Universitat Autònoma de Barcelona - Universitat de València
ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS 44-3 (2026), 147-166
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6456
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

© del autor

Planificar lecciones de función cuadrática con una trayectoria hipotética de aprendizaje

Planning Quadratic Function Lessons With a Hypothetical Learning Trajectory

María Fernanda Mejía-Palomino
Facultad de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Cali, Valle del Cauca, Colombia
maria.fernanda.mejia@correounivalle.edu.co
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0267-5856

Ceneida Fernández Verdú
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante, San Vicente del Raspeig, Alicante, España
ceneida.fernandez@ua.es
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4791-9247

Andrea Cárcamo Bahamonde
Facultad de Ciencias de la Ingeniería, Universidad Austral de Chile, Valdivia, Región de los Ríos, Chile
andrea.carcamo@uach.cl
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5782-3479

Diego Garzón Castro
Facultad de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Cali, Valle del Cauca, Colombia
diego.garzon@correounivalle.edu.co
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7553-6705

RESUMEN • El objetivo de este estudio es explorar qué decisiones toman dos futuros profesores de matemáticas (FPM) al usar una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) en el diseño de una lección sobre función cuadrática y el rediseño tras su implementación. El estudio tiene un enfoque cualitativo de generación de categorías (análisis inductivo). Los resultados muestran que los FPM decidieron usar las actividades de aprendizaje de la THA al planificar lecciones con cambios centrados en: características de los artefactos y eliminación/incorporación de algunas preguntas específicas. Además, los FPM anticiparon dificultades, errores y acciones de los estudiantes respecto a la resolución de las actividades de aprendizaje reflexionaron sobre el proceso de aprendizaje hipotético de la THA. En esta práctica docente, la THA fue un recurso curricular que apoyó la planificación de lecciones.

PALABRAS CLAVE: Trayectoria hipotética de aprendizaje; Función cuadrática; Formación inicial de profesores; Planificación de lecciones; Mirar curricularmente.

ABSTRACT • The aim of this study is to explore the decisions made by two prospective Mathematics teachers (PMTs) when using a hypothetical learning trajectory (HLT) to design a lesson on the quadratic function and redesign it after implementation. The study adopts a qualitative approach based on category generation through inductive analysis. The results show that the PMTs retained the HLT learning activities while modifying artifact characteristics and removing or adding specific questions. They also anticipated students' difficulties, errors and actions when solving the activities and reflected on the hypothetical learning process proposed in the HLT. During this teaching internship, the HLT was used as a curriculum resource that supported lesson planning.

KEYWORDS: Hypothetical learning trajectory; Quadratic function; Prospective teacher education; Lesson planning; Curricular noticing.

Recepción: abril 2025 • Aceptación: septiembre 2026 • Publicación: noviembre 2026

Mejía-Palomino, M. F., Fernández Verdú, C., Cárcamo Bahamonde, A. y Garzón Castro, D. (2026). Planificar lecciones de función cuadrática con una trayectoria hipotética de aprendizaje. *Enseñanza de las Ciencias, 44*(3), 147-166.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6456

INTRODUCCIÓN

La competencia docente mirar profesionalmente es fundamental en la formación de profesores de matemáticas, ya que les permite dar sentido a las actividades de aprendizaje de las matemáticas (Fernández et al., 2018; Jacobs y Spangler, 2017). Esta competencia se vincula con las prácticas profesionales del profesor de matemáticas como analizar el pensamiento matemático de los estudiantes, planificar una lección o gestionar el discurso matemático en el aula (Llinares, 2019). La mayoría de las investigaciones recientes sobre la mirada profesional (Dindyal et al., 2021; Weyers et al., 2024) se centran en cómo los profesores miran el pensamiento matemático de los estudiantes en diferentes dominios matemáticos, existiendo menos investigaciones en la práctica profesional de planificar lecciones.

Al planificar lecciones los docentes deben diseñar o seleccionar actividades en coherencia con los objetivos de aprendizaje, anticipar posibles respuestas de los estudiantes y reflexionar sobre el tipo de evaluación (Moreno y Llinares, 2018). Por tanto, en esta práctica es relevante cómo los profesores interactúan con los recursos curriculares. Con este foco, la competencia mirar curricularmente (en inglés, *curricular noticing*; Amador et al., 2017) se centra en la forma en que los profesores le dan sentido a la complejidad del contenido y las oportunidades pedagógicas de los recursos curriculares (Dietiker et al., 2018).

