UN EJEMPLO DE APORTACIÓN DE LA DIDÁCTICA DE LA FÍSICA A LA ENSEÑANZA: LOS EJERCICIOS CUALITATIVOS Y LOS RAZONAMIENTOS FUNCIONALES

SALTIEL, E.
LDPES, Université Paris 7.

SUMMARY

Didactic specialists use exercises as a resource for research, whereas for teachers they are resources for teaching and evaluating. In most cases the evaluative exercises are of a quantitave type and the didactic value of the exercises of a qualitative type is not clearly shown. Starting from the analysis of the answers to exercises on the same subject but of different types, the author shows how important qualitative exercises are and how they can be used as resources for teaching and evaluating.

Los enseñantes de Física y los investigadores en didáctica de la Física emplean, en el marco de su trabajo, un mismo recurso: el ejercicio. Sin embargo, la misma palabra designa distintas entidades.

Para los didactas, los ejercicios son recursos de investigación que les permiten poner de manifiesto las tendencias generales del razonamiento de los alumnos y proporcionar una descripción organizada de las características de estos razonamientos. La experiencia indica que estos recursos pueden convertirse, fácilmente, en recursos para la enseñanza.

Para los enseñantes, los ejercicios cumplen, en principio, una doble función: recurso de enseñanza y recurso de control. En el primer caso permiten a los alumnos utilizar sus conocimientos, verificar que saben aplicarlos en situaciones análogas a las estudiadas en clase y, por último, comprobar que los han entendido bien; en el segundo permiten comprobar los conocimientos del alumno así como sus procedimientos. La experiencia (Johsua 1983, AA.VV 1982) muestra que, por la necesidad evidente de puntuar a los alumnos, el ejercicio tradicional es un recurso de control. Eso es así de manera tan evidente que en Francia la tarea principal del grupo Chapham ha sido elaborar ejercicios de control que sirvan a la vez de recursos para la enseñanza. El grupo espera modificar así, a partir de los ejercicios de control, la enseñanza de la Física en Francia.

Veremos, con un tipo de ejercicio muy particular, cómo es posible elaborar tales recursos, teniendo en cuenta resultados de investigación, *a partir de ejercicios tradicionales.*

1. EJERCICIOS CUALITATIVOS-EJERCICIOS CUANTITATIVOS

Numerosos estudios han insistido ya en las ventajas que tienen los ejercicios cualitativos respecto a los ejercicios cuantitativos. Estos últimos muestran la aptitud del estudiante en aplicar una fórmula. El cálculo permite muy a menudo escamotear la comprensión y no es por el hecho de aplicar una fórmula que un estudiante haya comprendido, forzosamente, la física del ejercicio. Por ejemplo en cinemática, cuando se da la velocidad v_a de un móvil y la velocidad de arrastre v_e, para determinar la velocidad relativa v_r de este móvil, le resulta fácil al estudiante aplicar la conocida fórmula $v_a = v_e + v_r$; pero todo permite afirmar que el estudiante no ha entendido que se trata de velocidades definidas en cierto sistema de referencia y la razón por la que están relacionads entre sí de este modo (Saltiel y Malgrange 1979).

Sólo me interesaré aquí por los ejercicios en que intervienen relaciones del tipo A = BC. Tal relación puede considerarse como:

– Una fórmula que permite calcular numéricamente una magnitud a partir del conocimiento de los valores numéricos de las otras dos: la relación tiene, en este caso, un contenido simplemente numérico,y llamaré al ejercicio correspondiente, ejercicio numérico cuantitativo (EQN).

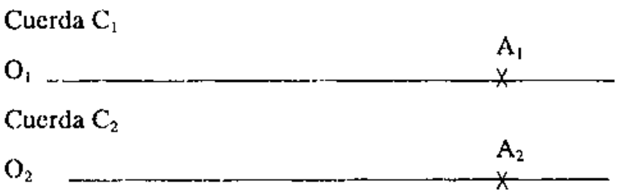
– Una relación entre tres magnitudes físicas que permite, en general, prever el sentido de la variación de una de ellas si se conoce el de las otras dos: la relación tiene entonces un contenido funcional (de ahí el nombre de ejercicio cualitativo «funcional» o variacional E Q F).

