenta con las variables dependiente e independiente (actividad/propiedad y descriptores), por lo que quedan fuera lo métodos no supervisados. Algunas de estas restricciones son las siguientes: *a*) el uso de variables de respuesta continuas, no categóricas ni de clasificación, *b*) obtención de un modelo lineal, por regresión simple o multivariable, y *c*) modelización de compuestos del mismo grupo o grupos semejantes.

La metodología para el diseño de una cuestión generatriz Q_1 transpuesta, que permitirá el desarrollo del REI en el aula, se compone de cuatro pasos que involucran el trabajo multidisciplinario de profesores:

a) Seleccionar la actividad/propiedad considerando el área de formación del ingeniero químico.
b) Elegir el grupo de sustancias, teniendo en cuenta la estructura de los compuestos y el área de formación. En este paso se deben definir los compuestos que los profesores utilizarán para evaluar el modelo.
c) Formular la tarea T^{iq} con la actividad y grupo de sustancias elegidos.
d) Contextualizar la tarea T^{iq} de acuerdo con las necesidades de formación de los estudiantes para obtener la cuestión Q_1 transpuesta.

En la figura 3 se resumen estos pasos, ilustrando la gran cantidad de combinaciones posibles entre sustancias y actividad/propiedad que modelizar. Para contextualizar la tarea T^{iq} se sugiere tener en cuenta el carácter didáctico del REI y la consulta de casos reales publicados en revistas científicas.

Fig. 3. Diagrama de flujo para el diseño de un REI contextualizado en la formación del ingeniero químico

En la figura 4 se ejemplifica una cuestión Q_1 transpuesta en el contexto del área de alimentos en ingeniería química, basada en el trabajo de Duarte et al. (2017) sobre ácidos grasos y cromatografía de gases. En este caso, de acuerdo con la información obtenida en los medios disponibles (bases de datos y revistas científicas), se pueden tomar las siguientes consideraciones didácticas: *a*) emplear ácidos grasos de origen vegetal o animal; *b*) relacionar, ya sea la estructura de los ácidos grasos o su respectivo metil éster, con el tiempo de retención; y *c*) seleccionar un conjunto de ácidos grasos al azar para una evaluación externa del modelo en la predicción del tiempo de retención.

Cuestión Q_1 : ¿Cuál es el modelo validado más adecuado para predecir el tiempo de retención de metil esteres de ácidos grasos (MEAG) en cromatografía de gases a partir de su estructura?

Planteamiento contextualizado: Una planta de extracción de aceite pretende manejar distintas fuentes naturales de ácidos grasos. Para separar y comercializar a gran escala estos aceites es necesario identificar los ácidos grasos contenidos en cada fuente.
Duarte et al. (2017) mencionan que en la identificación y cuantificación de los ácidos grasos en alimentos se utilizan métodos estandarizados (ISO, IUPAC), basados en la preparación de metil ésteres de ácidos grasos (MEAG) por esterificación del ácido graso y la posterior separación mediante cromatografía de gases. La identificación del ácido graso se lleva a cabo por comparación de los tiempos de retención de los MEAG de la muestra con los MEAG de una mezcla estándar, preparada en el laboratorio u obtenida comercialmente. Un MEAG no puede identificarse si un pico cromatográfico de una muestra dada no corresponde con alguna señal de los MEAG de la mezcla estándar, ya que los MEAG en la muestra están limitados por los MEAG presentes en la mezcla estándar. En este caso es necesario realizar un análisis por prueba y error, o predecir de algún modo los tiempos de retención de los posibles MEAG.

Antes de invertir en la compra de estándares y realizar experimentos de prueba y error, la administración decide solicitar la participación de las universidades para predecir el tiempo de retención de los MEAG, mismos que permitirán la identificación de los ácidos grasos presentes en muestras de aceites de diversas fuentes. Se requiere que la respuesta esté validada estadísticamente, indicando error y precisión de la misma. La empresa evaluará la respuesta para comprobar su efectividad.
Los tiempos de retención obtenidos en el cromatógrafo de la empresa, bajo las mismas condiciones experimentales, se presentan en la tabla del anexo.

Fig. 4. Ejemplo de una cuestión generatriz Q_1 transpuesta en el contexto de alimentos.

Análisis *a priori* del REI-QSAR

El análisis *a priori* permite proponer una ruta de nueve apartados para implementar los REI-QSAR, originados en cuestiones generatrices transpuestas de Q_1, mediante la identificación de cuestiones derivadas, de los *media* y medios y de las actividades propuestas para el profesor y para los estudiantes. Estos nueve apartados se explican a continuación.

1. Aplicación del cuestionario diagnóstico sobre relaciones estructura-actividad. Con el fin de conocer la información que los estudiantes creen posible obtener a partir de la estructura de un compuesto, se sugiere al profesor aplicar un cuestionario semejante al Implicit Information from Lewis Structures Instrument (Cooper et al., 2012), empleando propiedades/actividades propias del área de formación del ingeniero y sustituyendo el término *estructura de Lewis* por *fórmula esquelética*. Esta última se emplea en las asignaturas de Química orgánica para representar la estructura de moléculas, y es semejante a los grafos empleados en la modelización QSAR.
2. Presentación de la cuestión generatriz Q_1 *transpuesta*. Los profesores presentan la cuestión Q_1 a los estudiantes, los cuales se organizarán en equipos para elaborar una respuesta $R^\heartsuit$. En la

figura 5 se presenta un esquema de las preguntas derivadas de Q_1. Una primera pregunta puede hacer referencia a las estructuras de las sustancias involucradas, el contexto de la cuestión generatriz, la propiedad/actividad que hay que predecir o los modelos para su predicción.

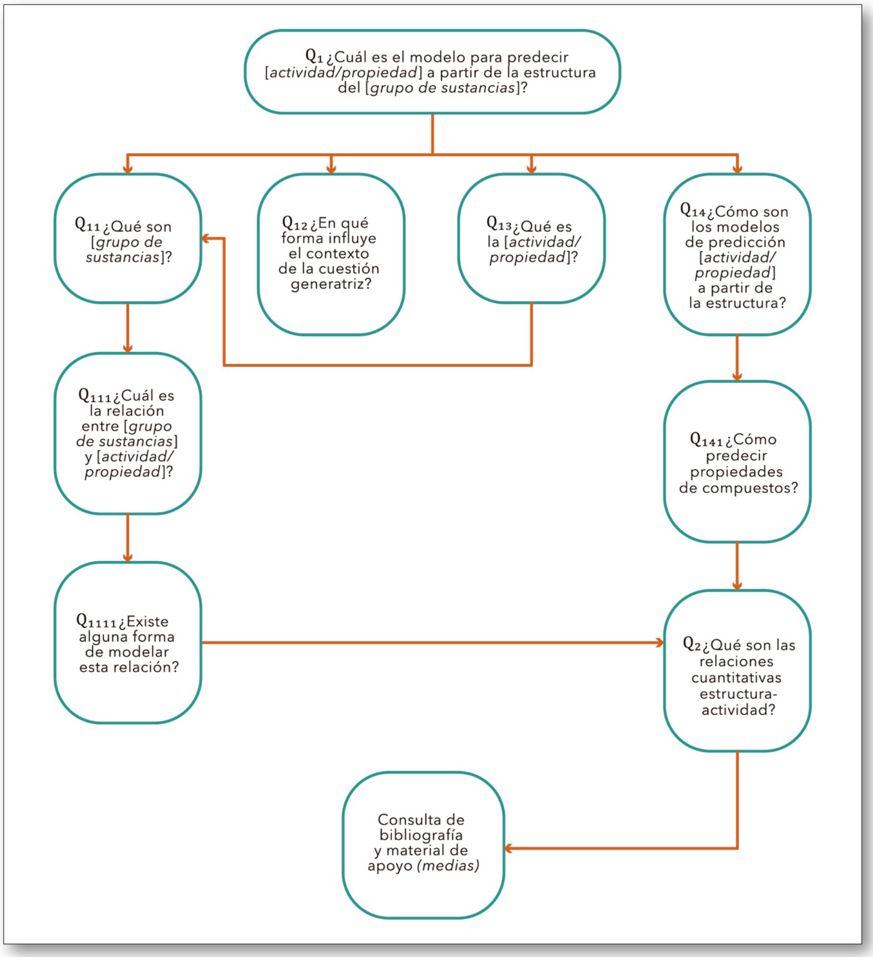


Fig. 5. Diagrama del posible REI a seguir por los estudiantes.

La cuestión Q_{11} sobre el grupo de sustancias involucradas generaría una búsqueda rápida de respuestas $R^{\lozenge}$ sobre sus fórmulas estructurales y el valor de las actividades reportadas para cada una. Con los datos tabulados surgiría la cuestión Q_{111} para tratar de visualizar la relación entre las estructuras y el valor de la actividad. El punto principal que deben notar los estudiantes es el aumento o disminución del valor de la actividad al incrementarse la longitud de cada compuesto, el número de insaturaciones, el número de átomos distintos al carbono, etc. Para tratar de responder a la cuestión Q_1, los alumnos podrían suponer la existencia de una forma de modelar esta relación (Q_{1111}).

Otra pregunta que los estudiantes pueden plantearse guarda relación con el contexto del REI (Q_{12}) o la actividad/propiedad (Q_{13}). Es de notar que Q_{12} conduce necesariamente a Q_{13}. Teniendo claro el contexto del REI, surgiría la cuestión Q_{111}, que aparecería al final de su análisis Q_2. Un camino más en el estudio de Q_1 está representado por la cuestión Q_{14}: ¿Cómo son los modelos de predicción a partir de la estructura? En esta parte es posible que a partir de búsquedas en internet identifiquen la metodología de modelización QSAR.

3. Investigación de métodos de predicción de propiedades a partir de la estructura. En esta etapa, el profesor solicita a los estudiantes búsquedas, en distintos *media*-medios, de un problema semejante. Esto puede dejarles ver que están frente a un problema de predicción de propiedades (Q_{141}) o conducirlos directamente a la cuestión Q_2. En el primer caso, se espera que también lleguen a la cuestión Q_2. En una sesión, los estudiantes presentarían el resultado de sus investigaciones, y, de ser necesario, los profesores podrían sugerir la lectura de algún *media*, como el artículo de Raies y Bajic (2016). Estos *media* ofrecen un primer encuentro con los métodos de predicción de propiedades, identificándolos según se trate de un *endpoint* (variable dependiente del modelo) cualitativo o cuantitativo, de datos continuos o binarios o de la propiedad o actividad que modelar.
   En esta sesión se puede plantear la manera en la que los profesores y los estudiantes trabajarán el REI y la forma de evaluación.
4. Análisis de la praxeología de modelización QSAR. El análisis de la praxeología QSAR requiere la lectura y análisis, por parte de los estudiantes, de documentos especializados, escritos principalmente en inglés. El papel de los profesores es importante para resolver las dudas de los estudiantes respecto a las distintas tecnologías θ estadísticas y matemáticas para la preparación de datos, el desarrollo y la validación del modelo. En este apartado se sugiere consultar los trabajos de Reinhard y Drefahl (1998), Roy et al. (2015), Golbraikh et al. (2012) y el documento *Guidance document on the validation of (quantitative) structure-activity relationships [(Q)SAR] models* (Organisation for Economic Cooperation and Development, 2007), que reúnen información relativa a los descriptores (variables independientes del modelo) y modelización QSAR. Estos *media* permitirán al alumno tener acceso a modelos existentes, analizar su deducción y su funcionamiento, las variables que hay que considerar en su construcción y las técnicas para validarlo, lo que es parte del trabajo de modelización matemática, como lo indica Pollak (2007):

   > Tienes que tomar algunos modelos que han sido creados y que se sabe son exitosos, y los estudiantes tienen que estudiar esos modelos, y comprender qué los hace funcionar, y pensar acerca de lo que decidió su creación, el modo en que fueron formulados y las razones de su éxito.
   >
   > También, los estudiantes tienen que tomar la situación para sí mismos y comenzar a crear modelos de aquellas situaciones, tomar decisiones de lo que tienen que mantener y de lo que pueden permitirse ignorar y cómo van a probar si realmente tuvieron éxito. (Pollak, 2007, p. 114, traducción propia).

5. Preparación de datos, elección del *software*. Para la preparación de datos de los compuestos involucrados en la cuestión Q_1, los estudiantes tomarán decisiones respecto a cuestiones que conducirán al cálculo y selección de descriptores, al número de compuestos del conjunto de modelización y de validación externa, así como a la elección del método de análisis de datos supervisado (figura 6).

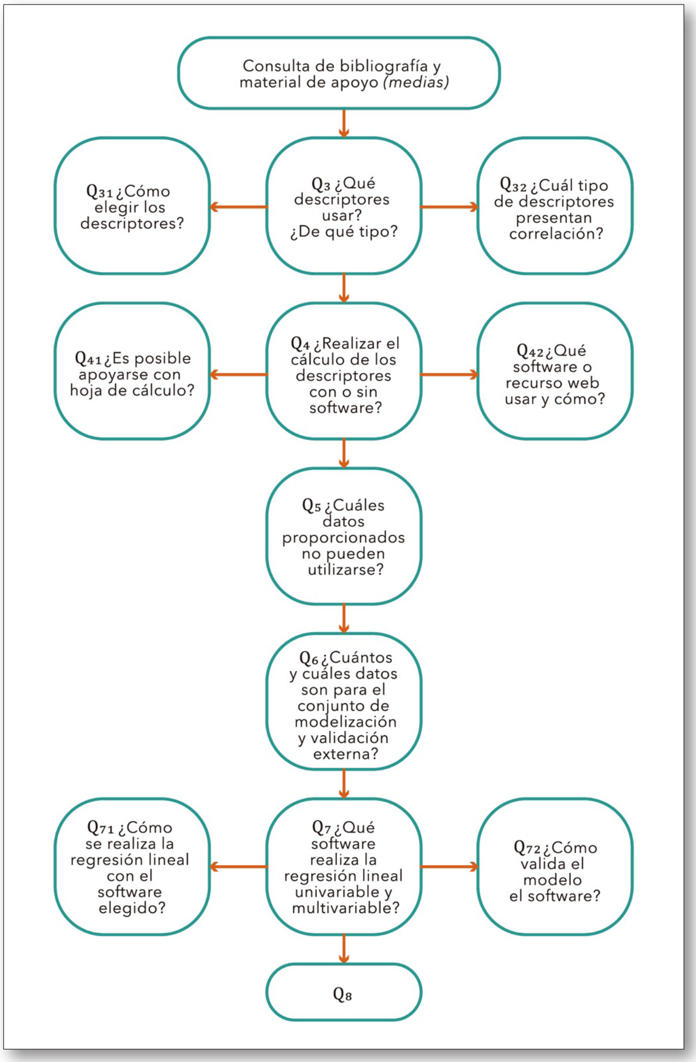


Fig. 6. Posibles cuestiones sobre preparación de datos.

Los estudiantes seleccionarán descriptores adecuados e identificarán la forma de calcularlos (Q_3). Algunas bases de datos químicos en línea tendrán la función de *media* al proporcionar información sobre estructuras en dos dimensiones (2D), notación SMILES (Simplified Molecular Input Line Entry System), propiedades físicas y químicas, e identificadores del compuesto, entre otros datos. Es posible que aparezcan cuestiones relativas a la forma de seleccionar los descriptores (Q_{31}) o a la correlación entre estos (Q_{32}). Entre los *media* revisados en el apartado anterior se encontraron recursos web para el cálculo de descriptores. Cada equipo decidirá qué medios utilizar, ya sean recursos web o *software* (Q_4, Q_{41}, Q_{42}), para computar los descriptores. Existe la posibilidad de no localizar todos los compuestos en las bases de datos (Q_5), lo cual modificará el tamaño de los conjuntos de modelización y de validación externa (Q_6). Para la regresión lineal (Q_7) es necesario investigar sobre el *software* disponible, su manejo (Q_{71}) y la forma de interpretar los resultados (Q_{72}). Los profesores guiarán a los estudiantes en temas específicos, considerando las restricciones impuestas por la institución educativa.

6. Obtención del modelo. En esta etapa los alumnos dividirán los datos en conjunto de entrenamiento y conjunto de validación interna (figura 7). De nuevo, aparecerá la pregunta sobre el número de datos para cada conjunto (Q_8).

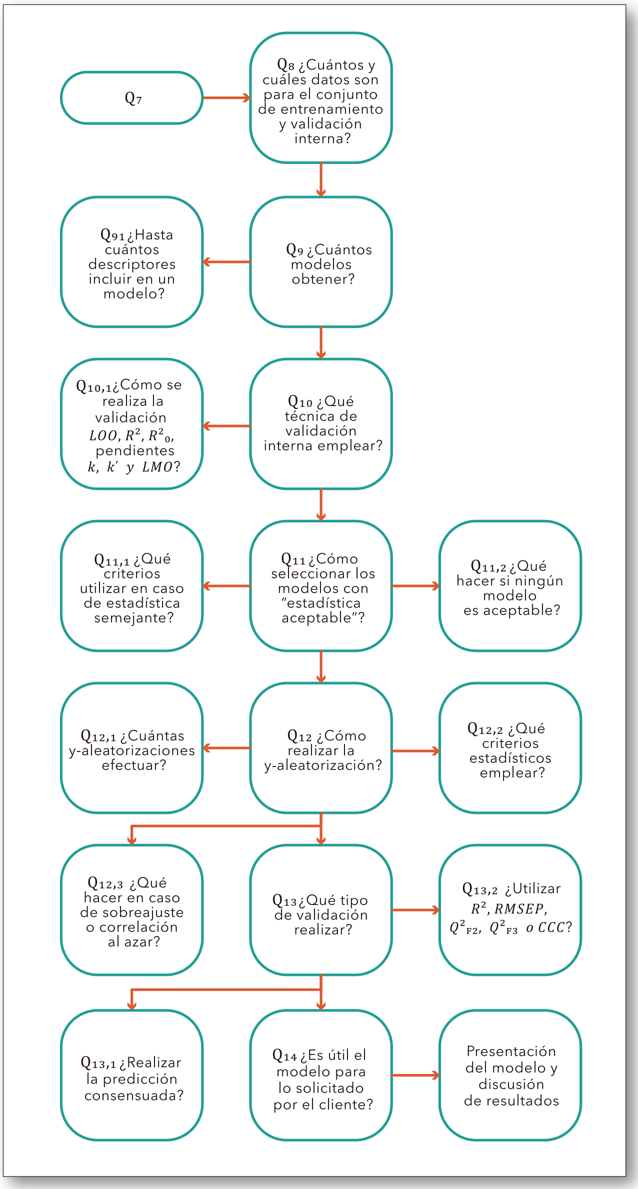


Fig. 7. Diagrama del REI sobre obtención y validación del modelo.

Posteriormente, se iniciará la modelización mediante las variables independientes (descriptores) y la variable dependiente (propiedad/actividad) con ayuda del *software* elegido. Otra cuestión a la que se enfrentarán los alumnos es la cantidad de modelos que obtener (Q_9). Es posible que se produzcan modelos de uno, dos, tres o más variables independientes (descriptores) (Q_{91}). El tipo de validación interna de los modelos (Q_{10}, $Q_{10,1}$) llevará a los estudiantes a elegir entre los distintos métodos disponibles. La elección de modelos con estadística aceptable generará distintos tipos de preguntas, tales como a qué se refiere la estadística aceptable (Q_{11}), qué criterios utilizar en modelos con estadística semejante ($Q_{11,1}$) o qué hacer si ninguno cumple con esta característica ($Q_{11,2}$). Los profesores facilitarán el estudio de los métodos de validación y elección de modelos, considerando las restricciones curriculares y de la institución. Un ejemplo de restricción curricular es la ausencia de la *y*-aleatorización, útil para detectar sobreajuste o correlación al azar, pero cuyo estudio puede ser abordado por los estudiantes y profesores.