Los recursos curriculares son herramientas que apoyan los diseños instruccionales (Remillard, 2013). En particular, las trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA) son recursos curriculares porque determinan actividades de aprendizaje útiles en la planificación e interacción en el aula (Remillard, 2013), se construyen con la revisión de otros recursos curriculares (Cárcamo y Fuentealba, 2023) y brindan oportunidades para aprender (Rezat, 2024).

Son diversos los estudios que han explorado el uso de las THA en los programas de formación inicial o continua de profesores. Algunas investigaciones se han centrado en la planificación de lecciones utilizando THA. Por ejemplo, Wilson et al. (2015) analizaron cómo profesores de primaria utilizaban THA para promover prácticas de instrucción centradas en el estudiante, mientras que Edgington (2014) identificó tres niveles de uso de una THA (inicial, intermedio, competente) respecto a la elección de actividades de aprendizaje, las posibles acciones de los estudiantes y elección de objetivos de aprendizaje.

Más recientemente, Llinares et al. (2026) analizaron cómo futuros maestros de educación primaria interpretaban una secuencia de actividades de un libro de texto, identificando limitaciones, usando como apoyo una THA sobre el aprendizaje del concepto de fracción como parte-todo. Además, analizaron cómo estos futuros maestros de educación primaria completaban la secuencia de actividades teniendo en cuenta las limitaciones identificadas.

Además, se ha investigado el uso de THA para desarrollar otras competencias en la formación de profesores. Wilson et al. (2013) exploraron cómo el uso de una THA sobre números racionales permitió a profesores de primaria crear modelos del pensamiento matemático para explicar y predecir la actividad de los estudiantes. Wilson et al. (2014) analizaron el desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de profesores de primaria al usar una THA sobre equipartición. Ivars et al. (2020) mostraron que una THA sobre fracciones permitió a futuros maestros de primaria mirar profesionalmente el pensamiento matemático de sus estudiantes y les proporcionó un conocimiento específico que fundamentó su discurso para interpretar y decidir. Wilson et al. (2017) examinaron los cambios en el discurso de profesores al usar una THA para centrarse en el pensamiento matemático de estudiantes. Wickstrom y Langrall (2020) distinguieron en la revisión de literatura seis usos de las THA por parte de profesores: evaluar a los estudiantes, atender el pensamiento de los estudiantes, proporcionar una diferenciación adecuada en la instrucción, diseñar y cambiar tareas matemáticas, elegir objetivos de aprendizaje adecuados y relacionar los objetivos de las lecciones con objetivos curriculares.

A pesar de estos avances, es necesario comprender las acciones (decisiones) específicas que realizan los profesores al usar THA durante la planificación, implementación y evaluación de lecciones (Edgington, 2014; Wilson et al., 2013) ya que la práctica profesional de planificar lecciones usando THA como recurso curricular ha sido poco estudiada.

La función cuadrática fue escogida como contenido matemático para la THA debido a su importancia en la educación secundaria y media de Colombia (estudiantes entre los 12 y los 17 años). Este concepto es la entrada al estudio de funciones polinómicas y se vincula con problemas en contextos matemáticos y de otras disciplinas (González-Polo y Castaneda, 2024; Ministerio de Educación Nacional, 2016).

Nuestro estudio examina las decisiones que toman dos FPM al usar una THA sobre función cuadrática como recurso curricular para planificar lecciones.

MARCO TEÓRICO

Trayectorias hipotéticas de aprendizaje

Una THA es un modelo teórico compuesto por un objetivo de aprendizaje, actividades de aprendizaje y un proceso de aprendizaje hipotético (Simon, 1995; 2020). El objetivo de aprendizaje delimita la profundidad de enseñanza del concepto matemático en un tiempo previsto. En la construcción de una THA, el objetivo antecede y orienta la elaboración de los otros dos componentes (Cárcamo y Fuentealba, 2023). Las actividades de aprendizaje son problemas o preguntas que el estudiante resolverá. El proceso de aprendizaje hipotético es una predicción de cómo se desarrollará el aprendizaje de los estudiantes al interactuar con las actividades de aprendizaje propuestas.

El enfoque teórico para la construcción de nuestra THA sobre función cuadrática fue la heurística de diseño instruccional de los modelos emergentes. Este enfoque parte de un modelo de actividad matemática informal con un contexto significativo para los estudiantes que involucra sus conocimientos matemáticos previos para luego transitar hacia un modelo de razonamiento matemático formal (Cárcamo y Fuentealba, 2023; Gravemeijer, 1999). Además, en el análisis de libros de texto de Colombia, se observó que las actividades incorporan representaciones matemáticas (verbal, numérica, algebraica y gráfica) y proponen el uso de calculadoras gráficas o GeoGebra para el estudio de las gráficas de funciones. Nuestra THA sobre función cuadrática se presentará en el método.