Ejercicio cualitativo funcional = recurso de enseñanza. Resultados con las ondas (Maurines, 1987)

Los dos cuestionarios siguientes se presentaron *uno tras otro* a 32 alumnos de terminal D (Curso preuniversitario), que habían estudiado las ondas.

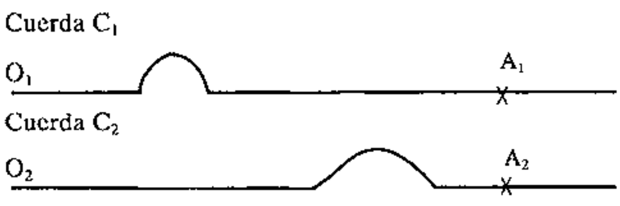
1. *Versión cualitativa*

Se colocan dos cuerdas diferentes en el suelo. En cada una de ellas se señala un punto: A_1 para la cuerda C_1 , A_2 para la cuerda C_2 .



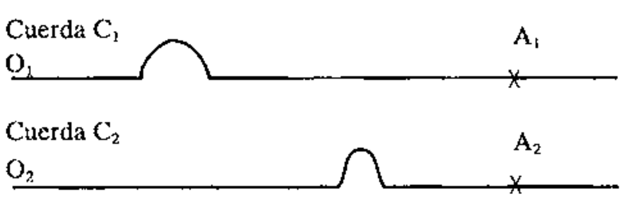
A. El extremo de cada una de las cuerdas (O_1 y O_2) está en manos de distintos alumnos. Cada uno de ellos mueve la mano levantándola en el mismo instante. Se observa que se desplaza en cada cuerda una cresta.

Lo que observan en el mismo instante es:



Cuestión: Comparar la duración del movimiento en A_1 y en A_2. Justificar la respuesta.

B. Los alumnos hacen de nuevo un movimiento de mano empezando a levantar la mano al mismo tiempo y observan las dos cuerdas en el mismo instante:



Cuestión: Comparar la duración del movimiento en A_1 y en A_2. Justificar la respuesta.

2. *Versión cuantitativa*

El mismo texto, añadiendo un detalle:

La velocidad, c_1, de la primera cuerda aquí representada es de 1 cm/s y la de la segunda cuerda, c_2 = 2 cm/s. La escala de la representción es 1cm: 1 cm.

Estos dos cuestionarios tratan idénticas situaciones físicas. En uno de ellos (versión cuantitativa) se dan valores numéricos que faltan en el otro (versión cualitativa).

Los resultados son los siguientes:

Tabla I

Situación A	V. cualitativa	V. cuantitativa
$T_1 = T_2$ (Resp. J.)	6%	59 %
$T_1 = T_2$	85 %	24 %
Situación B	**V. cualitativa**	**V. cuantitativa**
$T_2 < T_1$ (Resp. J.)	25 %	41 %
$T_2 < T_1$	53 %	40 %

a) Las justificaciones proporcionadas por los alumnos muestran que utilizan la relación $L = vT$ *únicamente* en la formulación cuantitativa *como recurso para el cálculo de cada una de las duraciones temporales*, y de ahí un porcentaje más alto de respuestas correctas en esta versión ($T_1 = T_2$ para la situación A y $T_2 < T_1$ para la B).

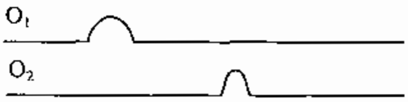
b) Los alumnos habían de razonar de manera «funcional», para responder a la versión cualitativa. En efecto, para cada señal tenemos $T = \frac{L}{V}$.

En la situación B, $v_2 > v_1$ y a partir del gráfico $L_2 = L_1$. Siendo L constante, T varía en sentido inverso a v, de donde $T_2 < T_1$.

La situación A es algo más delicada: en efecto, tanto v como L varían. Dado que $v_2 = 2\,v_1$ y $L_2 = 2\,L_1$, se deduce que $T_1 = T_2$.

Sin embargo, ningún alumno procede así. Los alumnos establecen únicamente dependencias funcionales entre dos magnitudes físicas (aquélla a que se refiere la cuestión, y otra magnitud, sea o no pertinente) como si existiera una relación binaria entre estas dos magnitudes.