7. Validación del modelo. En esta etapa los alumnos realizarán la validación externa del modelo con el conjunto de datos seleccionados para tal fin. Los profesores guiarán a los estudiantes en la elección del tipo de validación que ellos consideren pertinente, teniendo en cuenta las restricciones de la institución y aquellas que puedan ser implementadas para su estudio.
8. Presentación y discusión de resultados. En una sesión en común, los equipos de estudiantes presentan los modelos obtenidos. Hestenes (2010) recomienda una «sesión de pizarrón», donde cada equipo presenta y compara su modelo en un pizarrón pequeño, centrando la clase en la comprensión de la representación simbólica visible del modelo. Los profesores alentarán la comparación del grado de predicción de los modelos con los compuestos seleccionados durante el diseño de la cuestión Q_1, solicitarán la exposición de los criterios utilizados por cada equipo de estudiantes durante el desarrollo del modelo y la discusión de las ventajas de la modelización QSAR como herramienta previa a la experimentación (disminución de costos y tiempo por compra de reactivos, trabajo en el laboratorio, generación de desechos, etc.).
9. Aplicación del cuestionario final sobre relaciones estructura-actividad. Para tener una evaluación del efecto del REI-QSAR en los alumnos, se recomienda aplicar un cuestionario semejante al del apartado 1, pero sustituyendo el término *fórmula esquelética* por el de *grafo*. La comparación entre ambos cuestionarios permitirá a los profesores obtener el grado de avance en la comprensión de las relaciones estructura-actividad.

CONCLUSIÓN

Formar a los futuros ingenieros, para enfrentar los desafíos contemporáneos de la práctica profesional, implica innovar los currículos. Esta tarea resulta muy compleja debido a la conformación de las universidades, pero es posible iniciarla a partir de transposiciones didácticas externas específicas, basadas en la integración de ejemplos del mundo científico y laboral, a los cursos, incluso si los profesores no son expertos en el manejo de dichos ejemplos. Efectuar dichas transposiciones desde una perspectiva institucional, como la TAD, y utilizando la ingeniería didáctica como metodología de diseño de propuestas didácticas, implica el desarrollo de análisis epistemológicos y didácticos de instituciones académicas, escolares e industriales o usuarias (Romo y Artigue, 2023). Así, y para responder a la primera pregunta de investigación referida a la posibilidad de generar una transposición didáctica sobre la praxeología mixta QSAR, definida en la institución académica de la ingeniería química, se mostró la necesidad de considerar para su análisis documentos de diversa índole: artículos científicos y de divulgación, libros académicos, manuales y documentos guía que fueron propuestos por el experto en QSAR, miembro del equipo de investigación. Esto permitió identificar que para un solo tipo de tarea se tiene una técnica muy amplia, asociada a un gran número de tecnologías y teorías, matemáticas y de ingeniería química. Asimismo, se identificó que los conceptos básicos de la modelización QSAR pertenecen sobre todo al primer y segundo nivel, de acuerdo con las rutas didácticas establecidas por Todeschini y Consonni (2009). De hecho, caracterizar relaciones entre saberes matemáticos y químicos a diferente nivel (de la técnica o de las componentes tecnológica y teórica) es posible al considerar la naturaleza mixta de la praxeología QSAR y al identificar la pregunta generatriz que parece originarla, Q_1: «¿Cuál es el modelo validado más adecuado para predecir la [*propiedad*] del [*grupo de sustancias*] a partir de su estructura?

De la misma manera, y considerando la unidad de análisis propuesta en Barquero et al. (2019), se realizó el análisis de las instituciones de enseñanza dedicadas a la formación de ingenieros químicos a través de los planes de estudio, lo que permitió considerar la viabilidad de generar una transposición didáctica de la praxeología mixta QSAR, ya que evidenció un gran número de saberes escolares matemáticos y químicos susceptibles de aparecer en el proceso de investigación de una Q_1 transpuesta. Por ejemplo, el cálculo de descriptores, la obtención de modelos predictivos y técnicas de validación estadística, así como el tipo de *software* matemático y estadístico, que ya suele ser empleado en estas instituciones.

Con base en estos análisis, el diseño del REI-QSAR permite proponer cuestiones generatrices transpuestas de Q_1 para distintos contextos en la química según las necesidades de formación y las condiciones de cada institución educativa. El diseño de la cuestión generatriz y de los nueve apartados pretenden ser una herramienta para que el profesor, que no pertenece a la investigación y no es experto en QSAR, implemente esta propuesta didáctica de modelización matemática en el aula a través de la comprensión de las relaciones estructura-actividad. El futuro ingeniero, para dar respuesta a la cuestión generatriz, requiere el uso de representaciones gráficas de compuestos (representación simbólica), isomería y conectividad estructural entre átomos (representación micro), actividad y propiedades de sustancias (representación macro), además de elementos de álgebra lineal, expresiones algebraicas, regresión lineal simple y multivariable, desviación estándar, correlación entre variables, *y*-aleatorización y criterios de validación de modelos.

El análisis *a priori* resulta fundamental para garantizar la viabilidad del estudio de cada Q_1 transpuesta en el aula, aquí ilustrado a partir de la cuestión general y teniendo como referente epistemológico la praxeología QSAR, fundamentada en el análisis de la ingeniería química e instituciones académicas. De la misma manera, se consideraron las condiciones y restricciones de instituciones de enseñanza, a partir principalmente del análisis de dos planes de estudio, mostrando las asignaturas, las relaciones entre ellas, así como los tópicos abordados, lo que permite reconocer ciertas condiciones y restricciones educativas, y, por tanto, la viabilidad del REI.

Ampliar el conocimiento de estas condiciones y restricciones, mediante el análisis de libros de texto, materiales didácticos y clases, entre otros, permitiría generar adaptaciones más específicas y adecuadas del REI, en relación con los contextos específicos de enseñanza. Es decir, establecer rutas óptimas para su implementación, teniendo como base el proceso de estudio aquí presentado, en el cual se elucida un repertorio de preguntas derivadas, *media* y medios, que establece un referente sobre su organización didáctica, que se supone puede ser de utilidad para los profesores. Esto constituye una respuesta a la segunda pregunta de investigación que condujo este trabajo, referida a la naturaleza del dispositivo didáctico requerida para permitir adaptaciones y su integración al aula por un profesor universitario, no especialista en QSAR. En contraparte, una limitación de esta investigación es que no cuenta con una validación experimental.

La implementación del REI-QSAR en un programa de formación de ingenieros químicos permitirá generar evidencia empírica de su funcionamiento y del grado de comprensión de las relaciones estructura-actividad, además de proporcionar una base para refinarlo. Finalmente, se considera que esta investigación contribuye con un marco general de diseño de los REI-QSAR, caso particular de la TDE, que visualiza a los profesores universitarios como actores protagónicos en el proceso de diseño de materiales de modelización matemática específicos, que pretenden formar a ingenieros químicos, cada vez más aptos para enfrentar y modificar la realidad del siglo XXI.

REFERENCIAS

Amer, M. À., Luque-Corredera, C. y Bartolomé, E. (2022). Study and research path for learning general chemistry: analyzing the quality of drinking water. *Journal of Chemical Education*, *99*(3), 1255-1265.
https://doi.org/10.1021/acs.jchemed.1c00971

Artigue, M. (2015). Perspectives on design research: the case of didactical engineering. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg. (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 467-496). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_17

Barquero, B. y Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: from fundamental situations to study and research paths. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education, new ICMI study series* (pp. 249-272). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_8

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(3), 339-352.
https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n3.519

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2014). Incidencia del «aplicacionismo» en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 83-100.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.933

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2019). The unit of analysis in the formulation of research problems: The case of mathematical modelling at university level. *Research in Mathematics Education*, *21*(3), 314-330.
https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1624602

Bartolomé, E., Florensa, I., Bosch, M. y Gascón, J. (2018). A «study and research path» enriching the learning of mechanical engineering. *European Journal of Engineering Education*, *44*(3), 330-346.
https://doi.org/10.1080/03043797.2018.1490699

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W. y Niss, M. (Eds.) (2007). *Modelling and applications in mathematics education. The 14 ICMI study, new ICMI study series*. Springer.
https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1

Bosch, M., Hausberger, T., Hochmuth, R., Kondratieva, M. y Winslow, C. (2021). External didactic transposition in undergraduate mathematics. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *7*, 140-162.
https://doi.org/10.1007/s40753-020-00132-7

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221-266. https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes de une épistémologie scolaire. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. En S. J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173-187). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3

Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: an attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, *12*, 71-114.

Cooper, M., Corley, L. M. y Underwood, S. M. (2013). An investigation of college chemistry students' understanding of structure–property relationships. *Journal of Research in Science Teaching*, *50*(6), 699-721.
https://doi.org/10.1002/tea.21093

Cooper, M., Underwood, S. y Hilley, C. (2012). Development and validation of the implicit information from Lewis structures instrument (IILSI): do students connect structures with properties? *Chemistry Education Research and Practice*, *13*, 195-200.
https://doi.org/10.1039/C2RP00010E

Costa, V., Arlego, M. y Otero, R. (2015). Las dialécticas en un recorrido de estudio e investigación para la enseñanza del cálculo vectorial en la universidad. *Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria*, *8*(3), 146-161.

Dirección General de Educación Superior Tecnológica (2012). *Modelo educativo para el siglo XXI. Formación y desarrollo de competencias profesionales*. http://www.dgest.gob.mx/director-general/modelo-educativo-para-el-siglo-xxi-formacion-y-desarrollo-de-competencias-profesionales-dp2

Duarte, M. H., Freitas, M. P. y Nunes, C. (2017). QSPR modeling is able to predict retention times of fatty acids using simple molecular descriptors. *International Journal of Quantitative Structure-Property Relationships*, *2*(1), 35-43.
https://doi.org/10.4018/IJQSPR.2017010103

Elizalde, I. y Rosas, A. Miguel. (2016). *Modelación directa e inversa en la formación del ingeniero químico*. Lectorum.

Erduran, S. y Duschl, R. A. (2004). Interdisciplinary characterizations of models and the nature of chemical knowledge in the classroom. *Studies in Science Education*, *40*(1), 105-138.
https://doi.org/10.1080/03057260408560204

Favre, E., Falk, V., Roizard, C. y Schaer, E. (2008). Trends in chemical engineering education: Process, product and sustainable chemical engineering challenges. *Education for Chemical Engineers*, *3*, e22-e27.
https://doi.org/10.1016/j.ece.2007.12.002

Florensa, I., Bosch, M., Gascón, J. y Winsløw, C. (2018). Study and research paths: a new tool for design and management of project based learning in engineering. *International Journal of Engineering Education*, *34*(6), 1848-1862.

Frejd, P. y Bergsten, C. (2016). Mathematical modelling as a professional task. *Educational Studies in Mathematics*, *91*, 11-35.
https://doi.org/10.1007/s10649-015-9654-7

Galindo, N. (2019). *Diseño de una unidad de aprendizaje sobre relaciones cuantitativas de estructura-actividad (QSAR) en la carrera de ingeniería química* [Tesis de maestría]. CICATA-IPN. https://www.cicata.ipn.mx/assets/files/cicata/ProME/docs/tesis/tesis_maestria/2019/galindo_2019.pdf

García, F. J., Barquero, B., Florensa, I. y Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *15*, 75-94.
https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.267

Gascón, J. y Nicolás, P. (2022). ATD on relationships between research and teaching. The case of a didactic problem concerning real numbers. En Y. Chevallard, B. Barquero, M. Bosch, I. Florensa, J. Gascón, P. Nicolás y N. Ruiz-Munzón (Eds.), *Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 125-138). Birkhäuser.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-76791-4_2

Gilbert, J. K. y Treagust, D. (eds). (2009). *Multiple representations in chemical education. Models and modelling in science education* (vol. 4). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8872-8

Golbraikh, A., Wang, X., Zhu, H. y Tropsha, A. (2012). Predictive QSAR modeling: methods and applications in drug discovery and chemical risk assessment. En J. Leszczynski (Ed.), *Handbook of computational chemistry* (pp. 1311-1342). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0711-5_37

Hestenes, D. (2010). Modeling theory for math and science education. En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 13-41). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_3

Lesh, R., Galbraith, P., Haines, C. y Hurford, A. (Eds.) (2010). *Modelling students' mathematical modelling competencies ICTMA 13*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1

Macias, M. y Romo, A. (2014). Metodología para el diseño de actividades didácticas basadas en modelación matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *27*, 461-469.

Organisation for Economic Co-operation and Development (2007, marzo). *Guidance document on the validation of (Quantitative) Structure-Activity Relationships [(Q)SAR] models*. https://www.oecd-ilibrary.org/docserver/9789264085442-en.pdf?expires=1679930840&id=id&accname=guest&checksum=E9E75CAAF5AD3D2C5828C1EF8506FEDB

Pollak, H. (2007). Mathematical modelling –a conversation with Henry Pollak. En W. Blum, L. P. Galbraith, W. H. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14 ICMI study* (pp. 109-120). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_9

Raies, A. y Bajic, V. B. (2016). In silico toxicology: computational methods for the prediction of chemical toxicity. *Computational Molecular Science*, *6*, 147-172. https://doi.org/10.1002/wcms.1240

Reinhard, M. y Drefahl, A. (1998). *Handbook for estimating physicochemical properties of organic compounds.* John Wiley & Sons.

Romo, A. y Artigue, M. (2023). Challenges for research on tertiary mathematics education for non-specialists: Where are we and where are we to go? En R. Biehler, M. Liebendörfer, G. Gueudet, C. Rasmussen y C. Winsløw (Eds.), *Practice-oriented research in tertiary mathematics education* (pp. 535-557). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14175-1_26

Roy, K., Kar, S. y Das R. N. (2015). *A primer on QSAR/QSPR modelling*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17281-1

Siero González, L. R., Echavarría Cepeda, L. A., Romo Vázquez, A. y Navarro Torres, J. (2022). Design of a rehabilitation device for thrombosis: a mathematical modelling activity in the training of engineers. *Avances de investigación en educación matemática*, *21*, 107-134. https://doi.org/10.35763/aiem21.4258

Talanquer, V. (2018). Progressions in reasoning about structure-property relationships. *Chemistry Education Research and Practice*, *19*(4), 998-1009. https://doi.org/10.1039/C7RP00187H

Tecnológico Nacional de México (2016). *Retícula ingeniería química* [página web]. https://www.tecnm.mx/pdf/reticula/Reticula%20Ingenieria%20Quimica.pdf

Todeschini, R. y Consonni, V. (2009). *Molecular descriptors for chemoinformatics volume II: appendices, references*. Wiley-Vch Verlag. https://doi.org/10.1002/9783527628766

Universidad Juárez del Estado de Durango (2023). *Ingeniero químico en alimentos. Sede Gómez Palacio. Plan de estudios* [página web]. https://www.ujed.mx/oferta-educativa/ingeniero-quimico-en-alimentos-gp/plan-de-estudios

Vázquez, R., Romo, A., Romo-Vázquez, R. y Trigueros, M. (2016). La separación ciega de fuentes: un puente entre el álgebra lineal y el análisis de señales. *Educación Matemática*, *28*(2), 31-57. https://doi.org/10.24844/EM2802.02

Design and Viability of Resources for Teaching QSAR Modeling in Chemical Engineering

Nahúm Galindo Vargas
Laboratorio de Biomacromoléculas, Instituto Politécnico Nacional, Santa Cruz Xoxocotlán, Oaxaca, México.
nahum.galindo@gmail.com

Avenilde Romo Vázquez
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.
avenilderomo@cinvestav.mx

Joaquín Barroso Flores
Instituto de Química, Universidad Nacional Autónoma de México, México.
jbarroso@unam.mx

In university education, teaching proposals for students to develop mathematical models close to real contexts, particularly the workplace, are scarce, even though modeling has been considered of fundamental importance in mathematics education in several forums. On the other hand, chemistry teaching recognizes that macro, micro and symbolic representations, as well as the relationships between them, should be improved. These representations refer to the properties, structure and representations of compounds and their interrelationships. In addition, it has been considered that structure-activity relationships of biomolecules should be included in the training of chemical engineers. Efforts have been made to include structure-activity relationships in teaching chemistry, but the task of integrating the modeling of these relationships into the curriculum is still pending. With the objective of helping to fill this gap, an investigation framed on both the anthropological theory of the didactic and didactic engineering was developed to design didactic resources to integrate the modeling of these relationships into chemical engineering education. The quantitative structure-activity relationship (QSAR) modeling praxeology used in the *in silico* investigation of new compounds was analyzed. It was identified that the task of QSAR praxeology originates from a general question that attempts to find the most suitable validated model to predict the activity/property/toxicity of a certain group of substances. A didactic transposition of the QSAR modeling task was performed by designing a framework to generate didactic devices: Study and Research Paths (SRP-QSAR). Two university curricula were studied. In these, the use of continuous data, linear regression techniques, structure, properties, and representation of compounds were identified. Regarding the institutions dedicated to research on chemical engineering, didactic routes on QSAR were distinguished, as well as a didactic classification of knowledge by topic and level of complexity that allow its study at the undergraduate or graduate level. Based on these, the viability of implementing the SRP-QSARs in training courses for chemical engineers was evidenced. It is proposed that the designed resource will be useful for teachers who are not experts in QSAR modeling to implement it in the classroom through the proposed media and steps. The modeling task that gives rise to the SRP constitutes an innovative didactic way for students to build, use and interpret mathematical models based on structure-activity relationships, i. e., macro, micro and symbolic representations, which are fundamental in chemistry education. Classroom experimentation is still needed to validate the functioning of the SRP-QSAR and to demonstrate the degree of understanding of structure-activity relationships among students.

ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS 41-2 (2023), 117-135
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5796
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

La concepción dinámica del límite de una función desde APOE y los registros semióticos

Dynamic Conception of the Limit of a Function from an APOS and Semiotic Registers Perspective

Lidia Aurora Hernández Rebollar, María Trigueros Gaisman, Honorina Ruiz Estrada, Estela Juárez Ruiz
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
lidia.hernandez@correo.buap.mx, mtriguerosg@gmail.com, hruizestrada@gmail.com, estela.juarez@correo.buap.mx

RESUMEN • Se presenta una investigación cuyo objetivo fue refinar la descomposición genética de Cottrill y colaboradores del límite de una función en una variable real, en su concepción dinámica, de tal forma que se incorpore a los registros semióticos de representación. El refinamiento consideró resultados de otras investigaciones en las que se utilizaron actividades diseñadas con APOE y diferentes registros semióticos. Un nuevo análisis de los datos previos mostró la necesidad de hacer explícitas las estructuras mentales en cada uno de los registros semióticos y de incorporar las estructuras de Totalidad y Objeto límite de una función en su concepción dinámica. Este es un trabajo teórico que profundiza en la comprensión de la construcción del límite de una función en su concepción dinámica y que pretende ser útil a docentes e investigadores de los niveles educativos medio superior y superior.