Los aspectos centrales en la construcción de la THA, se sustentan en investigaciones previas sobre la enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática y fueron: *a*) el uso de contextos reales y geométricos, situados en experiencias concretas y cercanas a los estudiantes, que posibilitan el tránsito desde lo informal hacia lo formal (Azizah et al., 2021; González-Polo y Castaneda, 2024; Gravemeijer, 1999); *b*) la incorporación de entornos digitales que favorecen la exploración, la visualización y el análisis de la variación a través de distintas representaciones matemáticas (Bohrer y Tinti, 2021; González-Polo y Castaneda, 2024); *c*) la comprensión de la variable mediante el paso de variables discretas (asociadas al cálculo manual de áreas) hacia variables continuas expresadas en valores decimales (Ramírez et al., 2022); *d*) el establecimiento de conexiones entre diversas representaciones matemáticas (verbal, numérica, gráfica y algebraica) que articulan progresivamente los significados de la función cuadrática (González-Polo y Castaneda, 2024; Niss, 2020); y *e*) la generalización mediante el uso de distintas representaciones matemáticas hasta la obtención de expresiones algebraicas que formalizan la función cuadrática (Kalchman y Koedinger, 2005; Niss, 2020).

La competencia mirar curricularmente

La competencia mirar curricularmente implica que los profesores den sentido a la complejidad del contenido y a las oportunidades pedagógicas de los recursos curriculares (Dietiker et al., 2018). Nuestro estudio analiza cómo los FPM aprovechan las oportunidades de la THA dada para diseñar y rediseñar una lección.

Las investigaciones sobre la competencia mirar curricularmente en profesores se centran en cómo analizan programas curriculares, libros de texto o actividades de aprendizaje (Amador, 2019; Ivars y Fernández, 2023; Lee y Lee, 2025; Males y Setniker, 2019; Parrish et al., 2023; Qi et al., 2025). Por ejemplo, Lee y Lee (2025) analizaron la competencia mirar curricularmente de futuros profesores de primaria al resolver, explicar el razonamiento matemático involucrado y secuenciar tres problemas sobre patrones. Kang (2022) estudió cómo los profesores planifican, implementan y reflexionan sobre actividades de modelación, mientras que Zorrilla et al. (2024) exploraron cómo los futuros profesores de primaria miran curricularmente una secuencia de actividades de un libro de texto acerca de fracciones usando una THA. Qi et al. (2025) realizaron un Lesson Study de tres ciclos, centrado en aprendizaje basado en proyectos, para analizar la competencia de mirar curricularmente de seis profesores de matemáticas de secundaria en China al usar libros de texto. Encontraron que los profesores pasaron de una mirada curricular fragmentada a una más cohesiva al integrar los principios del aprendizaje basado en proyectos en sus adaptaciones de los libros de textos.

Esta competencia se ha conceptualizado a partir de tres destrezas, atender, interpretar y decidir. Atender es reconocer la información que los recursos curriculares ofrecen sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; interpretar es darle sentido a lo atendido en relación con el conocimiento profesional y la experiencia; y decidir es la toma de decisiones con relación a los recursos curriculares (Dietiker et al., 2018). En nuestro estudio, decidir constituye el foco de análisis. En particular, se analiza la habilidad de decidir de la competencia mirar curricularmente.

El objetivo de esta investigación es examinar las decisiones que toman los FPM al diseñar una lección con el uso de una THA sobre función cuadrática y al rediseñarla tras la implementación con estudiantes de educación media de Colombia (con edades entre los 15 a los 17 años). En particular, las preguntas de investigación son:

1. ¿Qué decisiones toman los FPM sobre el recurso curricular proporcionado (THA) al diseñar una lección sobre función cuadrática?
2. ¿Qué decisiones toman los FPM sobre el recurso curricular proporcionado (THA) al rediseñar una lección sobre función cuadrática tras su implementación?

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes fueron dos FPM de los últimos semestres del programa de licenciatura en matemáticas de la Universidad del Valle. La recolección de los datos se realizó en su práctica docente, que comprendió ocho sesiones virtuales o presenciales, de dos a cinco horas. Se solicitó a los FPM que planificaran una lección sobre función cuadrática usando una THA, que la implementaran y la rediseñaran. Los FPM no habían usado THA; la nuestra se introdujo como recurso curricular para planificar.

La participación de los FPM fue voluntaria, dieron su consentimiento informado al inicio de la investigación. Para preservar la confidencialidad, se asignaron letras a cada participante y se omitieron datos que comprometan su identidad.