Así, en la situación B:



– La respuesta $T_1 < T_2$ (50% de las respuestas) viene justificada en el 81% de los casos por $H_1 < H_2$, donde H_i es la amplitud de la señal i: los alumnos establecen una asociación entre T y la amplitud de la señal, relación que nunca se ha mencionado en clase; por el contrario, no mencionan nunca la velocidad.

–La respuesta correcta $T_1 > T_2$ (25% de las respuestas) es justificada en el 88% de los casos por $v_1 < v_2$: los alumnos, en este caso, establecen una asociación entre T y la velocidad de propagación, sin mencionar la longitud de onda L de la señal. Se puede pensar entonces que esta magnitud no mencionada está implícitamente fijada, de modo que, para esta situación, se tiene que $L_1 = L_2$: los alumnos no han considerado, quizás, la necesidad de precisar que L era constante. Los gráficos eran suficientemente explícitos. Examinemos, entonces, las respuestas a la situación A en la que las longitudes de las señales no son idénticas.

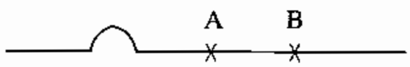
En la situación A, aunque sea visible en los gráficos que las longitudes y velocidades en las dos cuerdas son diferentes, los alumnos no mencionan más que dos magnitudes:

– La respuesta $T_1 < T_2$ (66% de respuestas), justificada en el 76% de casos por $L_1 < L_2$ y solamente por esto.

– La respuesta $T_1 > T_2$ (19% de respuestas), justificada en el 100% de casos por $v_1 < v_2$ y únicamente por esa razón.

Teniendo en cuenta estos resultados, es mucho más correcto afirmar que los alumnos no se preocupan en absoluto de la tercera magnitud. Esto concuerda con lo que otros investigadores (Viennot 1987, Michaud-Rozier 1987) han mostrado en otra parte: los alumnos fijan el número de variables deseado para manejar tan sólo relaciones entre dos magnitudes. Ocasionalmente, esta «fijación» puede desembocar en contradicciones o, más aún, ser contradictoria con el enunciado.

La cita que sigue se ha obtenido como respuesta a la cuestión en que se pedía comparar la duración del movimiento de dos puntos A y B situados en una misma cuerda durante la propagación de una señal cuya amplitud (o la altura) disminuye a lo largo del tiempo (Maurines 1986).



«Se insiste en que la onda es amortiguada pero su período permanece invariable.

Se sabe que $\lambda = cT$, donde λ es la longitud de onda.

$c = \frac{\lambda}{T}$, si la onda es amortiguada (la velocidad varía) y

si el período permanece invariable, se tendrá lógicamente $\lambda' < \lambda$; considerando c constante se tendrá, pues, $T_A > T_B$.»

El alumno establece las relaciones siguientes: $H\downarrow \rightarrow c\downarrow$; de donde $c\downarrow \rightarrow \lambda\downarrow$ para terminar con $\lambda\downarrow \rightarrow T\downarrow$, ¡entrando dos veces en contradicción y haciéndolo con el enunciado puesto que λ es constante!

Así, estas dos versiones permiten extraer dos conclusiones importantes para nuestro propósito:

–Los alumnos conocen la fórmula L (o λ) = vT y sólo la utilizan cuando disponen de valores numéricos.

– Cuando falta algún valor numérico, los alumnos utilizan relaciones binarias entre las magnitudes. No obstante, algunas de las relaciones utilizadas son erróneas. Por ejemplo: la relación entre la duración del movimiento de un punto en una cuerda y la amplitud de la señal o la relación entre la velocidad de propagación de una señal y su amplitud, jamás aprendidas en la escuela. Estas relaciones aparecen igualmente cuando los estudiantes explicitan la relación aprendida en el liceo, es decir L = vT.

El interés de tal tipo de ejercicio para el investigador es evidente; ¿puede utilizarlo el enseñante?

Ejercicio cualitativo funcional = recurso de control (Análisis de exámenes de primer curso de universidad)

El programa DEUG SSM de la Universidad París 7 (primer curso de universidad en carreras científicas) ha cambiado desde hace dos años: comprende una parte dedicada a una aproximación estadística a las propiedades de la materia: elementos de la teoría cinética de los gases; ley de Boltzman y estudio de algunos fenómenos de transporte (tiempo de colisión y recorrido libre medio; transferencia de cantidad de movimiento: viscosidad; transferencia de energía: conductividad térmica; transpoerte de partículas: difusión y transporte de carga: conductividad eléctrica).