PALABRAS CLAVE: Teoría APOE; Límite de una función; Registros semióticos.

ABSTRACT • This is a research study with the aim of improving Cottrill and collaborators' genetic decomposition for the dynamic conception of limit for real valued functions so that it takes into account the semiotic representation registers. The refinement considered the results of other studies where activities designed with APOS theory in different semiotic representation registers were included. Results from the new data analysis showed the need to make explicit the mental construction in each representation register and to include the totality and object structures for the dynamic conception of limit of a real valued function. This theoretical study presents a deeper analysis of the dynamic conception of limit that intends to be useful for both teachers and researchers working with high school and university students.

KEYWORDS: APOS theory; Limit of a function; Semiotic registers.

Recepción: septiembre 2022 • Aceptación: abril 2023 • Publicación: junio 2023

Hernández Rebollar, L. A., Trigueros Gaisman, M., Ruiz Estrada, H. y Juárez Ruiz, E. (2023). La concepción dinámica del límite de una función desde APOE y los registros semióticos. *Enseñanza de las Ciencias*, *41*(2), 117-135. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5796

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones sobre la comprensión del concepto de límite de una función se han realizado desde diferentes perspectivas teóricas debido a su importancia en la matemática escolar de los niveles medio superior y superior. A manera de ejemplo, se pueden mencionar las de Cornu (1991) y Sierpinska (1987), quienes se interesaron en los obstáculos epistemológicos que provienen del desarrollo histórico de este concepto, como los relacionados con el concepto de función, el uso de los símbolos y el concepto de infinito. Tall y Vinner (1981) también se refieren a los obstáculos en la comprensión del límite, pero desde la perspectiva de las imágenes conceptuales que cada sujeto construye y que pueden no ser coherentes con la definición formal de este. Monaghan (1991) y Williams (1991) se enfocaron en las dificultades para la comprensión del límite de una función; el primero destaca la influencia del lenguaje y el segundo caracteriza la comprensión de los estudiantes mediante la noción de modelos intuitivos que, para este concepto, identifica como dinámico-teórico, dinámico-práctico, cota, formal o alcanzable y aproximación.

Debido a que este concepto se estudia por primera vez en el nivel medio superior y posteriormente en el superior, las investigaciones se distribuyen en estos niveles educativos. De hecho, se han dedicado trabajos a explorar la comprensión de este concepto en futuros profesores o en profesores de matemáticas en servicio (Fernández et al., 2015; Fernández et al., 2018; Guerrero, 2020). Una de las teorías que prácticamente nació con el estudio de la comprensión del concepto de límite de una función es APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema), propuesta por Dubinsky (1991) y desarrollada más adelante por el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community). Esta teoría ofrece un marco teórico y de investigación para estudiar la comprensión de conceptos matemáticos complejos. En su método propone al investigador realizar un análisis teórico sobre la forma en que un sujeto genérico construye determinado concepto matemático. Como resultado de ese análisis se obtiene lo que se denomina «descomposición genética» (DG) del concepto en estudio. Actualmente, se cuenta con algunas DG del concepto límite de una función (Cottrill et al., 1996; Swinyard y Larsen, 2012).

Otro enfoque teórico que se ha considerado frecuentemente para el estudio de la comprensión de conceptos y temas de matemáticas es el de los registros de representación semiótica (Duval, 2006). Varios autores ya han recurrido a ambas teorías para estudiar el aprendizaje de algunos conceptos matemáticos. Por ejemplo, para las funciones de dos variables, Trigueros y Martínez-Planell (2010) han propuesto una DG que incorpora a la teoría de representaciones semióticas. De manera similar, Asiala et al. (1997) propusieron una DG para el concepto de derivada considerando dos caminos: el analítico y el geométrico. Por su parte, Valls et al. (2011), Pons (2014), Pérez (2019), Analco y Hernández (2020) y Morante (2020) utilizaron la DG del límite de una función de Cottrill et al. (1996), ubicada solo en el registro algebraico, y aplicaron un conjunto de actividades diseñadas en diferentes registros semióticos (numérico, algebraico y gráfico), para analizar la comprensión del concepto de límite de una función en estudiantes de bachillerato (Valls et al., 2011; Pons, 2014; Pérez, 2019) y de nivel superior (Analco y Hernández, 2020; Morante, 2020). En todos ellos se reportó que el trabajo en ciertos registros de representación favorece la comprensión de algunos aspectos de este concepto. Sin embargo, sus resultados no coinciden cuando intentan determinar qué registro favorece la construcción de las estructuras mentales relacionadas con la concepción dinámica. Por ejemplo, Pons (2014) reportó que los estudiantes acceden al significado de la concepción dinámica en el modo gráfico, progresa en el numérico y se consolida en el algebraico-numérico. Pero en la investigación de Pérez (2019) el registro gráfico representó serias dificultades a los estudiantes y estos se desempeñaron mejor en el algebraico-numérico.

Por su parte, Fernández et al. (2018) señalaron que «el papel de la coordinación de los procesos de aproximación en los diferentes modos de representación resulta clave en la comprensión del concepto de límite» y citan los trabajos de Pons et al. (2012), Valls et al. (2011) y Pons (2014), quienes «caracterizaron niveles de comprensión del límite de una función desde el punto de vista de la coordinación de las aproximaciones en los diferentes modos de representación» (p. 146).

El objetivo de este trabajo es refinar la DG de Cottrill et al. (1996) del límite de una función en una variable real, de tal forma que se describan las estructuras y mecanismos necesarios en cada uno de los registros semióticos en los que se representa este concepto. El refinamiento será el resultado de un nuevo análisis de datos obtenidos en una investigación previa (Analco y Hernández, 2020) y de la revisión de literatura relacionada con el estudio de la estructura de totalidad. Este estudio se restringe a la concepción dinámica por la complejidad que implica el análisis de la concepción métrica, la cual se presentará en otro reporte.

La pregunta de investigación es: ¿Qué construcciones sugiere el análisis de los resultados de trabajos previos sustentados en la DG de Cottrill que incorporan preguntas en distintos registros de representación?

MARCO TEÓRICO

APOE es una teoría constructivista que modela el aprendizaje de conceptos matemáticos de nivel superior. Su nombre se toma del acrónimo de las estructuras principales que la teoría define para caracterizar el pensamiento de los individuos al estudiar un concepto, las cuales son: Acción, Proceso, Objeto y Esquema. Dubinsky es el creador de esta teoría y líder del grupo RUMEC, a través del cual se generaron las primeras publicaciones. La base de su propuesta está en el trabajo de Piaget. Partiendo de sus investigaciones sobre la estructura cognitiva de los individuos, Piaget definió la abstracción reflexiva como la actividad mental que desarrolla el pensamiento y como el mecanismo que propicia el tránsito entre todas las estructuras lógico-matemáticas (Arnon et al., 2014).

En este contexto, Dubinsky (1991) distingue cuatro estructuras mentales por las que un individuo transita cuando aprende un concepto: Acción, Proceso, Objeto y Esquema. El modo en el que se construyen estas estructuras mentales se logra mediante los mecanismos de abstracción reflexiva, denominados: interiorización, coordinación, reversión, encapsulación y desencapsulación. A continuación, se explican las estructuras y mecanismos mentales y cómo se relacionan estos en la construcción de conocimiento, según se expone en Arnon et al. (2014). Un individuo muestra una concepción Acción de un concepto si la comprensión que exhibe en la solución de diferentes problemas está limitada a transformaciones dirigidas de manera externa. Puede decirse, en términos de un concepto matemático, que el sujeto no es capaz de imaginar ni saltarse pasos mientras no supere esta etapa.

Cuando un individuo reflexiona sobre las Acciones y puede recrearlas mentalmente, sin la necesidad de depender de estímulos externos, se dice que ha interiorizado las Acciones en un Proceso. Sin embargo, hay que asegurarse de que el individuo sea capaz no solo de dejar de depender de las representaciones externas, sino también de lograr la reversión del Proceso original. También ocurre la necesidad de coordinar dos Procesos para generar otro. Así, una estructura Proceso se construye mediante los mecanismos de interiorización, de reversión o de coordinación. Cuando un individuo muestra en su trabajo, en tareas relacionadas con un concepto matemático, la construcción mayoritaria de Procesos, se concluye que ha construido una concepción Proceso de este. La construcción de un Objeto se logra a través del mecanismo de encapsulación. Cuando un individuo necesita aplicar Acciones sobre un Proceso (ente dinámico) y lo transforma en un ente estático para el cual es capaz de aplicar nuevas Acciones, se dice que el sujeto ha encapsulado el Proceso en un Objeto. Cuando el individuo muestra evidencia de la construcción del concepto como Objeto en su trabajo, se concluye que ha construido una concepción Objeto de este. Un Esquema es una construcción coherente de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas cuya reconstrucción es permanente y determinada por una situación matemática particular a la cual se enfrenta un individuo. La teoría APOE sostiene que un individuo es capaz de aprender cualquier concepto matemático mediante la construcción de las estructuras mentales antes descritas.

Para el caso particular del infinito, Dubinsky et al. (2013) observaron que para que el individuo logre el paso del infinito potencial al actual es necesario que conciba el Proceso de infinito como algo terminado; luego, mediante el mecanismo de encapsulación, debe construir el Objeto sobre el cual puede realizar Acciones. Así, estos autores propusieron la estructura de Totalidad, que permite ver el Proceso de infinito como un todo, como una entidad estática sobre la que, no necesariamente, es posible aplicar Acciones. Es por esto por lo que, en el contexto del infinito, la estructura de Totalidad se ubica entre el Proceso y el Objeto. El mecanismo mediante el cual un individuo transita de la estructura Proceso del infinito a la Totalidad fue denominado *completez* por Roa-Fuentes (2012), y se usó para demostrar la Totalidad en Villabona et al. (2022). El infinito está inmerso en el concepto de límite; para ver el Proceso infinito como terminado, el sujeto necesita considerar el límite como Objeto, como el Objeto que trasciende el Proceso (Villabona y Roa-Fuentes, 2016). «En los Procesos infinitos que son analizados a través de una situación al límite, la comprensión que tenga el individuo sobre este concepto hace la diferencia entre ver un Proceso infinito como inacabado o verlo como un todo» (Villabona et al., 2022, p. 193).

Descomposición genética (DG)

Uno de los aspectos clave de la teoría APOE es ayudar a predecir lo que los estudiantes logran aprender acerca de un concepto y cómo lo aprenden. Por lo que, una vez definidos los constructos de la teoría y los mecanismos que muestran cómo esas construcciones se entrelazan, ellos pueden integrarse en un modelo hipotético que puede ser llevado a la práctica para probar su validez y utilidad. A este modelo se le denomina descomposición genética (DG) del concepto en estudio. En una DG de un concepto matemático particular se describen las Acciones necesarias para comenzar a entender un concepto. Estas pueden ser interiorizadas en Procesos y estos, a su vez, coordinados en nuevos Procesos que podrán ser encapsulados en Objetos, y continúa de esta manera hasta conformar la descripción de todos los mecanismos y estructuras que modelan la construcción mental de un concepto matemático.

Para la construcción de una DG se tienen en cuenta elementos como la experiencia del investigador, tanto en la enseñanza como en el aprendizaje del concepto que se estudie, el conocimiento de la teoría APOE, los conocimientos matemáticos, las investigaciones sobre el concepto de interés y su desarrollo histórico. Una vez conjugados todos o parte de estos elementos, es posible establecer una DG preliminar, la misma que puede implementarse y probarse en campo. Con los datos derivados de su implementación se realiza una revisión de la DG y, de ser necesario, se propone un refinamiento. Este procedimiento puede repetirse varias veces, pero se espera que en cada nuevo ciclo iterativo de prueba y refinamiento se genere un modelo que describa mejor la construcción del concepto que se está estudiando. Otro rasgo importante de una DG es que puede ser usada para guiar el desarrollo instruccional, con lo que el diseño de actividades alrededor de un concepto consiste en proponer actividades que propicien la construcción de las estructuras y mecanismos mentales dictados por la DG.

A continuación, se presenta un resumen de la DG del límite de una función de una variable real en $x=a$ de Cottrill et al. (1996, citado en Arnon et al., 2014).

1. La Acción de evaluar f en un solo punto x que se considera cercano, o incluso igual al valor a.
2. La Acción de evaluar la función f en algunos puntos, cada uno sucesivamente más cercano al valor a que el anterior.
3. Construcción de un esquema coordinado de la siguiente manera:
    a) Interiorización de la Acción del paso 2 para la construcción de un Proceso en el dominio en el que x se aproxima al valor a.
    b) Construcción de un Proceso en el rango en el que $f(x)$se aproxima al valor L.
    c) Coordinación de (a) y (b) a través de f.

4. Encapsulación del Proceso del paso 3(c) para que el límite se convierta en un Objeto al que se pueden aplicar Acciones.
5. Reconstruir el Proceso del paso 3(c) en términos de intervalos y desigualdades. Esto se realiza mediante la introducción de estimaciones numéricas de la cercanía de las aproximaciones, en símbolos, $0<|x-a|<\delta$ y $|f(x)-L|<\varepsilon$.
6. Aplicación de un esquema de cuantificación de dos niveles para conectar el Proceso reconstruido del paso 5 con la definición formal de límite.
7. Aplicación de una concepción completa $\varepsilon-\delta$ a situaciones específicas.

Aquí vale la pena observar cómo la descripción de las estructuras y mecanismos de la teoría se ubica exclusivamente en el registro algebraico de las funciones.

El ciclo de investigación de APOE

Un proyecto de investigación basado en la teoría APOE involucra tres componentes: análisis teórico, elaboración y aplicación de un diseño instruccional o de instrumentos de investigación, recolección y análisis de los datos. El análisis teórico inicial del concepto que se desea abordar, en el cual se explora lo que significa entender el concepto matemático y cómo un individuo puede construirlo, conduce a la propuesta de una DG preliminar. En la siguiente fase se procede al diseño instruccional que busca que los individuos construyan las estructuras mentales propuestas en el análisis teórico del concepto o se sigue con el diseño de instrumentos que evalúen dichas estructuras. Finalmente, los datos que se obtienen del tratamiento instruccional o de la aplicación de instrumentos de evaluación son analizados en el contexto de la teoría APOE y, en su caso, son utilizados para reiniciar el ciclo antes descrito con el propósito de refinar la descomposición genética inicial.

La concepción dinámica del límite de una función

En esta investigación suponemos que un sujeto que muestra una concepción dinámica del límite de una función real entiende este concepto como el número (si es que existe) al que se aproximan los valores de la función cuando sus respectivas preimágenes se aproximan a un determinado número real. Esta concepción es intuitiva e informal, y se contrapone con la concepción métrica o estática, que se identifica con la definición formal o también conocida como $\varepsilon-\delta$ (Arnon et al., 2014). La concepción dinámica del límite de una función es «un conocimiento informal del concepto, es decir, los valores de una función se acercan a un valor límite cuando los valores en el dominio se acercan a alguna cantidad» (Arnon et al., 2014, p. 45). Por estas características, la primera se estudia en el nivel medio superior y la segunda, en el nivel superior. Blázquez et al. (2006) compararon estas dos formas de entender y estudiar el límite de una función y concluyeron que la dinámica (entendida por ellos como aproximación óptima) es más fácil de comprender que la segunda. Sin embargo, Cottrill et al. (1996) mencionan que la primera puede resultar más difícil de comprender que lo que uno se imagina. Valls et al. (2011) y Pons (2014) reportaron que la conjetura de Cottrill resultó adecuada en estudiantes del nivel medio superior a los que aplicaron un conjunto de actividades. Los resultados de su análisis comprobaron que muy pocos lograron coordinar los dos Procesos de aproximación involucrados en la concepción dinámica del límite de una función (3a y 3b en la DG de Cottrill).

La teoría de registros de representación semiótica

Duval (2006) plantea que en el aprendizaje de las matemáticas es indispensable el uso de las representaciones semióticas, dado que el acceso a los objetos matemáticos no es posible sin un representante en un cierto registro semiótico. Además, son necesarias las transformaciones del objeto en un mismo registro, a lo cual llama *tratamientos*, así como del objeto de un registro a otro, a lo que denomina *conversiones*. Estas dos transformaciones tienen características cognitivas distintas, y en la enseñanza de las matemáticas suele darse mayor importancia a los tratamientos. Como se afirmó antes, ambas transformaciones son necesarias, y dar un mayor énfasis a una sola limitaría el aprendizaje de las matemáticas. Asimismo, afirma que el tránsito fluido entre diferentes registros semióticos es un indicador de comprensión, por lo que en la enseñanza debe promoverse este tránsito fluido entre registros.

MÉTODO

La investigación que se presenta es teórica, de tipo descriptivo y, fundamentada en una teoría cognitiva, pretende contribuir a la comprensión de la forma en que un sujeto construye el concepto límite de una función en una variable real. Se restringe a la concepción dinámica y contribuye a la teoría de registros de representaciones semióticas de Duval (2006), para complementar la descripción propuesta por Cottrill et al. (1996) en sus cuatro primeros pasos.

Se sigue el método de investigación propio de la teoría APOE en la fase de refinamiento de una descomposición genética del concepto en estudio. Este refinamiento se propone para los pasos del 1 al 4 de la DG de Cottrill et al. (1996), después del análisis de las respuestas de estudiantes a actividades didácticas que fueron diseñadas, originalmente, con base en esta DG en las investigaciones de Pons (2014), Pérez (2019) y Analco y Hernández (2020). En los dos primeros trabajos, las actividades fueron aplicadas a estudiantes del nivel medio superior y en el tercero, a estudiantes del nivel superior. Los tres trabajos coinciden en analizar las estructuras mentales en diferentes registros de representación semiótica. Los resultados de estas investigaciones y, en particular, el señalamiento de Fernández et al. (2018) nos condujeron a cuestionarnos la necesidad de refinar la DG mencionada, de tal forma que se describan las estructuras y los mecanismos mentales de la concepción dinámica del límite de una función en los diferentes registros: numérico, analítico, gráfico y verbal. Asimismo, se deben considerar la estructura de Totalidad del infinito y el Objeto límite de una función en su concepción dinámica.

En el trabajo de Analco y Hernández (2020), se aplicaron seis de las actividades de Pons (2014) a 56 estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, en México, como parte de un trabajo de pregrado. El objetivo de dicha investigación fue describir la comprensión del límite de una función real de los estudiantes dos semanas después de haber revisado el tema de los límites en un curso de cálculo diferencial. Las producciones de los estudiantes se analizaron con la teoría APOE, pero el tema no fue impartido siguiendo esta teoría.

El instrumento utilizado fue un cuestionario en el que se pidió a los estudiantes que justificaran cuidadosamente cada una de sus respuestas en seis actividades que consistían en una instrucción principal seguida por varias preguntas. El tiempo que los estudiantes tardaron en responder el cuestionario fue de dos horas.

El análisis de las respuestas a las actividades que se presentó en Analco y Hernández (2020) se revisó nuevamente por las autoras de este trabajo, y se enfocó en las diferencias de construcción del límite entre las distintas representaciones. Cada una de ellas revisó los resultados de manera independiente y, posteriormente, se discutieron en grupo para negociar las distintas interpretaciones, triangular la información y llegar a un acuerdo.