Los FPM implementaron la lección diseñada en una sesión de cinco horas con un grupo de 29 estudiantes de grado undécimo (educación media), con edades entre los 15 y los 17 años, pertenecientes a la Escuela Normal Superior Farallones de Cali.

Instrumentos de recolección de datos

La práctica docente de los FPM comprendió tres fases: diseño, implementación y rediseño de una lección. En esta investigación, nos centramos en la planificación de lecciones (diseño y rediseño tras la implementación), sin incluir el análisis de los momentos de aula durante la implementación. Esta delimitación responde al objetivo de nuestro estudio. Por tanto, los datos fueron obtenidos en dos documentos escritos (diseño y rediseño de una lección) y entrevistas semiestructuradas (tabla 1).

Tabla 1.
Fases de diseño y de rediseño

Fase	*Descripción*	*Instrumentos de recolección de datos*
Diseño	Los FPM diseñaron una lección con el uso de una THA sobre función cuadrática.	1. Entrevista semiestructurada sobre el análisis de la THA. 2. Documento con el diseño de una lección. 3. Entrevista semiestructurada sobre la lección diseñada.
Rediseño	Los FPM rediseñaron la lección tras la implementación.	1. Entrevista semiestructurada sobre la implementación de la lección. 2. Documento con el rediseño de la lección. 3. Entrevista semiestructurada sobre el rediseño de la lección.

Las entrevistas semiestructuradas (tabla 1) tuvieron como objetivo conocer las evidencias o justificaciones de los FPM del diseño y rediseño de una lección sobre función cuadrática con una THA. Se efectuaron preguntas enfocadas en cinco aspectos que surgieron tras un primer análisis los documentos escritos de los FPM: (1) posibles dificultades en el desarrollo de las actividades de aprendizaje, (2) valoración de los artefactos usados y su contribución a la construcción del pensamiento matemático, (3) pertinencia del objetivo de aprendizaje propuesto, (4) pertinencia del proceso de aprendizaje hipotético propuesto e (5) idoneidad de las actividades de aprendizaje planteadas.

En la tabla 2 se presenta la THA sobre función cuadrática. Esta THA se fundamenta en los principios desarrollados en la subsección Trajectorias hipotéticas de aprendizaje del Marco teórico. La THA fue entregada y presentada a los FPM como recurso curricular para la planificación de lecciones sobre función cuadrática.

Tabla 2.
THA sobre función cuadrática

Objetivo de aprendizaje: Usar e interpretar diferentes representaciones de la función cuadrática para resolver un problema en contexto	
Actividad de aprendizaje (AA)	*Proceso de aprendizaje hipotético (Gravemeijer, 1999)*
AA1. Elaborar un cerco rectangular para delimitar una huerta. En esta actividad se simula el cerco rectangular con una cuerda amarrada extendida con los dedos. Preguntas: Para la construcción del cerco se tiene una malla de 20 metros. ¿Cuáles son los posibles cercos que se pueden construir? ¿Cuál de estos cercos abarca más terreno?	*Nivel situacional:* Los estudiantes construyen inicialmente el significado de la relación entre perímetro, lados y área mediante la manipulación de una cuerda que representa un cerco rectangular. Al producir distintos rectángulos con perímetro fijo, comparan medidas y superficies, activan conocimientos previos de área y perímetro, y comienzan a reconocer que modificar los lados cambia el área, aunque el perímetro permanezca constante.
AA2. Exploración de la construcción de la familia de rectángulos isoperímetros. En GeoGebra se explora la construcción de rectángulos que varían al mover el punto C del segmento AB (deslizador). Preguntas: Determine 2 rectángulos con perímetro igual a 20, diferentes a los que encontró en la primera actividad. Observa los valores del área cuando se mueve el punto C ¿Cuál de estos rectángulos tiene mayor área? ¿Cuáles son las medidas de la base y la altura de este rectángulo? ¿Coincide con el rectángulo de mayor área de la primera actividad? ¿Cuál es la expresión general para el área de estos rectángulos con perímetro fijo 20, respecto a su base?	*Nivel referencial:* Los estudiantes amplían la exploración concreta mediante GeoGebra, interpretando el movimiento del punto C como una forma de generar una familia de rectángulos con perímetro fijo. Al observar medidas decimales, tablas y variaciones simultáneas de base, altura y área, pasan de casos particulares a reconocer una dependencia funcional y a expresar el área en términos de la base.
AA3. Análisis de la traza del punto I. En GeoGebra se explora un archivo que contiene la construcción de la AA2 pero que se agrega el plano cartesiano y un punto I que genera una traza al mover el punto C del segmento AB. Preguntas: Observe el punto I, mueva el punto C ¿Cuáles son las coordenadas del punto I? ¿Cómo es la trayectoria del punto I cuando se mueve el punto C? ¿Dónde se ubica el punto I cuando se obtiene el rectángulo de mayor área? ¿Cuáles son las características del rectángulo de mayor área? ¿Dónde se ubica el punto I cuando se obtiene el rectángulo de menor área? ¿Cuáles son las características del rectángulo con menor área? Determine un par de rectángulos con igual área, ¿cuáles son las características de estos rectángulos?	*Nivel general:* Los estudiantes reinterpretan la traza del punto I como una representación gráfica de la relación entre base y área. Al coordinar el rectángulo dinámico con las coordenadas del punto I, identifican que cada punto representa un rectángulo posible. Desde esta relación, analizan crecimiento, decrecimiento, máximo, mínimo contextual e igualdad de áreas, avanzando hacia una comprensión global de la función cuadrática.
AA4. Gráfica de la expresión algebraica del área vs la base de los rectángulos isoperimétricos. En GeoGebra se explora un archivo que contiene la construcción de la AA3, pero se agrega la gráfica de la función cuadrática que relaciona un lado y el área de los rectángulos. Preguntas: Realicemos la gráfica de la expresión algebraica del área con respecto a la base y compárela con la trayectoria del punto I. ¿Por qué el punto I no genera un trazo en los cuadrantes III y IV del plano cartesiano? Si se desea modificar la longitud del cerco de la malla a 40 metros, ¿cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo 40 metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base de su rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo 40? Si la longitud del cerco de la malla es n metros ¿Cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo n metros? ¿Cómo es la gráfica del área respecto la base de su rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo n?	*Nivel formal:* Los estudiantes formalizan la relación construida al comparar la traza del punto I con la gráfica de $A(x)=x(10-x)$. Interpretan las restricciones del contexto, especialmente que las medidas deben ser positivas, y generalizan el modelo a perímetros distintos (n), hasta obtener $A_n(x)=x(n/2-x)$. Comprenden la función cuadrática como modelo algebraico y gráfico de la variación del área.