En los exámenes de Junio y Septiembre de 1987, se propusieron diversos ejercicios y entre ellos las cuestiones siguientes:

a) Examen de Junio

Aplicaciones de la teoría cinética.

A) Se considera un recipiente indeformable de volumen V que contiene gas helio a la presión p y temperatuta T.

a) ¿Cómo varía la velocidad cuadrática media de los átomos y la presión si se dobla la temperatura?

b) ¿Cómo varían la temperatura y la presión si:
1) se dobla el número de átomos en el recipiente manteniendo la energía total que contiene
2) se dobla el número de moléculas manteniendo la energía media por átomo?

b) Examen de Septiembre

a) Un recipiente contiene un gas constituido por átomos de argón. La presión es de una atmósfera (10^5 Pascal) y la temperatura 27 °C.

1.a) Calcular el número de átomos por unidad de volumen en el recipiente así como la energía media y la velocidad cuadrática media de cada partícula.

1.b) ¿Cuál es la energía interna del gas por unidad de volumen?

2) ¿Cómo varían las respuestas a las anteriores cuestiones si: - la presión vale 10^{-6} atmósferas y la temperatura 27°C?

La diferencia entre ambos enunciados es muy clara; en uno (Septiembre) se facilitan valores numéricos; en el otro no (Junio).

Los resultados son previsibles tras lo que hemos visto antes; se resumen en la tabla II.

–Los razonamientos con una sola variable aparecen sólo en el examen de Junio: se encuentran, en efecto, relaciones binarias del tipo siguiente:

«Respuesta a la cuestión b1):

$$n' = 2n \quad pV = nkT \rightarrow T' = T/2$$

$$n' = 2n \quad pV = nkT \rightarrow p' = 2p$$ »

– Los razonamientos cualitativos, casi inexistentes en el examen de Septiembre, corresponden a respuestas para las que las fórmulas implícitas ocasionalmente utilizadas por el estudiante no son fáciles de encontrar. He aquí dos ejemplos:

– Doblando el número de moléculas mientras se conserva la energía media por átomo, la presión y la temperatura aumentan.

Y en otro examen:

– Si se dobla el número de moléculas manteniendo la energía media por molécula, la energía total se dobla, la temperatura dobla y la presión permanece constante.

Indicamos las conclusiones más destacadas de este análisis:

– Aunque las fórmulas a utilizar sean tan complejas en el examen de Junio como en el de Septiembre, la respuesta mayoritaria en Septiembre es una respuesta *correcta*, obtenida, en la mayoría de casos, mediante un cálculo numérico.

Tabla II

Examen	Nada	Resp. correcta	Resp. 1 variable	Resp. cualitativa
Junio (N = 76)**	20 %	18,5 %	51,5* %	21 %
Septiembre (N = 46)	28 %	70 %		2 %

* En este porcentaje aparecen los estudiantes que han contestado correctamente a la cuestión Aa, para lo que basta un razonamiento funcional con una sola variable, y que han respondido incorrectamente a las otras cuestiones o no lo han hecho.

** Esta cifra es baja, pues sólo conseguí, aproximadamente, las dos terceras partes de los exámenes.

En las respuestas, se encuentra:

– En Junio, respuestas correctas en las que aparecía un razonamiento funcional como éste: « $E = N\ 3/2\ kT$ con N, número de átomos. Si E = cte y $N = 2N_o$ con N_o número de átomos inicial, entonces la temperatura ha descendido a la mitad. Se tiene que $pV = NkT$. Dado que N_o ha doblado, pero T ha disminuido a la mitad, pV = cte, de donde p = cte.»

– En Septiembre, sólo el 20% de las respuestas correctas corresponde a un razonamiento funcional; el resto ha sido obtenido con ayuda de un cálculo numérico.

– Aunque puede aplicarse un razonamiento funcional en la prueba de Septiembre, es la vía numérica la elegida por la mayoría de estudiantes.