Actividades

Las siguientes son cuatro de las seis actividades cuya aplicación se reportó en Analco y Hernández (2020). Aquí se presentan solo las primeras cuatro porque son las que corresponden a la concepción dinámica. Para esta investigación, se retomó el análisis de los objetivos de estas actividades, pero se modificó la interpretación del último inciso que aparece en todas ellas, debido a que en algunas respuestas de los estudiantes se detectaron indicios de la estructura de Totalidad del infinito, de acuerdo con el trabajo de Villabona et al. (2022).

A continuación, se muestran las actividades, seguidas del análisis de sus objetivos en términos de la DG de Cottrill et al. (1996) y de los registros semióticos que participan. Para apreciar lo anterior, es importante notar que hay un conjunto de preguntas que se repiten en todas las actividades con la intención de evidenciar las mismas estructuras mentales, pero realizadas en diferentes registros semióticos.

Actividad 1

A partir de la siguiente tabla, responde:

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	$\cdots$	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	14.21	14.9201	14.992001	14.99920001	$\cdots$	15.0008001	15.008001	15.0801	15.81

a) ¿A qué número se aproxima x?

b) ¿A qué número se aproxima $f(x)$?

c) Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x.

d) Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 3$? Justifique su respuesta

Fig. 1. Actividad 1. *Fuente*: Analco y Hernández (2020).

Actividad 2

Si $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\cdots$	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$					$\cdots$				

a) Completa la tabla

b) ¿A qué número se aproxima x?

c) ¿A qué número se aproxima $f(x)$?

d) Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x.

e) Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 2$? Justifique su respuesta

Fig. 2. Actividad 2. *Fuente*: Analco y Hernández (2020).

Actividad 3

A partir de la siguiente tabla, responde:

x	3.99	3.993	3.9999	3.99999	$\cdots$	4.00001	4.0001	4.001	4.01
$f(x)$	15.530	15.5254	15.5015	15.50001	$\cdots$	14.00003	14.0003	14.003	14.03

a) ¿A qué número se aproxima x?

b) ¿A qué número se aproxima $f(x)$?

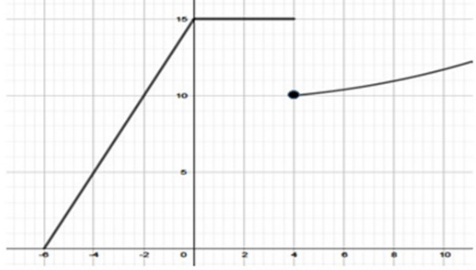
c) Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x.

d) Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 4$? Justifique su respuesta

Fig. 3. Actividad 3. *Fuente*: Analco y Hernández (2020).

ACTIVIDAD 4

De la función f(x) que se muestra en la siguiente figura, contesta a las preguntas:



a) Elige un valor para x, y calcula el valor de $f(x)$, en ese punto.
b) Cuando x tome los valores 3.9, 3.99, 3.999,... ¿A qué número se aproxima $f(x)$?
c) Cuando x tome los valores 4.1, 4.01, 4.001,... ¿A qué número se aproxima $f(x)$?
d) Describe el comportamiento de $f(x)$, con relación a la variable x.
e) Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 4$? Justifique su respuesta.

Fig. 4. Actividad 4. *Fuente*: Analco y Hernández (2020).

En las actividades 2 y 4 se piden las imágenes de valores en el eje x que los estudiantes deben obtener de una expresión en el registro algebraico (actividad 2) o ubicando dichas imágenes mediante el uso de la función en el registro gráfico (actividad 4). Con lo anterior, se evalúa si los estudiantes realizan las Acciones 1 y 2 de la DG, primero en el registro algebraico y luego en el gráfico. En las primeras tres actividades se plantean las preguntas ¿A qué número se aproxima *x*? y ¿A qué número se aproxima *f*(*x*)? Estas preguntas tienen la finalidad de que los estudiantes muestren si conciben el Proceso de aproximación de los valores dados a un número que no aparece en la tabla. En la primera pregunta, la aproximación es sobre el dominio y la segunda, sobre el rango. Así, en estas tres actividades, se espera que muestren los Procesos de dominio y rango de la DG, pasos 3a y 3b en el registro numérico y en una representación tabular.

En la actividad 4 se solicita únicamente el Proceso en el rango, dada una sucesión de valores del dominio (registro numérico) que los estudiantes deben ubicar en el plano (conversión al registro gráfico), para luego usar la gráfica y deducir a qué número se aproximan sus imágenes. En esta actividad también se solicita que el estudiante determine la imagen de un número *x* arbitrario, que debe ser seleccionado por él, para cuya función solo se proporciona su representación gráfica. Así, con esta solicitud, se espera observar si el estudiante realiza la Acción del paso 1 de la DG, en el registro gráfico.

En las cuatro actividades se incluye la solicitud «Describe el comportamiento de *f*(*x*), con relación a la variable *x*», cuya intención es evaluar si el estudiante evidencia el Proceso que resulta de coordinar los Procesos de dominio y rango, solicitados previamente en las distintas representaciones, incluyendo la evidencia en el registro verbal a través de sus justificaciones. En las tres primeras actividades, este Proceso se debe construir en el registro numérico y, en la cuarta actividad, en el registro gráfico.

El último inciso de las cuatro actividades pide al estudiante que establezca, si es posible, cuál es el límite de la función en un cierto valor *x*, según sea el caso, y que justifique su respuesta. Si el estudiante determina que el límite existe (actividades 1y 2) y lo justifica correctamente mediante las aproximaciones, tanto por la derecha como por la izquierda, entonces demostrará que es capaz de imaginar las aproximaciones infinitas como un Proceso. En su argumentación, también podría dar evidencia de considerar ese Proceso como terminado. En este caso, el estudiante debe probar haber construido la Totalidad del infinito y los indicios del Objeto límite (Villabona, 2016; Villabona y Oktac, 2022). En las actividades 3 y 4 el límite no existe porque los límites laterales, en el valor de interés, no coinciden. Si el estudiante describe esta situación, en términos de la no coincidencia de los límites laterales, evidenciará haber visto los Procesos infinitos en el rango como terminados, ya sea en el registro numérico (actividad 3) o en el gráfico (actividad 4).

NUEVA REVISIÓN DE LOS DATOS

En Analco y Hernández (2020) se reportó que, al aplicar estas cuatro actividades, todos los estudiantes evidenciaron la concepción de Acción del límite de una función y los Procesos dominio y rango, pero que no todos mostraron el Proceso resultante de la coordinación de dichos Procesos (paso 3c de la DG). Ahora, en esta investigación, revisamos los mismos datos, encontramos que coincidimos en la concepción de Acción y de los Procesos dominio y rango, pero que los porcentajes de los estudiantes que dieron muestras del Proceso coordinado dependen del registro en el que está planteada la actividad. Además, consideramos que las respuestas al último inciso de cada actividad podrían analizarse a la luz de la estructura de Totalidad del infinito y del Objeto límite, en lugar de como evidencias de una encapsulación del Proceso coordinado. A continuación, detallamos la revisión del Proceso coordinado y de la Totalidad del infinito.

Acerca del proceso coordinado

La actividad 1, inciso c), exige la coordinación de los Procesos dominio y rango en el registro numérico, al pedir que se describa el comportamiento de la función representada en una tabla. En esta actividad, el 66,06 % de los estudiantes dio muestras de la construcción del Proceso coordinado al dar respuestas similares a « $\lim_{x\to 3} f(x) = 15$ porque cuando *x* tiende a 3, *f*(*x*) tiende a 15», la cual fue la más frecuente.

La actividad 2, inciso d), solicita lo mismo, pero, para una función en una representación algebraica y una tabla con una sucesión de valores en el dominio, los estudiantes deben completar la tabla y describir su comportamiento. En este caso, el 75 % dio muestras del Proceso coordinado, ya sea en el registro algebraico, en el numérico o en el verbal. La mayoría de estos respondió: «cuando $x \to 2$, $f(x) \to \frac{1}{4}$», mientras que algunos precisaron, «cuando *x* tiende a 2 por la izquierda o por la derecha, *f*(*x*) se aproxima a 0,25». Es importante mencionar que un 20 % de los estudiantes intentó describir el comportamiento de la función usando la expresión algebraica e imaginando o dibujando su gráfica, por lo que dieron respuestas como las siguientes: «La gráfica tiene pendiente negativa», «en $x = -2$ es asintótico y en $x \to 2$ hay un hueco», o hicieron dibujos de rectas con huecos como el de la figura 5 (véase inciso d).

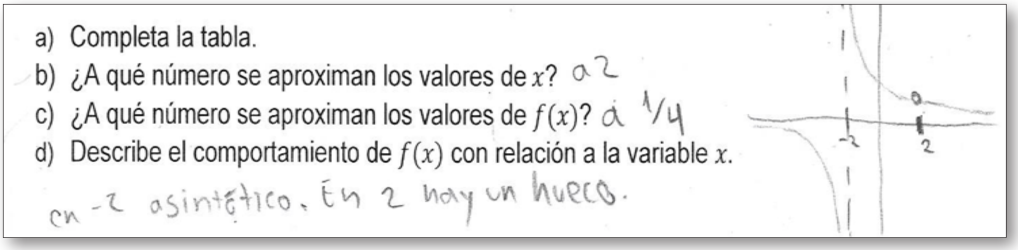


Fig. 5. Ejemplo de la respuesta de un alumno a la actividad 2, inciso d).

La actividad 3 es similar a la primera, se presenta en el registro numérico y se proporcionan los valores de una función en una tabla, pero la diferencia es que la sucesión de valores en el rango se aproxima a distintos números cuando los del dominio se aproximan a 4, mientras que en la actividad 1 la sucesión de valores en el rango converge a un mismo número. Aquí, el 82,14 % dio muestras del Proceso coordinado al responder el inciso c). La mayoría de los alumnos respondió de manera similar a lo que muestra la figura 6.

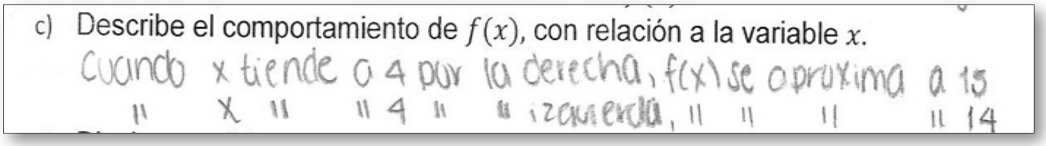


Fig. 6. Ejemplo de la respuesta más frecuente a la actividad 3, inciso c).

La actividad 4, inciso d), solicita lo mismo que las actividades previas, pero para una función representada únicamente en el registro gráfico, y tiene la característica de que, cuando x se acerca a 4, por la derecha y por la izquierda, $f(x)$ se aproxima a números distintos. En esta situación, solo el 35,71 % de los alumnos pudo explicar el comportamiento de la función en términos de las aproximaciones, en el dominio y en el rango, y dar muestras, así, del Proceso coordinado, empleando las palabras «tiende a» o «se aproxima a». Aquí llama la atención que el 46,42 % del total de los estudiantes mencionó otras características de la función, como «es una función a trozos» y «no es una función continua», o intentó hacer una conversión al registro gráfico, en lugar de señalar el fenómeno de las aproximaciones a diferentes valores en el rango (véase la figura 7).

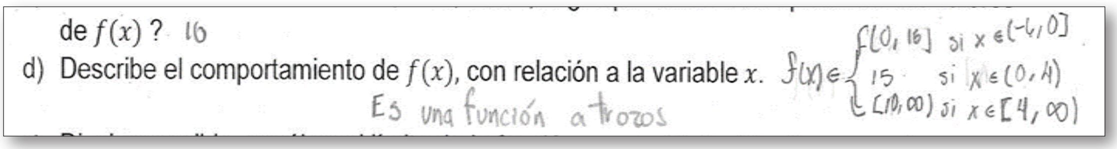


Fig. 7. Respuesta de un estudiante al inciso d) de la actividad 4.

Acerca de la existencia del límite

Ahora pasaremos al último inciso, en el que se solicita decir, si es posible, si existe el límite de la función y que se justifique la respuesta.

En la actividad 1, en la que se contaba con una tabla de valores y los valores de la función se aproximaban a 15 (registro numérico), el 55 % de los estudiantes respondió que el límite era 15 y lo justificó recurriendo al hecho de que los límites laterales coincidían. El 18 % del total justificó que 15 era el límite, y afirmó que cuando x tiende a 3, $f(x)$ tiende a 15. Así, un 73 % de los estudiantes podría haber construido la estructura de totalidad del infinito cuando habla de un proceso infinito (cuando x tiende a 3, $f(x)$ tiende a 15), que concluye (el límite es 15) y da indicios del Objeto límite en su concepción dinámica. El resto de los estudiantes afirmó que 15 era el límite de la función cuando x tiende a 3, pero no proporcionó ninguna justificación o lo calculó mediante una expresión algebraica que ellos supusieron (7 %), como la que se muestra en la figura 8. Estos estudiantes no nos informan en sus respuestas si imaginan el proceso infinito como terminado, por lo que no dan evidencia de la Totalidad del infinito ni del Objeto límite.

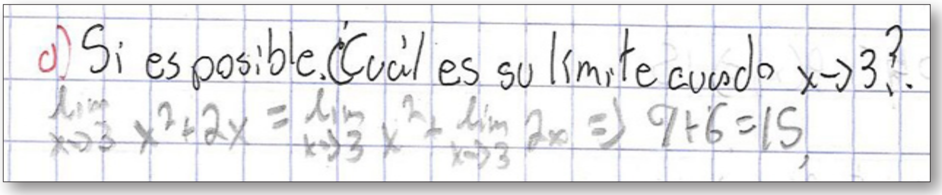


Fig. 8. Ejemplo de respuesta a la actividad 1, inciso d).

En la actividad 2, los estudiantes contaban con la representación algebraica de la función y debían completar una tabla con valores en el eje x (registro numérico). En este caso, casi el 40 % afirmó que el límite de la función existía en $x = 2$, que era 0,25, y lo justificó mediante la coincidencia de los límites laterales (véase figura 9). Ellos dan indicios de la Totalidad del infinito y del Objeto límite. Otro 40 % evaluó la función en $x = 2$ y halló el límite o solo escribió que el límite era 0,25, pero no dio ninguna justificación. El resto (20 %, aproximadamente) afirmó que el límite no existía porque, como la función no estaba definida en $x = 2$, el límite no se alcanzaba. Algunos de ellos escribieron: «No es posible porque la función se indefine cuando $x = 2$». Así, se tiene que el 60 % de los estudiantes no da indicios de la Totalidad del infinito.

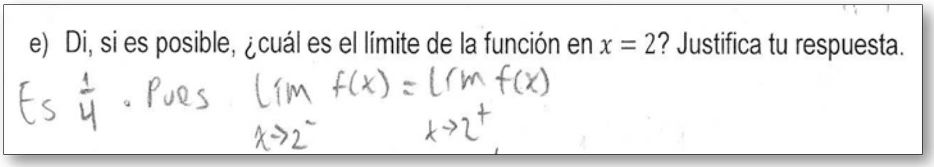


Fig. 9. Ejemplo de respuesta a la actividad 2, inciso e), en la que usan los límites laterales para justificar la existencia del límite.

En la actividad 3, los estudiantes contaban solo con información en el registro numérico, en el que se observaba que, cuando x se acercaba a 4, los valores de la función se aproximaban a dos números diferentes. En esta situación, el 84 % concluyó que el límite no existía porque los límites laterales no coincidían, y algunos de ellos escribieron: «el límite no existe ya que los límites laterales no coinciden». El resto proporcionó erróneamente un límite, afirmó que la función tenía dos límites o dejó en blanco la respuesta.

En la actividad 4, la función se presentó únicamente en el registro gráfico y tenía una discontinuidad de salto en $x = 4$. En este caso, el 87,5 % respondió fácilmente que el límite no existía en ese valor porque los límites laterales no coincidían (véase figura 10). El porcentaje de los que dieron un límite o dijeron que existían dos límites fue de casi un 10 %.

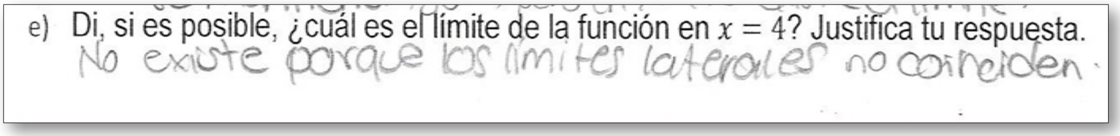

e) Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 4$? Justifica tu respuesta.
No existe porque los límites laterales no coinciden.

Fig. 10. Ejemplo de respuesta a la actividad 4, inciso e).

En estas dos actividades, un gran porcentaje de los estudiantes respondió acertadamente que el límite no existía y lo justificó por la no coincidencia de los límites laterales. Aquí se destaca el hecho de que fueron capaces de determinar los límites laterales, es decir, de que quizás ven el proceso infinito en el rango como terminado, pero, ahora, para establecer la no existencia del límite en el valor de interés. Es por esta razón por la que sus respuestas las consideramos como indicios de Totalidad del infinito y del Objeto límite en su concepción dinámica. La tabla 1 resume los resultados anteriores y permite observar cómo el Proceso que resulta de la coordinación de los Procesos dominio y rango y la determinación de la existencia del límite con una justificación correcta (indicios de Totalidad del infinito y del Objeto límite) dependen del registro semiótico en el que se haya planteado la actividad.

Tabla 1.
Porcentajes de estudiantes que evidenciaron el proceso coordinado y la existencia o no del límite, según el registro de representación semiótica.

Actividad	*Registro*	*Proceso coordinado*	*Indicios de totalidad del infinito y del objeto límite*
1	Numérico	66,06	73
2	Algebraico-numérico	75	40
3	Numérico	82,14	84
4	Gráfico	35,71	87,5

Fuente: elaboración propia con datos de Analco y Hernández (2020)

ANÁLISIS DE LOS DATOS

En las investigaciones de Pérez (2019) y Pons (2014), se reportó que el Proceso coordinado no se manifestaba en estudiantes de nivel medio superior y que su construcción parecía verse favorecida por algún registro semiótico y limitada en otro. Lo anterior lo concluyeron después de aplicar las mismas actividades que aquí se presentaron. En los resultados de Analco y Hernández (2020) que se acaban de describir y de resumir en la tabla 1, se muestran evidencias del Proceso coordinado en estudiantes de nivel superior y se observa claramente una diferencia entre el porcentaje de estudiantes que evidencian dicho Proceso en el registro numérico (cuando cuentan y usan una tabla de valores) y los que lo muestran en el gráfico (solo cuentan con la gráfica de la función). En este caso, es en el registro gráfico donde surgieron dificultades para hablar de las aproximaciones en el dominio y en el rango de manera simultánea, a pesar de que sí lo hacen en el registro numérico. En la actividad 4 (registro gráfico), las respuestas más frecuentes explicaban que la función estaba definida a trozos y lo hacían de manera verbal o mediante algunas expresiones algebraicas, como en la figura 7.