Análisis

Se realizó un análisis cualitativo de los aspectos de la THA que consideraron los FPM al diseñar y rediseñar una lección sobre función cuadrática. El análisis se realizó en dos fases. En la primera fase, se examinaron los documentos escritos para determinar los aspectos de la THA que usaron y cambiaron en el diseño y rediseño de una lección (identificar las decisiones).

En la segunda fase, se revisaron las transcripciones de las entrevistas semiestructuradas para conocer las evidencias o justificaciones de las decisiones tomadas en el diseño y rediseño de una lección. En las transcripciones se usaron I para la investigadora, J y M para los FPM y (…) para palabras omitidas. Con el MAXQDA 2020, cada segmento de audio fue codificado de manera abierta.

Los datos de las dos fases se analizaron de manera inductiva (Strauss y Corbin, 1990) para generar categorías, con el objetivo de identificar los aspectos de la THA que consideraron en sus planificaciones. Estas categorías fueron discutidas por cuatro investigadores (triangulación de categorías) hasta alcanzar un consenso, lo que permitió asegurar la confiabilidad del análisis. Las categorías que emergieron fueron: (1) características de los artefactos, (2) eliminación/incorporación de preguntas específicas y (3) anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes.

RESULTADOS

Ambos FPM decidieron usar la secuencia de actividades proporcionadas en la THA para diseñar su lección sobre función cuadrática. Sin embargo, ambos FPM plantearon cambios en la secuencia de actividades de aprendizaje, tanto en el diseño de su lección como en su rediseño tras la implementación. Estos cambios están relacionados con: las características de los artefactos, es decir, con la selección y modos de uso de los materiales concretos y GeoGebra para representar objetos matemáticos; y la eliminación/incorporación de algunas preguntas específicas en las actividades de aprendizaje. La tabla 3, resume los cambios propuestos en la secuencia de actividades de aprendizaje de la THA, en el diseño y rediseño de una lección.

Además, los FPM anticiparon dificultades, errores y acciones de los estudiantes en sus planificaciones. Las anticipaciones en el diseño corresponden a predicciones formuladas por los FPM antes de implementar la lección, mientras que las segundas se anticipaciones en el rediseño se fundamentan en la experiencia de aula y surgen de las reelaboraciones realizadas tras la implementación. La tabla 4 resume las anticipaciones de las dificultades, errores y acciones propuestas por los FPM en el diseño y rediseño de una lección.