– En la prueba de Junio es imposible realizar un *cálculo numérico* puesto que no se facilita ningún valor numérico. El razonamiento funcional se utiliza poco (18,5%) pero se emplea en mayor medida que entre los alumnos del terminal D. Ello es debido, sin duda, a que los estudiantes de D E U G han realizado ejercicios de este tipo en las sesiones de trabajo dirigido, lo que no ha sido realizado por los alumnos de terminal.

Hemos definido lo que entendemos por ejercicio cualitativo funcional (E. Q. F.) y hemos visto que puede utilizarse en el control de los conocimientos; veamos ahora, con mayor precisión lo que se hace en la enseñanza y lo que podría hacerse.

2. LOS EJERCICIOS EN LA ENSEÑANZA

En la introducción hemos mencionado el hecho de que los ejercicios escolares, esencialmente, eran ejercicios de control; debemos precisar más.

A. Los ejercicios en la enseñanza actual

Todos los estudios existentes (Joshua, Chapham,...) muestran que el uso de ejercicios cualitativos en la enseñanza que se imparte en Francia es poco frecuente. Aquí, nos interesamos por un tipo muy particular de ejercicio cualitativo: aquél para el cual se precisa el contenido funcional de una relación entre magnitudes físicas.

Si se examinan los manuales franceses, se constata rápidamente que todos son parecidos. A título de ejemplo, he analizado los ejercicios de un manual de primero S y E, que se considera, correctamente, como un buen manual. Contiene 461 ejercicios agrupados por categorías en la siguiente tabla.

Esta tabla habla por sí misma: una mayoría aplastante de ejercicios es de tipo numérico (la fórmula aparece como un recurso de cálculo); por el contrario, los ejercicios

Tabla III

Tipo de ejercicios	Número	Porcentajes
Utilización numérica de una fórmula	(364)	79%
Demanda de fórmulas de modo literal, sin ningún tipo de razonamiento funcional	(15)	3%
Indicar si unas proposiciones son verdaderas o falsas. Explicar un fenómeno físico	(12) (19)	6,5%
Utilizar un método gráfico de resolución	(48)	10,5%
Razonamiento funcional	(3)	

que se refieren al contenido funcional de relaciones entre magnitudes físicas son casi inexistentes (dos por mil).

B.¿Ejercicio cualitativo funcional = recurso para la enseñanza?

Quisiera intentar convencerles ahora de que el E Q F no es tan sólo un recurso de control, sino también un buen recurso para la enseñanza, contrariamente al ejercicio numérico cuantitativo.

El ejercicio cualitativo funcional, como el ejercicio cuantitativo, es un instrumento de control que permite calificar a los alumnos con facilidad. Desde el punto de vista del control, no hay gran diferencia entre ambos tipos de ejercicios.

El ejercicio cuantitativo, por el contrario, sólo prueba en la mayoría de casos el conocimiento de una fórmula. No es en ningún caso un recurso de enseñanza como lo han mostrado los trabajos de L.Maurines: aunque un alumno responda correctamente a un ejercicio cuantitativo, puede dar, para *una misma situación física*, respuestas totalmente distintas a las obtenidas por cálculo. Está claro que ambos tipos de ejercicios no comprueban lo mismo.

Para ilustrar mi propósito, retomaré el ejemplo de las ondas. Recordemos brevemente el contenido de los programas franceses. Inicialmente se presentan numerosas experiencias de propagación de señales o de *vibraciones* (vibraciones en una cuerda, vibraciones longitudinales o transversales en un muelle, ondas en el agua), luego se trata el estudio de las ondas progresivas, de los fenómenos de interferencia y de la difracción. A propósito de la propagación de las vibraciones, las instrucciones pedagógicas mencionan que se tomarán en consideración medios en los que la velocidad de propagación o celeridad es constante. Se indica, también, que la velocidad de una vibración en una cuerda viene dada por $v = \sqrt{\frac{F}{m}}$ donde F es la tensión de la cuerda y m su masa lineal.