Esta tendencia a usar una expresión algebraica para responder sobre el comportamiento de una función también apareció en las otras actividades donde la función solo se representó en el registro numérico, pero fue en un menor porcentaje (Analco y Hernández, 2020). En el registro numérico, los estudiantes pueden observar los valores numéricos, tanto del dominio como del rango, y al notar el cambio simultáneo pueden coordinar ambos Procesos en uno nuevo. Esta coordinación se da, especialmente, en la representación tabular. Sin embargo, en el registro gráfico, los estudiantes construyen una sucesión de valores en el dominio como un Proceso, pero la construcción de ese Proceso con los valores del rango requiere la interiorización de las Acciones de usar la gráfica de la función para buscar las imágenes de cada valor en el eje *y*. Al parecer, estos estudiantes no han interiorizado esas Acciones en un Proceso y recurren entonces a focalizar la curva y a realizar las Acciones de reconocer características globales de esta, por ejemplo, si «es creciente, continua, discontinua o está definida a trozos», las cuales también aparecieron frecuentemente como respuesta (Analco y Hernández, 2020). Los resultados anteriores indican que el Proceso coordinado no se construye de la misma manera en un registro que en otro, y esto sugiere un refinamiento de la DG.

Además, en la revisión de los datos expuestos arriba, se nota una gran diferencia entre el porcentaje de estudiantes que lograron determinar el límite y justificar su existencia cuando la función se representó en el registro algebraico y se contaba con una tabla (actividad 2) y los que hicieron esto en la actividad 1, donde solo analizaron una tabla de valores (registro numérico). En la actividad 2, casi la quinta parte de los estudiantes usó la expresión algebraica y mencionó «el límite no existe (o no se alcanza) porque la función no está definida en $x = 2$» (Analco y Hernández, 2020), a pesar de que, al llenar la tabla, podían observar la aproximación a 0,25. El hecho de contar con la expresión algebraica de la función llevó a varios estudiantes a realizar únicamente la Acción de evaluar en el valor de interés y a no completar el Proceso de aproximación infinita para construir la Totalidad del infinito. En contraste con lo anterior, el 70 % de los estudiantes respondió sobre la existencia del límite en el registro numérico y lo justificó acertadamente. De estas evidencias, se deduce que el registro algebraico no favoreció la construcción de la estructura de Totalidad ni del Objeto límite en estos estudiantes.

Es importante mencionar que las respuestas sobre la existencia del límite y su justificación no arrojaron evidencias suficientes de la Totalidad del proceso infinito ni del Objeto límite, ya que no permitieron conocer si los estudiantes imaginaban el proceso infinito como terminado o afirmaban que el límite era cierto número por convención. Su justificación se basó en que los límites laterales coincidían o en que cuando x tiende a a, $f(x)$ tiende a L, pero ninguna de las dos permite afirmar si conciben que el número L se alcanza o no.

En la investigación de Pons et al. (2012), se encontró que la coincidencia o no de las aproximaciones en el rango influía en las respuestas de 129 estudiantes de primero y segundo de bachillerato cuando se analizó en ellos la construcción del significado del límite de una función. Para estos estudiantes, la construcción del Proceso coordinado se favoreció cuando las aproximaciones en el rango coincidían, mientras que la no coincidencia representó un reto mayor. En el estudio que ahora presentamos, observamos que en las actividades 3 y 4, en las que las aproximaciones en el rango no coinciden, estos estudiantes (de ciencias exactas) respondieron correctamente que el límite no existía porque los límites laterales no coincidían. Al parecer, ellos pudieron recordar fácilmente el teorema que asegura esta afirmación, aunque no fueron capaces de explicar lo que ocurre en el dominio y en el rango de manera simultánea, sobre todo en el registro gráfico.

Como consecuencia del análisis anterior, se propone un refinamiento de la DG, de tal manera que se hipotetice sobre las estructuras y los mecanismos mentales necesarios para la construcción de la concepción dinámica del límite de una función en los registros semióticos: numérico, algebraico y gráfico. Se decidió agregar al registro verbal, debido a que, aunque no se analizó en detalle su influencia en este trabajo, sí se ha destacado su papel en varias investigaciones (Monaghan, 1991; Tall, 1992). Otra modificación importante que se propone para la DG de Cottrill es la incorporación de la estructura de Totalidad del infinito, entre el Proceso coordinado y el Objeto del límite en su concepción dinámica tras reinterpretar los datos de Analco y Hernández (2020) y a la luz de los trabajos de Dubinsky et al. (2005 y 2013), Villabona y Roa-Fuentes (2016) y Villabona et al. (2022). Consideramos importante incluir la estructura de Totalidad para favorecer el diseño de actividades didácticas dirigidas a su construcción y como parte de instrumentos de investigación. Finalmente, se conserva el paso 4 de la DG de Cottrill (paso 6 en la nueva DG), en el que se plantea la construcción de un Objeto, al que se pueden aplicar Acciones, pero ahora como producto de la encapsulación de la totalidad del infinito y precisando que se trata del Objeto del límite de una función en su concepción dinámica. En las respuestas analizadas no fue posible obtener evidencia de estas estructuras, pero sí indicios apoyados en el análisis teórico de estudios previos.

RESULTADO: DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA REFINADA

En esta sección, primero se describen las estructuras mentales previas necesarias para la construcción del concepto de límite de una función real; después se presenta la DG refinada.

Estructuras previas

- Un Esquema de número real que incluya las nociones de los diferentes conjuntos de números, en particular del número racional (en su representación numérica fraccionaria y decimal) y las propiedades de orden en los números reales.
- Una concepción de Proceso del concepto de función real en sus diferentes representaciones semióticas, lo cual significa que el estudiante logra identificar la imagen de un elemento arbitrario del dominio e imagina el rango de la función en cualquier registro semiótico.
- Una concepción de infinito como Proceso (Dubinsky et al., 2005).

Acciones

Dado un elemento cualquiera del dominio, cercano al valor $x = a$, el estudiante realiza la Acción de asociar este valor con su imagen bajo la función f en cada uno de los registros semióticos de la función. En el *registro numérico*, desempeñará las Acciones de analizar una tabla en la que se presenten parejas ordenadas de números conformadas por dos sucesiones, una en el dominio de la función y otra de las respectivas imágenes. En el *algebraico*, realizará Acciones de sustitución de elementos del dominio de la función cada vez más cercanos a $x = a$ en una expresión matemática, para determinar su imagen correspondiente. En el *registro gráfico*, hará la Acción de ubicar las imágenes en el eje y de distintos valores en el eje x pertenecientes al dominio de la función cada vez más cercanos al valor $x = a$. En el *registro verbal*, llevará a cabo la Acción de describir cada una de las acciones anteriores.

Dos estructuras de proceso, una en el dominio y otra en el rango

Al repetir las Acciones de asociación de un valor en el dominio, cercano a $x = a$ con su respectiva imagen, por la izquierda y por la derecha de $x = a$, utilizando una diversidad de funciones representadas *en cada uno de los distintos registros de representación*, y reflexionar, en cada ocasión, acerca de la proximidad, o no, de los valores en el dominio a $x = a$ y de los valores en el rango a un cierto valor $y = L$, cuando esto sea posible, el estudiante interioriza dichas Acciones en dos Procesos de aproximación infinita, uno en el dominio y otro en el rango, *en cada uno de los registros de representación* antes mencionados.

Proceso de la concepción dinámica del límite de una función real

Cuando el estudiante coordina los dos Procesos descritos arriba, utilizando distintas funciones *en cada uno de los registros de representación*, en las que el límite exista o no, construye un nuevo Proceso mediante el cual será capaz de apreciar y representar de diversas maneras las aproximaciones conjuntas; de x acercándose al valor a y de $f(x)$ aproximándose o no a un cierto valor L. Cuando el estudiante reflexiona sobre el resultado de los Procesos anteriores en cada uno de los registros de representación y los coordina por pares, construye nuevos Procesos (*numérico-gráfico*, *numérico-verbal*, *numérico-algebraico*, *gráfico-verbal*, *gráfico-simbólico*, *algebraico-verbal*). Estos últimos Procesos se coordinan nuevamente entre ellos. Ese Proceso coordinado puede considerarse como Proceso de la concepción dinámica del límite, el cual se pone en evidencia cuando el estudiante puede concluir que, cuando x se aproxima infinitamente a $x = a$, la función se aproxima al valor $f(x)=L$, independientemente de las representaciones involucradas.

Totalidad del proceso infinito en la concepción dinámica del límite

Siempre que el límite L de una función f exista en $x = a$, el estudiante podrá dar evidencia de ver el Proceso coordinado de aproximación infinita como terminado y manifestar que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ en cualquiera de los registros semióticos en los que se presente esta situación. Cuando el límite de la función no exista porque los límites laterales no coinciden, el estudiante será capaz de determinar los límites laterales y argumentar que el límite de la función no existe porque ambos límites, como aproximaciones infinitas terminadas, son diferentes.

Objeto de la concepción dinámica del límite

A través de acciones sobre el límite dinámico evidenciando la Totalidad del infinito, el alumno encapsula la concepción dinámica del límite en el Objeto y es capaz de realizar nuevas Acciones sobre él como, por ejemplo, aplicar sus propiedades.

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

Es de gran importancia que el estudiante realice las Acciones descritas en la DG en cada uno de los registros de representación y que tenga oportunidades de reflexión, experimentando tanto con funciones cuyas imágenes se aproximen a un cierto valor como con aquellas que no tengan esta propiedad en $x = a$. El uso de diferentes tipos de sucesiones de números en el dominio, que se aproximen tanto por la izquierda como por la derecha a $x = a$, en los diferentes registros, permitirá al alumno determinar si, conforme x se acerca a $x = a$, la correspondiente sucesión de números en el rango se acerca, o no, a un valor $y = L$. En los casos en los que el límite de la función no exista en $x = a$, las Acciones anteriores le permitirán observar que los valores de la función no convergen en un solo número, que no convergen en ninguno o que divergen en más o menos infinito para valores de x próximos al valor a. De esta forma, el estudiante tendrá la oportunidad de interiorizar dichas Acciones en un Proceso de aproximación en el dominio y, al mismo tiempo, construir un Proceso de aproximación en el rango de las imágenes de esas sucesiones numéricas, y acercarse infinitamente a un valor $y = L$ para cada registro de representación considerado. Las Acciones de la DG también permitirán a los estudiantes reflexionar sobre el hecho de que el límite en un punto no requiere que la función esté definida en ese punto y que los límites laterales deben coincidir para que exista ese único límite.

La construcción de la concepción dinámica del límite de una función como Proceso se favorece cuando el estudiante realiza Acciones en el registro numérico, ya que este le permite visualizar el comportamiento de los valores numéricos dados en una tabla, tanto para el dominio como para el rango. La interiorización de esas acciones se logrará al utilizar diferentes funciones y situaciones de convergencia. Luego, mediante preguntas adecuadas sobre el comportamiento de la función, se favorece la coordinación de los Procesos dominio y rango. Sin embargo, es necesario que se coordinen dichos Procesos en todos los registros, ya que los resultados que aquí se mostraron destacaron esa falta de coordinación en el registro gráfico en estudiantes de física y matemáticas.

CONCLUSIONES

En este trabajo se propone una descomposición genética refinada del límite de una función en una variable real en su concepción dinámica. Esta propuesta complementa el análisis que ofrece la teoría APOE con la teoría de representaciones semióticas para contribuir a la comprensión de los Procesos involucrados en las diferentes representaciones y su posible coordinación. La principal aportación es la descripción de las estructuras y los mecanismos mentales que un sujeto necesita para la comprensión de la concepción dinámica del límite de una función en un punto, integrando de manera explícita los registros semióticos numérico, algebraico, gráfico y verbal; lo anterior, después de haber notado diferencias drásticas entre las construcciones mentales que un grupo de estudiantes manifestó en un registro o en otro. El Proceso coordinado se evidenció en la mayoría de los casos en el registro numérico y en la representación tabular, y, en una minoría, en el registro gráfico. La Totalidad del infinito, como un indicio, se evidenció en la mayoría de los estudiantes en el registro numérico (representación tabular) y en el gráfico, pero no en el algebraico. Se ofrecieron también recomendaciones didácticas que buscan brindar suficientes oportunidades de construcción del concepto límite en su concepción dinámica, al trabajar en los diferentes registros semióticos y coordinar los Procesos construidos en cada uno de ellos.

Una aportación importante de este estudio consiste en subrayar que los estudiantes pueden haber construido distintas concepciones del concepto de límite en diferentes representaciones de este, y cómo esto incide en la posibilidad de construir el Proceso coordinado de la aproximación en el dominio y el rango de una función en la Totalidad del infinito. Lo anterior conduce a reflexionar sobre la posibilidad de analizar a mayor profundidad dichos Procesos en diferentes representaciones y la posible coordinación entre ellos.

Otras contribuciones de este trabajo que consideramos valiosas y que se señalan en la DG propuesta y en las sugerencias didácticas son, por una parte, la necesidad de subrayar que cuando el límite existe es único, y que puede existir incluso cuando el valor del límite se alcance en un punto que no está definido en el dominio de la función. Por otra parte, consideramos que la introducción de la Totalidad en la DG y la necesidad de diseñar actividades que den cuenta de ella y que permitan su construcción en la enseñanza es otra aportación importante, dada la estrecha relación del concepto de límite, aun en su concepción dinámica, con la noción de infinito.

La concepción dinámica del límite de una función en una variable real se considera un acercamiento informal que es suficiente para la construcción de los conceptos de la materia de cálculo en los niveles medio superior y superior (por ejemplo, en carreras de ingeniería). Por lo que esperamos que esta descripción teórica y las recomendaciones didácticas sean útiles para el diseño instruccional en estos niveles. Sin embargo, esta concepción del límite es también necesaria para la construcción de la concepción métrica de este (Cottrill et al., 1996; Pons, 2014), por lo que también es una propuesta para los docentes de las carreras de ciencias exactas. Las actividades que se consideraron aquí pueden ser un punto de partida, pero se recomienda también la secuencia propuesta por Morante et al. (2022).

REFERENCIAS

Analco, A. G. y Hernández, L. A. (2020). Comprensión del concepto de límite de una función en estudiantes de Actuaría, Física y Matemáticas. En F. Macías y D. Herrera (Eds.), *Matemáticas y sus Aplicaciones*, *15*, 51-73. Editorial BUAP.

Arnon, I., Cotrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory, A framework for research and curriculum development in Mathematics Education*. Springer. https://doi-org.proxydgb.buap.mx/10.1007/s40753-015-0015-9

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. y Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 399-431. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90015-8

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(2), 189-209.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Kluwer Academic Press.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 167-192.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. En L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 160-202). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3178-3_9

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A. y Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 1. *Educational studies in mathematics*, *58*(3), 335-359.
https://doi.org/10.1007/s10649-005-2531-z

Dubinsky, E., Arnon, I. y Weller, K. (2013). Preservice Teachers' Understanding of the Relation Between a Fraction or Integer and its Decimal Expansion: The Case of 0.9 and 1. *Canadian Journal of science, mathematics and Technology education*, *13*(3), 232-258.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Callejo, M. L. y Moreno, M. (2015). ¿Cómo estudiantes para profesor de matemáticas comprenden el aprendizaje del límite de una función? En C. Fernández, M. Molina, N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 249-257). Universidad de Alicante.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M. y Callejo, M. L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(1), 143-162.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2291

Guerrero, J. (2020). *La reconstrucción del concepto de límite en un grupo de profesores del nivel medio superior utilizando la teoría APOE* [Tesis de maestría]. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. https://repositorioinstitucional.buap.mx/handle/20.500.12371/11388

Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the Learning of Mathematics*, *11*(3), 20-24.

Morante, J. D. (2020). *Una secuencia didáctica para la construcción de la definición formal del límite de una función basada en teoría APOE* [Tesis de maestría]. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. https://www.fcfm.buap.mx/posgrados/assets/docs/catalogotesis/mem/2020/JoseDavidMoranteRodriguez.pdf

Morante, J. D., Hernández, L. A. y Ruiz, H. (2022). Contribuyendo a la transición de la concepción dinámica a la concepción métrica del límite de una función de una variable real en estudiantes de ingeniería. *Educación Matemática*, *34*(1), 249-279. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol34/1/09_REM_34-1.pdf

Pérez, A. (2019). *Implementación de una secuencia didáctica para el concepto límite de una función basada en la teoría APOE* [Tesis de maestría]. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. https://www.fcfm.buap.mx/posgrados/assets/docs/catalogo-tesis/mem/2019/AntonioPerezGonzalez.pdf

Pons, J. T. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto* [Tesis doctoral]. Universidad de Alicante.

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435-445). SEIEM.

Roa-Fuentes, S. (2012). *El infinito: Un análisis cognitivo de niños y jóvenes talento en matemáticas* [Tesis doctoral]. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational studies in Mathematics*, *18*(4), 371-397.
https://doi.org/10.1007/BF00240986

Swinyard, C. y Larsen, S. (2012). Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(4), 465-493.
https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.4.0465

Tall, D. (1992). *Student's Difficulties in Calculus*. Plenary presentation in working Group 3 (pp. 1-8). ICME.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.
https://doi.org/10.1007/BF00305619

Trigueros, M. y Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(1), 3-19.
https://doi.org/10.1007/s10649-009-9201-5

Villabona Millán, D. P. y Roa Fuentes, S. (2016). Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE. *Educación matemática*, *28*(2), 119-150. www.scielo.org.mx/pdf/ed/v28n2/1665-5826-ed-28-02-00119.pdf

Villabona, D., Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2022). Concepciones dinámicas y estáticas del infinito: procesos continuos y sus totalidades. *Enseñanza de las Ciencias*, *40*(1), 179-197.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3277

Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(3), 325-338. https://ensciencias.uab.cat/article/view/v29-n3-valls-pons-llinares

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 219-236.
https://doi.org/10.5951/jresematheduc.22.3.0219

Dynamic Conception of the Limit of a Function from an APOS and Semiotic Registers Perspective

Lidia Aurora Hernández Rebollar, María Trigueros Gaisman, Honorina Ruiz Estrada, Estela Juárez Ruiz
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
lidia.hernandez@correo.buap.mx, mtriguerosg@gmail.com, hruizestrada@gmail.com, estela.juarez@correo.buap.mx

Cottrill and collaborators' genetic decomposition (GD) model for constructing the notion of limit of a real valued is a general model. It does not question the possibility that constructions may differ between different representation registers. This research study aims to focus on students work with limits while using different representation registers, as well as to refine Cottrill and collaborators' GD for the dynamic conception limit of a real valued function by incorporating constructions needed at different representation registers. The study considered the results obtained in previous research studies where activities designed with APOS theory were included. More particularly, responses given by students in Analco & Hernández (2020) provided a set of activities related to the limit of real valued functions. Results of this new analysis put forward the need of making constructions in each semiotic register and the inclusion of the infinite's totality and object structures in a refinement of the GD for the dynamic conception of the limit of a function.

As an example, it was found that the process resulting from the coordination of a process constructed in the function's range and in its domain was favored when information in a numerical register was used, as well as when coordinating the algebraic and the numerical registers, but not in the graphic register.

Regarding the construction of the totality of the infinity in the construction of a limit, it was observed that most students were able to mention the limit existence in the numerical register while justifying it as: «The limit of a function when x approaches 3 is 15, since when x tends to 3 both limits, from the left and from the right, $f(x)$ approaches 15». This was considered as an indication that students could be conceiving the finite process as completed and that they may consider the limit in its dynamic conception as an object. However, the results were not conclusive in this respect.