Tabla 3.
Cambios de las AA de la THA

Categorías	*Cambios propuestos en la AA*	
	Diseño de una lección	*Rediseño de una lección*
Características de los artefactos	Adición de materiales concretos (cartón con fondo cuadriculado, cintas métricas, etc.) para construir los cercos rectangulares con la cuerda.	Descripción detallada del uso de materiales concretos.
	Adición de elementos gráficos en GeoGebra para simular una finca.	Ocultación de la hoja de cálculo en GeoGebra en las AA2 y AA3.
		Presentación visual (cambios en tamaño de texto y colores) en GeoGebra.

Categorías	*Cambios propuestos en la AA*	
	Diseño de una lección	*Rediseño de una lección*
Eliminación/ Incorporación de preguntas	Adición de pregunta sobre procedimientos de área y perímetro.	Eliminación de algunas preguntas (ej. sobre perímetro y área).
	Inclusión del caso con perímetro 64.	Adición de tablas y figuras.
		Inclusión de preguntas guía para llegar a la representación algebraica de la función cuadrática.

Tabla 4.
Anticipación de dificultades, errores y acciones

Categoría	*Diseño de una lección*	*Rediseño de una lección*
Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes	Reconocimiento del cuadrado como rectángulo.	Obtención de la representación algebraica de la función cuadrática.
	Uso de escala al usar y medir la cuerda.	Significado de la letra como variable.
	Interpretación de coordenadas del punto I de la parábola.	Relación entre movimiento del punto C con los cambios en el área de los rectángulos.
	Generalización, obtención de la representación algebraica de la función cuadrática.	Reconocimiento de la relación perímetro y área.

A continuación, se ejemplifican las decisiones de los FPM al usar una THA en el diseño y el rediseño de una lección sobre función cuadrática.

Diseño de una lección

Características de los artefactos

Los FPM incorporaron materiales concretos: una cuerda, un cartón con fondo cuadriculado, cintas métricas, cinta pegante y chinches (figura 1, tabla 5) a la secuencia de actividades de aprendizaje de la THA. Esta incorporación respondió a la necesidad de mejorar las representaciones de los rectángulos. Además, los FPM al manipular la cuerda, consideraron que extenderla con los dedos impedía medir sus lados y precisar sus vértices. Por lo que, J señaló:

J: el cartón con la cinta métrica es para que ellos puedan medir. Pero esperamos que ellos hagan la escala de veinte metros a veinte centímetros. (…) La cinta es para que ellos puedan unir los dos tramos de la cuerda y quede (…) unida y puedan con los chinches hacer la forma de rectángulo.

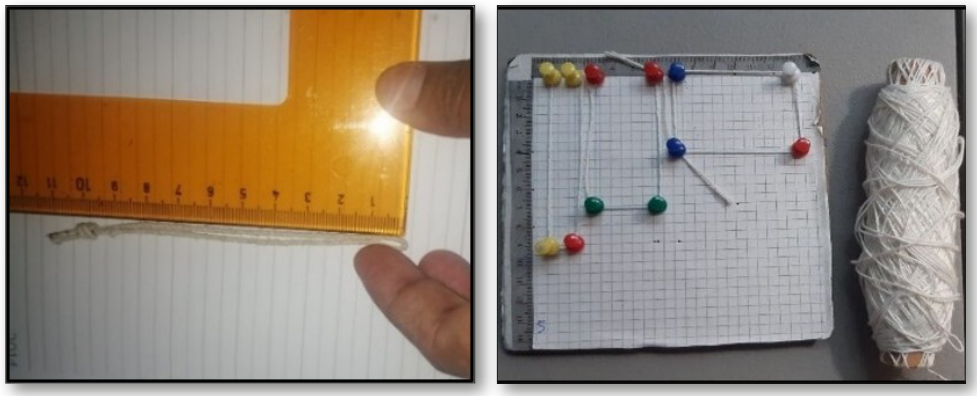


Fig. 1. Materiales concretos de la THA (izquierda) y materiales concretos incorporados (derecha)

Tabla 5.
Cambios de la AA1 en el diseño de una lección subrayados

Actividad de aprendizaje
1. Un cerco rectangular para delimitar una huerta. Para determinar los vértices del rectángulo, se usan chinches sobre un cartón. El cartón tiene en sus bordes una cinta métrica, para facilitar hallar la medida del alto y ancho del rectángulo. Pregunta: En la finca La hermosa, se necesita construir un cerco rectangular con una malla de 20 metros (archivo 1.ggb). 1.1. Usando una cuerda para simular el cerco de la huerta, determine ¿Cuáles son los posibles cercos rectangulares que se pueden construir?