En resumen, antes de abordar el estudio de la difracción y las interferencias, los alumnos tienen a su disposición dos relaciones o «fórmulas»:

$$v = \sqrt{\frac{F}{m}} \quad \text{para una cuerda y}$$

$$\lambda \text{ (o L)} = vT \text{ para cualquier señal.}$$

Estas fórmulas tienen un significado físico considerable. En efecto, la primera significa que v depende sólo de F y de m y, además, que v *no depende* de la altura de la señal, de su forma, de la fuerza comunicada a la cuerda en el instante de formación de la señal... La segunda significa que v depende de l y de T, pero, a la vez, que no depende de la altura de la señal, ni de... Ahora bien, todas estas *no dependencias* incluídas en la fórmulas citadas (pero no de forma explícita) son consideradas por los alumnos como dependencias: L.Maurines ha mostrado claramente que los alumnos creaban relaciones binarias entre variables no pertinentes.

Así, un E Q F permite hacer consciente al alumno del tipo de asociación que establece y que no ha entendido correctamente la física del ejercicio: la velocidad de propagación es constante a lo largo del tiempo, con F y m fijadas, y no depende de la fuerza comunicada por la fuente, de la amplitud de la señal,etc Está claro que los ejercicos cuantitativos no pondrán jamás en evidencia estas dependencias, pues los alumnos nunca aprenden una fórmula en la que, por ejemplo, v esté relacionada con la amplitud H de la señal.

Los EQF permiten, por tanto, poner de manifiesto relaciones binarias entre magnitudes y, ocasionalmente, encadenamientos de relaciones que conducen a contradicciones. Hemos visto ya un ejemplo con las ondas; son bien conocidos los encadenamientos encontrados por Piaget (1972) del tipo: «más rápido → más lejos; más lejos → más tiempo; y por tanto más rápido → más tiempo».

Los EQF son fáciles de preparar. Retomemos el ejemplo de las ondas: además de las situaciones propuestas en este artículo, se puede estudiar la propagación del sonido o de la luz en dos medios diferentes y proponer cuestiones acerca de λ o de T indicando el sentido de variación de la velocidad y de otra magnitud (T o λ) cuando se pasa de un medio a otro.

3. CONCLUSIÓN

Mi conclusión será breve porque casi todo ha sido expuesto a lo largo del artículo.

Creo haber mostrado que los ejercicios cualitativos «funcionales» son a la vez recursos de enseñanza y de control. Puede plantearse una última cuestión: ¿es realista introducir tales ejercicios en la enseñanza?

La respuesta es sí en lo que respecta a los alumnos. Los trabajos de Piaget acerca de la relación $x = vt$ muestran que a un adolescente le resulta posible superar las dificultades vinculadas con el contenido funcional de esta relación. Por tanto, creo que cuanto antes se aborde este problema, más fácil será su resolución.

La respuesta es sí en lo que concierne a los programas, la introducción de este tipo de ejercicos no precisa necesariamente de un cambio de programa: basta con insistir a lo largo del curso en el contenido funcional de las relaciones en juego, en el significado físico de estas relaciones, en hacer variar dos magnitudes manteniendo constante la tercera, etc

No puedo dar la respuesta en lo se refiere a los enseñantes y a la administración educativa. Creo que es suficiente con el hecho de que los objetivos y las motivaciones cambian... Esto es otra historia.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a C. Breuillard, C. Guthmann y B. Roulet la amabilidad de facilitarme exámenes de los alumnos.

NOTA

Artículo traducido por Jordi Roig.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

JOHSUA, S.,1983. Contrôle de connaissances de second cycle et nouveaux programmes de physique, *Revue française de pédagogie, 64*.

MAURINES, L.,1986. *Premières notions sur la propagation de signaux mécaniques: étude des difficultés des étudiants*. Thèse Université Paris 7.

MAURINES, L.,1987. «Premières notions sur la propagation des signaux mécaniques: analyse et difficultés des étudiants». Congrès S.F.P. Strasbourg.

MICHAUD-ROZIER, S., 1987. Congrès S F P. Strasbourg.

PIAGET, J.,1972. *Epistémologie du temps. Etudes d'épistemologie génétique*. Tome XXI. (PUF. Paris).

SALTIEL, E. y MALGRANGE, J.L.,1979. Les raisonnements naturels en cinématique élémentaire, *B U P*. 616.

VIENNOT, L., 1987. «Raisonnement fonctionnel à plusiers variables: difficultés et échappatoires courants». Congrès S F P. Strasbourg.