As a result of this study a refined GD for the limit of a real valued function was proposed. In this refined GD, the mental structures that a student would need to construct on each semiotic register –numeric, algebraic, graphical and verbal– are introduced. Furthermore, the interiorization into a process for each pair of those registers and their coordination in a new process is proposed. We denominated this process *the process of the limit's dynamic conception*. When the student can bear in mind this process as finished and is able to explain that $\lim_{x \to a} f(x) = L$ regardless of the semiotic register, we consider that the infinitum totality in the dynamic conception of the limit has been constructed independently of the semiotic register. Finally, through actions on the dynamic limit, and from evidence about the totalized infinity, the student encapsulates the dynamic conception of limit as an object and can perform actions on it, for example, applying its properties.

The description presented in the former paragraph is a summary of the GD proposed in this article and a contribution of this study to the literature on the limits of real valued functions. Another important contribution is the didactic suggestions to further foster the construction of this concept derived from the theoretical analysis conducted, which can be summarized in terms of the need to design activities to promote the constructions described in the refined GD in each semiotic register and the need to promote the coordination of the processes constructed in each semiotic register.

This is a theoretical proposal delving in the analysis of the construction of the limit of a real valued function in its dynamic conception. It pretends to be useful both to teachers and researchers working at high schools and universities.

ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS 41-2 (2023), 137-154
Innovaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5718
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Construyendo modelos precursores sobre la flotabilidad de objetos macizos a los seis años

Constructing Precursor Models about Buoyancy of Solid Objects at Six Years of Age

Isabel García-Rodeja, Estefanía Vera Rodríguez Rouco
Dpto. de Didácticas Aplicadas. Universidade de Santiago de Compostela. Santiago de Compostela. A Coruña. España.
isabel.garcia-rodeja@usc.es, vera.rodriguezrouco@hotmail.com

María Lorenzo Flores
CPI de Toural. Vilaboa. Pontevedra. España.
maria.lorenzo.flores@edu.xunta.es

Vanessa Sesto Varela
IES A Pinguela. Monforte de Lemos. Lugo. España.
vanessa.sesto@edu.xunta.gal

RESUMEN • En este trabajo se describe cómo construyen modelos y explicaciones relacionadas con la flotabilidad de los objetos macizos 4 niños de 6 años durante una propuesta didáctica sobre la flotación. Para la recogida de datos, la intervenación se grabó en audio. Los resultados muestran que, al inicio de la secuencia, algunos niños no son capaces de justificar sus predicciones sobre la flotabilidad de algunos objetos, mientras que otros utilizan diferentes criterios para cada objeto, como el tamaño, la dureza o el peso. Sin embargo, al finalizar la secuencia, los niños utilizan ideas de un modelo precursor sobre la flotación basado en el material del que están hechos los objetos.

PALABRAS CLAVE: Flotación; Predicción-observación-explicación; Modelos precursores; Primera infancia; Estudio de caso.

ABSTRACT • This paper describes how four six-year-old children construct precursor models and explanations related to the buoyancy of objects during a teaching sequence on this conceptual domain. For data collection the intervention was recorded on audio. The results show that, at the beginning of the teaching sequence, some children are not able to justify their predictions about the buoyancy of some objects, while other use different criteria for each object such as size, hardness, or weight. However, by the end of the teaching sequence, children exhibit a precursor model about flotation in which they incorporate the idea that buoyancy depends on the material the objects are made of.

KEYWORDS: Flotation; Prediction-observation-explanation; Precursor model; Early childhood; Case study.

Recepción: junio 2022 • Aceptación: noviembre 2022 • Publicación: junio 2023

García-Rodeja, I., Rodríguez Rouco, E. V., Lorenzo Flores, M. y Sesto Varela, V. (2023). Construyendo modelos precursores sobre la flotabilidad de objetos macizos a los seis años. *Enseñanza de las Ciencias*, *41*(2), 137-154.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5718

INTRODUCCIÓN

Diversos estudios señalan que las actividades de ciencias en las primeras etapas educativas dan la oportunidad de planificar, predecir o hacer inferencias, lo que favorece el desarrollo cognitivo y permite un progreso importante en el lenguaje (French, 2004; Gelman y Brenneman, 2004). Para aprovechar estas potencialidades de una educación científica temprana, se deben plantear actividades en las que se aproveche la curiosidad innata de los niños, sus ganas de saber, su entusiasmo y su capacidad de concentración cuando se enfrentan a nuevos retos (Eshach y Fried, 2005).

Hoy en día sabemos que desde edades tempranas los niños y las niñas construyen sus propios modelos mentales acerca del mundo que les rodea, y revisan estos modelos a medida que acceden a nueva información (Kuhn y Pease, 2006). El constructo de modelo mental hace referencia a una representación mental creada por los sujetos a partir de sus predisposiciones innatas y de sus experiencias previas con el fin de predecir, describir o explicar hechos o fenómenos (Greca y Moreira, 2000). Por otro lado, el concepto de modelo precursor es un enfoque fructífero para observar el progreso cognitivo de los niños. Los modelos precursores son aquellos que se generan en el contexto educativo y que se pueden construir bajo determinadas condiciones de enseñanza desde edades tempranas, y son un primer paso en la construcción de modelos más sofisticados (Ravanis, 2000). Son modelos compatibles con los modelos científicos, ya que están construidos sobre la base de ciertos elementos incluidos en el modelo científico, pero tienen un rango limitado de aplicación (Canedo-Ibarra et al., 2010; Ravanis et al., 2004). Se trata de modelos que constituyen las bases para posteriores construcciones (Weil-Barais, 2022). El diseño de intervenciones bien planificadas, en las que se proporcionen datos empíricos adecuados, es crucial para que puedan desarrollar modelos precursores (Ravanis, 2000; Ravanis et al., 2004).

Son muchos los trabajos que dan cuenta de las explicaciones de los niños sobre la flotación. Piaget (1934) ya describió las explicaciones sobre la flotación de los barcos en niños de 4 a 12 años diferenciando cuatro etapas que resumimos a continuación. Los niños más pequeños y hasta los 5 años daban razones animistas y morales. En una segunda etapa (entre 5-6 años), los niños decían que los barcos flotaban por ser pesados. En una tercera etapa (6-8 años), por el contrario, referían que los barcos flotaban por ser ligeros; y era ya en una cuarta etapa (a partir de los 9 años) cuando hacían referencia a la ligereza de los objetos en relación con la ligereza del agua, comparando los mismos volúmenes, y señalaban, por ejemplo, que para saber si un objeto flota habría que comparar el peso del objeto con el peso del mismo volumen de agua. Explicaciones como las descritas por Piaget se han observado también en investigaciones posteriores (Butts et al., 1993; Ioannides y Kakana, 2001; Paños et al., 2022; Selley, 1993).

La flotación puede ser explicada atendiendo al equilibrio de fuerzas entre el peso del objeto y la fuerza de empuje, o atendiendo a la densidad del objeto en relación con la densidad del líquido. Para una primera aproximación a la flotación, son muchos los autores que apuestan por el segundo enfoque (Canedo-Ibarra et al., 2010; Hsin y Wu, 2011; Koliopoulos et al., 2004). Se ha señalado que la densidad es una propiedad cuya comprensión no está al alcance de las criaturas, ya que requiere la consideración simultánea de dos dimensiones, la masa y el volumen, en relaciones inversas (Lehrer et al., 2001; Palacio-Díaz y Criado, 2016; Smith et al., 1985; Shayer y Adey, 1984), y no es hasta los 9 años o más tarde cuando los niños conceptualizan la idea de densidad (Inhelder y Piaget, 1972; Shayer y Adey, 1984). Sin embargo, otros autores indican que los niños utilizan una concepción intuitiva de densidad y proponen utilizar el «tipo de material» como una primera aproximación a este concepto. Kohn (1993) y Smith et al. (1985) sugieren que el material del que están hechos los objetos puede usarse para explicar la flotabilidad, y es una propiedad que es más fácil de percibir directamente para los escolares. Otros investigadores (Hsin y Wu, 2011; Koliopoulos et al., 2004) también señalan que asociar la idea de «material» con los conceptos de densidad y flotación es un primer paso para explicar la flotabilidad de los objetos. Evidentemente, el campo de aplicabilidad de esta idea se limita a los objetos macizos, es decir, objetos sólidos que no presentan huecos.

Algunos autores consideran que las actividades de indagación son uno de los enfoques más apropiados para aprender ciencias, ya que promueven la observación, el establecimiento de hipótesis y la comprobación de ideas a través de la experimentación (Cruz-Guzmán et al., 2017). Por otro lado, estudios desde la psicología cognitiva han mostrado que las actividades de indagación estimulan el desarrollo cerebral (Metz, 2004). Otros autores (Eshach y Fried, 2005) hacen referencia a la importancia de realizar actividades de ciencias en edades tempranas que den la oportunidad a los niños de construir referentes de los conceptos científicos al hacer observaciones, predicciones, realizar inferencias y poder discutir e intentar explicar e interpretar lo que sucede en las actividades. El aprendizaje por indagación se define como una actividad educativa en la que, ya sea de forma individual o en grupo, los estudiantes investigan un fenómeno, se hacen preguntas y sacan conclusiones. Al formular preguntas, interpretar datos y coordinar las evidencias con las teorías, los estudiantes desarrollan habilidades intelectuales que los capacita para construir nuevo conocimiento (Chan et al., 1997).

Cada vez hay un mayor reconocimiento de que la ciencia puede ser un dominio particularmente importante en la primera infancia, y que no solo sirve para construir una base para la comprensión científica futura, sino también para desarrollar habilidades importantes y actitudes positivas hacia el aprendizaje (Gelman y Brenneman, 2004). Sin embargo, son escasas las investigaciones referidas al aprendizaje y enseñanza en dominios específicos de ciencias en edades tempranas y se necesitan más estudios sobre los entornos particulares propios de dicha actividad que permitan describir las situaciones de aprendizaje y también los logros conceptuales de cada niño. Por ello resulta fundamental realizar trabajos donde se describan las intervenciones del alumnado y el docente en este tipo de actividades.

En este estudio se diseñó una secuencia de actividades con el objetivo de que los niños construyan un modelo precursor de la flotación basado en un concepto intuitivo de la densidad relacionado con el material del que están constituidos los objetos. Se seleccionó el tema de la flotación porque es un tema familiar para los niños, accesible a la experiencia, y las ideas que se abordan pueden construirse a través de actividades (Harlen, 1989). En la intervención se recurre a una estrategia POE (predicción-observación-explicación), en la que se anima a los niños a emitir predicciones sobre un fenómeno que luego tendrán la oportunidad de observar y contrastar experimentalmente (White y Gunstone, 1992).

En este trabajo se describen las formas en las que un grupo de niños discute, cuestiona y explica fenómenos científicos como una forma de indagar en la construcción de modelos precursores sobre determinados dominios, en concreto, sobre la flotación. El objetivo es describir cómo un grupo de niños de 6 años construyen modelos precursores sobre la flotación a través del análisis de los criterios que utilizan en sus explicaciones sobre porqué los objetos flotan o se hunden durante la implementación de una intervención didáctica. Partimos de la hipótesis de que los niños y las niñas en edades tempranas, en este caso niños de 6 años, a través de actividades estructuradas, son capaces de construir modelos precursores de la flotabilidad basados en el material del que están hechos los objetos.

METODOLOGÍA

En este trabajo se adopta un enfoque metodológico de tipo cualitativo, en concreto, un estudio de casos (Yin, 2003). La investigación cualitativa pretende describir, conocer y comprender en profundidad un fenómeno de interés dentro de su propio contexto (Denzin y Lincoln, 1994). Los estudios de casos pueden abordar de manera intensiva una unidad de análisis que puede consistir en un único estudiante, un profesor, una clase, etc. (Stake, 1994). La modalidad de observación en este trabajo es una observación participante, dado el nivel de implicación de la persona que toma los datos. Para este estudio se diseñó una intervención que se implementó en el aula recogiendo datos de un grupo

(Eshach, 2003; Calo et al., 2021; Martínez, 2007). Este método de recogida de datos en una muestra pequeña permite un mayor intercambio de ideas entre los participantes y facilita la recogida de datos para un análisis más profundo (Palaiologou et al., 2016).

La intervención se desarrolló con el objetivo de que los niños construyesen un modelo precursor de la flotación basándose en un concepto intuitivo de la densidad relacionado con el material del que está constituido el objeto (Koliopoulos et al., 2004). La implementación de la intervención en pequeño grupo y la recogida de datos fue llevada a cabo por una maestra en formación en un aula en el que la maestra habitual implementaba la secuencia con otro grupo. El diseño de la propuesta y el análisis de datos se llevó a cabo en colaboración con dos investigadoras. Por consideraciones éticas únicamente se tomaron datos del alumnado del que disponíamos del consentimiento informado de los padres en el momento de la implementación de la secuencia. Se obtuvo consentimiento únicamente para grabaciones en audio.

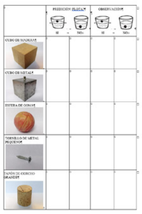
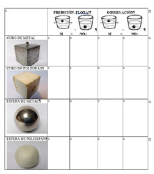
En el presente estudio participaron 4 niños de 6 años. En el momento de la intervención cursaban el primer curso de educación primaria en un centro situado en un entorno semiurbano. Con el fin de garantizar el anonimato, los nombres reales fueron reemplazados por pseudónimos (Javier, Mateo, Alberto y Álvaro). Los datos se recogieron durante el tercer trimestre, en un periodo de tres días consecutivos, con una sesión de 50 minutos cada día. Previamente no habían realizado actividades sobre la flotabilidad de los objetos en el aula.

Como se puede observar en la tabla 1, la intervención consta de 6 actividades, una primera actividad de exploración de ideas a través de preguntas, cuatro actividades tipo POE (White y Gunstone, 1992) y una actividad de recapitulación de lo aprendido. Los objetos utilizados fueron seleccionados teniendo en cuenta la intención educativa de cada actividad. Se pretendía dar a los niños la oportunidad de que probasen si la flotabilidad de un objeto depende del tamaño, del peso, etc. En todas las actividades se utilizaron objetos macizos para disminuir el número de variables con la intención de facilitar que pudiesen detectar regularidades y la construcción de generalizaciones inductivas.

El protocolo de actuación en todas las actividades POE fue similar. En primer lugar, la maestra mostró el material y dejó a los infantes que manipulasen los objetos. Posteriormente, se les pidió que realizasen predicciones acerca de qué iba a ocurrir al meter los objetos en el agua. Cada niño tenía una tabla de registro en la que iba anotando sus predicciones y posteriormente las observaciones para cada objeto. Las intervenciones de la maestra en esta fase fueron del tipo: «¿Qué crees que va a ocurrir si metemos en agua el cubo de madera? Anota tu predicción en la tabla. ¿Por qué crees que...?». A continuación, con los mismos objetos realizaron las observaciones, comprobaron si flotaban o no y lo anotaron en las tablas en las columnas de observación. Se pretendía que comprobasen si sus predicciones se correspondían o no con lo observado. Por último, se pidió a los niños que explicasen sus observaciones.

Los datos de la intervención se grabaron en audio y las grabaciones fueron transcritas para su posterior análisis (Calo et al., 2021; Martínez, 2007). En las transcripciones se describe cómo fueron evolucionando los modelos de los estudiantes al analizar los criterios que utilizan en sus explicaciones sobre por qué los objetos flotan o se hunden (Ioannides y Kakana, 2001). Para dar fiabilidad y validez al estudio, el análisis de las sesiones fue realizado de manera independiente por las investigadoras y las maestras. En aquellos casos en los que hubo discrepancia, las investigadoras discutieron la descripción propuesta hasta alcanzarse un consenso.

Tabla 1.
Secuencia de actividades implementadas durante la intervención

ACTIVIDAD	*INTENCIÓN EDUCATIVA*	*DESCRIPCIÓN*
¿Qué sabemos de la flotación?	Se pretende que los niños activen y hagan explícitas sus ideas.	Se plantea a los niños preguntas como: ¿Qué objetos conoces que se hundan? ¿Sabes qué quiere decir que algo flote? ¿De qué depende que las cosas floten? ¿De qué depende que las cosas se hundan?
Actividad POE 1 	Se pretende que los niños activen sus ideas y las prueben de forma empírica.	A continuación, les proporcionaremos objetos de diferentes materiales, tamaños y formas. Se les da la oportunidad de que hagan predicciones y se les pide que las justifiquen y que registren las predicciones en una tabla. Posteriormente, realizan las observaciones, registran en la tabla lo que ocurre con cada objeto y explican lo ocurrido. Materiales**:** cubo de madera, cubo de metal, esfera de goma, tornillo de metal pequeño y tapón de corcho grande. Tablas para registrar las predicciones y las observaciones.
Actividad POE 2 	Se pretende que los niños prueben si la flotación depende del tamaño del objeto.	Se les proporcionan diferentes objetos, algunos del mismo material y de diferentes tamaños. Se procede como en la POE 1. Materiales: tapón de corcho grande, tapón de corcho pequeño, tapón de goma grande, tapón de goma pequeño, tornillo de metal grande y tornillo de metal pequeño. Tablas para registrar las predicciones y las observaciones.
Actividad POE 3 	Se pretende que los niños prueben si la flotación depende del material.	Se les proporcionan objetos de diferente material y del mismo tamaño y forma. Se procede como en la POE 1. Materiales: esferas macizas de goma, metal, poliespán. Tablas para registrar las predicciones y las observaciones.
Actividad POE 4 	Se pretende que los niños prueben si la flotación depende de la forma del objeto.	Se les proporciona diferentes objetos, algunos del mismo material y forma. Se procede como en la POE 1. Materiales: cubo de metal, cubo de poliespán, esfera de metal y esfera de poliespán. Tablas para registrar las predicciones y las observaciones.
Actividad de recapitulación	Conocer si son capaces de utilizar un modelo precursor de flotación para explicar la flotabilidad de objetos macizos.	Se les proporciona objetos macizos de diferentes tamaños, materiales y formas. Se les plantea a los niños preguntas acerca de la flotación: ¿Todos los tapones flotan? ¿Todos los objetos pequeños flotan? ¿Todos los objetos ligeros flotan? ¿De qué depende que un objeto flote? Materiales: cubo de poliespán, esfera de metal, tornillo de metal grande, tapón de corcho pequeño, tapón de plástico grande y tapón de plástico pequeño.

RESULTADOS

A continuación, se describe lo sucedido en cada sesión y se muestra, a través de fragmentos de las transcripciones de las entrevistas grupales, eventos significativos de las interacciones discursivas entre la maestra y los niños. De forma similar a otros trabajos (Calo et al., 2021; Costa, 2015), las interacciones comunicativas se presentan en tres columnas con los turnos de habla, el diálogo y el análisis de las intervenciones que describe la intención o el significado de cada intervención.

Actividad de inicio

En la primera actividad la maestra formuló preguntas para activar las ideas de los niños sobre la flotación. Como las experiencias son familiares, los niños pudieron expresar sus ideas y comentar experiencias. Los niños fueron capaces de identificar objetos que flotan.

Turno	*Transcripción*	*Análisis*
1	Maestra: «¿Sabéis que quiere decir que algo flote?».	Intenta que los niños hagan explícitas sus ideas.
2	Varios a la vez: «Que no se hunde».	Hacen explícitas sus ideas.
3	Javier: «Como una tabla de surf».	Pone un ejemplo.
4	Maestra: «¿Y qué más objetos conocéis que floten?».	Pide a los niños que identifiquen objetos que floten.
5	Mateo: «La madera».	Identifica objetos que flotan.
6	Álvaro: «Un flotador». (…)	Identifica objetos que flotan.
10	Álvaro: «El papel flota».	Identifica objetos que flotan.
11	Alberto: « Y el cartón. Yo lo del cartón lo sé porque una vez vi un cartón de leche tirado en el mar».	Identifica objetos que flotan haciendo referencia a sus experiencias.