También, los FPM extendieron el contexto a todas las actividades de aprendizaje de la THA, para darle sentido a la construcción del conocimiento matemático formal sobre función cuadrática (tabla 5). Ellos agregaron elementos gráficos en GeoGebra que simulaban la vista frontal de una finca (figura 2). Al respecto, el siguiente diálogo:

> J: habíamos hecho la propuesta que se extendiera el contexto porque sólo se toma (…) como referente (…) en la primera actividad. (…) se perdía el rumbo al pasar a una matemática más formal.

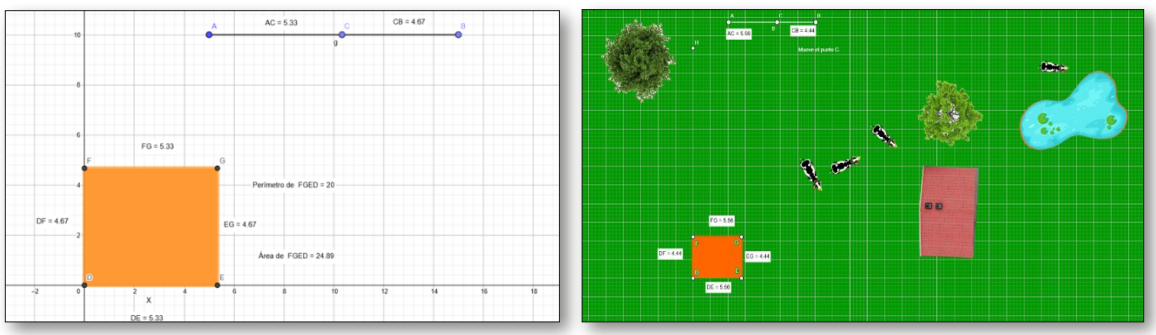


Fig. 2. Fondo de GeoGebra en la THA (izquierda) y fondo agregado en el diseño de la lección (derecha)

Eliminación/Incorporación de preguntas específicas

Los FPM añadieron algunas preguntas específicas para que los estudiantes evidenciaran relaciones matemáticas. Agregaron preguntas sobre el cálculo del área y perímetro de un rectángulo (tabla 6). Consideraron que la relación y diferencia entre área y perímetro es necesaria en la construcción e interpretación de la representación algebraica de la función cuadrática. Al respecto, J dice:

> J: Se espera que el estudiante venga con este conocimiento, pero como en la trayectoria no es específico hablar sobre eso, (…) pues como hay que hacer uso de fórmulas, que no están explícitas en la trayectoria, porque se espera que ellos las hagan y hallen la relación entre representación algebraica y la geométrica.

Tabla 6.
Cambios en la AA2 en el diseño de una lección subrayados

Actividad de aprendizaje AA2
2. Familia de rectángulos con igual perímetro. Pregunta: Observa los posibles cercos rectangulares cuando se mueve el punto C (abre el archivo 2.ggb). 2.3 ¿Qué es el perímetro de un rectángulo? ¿Cómo se halla el perímetro de un rectángulo? ¿Qué es el área de un rectángulo? ¿Cómo se halla el área de un rectángulo?

Además, los FPM incorporaron una pregunta de rectángulos con perímetro fijo 64, diseñada para obtener la familia de funciones cuadráticas. Construir la representación algebraica de la familia de funciones requiere de múltiples casos particulares y valores no limitados a decenas (tabla 7). M dice:

> M: digamos que se está pensado en relación con que ellos miren varios casos particulares. Esos varios casos particulares ayudan a mirar justamente esas invariantes, digamos, encuentran el área máxima de cuando el perímetro vale veinte y después cuarenta y se escoge el 64 en sí, como para no cerrarlo en decenas (…) para no dar a entender de que sólo se pueda (…) resolver el problema con perímetro en decenas.

Tabla 7.
Cambios de la AA4 en el diseño de una lección subrayados

Actividad de aprendizaje AA4
4. Gráfica de la expresión algebraica del área vs la base de los rectángulos de igual perímetro. La herramienta es un archivo en GeoGebra que retoma la construcción anterior, pero agrega la gráfica de la expresión algebraica del área con respecto a la base de los rectángulos isoperimétricos. Pregunta: 4.3. Si se desea modificar la longitud del cerco de la malla a 64 metros, ¿cuál sería la expresión de las áreas de los rectángulos con perímetro fijo 64 metros? ¿Cómo es gráfica del área respecto base de su rectángulo? ¿Cuál sería el rectángulo de mayor área con perímetro fijo 64?

Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes

Los FPM anticiparon posibles dificultades, errores y acciones de los estudiantes al resolver las actividades durante el diseño de la lección.