A la cuestión «¿De qué depende que las cosas floten?» dan respuestas diversas. Javier hizo referencia a que no pesan, Mateo dijo que flotan porque dentro circula aire, Alberto y Álvaro indicaron que no sabían. La conversación con los niños dio la oportunidad de que activasen sus ideas, identificasen elementos sobre el fenómeno que se iba a estudiar y comentasen sus experiencias.

Actividad: POE 1

La intención de la actividad POE 1 es que los niños activen sus ideas y las prueben de manera empírica. Para esta actividad se han seleccionado objetos macizos de diversos materiales, tamaños y formas (tabla 1). A continuación, se describe lo que ocurre cuando se les pide que hagan predicciones sobre la flotabilidad de los diferentes objetos.

Javier justifica sus predicciones haciendo referencia al peso y al material del que están hechos los objetos. Mateo justifica sus predicciones aludiendo a diferentes criterios dependiendo del objeto. Cree que el cubo de madera flotará porque en el interior circula aire, y cree que el cubo de metal se hundirá por el peso. En el caso del tornillo pequeño, piensa que flotará debido al pequeño tamaño, y cree que el tapón de corcho también flotará, ya que se parece a la madera. Alberto dice que no sabe por qué va a flotar el cubo de madera. En cuanto al cubo de metal, considera que se hunde por el peso, y que la bola de goma se va a hundir porque está muy dura. En cuanto al tornillo pequeño, considera que se va a hundir porque es pequeño, y cree que el tapón de corcho va a flotar porque se parece a la madera. Álvaro, al igual que Alberto, no sabe por qué va a flotar el cubo de madera. Cree que el cubo de metal y la esfera de goma se van a hundir por el peso. Considera que el tornillo pequeño se va a hundir porque es de metal. En cuanto al tapón de corcho, cree que se va a hundir, pero no sabe explicar por qué.

Turno	*Transcripción*	*Análisis*
16	Maestra: «¿Qué creéis que va a ocurrir si metemos el cubo de madera en el agua?».	Intenta que los niños hagan explícitas sus ideas.
17	(Todos contestan que va a flotar)	Coinciden en que el cubo de madera flotaría en el agua.
18	Maestra: «¿Y por qué creéis que va a flotar?».	Anima a los niños a que justifiquen sus predicciones.
19	Javier: «Porque es de madera».	Justifica su predicción sobre la base del material del que está hecho el cubo.
20	Mateo: «Porque circula el aire entre las grietas». (…)	Justifica su predicción haciendo referencia a la circulación de aire a través del material.
23	Maestra: «¿Y el cubo de metal qué creéis que va a ocurrir?».	Anima a los niños a que hagan predicciones.
24	(Todos contestan que se va a hundir)	Existe consenso en que el cubo de metal se hundiría en el agua.
26	Maestra: «¿Y por qué creéis que se va a hundir?».	Anima a los niños a que justifiquen sus predicciones.
27	Alberto: «Porque pesa demasiado».	Justifica su predicción basándose en que el cubo de acero es muy pesado.
28	(Todos asienten) (…)	Comparten la justificación de su compañero Alberto.
36	Maestra: «¿Y el tornillo de metal pequeño? ¿Qué apuntasteis en vuestras tablas?».	Anima a los niños a que hagan explícitas sus predicciones.
37	Alberto: «Yo creo que se va a hundir porque es muy pequeño».	Justifica su predicción sobre la base del pequeño tamaño del objeto.
38	Mateo: «No, yo puse que va a flotar porque es muy pequeño y no podemos compararlo con esto (señala el cubo de madera)».	Recurre a la misma justificación que su compañero Alberto, pero difiere en la predicción al señalar que el tornillo flotaría en el agua.
39	Javier: «Yo creo que se va a hundir porque es de metal».	Justifica su predicción partiendo del material del que está hecho el tornillo.

En el siguiente fragmento de la discusión se ve cómo, en general, las predicciones se ajustaron a las observaciones, excepto en el caso del tornillo pequeño de metal, que Mateo pensaba que iba a flotar porque era pequeño; y el tapón de corcho grande, que Álvaro pensaba que se iba a hundir, sin saber explicar por qué. Javier justificó las observaciones utilizando exactamente las mismas ideas que en la predicción, haciendo referencia al peso y al material. Mateo justificó las observaciones aludiendo al peso y al material. Alberto, que no sabía por qué iba a flotar el cubo de madera, más tarde señalaba que este flota porque es de madera; y en relación con la esfera de goma, indicaría que se hunde porque es de goma, y no por su dureza. Álvaro, que no sabía por qué iba a flotar el cubo de madera, señalaba después que el cubo de madera flota porque es de madera y que el cubo de metal se hunde por el peso. No sabe cómo justificar que se hunda la esfera de goma. En cuanto al tornillo de metal, indica que la razón para que se hunda es que es muy pequeño.

Turno	*Transcripción*	*Análisis*
47	Maestra: «Ahora que ya observamos lo que pasó, ¿por qué pensáis que el cubo de madera flotó?».	Anima a los niños a que expliquen sus observaciones.
48	(Todos contestan que flota porque es de madera).	Existe consenso acerca de la flotabilidad del cubo de madera sobre la base del material del que está hecho.
49	Maestra: «¿Y el cubo de metal por qué creéis que se hunde?».	Anima a los niños a que expliquen sus observaciones.
50	Javier: «Porque pesa mucho».	Explica la observación haciendo referencia al peso del objeto.
51	Alberto y Álvaro: «Sí, porque pesa mucho».	Apoyan la explicación de su compañero Javier.
52	Mateo: «Porque pesa mucho y es de metal».	Además del peso, considera en su explicación la influencia del material del que está hecho el objeto.
58	Maestra: «¿Y el tornillo pequeño de metal?».	Anima a los niños a que expliquen sus observaciones
59	Alberto: «Se hunde porque es muy pequeño».	Explica la observación haciendo referencia al tamaño del objeto.
60	Javier y Mateo: «Porque es de metal».	Explican la observación haciendo referencia al material del que está hecho el objeto.
61	Álvaro: «Es tan pequeño que se hunde».	Explica la observación haciendo referencia al tamaño del objeto.

En esta primera actividad POE 1, cuando se les pide que expliquen sus predicciones sobre la flotabilidad de los objetos, las justifican utilizando diferentes criterios de acuerdo con el objeto en cuestión. Javier es el único que justifica sus predicciones y observaciones haciendo referencia únicamente a dos criterios: el peso y al material del que están hechos los objetos. Mateo justifica sus predicciones haciendo referencia a que flota porque en el interior circula aire, o justifica las predicciones sobre la base de su material, su peso o su tamaño. En relación con el tamaño, indica que el tornillo de metal va a flotar porque es muy pequeño. Sin embargo, para explicar las observaciones únicamente hace referencia al material y al peso. Probablemente, en este caso, que una predicción entre en contradicción con la observación supuso un cambio de criterio, y dejó de utilizar el tamaño para justificar el comportamiento del tornillo pequeño en el agua; y, ya en la fase de observación, señala que se hunde porque es de metal. Alberto no fue capaz de explicar por qué pensaba que el cubo de madera iba a flotar. Para otros objetos justificó sus predicciones utilizando propiedades de los objetos como el peso, la dureza o el tamaño. Las ideas que subyacen en sus intervenciones es que los objetos se hunden porque pesan, porque están duros o porque son pequeños. Para justificar estas observaciones utiliza como criterios el peso, el tamaño o el material. En este caso, vemos cómo un criterio como la dureza deja de utilizarse, seguramente porque la conversación con los compañeros se centra en otros aspectos. Álvaro no es capaz de explicar por qué cree que el cubo de madera va a flotar, y tampoco es capaz de justificar por qué cree que el tapón de corcho grande se va a hundir. Para otros objetos utiliza como criterios el material y el peso. Para justificar las observaciones, tiene en cuenta el material y el peso, y adopta un nuevo criterio: el tamaño. Los datos sugieren que considera el tamaño del objeto cuando se confirma la predicción de Alberto, quien justificó que el tornillo de metal se hundiría por ser pequeño.

Queremos señalar que, en esta actividad, cuando utilizan como criterio el peso, todos están de acuerdo en que los objetos pesados se hunden. Sin embargo, cuando tienen en consideración el tamaño, no existe consenso. Mateo explica que el tornillo flotará porque es pequeño, y esta idea la abandona al no verse respaldada por la evidencia empírica. Sin embargo, Alberto, quien indicó que el tornillo se iba a hundir por ser pequeño, ve esta idea reforzada con la observación.

Actividad POE 2

La intención de la actividad POE 2 es que los niños prueben la idea de que la flotación depende del tamaño del objeto. Para esta actividad se han seleccionado objetos macizos, algunos del mismo material y de diferentes tamaños (tabla 1).

En esta actividad Javier justifica sus predicciones haciendo mención del material del que están hechos los objetos. Mateo justifica sus predicciones haciendo referencia al material, excepto para el tapón de goma pequeño, del que dice que se hundirá porque pesa mucho, aunque a continuación refiere que es de un material que se hunde. Alberto también parece que hace una primera aproximación al concepto de densidad utilizando para un mismo objeto dos criterios: el volumen y el peso. A continuación, utiliza como criterio únicamente el tamaño del objeto. Predice que el tapón de corcho pequeño se hundirá porque el tornillo pequeño también se hundió. Además, Alberto dice que el tapón grande de goma flotará y que el tapón pequeño de goma se hundirá. Álvaro cree que el tapón de corcho pequeño va a flotar, pero no sabe explicar por qué. El tapón de goma grande cree que se hundirá porque pesa mucho y el tapón pequeño cree que también se va a hundir.

Turno	*Transcripción*	*Análisis*
67	(Todos los niños apuntan en las tablas que el tapón de corcho grande va a flotar). Maestra: «¿Por qué creéis que el tapón de corcho va a flotar?».	Anima a los niños a que expliquen sus predicciones.
68	Alberto: «Porque es grande y pesa poco». (…)	Justifica su predicción utilizando como criterios la masa y el volumen.
71	Maestra: «¿Y qué creéis que va a ocurrir si metemos en agua el tapón de corcho pequeño?».	Anima a los niños a que expresen sus predicciones.
72	Alberto: «Yo creo que se va a hundir porque es pequeño. Es como el tornillo de metal que también es pequeño y se hundió».	Justifica su predicción sobre la base del tamaño del objeto, al inferir que todos los objetos pequeños se hunden.
73	Mateo: «Yo creo que también va a flotar porque el tapón de corcho grande flota, entonces este, digo yo que también tiene que flotar». (…)	Justifica su predicción partiendo del material del que está hecho el objeto, al establecer la generalización de que todos los objetos de corcho flotan.
81	Maestra: «¿Y el tapón de goma pequeño flotará o se hundirá?».	Anima a los niños a que expresen sus predicciones.
82	(Todos contestan que se va a hundir).	Existe consenso cuando predicen que el tapón de goma se va a hundir.
83	Mateo: «Se va a hundir. Es un material que se hunde porque como la otra goma también se hundió». (…)	Justifica su predicción basándose en el material del que está hecho el objeto, al establecer la generalización de que todos los objetos de goma se hunden en el agua.
85	Maestra: «¿Y el tornillo de metal grande? ¿Qué apuntasteis en vuestras tablas?».	Anima a los niños a que expresen sus predicciones.
85	Alberto: «Que se va a hundir».	Predice que el tornillo de metal grande se va a hundir.
85	Maestra: «¿Y por qué pensáis que se va a hundir?».	Anima a los niños a que expliquen sus predicciones.
86	Álvaro: «Porque el pequeño antes se hundió entonces…».	Justifica su predicción sobre la base del material del que está hecho el objeto, al establecer la generalización de que todos los objetos de metal se hunden.

En general, las predicciones se ajustaron a las observaciones a excepción de las predicciones de Álvaro sobre el tapón de corcho y el de goma. Mateo explica que el tapón de corcho grande flotó porque es parecido a la madera. Javier señala que el tapón de corcho pequeño es igual que el corcho grande: los dos flotan. Álvaro señala que el tapón de goma grande se hunde porque pesa mucho, como el pequeño. En cuanto al tornillo grande de metal, Mateo explica que se va a hundir porque el pequeño es de metal y este también es de metal. Alberto prácticamente no interviene debido, posiblemente, a que se queda bloqueado cuando no ve confirmada con su observación la generalización que parecía estar construyendo –los objetos grandes flotan y los pequeños se hunden–.

95	Maestra: «¿Y el tapón de corcho pequeño, por qué creéis que flotó?».	Anima a los niños a que expliquen sus observaciones.
96	Javier: «Porque es igual que el tapón de corcho grande y como el tapón de corcho flota pues este también». (…)	Explica la observación sobre la base del material del que está hecho el objeto, al establecer la generalización de que todos los objetos de corcho flotan.
98	Maestra: «Y el tapón de goma grande se hundió, ¿no? ¿Por qué?».	Anima a los niños a que expliquen sus observaciones.
99	Álvaro: «Porque pesa mucho, igual que el pequeño». (…).	Explica la observación partiendo de la masa del objeto.
101	Maestra: «¿Y el tornillo de metal grande por qué se hunde?». (…)	Anima a los niños a que expliquen sus observaciones.
103	Mateo: «Porque el pequeño es de metal y el grande también es de metal y como antes el pequeño se hundió pues digo yo que como este es más grande también se va a hundir».	Explica la observación basándose en el material del que está hecho el objeto, al establecer la generalización de que todos los objetos de metal se hunden.

En la actividad POE 2, cuando se les pide que expliquen sus predicciones sobre la flotabilidad de los objetos, justifican sus predicciones haciendo referencia a diferentes criterios. Javier justifica sus predicciones y observaciones aludiendo únicamente al material. Mateo justifica sus predicciones refiriéndose al peso y al material; sin embargo, para explicar las observaciones hace alusión únicamente al material. Alberto justifica sus predicciones haciendo una primera aproximación al concepto de densidad al utilizar para un mismo objeto dos criterios: el volumen y el peso; en otros casos, utiliza el tamaño como criterio para predecir si flotan o no determinados objetos. Podemos interpretar que el hecho de que en la actividad anterior se confirme su hipótesis –el tornillo de hierro se hunde porque es pequeño– le llevó a realizar una inferencia y reforzó el hecho de utilizar el tamaño como criterio para predecir si flotan o no determinados objetos. Parece que está construyendo una generalización inductiva –los objetos grandes flotan y los pequeños se hunden–. Dicha hipótesis no se verá corroborada por las observaciones. En esta actividad Álvaro utiliza como criterio el tamaño, el peso y el material del que están hechos los objetos.

Actividad POE 3

Con esta actividad se pretende que los niños prueben la idea de que la flotación depende del material del que está hecho el objeto. Para esta actividad se han seleccionado objetos macizos de la misma forma y diferente material (tabla 1).

En esta actividad los niños justifican sus predicciones y sus observaciones haciendo referencia al peso de las esferas. En la primera parte de la actividad, los niños predicen que las esferas se van a hundir o flotar dependiendo de si pesan o no. Mateo, aunque también se refirió al peso, habla del peso del material del que están hechos los objetos, lo que interpretamos como una aproximación al concepto de densidad. Además, Mateo rescata la idea que expresó al inicio de la propuesta de que los objetos flotan porque tienen agujeros o grietas por donde entra aire o agua. Al inicio de la propuesta, hizo mención de que por los agujeros o grietas circulaba aire y ahora indica que por los agujeros circula agua. Ideas semejantes aparecen en otros trabajos donde se muestra que los niños consideran que factores como las cavidades, los agujeros y la forma están relacionados con la capacidad de los cuerpos sólidos para flotar (Pramling y Pramling-Samuelson, 2001). Después de realizar las observaciones, dicen que no cambiaron de opinión y que siguen pensando lo mismo que en la predicción.

Turno	*Transcripción*	*Análisis*
122	Maestra: «¿Qué creéis que va a ocurrir si metemos en el agua las esferas?».	Anima a los niños a que expresen sus predicciones.
123	Alberto: «Las esferas de goma y de metal se van a hundir porque pesan y la de poliespán flota porque no pesa».	Justifica sus predicciones utilizando como criterio el peso de los objetos.
124	Javier: «Yo pienso lo mismo que Alberto».	Concuerda con la predicción de su compañero Alberto.
125	Maestra: «Álvaro, ¿y tú qué piensas que va a ocurrir?».	Anima a los niños a que expresen sus predicciones.
126	Álvaro: «Que las esferas de goma y poliespán van a flotar porque no pesan, y la de metal se va a hundir porque pesa mucho». (…)	Justifica sus predicciones utilizando como criterio el peso de los objetos.
127	Maestra: «¿Y tú, Mateo?».	Anima a los niños a que expresen sus predicciones.
128	Mateo: «La esfera de goma se va a hundir porque ya lo vimos y, además, no flota porque pesa demasiado… Es un material que pesa demasiado. La esfera de poliespán va a flotar porque ya lo vimos… está hecha de un material que no pesa, flota (…) ¡Ah! Y porque tiene agujeros y circula el agua…».	Justifica sus predicciones utilizando como criterio el material del que están hechos los objetos, señalando que los materiales «pesados» se hunden, y que los materiales «poco pesados» flotan. Además, incorpora como factor la existencia de cavidades en algunos objetos.

Actividad POE 4

El objetivo de la actividad POE 4 es que los niños prueben la idea de que la flotación depende de la forma del objeto. Para esta actividad se han seleccionado objetos macizos, algunos del mismo material y diferentes formas (tabla 1).

En la actividad POE 4, Alberto y Álvaro afirman que el cubo y la esfera de metal se van a hundir porque pesan mucho, y que el cubo y la esfera de poliespán van a flotar debido a que pesan poco. Javier y Mateo hacen referencia al peso del material, lo que interpretamos como una aproximación al concepto de densidad. Además, Mateo menciona de nuevo la idea de que flotan porque circula el agua entre ellos. Dado que las observaciones confirman sus predicciones, no ven necesario añadir más explicaciones.

Turno	*Transcripción*	*Análisis*
143	Maestra: «¿Qué creéis que va a ocurrir si metemos en el agua estos objetos?».	Anima a los niños a que expresen sus predicciones.
144	Alberto: «El cubo y la esfera de metal se van a hundir porque pesan mucho y el cubo y la esfera de poliespán van a flotar porque pesan poco».	Justifica sus predicciones partiendo del peso de los objetos.
145	Javier: «El cubo y la esfera de metal se van a hundir porque son de metal y pesan, y el cubo y la esfera de poliespán van a flotar porque son de poliespán y no pesan».	Justifica sus predicciones sobre la base del tipo de material del que están hechos los objetos, señalando que los materiales «pesados» se hundirán, y los materiales «poco pesados» flotarán.
146	Álvaro: «El cubo y la esfera de metal se van a hundir porque pesan mucho, y el cubo y la esfera de poliespán van a flotar porque no pesan nada».	Justifica sus predicciones basándose en el peso de los objetos.
147	Mateo: «El cubo y la esfera de metal se van a hundir porque son de metal, pesan y no circula el agua entre ellos, y el cubo y la esfera de poliespán no pesan y circula el agua entre ellos».	Justifica sus predicciones atendiendo al tipo de material del que están hechos los objetos, señalando que los materiales «pesados» se hundirán, y que los materiales «poco pesados» flotarán. Además, incorpora como factor la existencia de cavidades en algunos objetos por las que circula agua.

Actividad de recapitulación

Con esta actividad se pretende conocer si son capaces de utilizar un modelo precursor de flotación para explicar la flotabilidad de objetos macizos con un concepto central: una idea intuitiva de la densidad conectada con el material que constituye el objeto (tabla 1).

En la actividad de recapitulación, ante la pregunta de si todos los tapones flotan, Alberto responde afirmativamente y Javier lo contradice. Mateo explica que depende del material. Alberto muestra conformidad con la afirmación de Mateo. Mateo pone un ejemplo: un tapón de metal no flota, pero uno de plástico sí. A la pregunta de si todos los objetos ligeros se hunden, Álvaro responde que sí, pero Javier parece no estar de acuerdo con esa afirmación. Mateo duda y expone un contraejemplo mencionando que hay algunos objetos que son ligeros y no flotan, como el tornillo pequeño. Cuando le pregunta por qué, dice: «porque pesa». Javier le corrige señalando que «se hunde porque es de metal». A la pregunta final, «¿De qué depende que un objeto flote?», Mateo y Javier señalan que depende del material del que está hecho el objeto. Álvaro indica que, si es de metal, aunque sea ligero se va a hundir.

Turno	*Transcripción*	*Análisis*
169	Maestra: «¿Y todos los objetos ligeros flotan?».	Plantea preguntas.
170	Alberto: «Sí».	Está de acuerdo con la idea de que todos los objetos ligeros flotan.
171	Mateo: «Em… No. Hay algunos que son ligeros y no flotan».	Busca un contraejemplo.
172	Maestra: «¿Como por ejemplo…?».	Solicita que aclaren las ideas poniendo ejemplos.
173	Mateo: «Por ejemplo, este tornillo es ligero y no flota (señala el tornillo pequeño de metal)».	Establece como contraejemplo el caso del tornillo de metal pequeño.
174	Maestra: «¿Y por qué?». (…)	Pide explicaciones.
176	Javier: «Porque es de metal».	Explica el comportamiento de los objetos en torno a la flotación a partir del material del que están hechos.
177	Maestra: «Vale, ¿entonces de qué depende que un objeto flote?».	Plantea preguntas retando el pensamiento del alumno.
178	Alberto: «De si pesa mucho o no».	Explica el comportamiento de los objetos en torno a la flotación a partir del peso del material.
179	Mateo: Depende de qué material esté hecho.	Explica el comportamiento de los objetos en torno a la flotación a partir del material del que están hechos.
180	Javier: ¡¡¡Ah!!! ¡¡¡Es verdad!!! Depende de qué material está hecho. Si es de metal se hunde.	Acepta la explicación de sus compañeros basada en el tipo de material.
181	Álvaro: Sí, y aunque sea muy pequeño, si es de metal se va a hundir.	Hace hincapié en la influencia del material y no del tamaño.

En la tabla 2 se muestran los criterios que utilizan los participantes en sus explicaciones sobre por qué los objetos flotan o se hunden. Estos datos nos permiten ver la evolución de los modelos de los estudiantes al mostrar los criterios que utilizan en sus explicaciones. Así, se aprecia que Javier y Mateo fueron abandonando algunas de las explicaciones sobre la flotación de los objetos basadas en criterios como el tamaño, el peso o el material para adoptar ya un modelo precursor en el que apuntan al material como único criterio para explicar la flotabilidad de los objetos al final de la secuencia. Alberto y Álvaro muestran también evolución en sus modelos, ya que, en la actividad inicial, aunque son capaces de hacer predicciones acertadas sobre el comportamiento de algunos objetos, no saben justificar el porqué de ese comportamiento. A medida que van participando en las actividades van incorporando posibles criterios para explicar la flotabilidad de los objetos: el tamaño, el peso, la dureza, el material. En la última actividad refieren el peso y el material como factores que explican la flotabilidad de los objetos, aunque las últimas intervenciones hacen únicamente referencia al material.

Tabla 2.
Criterios a los que se hace referencia en las explicaciones de los niños
NS: Para algunos objetos no sabe justificar el comportamiento de los objetos.

	Inicio	*POE1*	*POE2*	*POE 3*	*POE 4*	*Recapitulación*
Javier	Peso	Peso Material	Material	Peso	Peso del material	Material
Mateo	Presencia de aire	Presencia de aire Peso Tamaño Material	Peso Material	Peso del material Presencia de agujeros por donde circula el agua	Peso del material Presencia de agujeros por donde circula el agua	Material
Alberto	NS	NS Peso Dureza Tamaño Material	Peso Tamaño Material	Peso	Peso	Peso Material
Álvaro	NS	NS Tamaño Material	NS Peso Tamaño Material	NS Peso	Peso	Peso Material

CONCLUSIONES

Uno de los objetivos que nos debemos plantear cuando se proponen actividades de ciencias en educación infantil es generar situaciones a través de las cuales los niños y las niñas se cuestionen sus propios modelos y los reformulen para acercarse a los que utiliza la ciencia escolar (Feu, 2009). Avanzar en la comprensión del porqué de la flotabilidad de los objetos puede parecer un tema excesivamente complejo para los niños y las niñas. Sin embargo, algunos trabajos mencionan que tienen una concepción intuitiva de la densidad que les permite hacer predicciones precisas sobre la flotabilidad de los objetos en el agua (Kohn, 1993). En este trabajo presentamos una propuesta en la que un grupo de niños trabaja la flotación mediante tareas experimentales utilizando la estrategia POE. La maestra interacciona con los niños planteando preguntas y fomentando que expresen sus ideas y predicciones, y que las justifiquen y discutan para después contrastarlas con las observaciones que han de ser de nuevo explicadas y discutidas.

En esta intervención se ha observado que, mientras que en las primeras actividades algunos no son capaces de justificar sus predicciones sobre la flotabilidad de algunos objetos, otros niños utilizan diferentes criterios como el tamaño, la dureza o el peso, que ya han sido referidos en otras investigaciones (Butts et al., 1993; Ioannides y Kakana, 2001; Paños et al., 2022; Piaget, 1934; Selley, 1993). Además, los niños utilizan diferentes criterios para cada uno de los objetos, cuestión a la que ya se ha hecho mención en otros estudios (Piaget, 1934; Shayer y Adey, 1984). En el transcurso de las actividades ocurrieron cambios significativos que nos permiten detectar modificaciones en los modelos de los niños y que señalan avances conceptuales ocurridos durante la implementación de la secuencia. Gradualmente, los niños fueron abandonando algunas de las explicaciones sobre la flotabilidad de los objetos basadas en criterios como la dureza, el tamaño y el peso para adoptar explicaciones en las que señalan el material como criterio determinante de la flotabilidad (tabla 2). Los resultados de este trabajo sugieren que los cambios se debieron a diferentes causas. A veces se abandonó un criterio porque la discusión entre ellos llevó a que se prestase atención a otras características de los objetos, como ocurrió en la POE 1 cuando Alberto deja de utilizar el criterio de la dureza para explicar la flotabilidad de los objetos. Otras veces cambiaron de criterio, al no ajustarse la observación con lo que pensaban que iba a suceder; por ejemplo, cuando Mateo puso a prueba la idea de que el tornillo flota debido a que es pequeño. En ocasiones, cambiaron de criterio porque adoptaron ideas de otro compañero o porque corroboraron una predicción de un compañero con la observación; por ejemplo, Álvaro adoptó el criterio del tamaño cuando se confirmó que el tornillo pequeño se hundía. Por otro lado, la discusión entre iguales sobre las experiencias dio lugar a intervenciones que supusieron cambios en la forma de pensar; por ejemplo, en la actividad final, en la que Mateo trató de convencer a los demás poniendo contraejemplos a la idea expresada por algunos compañeros de que la flotabilidad de los objetos dependía del peso: «Hay algunos objetos que son ligeros y no flotan, como el tornillo pequeño», indicó. En la actividad final de recapitulación de lo aprendido, las discusiones sobre los factores que pueden influir en la flotación de los objetos indican que los niños pudieron disociar la flotabilidad de los cuerpos de su tamaño, su dureza y su peso. Al finalizar la actividad, los niños utilizan ya ideas de un modelo precursor de la flotación que hace referencia al material del que están hechos los objetos para explicar la flotabilidad. Estos resultados apoyan los resultados de otros autores (Canedo-Ibarra et al., 2010; Koliopoulos et al., 2004), que encontraron que los niños de 5 a 6 años podían construir un modelo precursor de la flotación basado en un concepto intuitivo de densidad, considerando el tipo de material. También los estudios de Hsin y Wu (2011) y Kallery (2015) muestran cómo a través de actividades bien diseñadas los niños en edades tempranas llegan a entender que el material es un factor determinante en la flotación.

Una de las limitaciones de este trabajo se debe a su naturaleza cualitativa, que implica una muestra reducida de participantes y no puede dar lugar a generalizaciones. Sin embargo, conocer la naturaleza de las explicaciones y los modelos precursores que pueden llegar a construir los niños y las niñas sobre la flotabilidad de los objetos puede ayudar a los docentes a ser más eficaces en el diseño de actividades de ciencias en edades tempranas, en dar un mejor apoyo al alumnado y en adaptar la instrucción para una implementación más efectiva.

AGRADECIMIENTOS

RODA ED431C 2021/05 XUGA.

REFERENCIAS

Butts, D. P., Hofman, H. y Anderson, M. (1993). Is hands-on experience enough? A study of young children's view of sinking and floating objects. *Journal of Elementary Science Education*, *5*(1), 50-64.
https://doi.org/10.1007/bf03170644

Calo, M. N., García-Rodeja, I. y Sesto, V. (2021). Construyendo conceptos sobre electricidad en infantil mediante actividades de indagación. *Enseñanza de las Ciencias*, *39*(2), 0223-240.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3238

Canedo-Ibarra, S. P., Castelló-Escandell, J., García-Wehrle, P. y Morales-Blake, A. R. (2010). Precursor models construction at preschool education: An approach to improve scientific education in the classroom. *Review of Science, Mathematics and ICT Education*, *4*(1), 41-76.
https://doi.org/10.26220/rev.134

Chan, C., Burtis, J. y Bereiter, C. (1997). Knowledge building as a mediator of conflict in conceptual change. *Cognition and Instruction*, *15*(1), 1-40.
https://dx.doi.org/10.1207/s1532690xci1501_1

Costa, T. (2015). Influência da criação e crítica de analogias por estudantes de química do ensino médio na promoção de interações argumentativas [Tesis de doctorado]. Universidad Federal de Ouro Preto.

Cruz-Guzmán, M., García-Carmona, A. y Criado, A. M. (2017). Aprendiendo sobre los cambios de estado en educación infantil mediante secuencias de pregunta-predicción- comprobación experimental. *Enseñanza de las Ciencias*, *35*(3), 175-193. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2336

Denzin, N. K. y Lincoln, Y. S. (1994). *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, Sage Publications.

Eshach, H. (2003). Small-group interview-based discussions about diffused shadow. *Journal of Science Education and Technology*, *12*(3), 261-275.

Eshach, H. y Fried, M. N. (2005). Should science be taught in early childhood? *Journal of Science Education and Technology*, *14*(3), 315-336. https://dx.doi.org/10.1007/s10956-005-7198-9

Feu, M. T. (2009). Experimentar con materiales en el 0-6. *Aula de Infantil*, *52*, 7-10.

French, L. (2004). Science as the centre of a coherent, integrated early childhood curriculum. *Early Childhood Research Quarterly*, *19*, 138-149. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2004.01.004

Gelman, R. y Brenneman, K. (2004). Science learning pathways for young children. *Early Childhood Research Quarterly*, *19*, 150-158. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2004.01.009

Greca, I. M. y Moreira, M. A. (2000). Mental models, conceptual models, and modelling. *International Journal of Science Education*, *22*(1), 1-11. https://doi.org/10.1080/095006900289976

Harlen, W. (1989). *Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*. Morata.

Hsin, C. T. y Wu, H. K. (2011). Using scaffolding strategies to promote young children's scientific understandings of floating and sinking. *Journal of Science Education and Technology*, *20*(5), 656-666. https://doi.org/10.1007/s10956-011-9310-7

Inhelder, B. y Piaget, J. (1972). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Paidós.

Ioannides, C. y Kakana, M. (2001). Mental models of preschool children for the explanation of solid bodies floating and sinking in water [in Greek]. En K. Ravanis (Ed.), *Introducing Young Children to Science: Educational and Instructional Dimensions* (pp. 127-134). University of Patras.

Kallery, M. (2015). Science in early years education: introducing floating and sinking as a property of matter. *International Journal of Early Years Education*, *23*(1), 31-53. https://doi.org/10.1080/09669760.2014.999646

Kohn, A. S. (1993). Preschoolers' reasoning about density: Will it float? *Child Development*, *64*, 1637-1650. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.1993.tb04204.x

Koliopoulos, D., Tantaros, S., Papandreou, M. y Ravanis, K. (2004). Preschool children's ideas about floating: a qualitative approach. *Journal of Science Education*, *5*(1), 21-24.

Kuhn, D. y Pease, M. (2006). Do children and adults learn differently? *Journal of cognition and development*, *7*(3), 279-293. https://doi.org/10.1207/s15327647jcd0703_1

Lehrer, R., Schauble, L., Strom, D. y Pliggie, M. (2001). Similarity of form and substance. Modeling material kind. En M. Carver y D. Klahr (Eds.), *Cognition and instruction: Twenty-five years of progress* (pp. 39 -74). Erlbaum.

Martínez, R. (2007). *La investigación en la práctica educativa: Guía metodológica de investigación para el diagnóstico y evaluación en los centros docentes*. Ministerio de Educación.

Metz, K. (2004). Children's understanding of scientific inquiry: Their conceptualization of uncertainty in investigations of their own design. *Cognition and Instruction*, *22*, 219-290.

Palacios-Díaz, R. y Criado, A. (2016). Explicaciones acerca de fenómenos relacionados con el volumen de líquido desplazado por un sólido en inmersión, con la densidad y con la flotación, en alumnado de Educación Secundaria Obligatoria. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, *13*(2), 230-247. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=92044744001

Palaiologou, I., Male, T. y Needham, D. (2015). *Doing research in education: Theory and practice.* Sage.

Paños, E., Martínez, P. y Ruiz-Gallardo, J. R. (2022). La flotabilidad a examen en las aulas de infantil: evaluación del nivel de guía del docente. *Enseñanza de las ciencias*, *40(1)*, 161-177. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3281

Piaget, J. (1934). *La causalidad física en el niño*. Espasa-Calpe.

Pramling, N. y Pramling-Samuelson, I. (2001). It is floating «cause there is a hole»: A young child's experience of natural science. *Early Years*, *21*(2), 139-149.

Ravanis, K. (2000). La construction de la connaissance physique à l'age préscolaire: Recherchessur les interventions et les interactions didactiques. *Aster*, *31*, 71-94.

Ravanis, K., Koliopoulos, D. y Hadzigeorgiou, Y. (2004). What factors does friction depend on? A socio-cognitive teaching intervention with young children. *International Journal of Science Education*, *26*(8), 997-1007. https://doi.org/10.1080/0950069032000138851

Selley, N. (1993). Why do things float? A study of the place for alternative models in school science. *School Science Review*, *74*(269), 55-61.

Shayer, M. y Adey, P. (1984). *La ciencia de enseñar ciencias: desarrollo cognoscitivo y exigencias del currículo*. Narcea.

Smith, C., Carey, S. y Wiser, M. (1985). On differentiation: A case study of the development of the concepts of size, weight, and density. Cognition, *21*, 177-237. https://doi.org/10.1016/0010-0277(85)90025-3

Stake, R. E. (1994). Case Studies. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research*. Thousand Oaks, Sage.

Weil-Barais, A. (2022). What Is a Precursor Model? En J. M. Boileivin, A. Delserieys y K. Ravanis (Eds.), *Precursor models for teaching and learning science during early childhood* (pp. 11-32). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-08158-3_2

White, R. T. y Gunstone, R. F. (1992). *Probing Understanding*. The Falmer Press.

Yin, R. K. (2003). *Case study research. Design and methods*. Sage.

Constructing Precursor Models about Buoyancy of Solid Objects at Six Years of Age

Isabel García-Rodeja, Estefanía Vera Rodríguez Rouco
Dpto. de Didácticas Aplicadas. Universidade de Santiago de Compostela. Santiago de Compostela. A Coruña. España.
isabel.garcia-rodeja@usc.es, vera.rodriguezrouco@hotmail.com

María Lorenzo Flores
CPI de Toural. Vilaboa. Pontevedra. España.
maria.lorenzo.flores@edu.xunta.es

Vanessa Sesto Varela
IES A Pinguela. Monforte de Lemos. Lugo. España.
vanessa.sesto@edu.xunta.gal

Nowadays, there seems to be more and more consensus on the importance of carrying out science activities in early childhood education. This gives the opportunity to plan, predict or make inferences, which favors the cognitive development of children and allows an important progress in language. Nevertheless, these activities must be well designed. It is also known that, from an early age, children build their own mental models about the world around them, and they revise these models as they access new information. A precursor model is a mental model generated in the educational context that can be built under certain teaching conditions from an early age as a first step in the construction of more sophisticated models. An approach based on mental models is fruitful for observing the cognitive development of children. The design of well-planned teaching interventions, in which adequate empirical data are provided, is essential so that young children can develop precursor models.

This work aims at describing how a group of six-year-old children build precursor models on buoyancy through the analysis of the criteria they use in their explanations about why some objects float or sink during the implementation of a teaching intervention. The intervention intends children to build a precursor model of buoyancy based on an intuitive concept of density related to the material of which objects are made. The teaching intervention was designed considering a POE (predict-observe-explain) strategy. The participants were four six-year-old children. The teaching intervention consisted of six activities. The first one was an activity to explore ideas, there were four POE activities, and the last one was to recap what was learned. The teaching intervention was recorded in audio.

The results showed that, at the beginning of the teaching sequence, some young children were not able to justify their predictions about the buoyancy of some objects, while others used different criteria for each object such as size, hardness, or weight. Moreover, the children used different criteria for each object. As the activities were developed, significant changes emerged that allowed us to identify modifications in the mental models of the children and that indicate conceptual advances during the implementation of the teaching sequence. The children gradually gave up some of the explanations about the buoyancy of objects based on criteria such as hardness, size, and weight, and adopted explanations pointing to the material as the determining criterion of buoyancy. The results of this work suggest that the changes were due to different causes. Sometimes a criterion was abandoned because the discussion between peers led to attention being paid to other characteristics of the objects. On other occasions, they changed their criteria because the observation did not fit in what they thought was going to happen. Sometimes they changed their criteria because they adopted ideas from another classmate, or when they saw a prediction from a classmate corroborated with observation. On the other hand, the discussion among peers about the experimental activities gave rise to interventions that implied changes in their way of thinking. At the end of the teaching intervention, the children already use ideas from a precursor model of buoyancy that refer to the material of the objects.

We consider that knowing the nature of the explanations and precursor models that children can build about the buoyancy of objects can help teachers to be more effective in the design of science activities at an early age, in providing better support and in adapting teaching for a more effective implementation.