En relación con la AA1, anticiparon dos dificultades: reconocer el cuadrado como un caso particular del rectángulo y comprender y usar el concepto de escala al medir los lados de los rectángulos. Se analizaron algunos rectángulos para establecer la covariación entre los valores de sus lados y el área. Al respecto, J explicó:

> J: una las dificultades que presentan los estudiantes es que no reconozcan que un cuadrado es un rectángulo (…). También con lo de las escalas que piensen que tienen que utilizar literalmente los 20 metros de cuerda.

Además, los FPM anticiparon la dificultad de reconocer que la abscisa es el valor de la base y la ordenada es el área de los rectángulos correspondientes, M dice "Es posible que no relacionen los valores de las coordenadas con la base y el área del rectángulo". También, consideraron las dificultades de obtener la representación algebraica de la función cuadrática relacionada con el problema.

Rediseño de una lección

Características de los artefactos

En el rediseño de una lección, con relación a los artefactos, los FPM quitaron el uso de GeoGebra en la AA1 y lo sustituyeron por una imagen. En la AA2 y AA3 eliminaron la tabla de GeoGebra pero la agregaron en las hojas de trabajo de la AA2. Además, fijaron imágenes, ajustaron el color del fondo y ampliaron el tamaño de la letra en GeoGebra (figura 3). Por otra parte, agregaron información sobre el uso de materiales físicos y GeoGebra para facilitar la construcción de los cercos y el uso de las representaciones matemáticas (tabla 8).

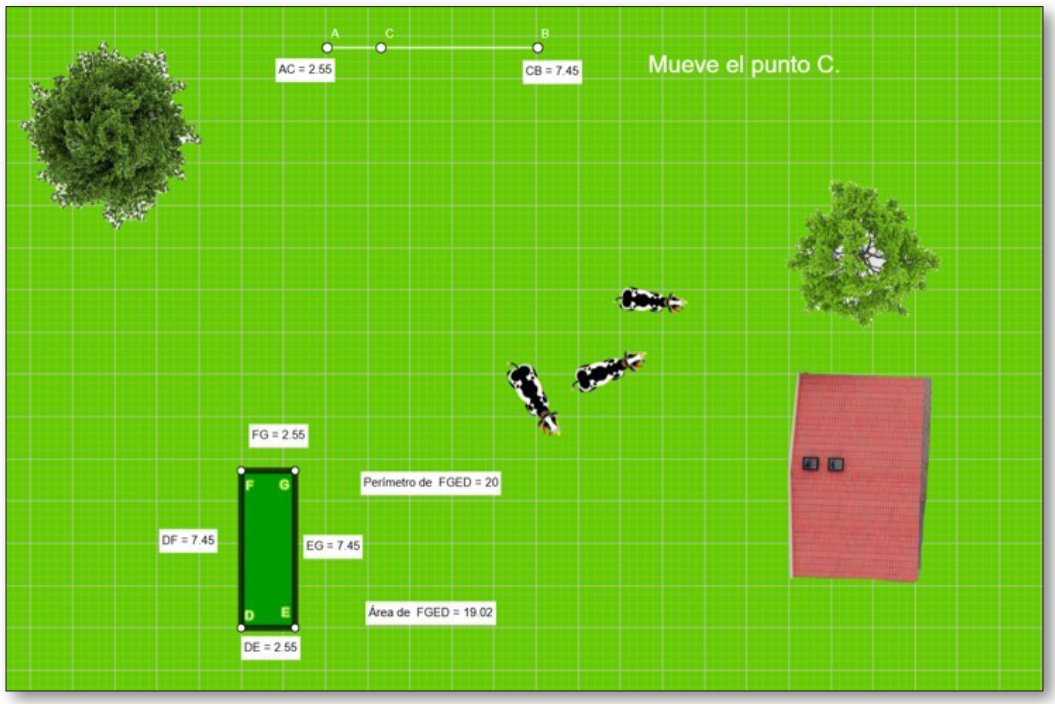


Fig. 3. Cambios de color y tamaño del texto en los archivos GeoGebra de la THA

Tabla 8.
Cambios de la AA1 en el rediseño de una lección subrayados

Actividad de aprendizaje
1. Un cerco rectangular para delimitar una huerta. Se usa como herramienta una cuerda de tamaño 20 cm, sujetada en sus extremos por medio de una cinta, para simular el cerco rectangular. Para determinar los vértices del rectángulo, se usan chinches sobre un cartón. El cartón tiene de fondo una hoja cuadriculada y en sus bordes una cinta métrica, para facilitar la medida de longitud de la cuerda y de los lados del rectángulo. En esta actividad los estudiantes determinan que es posible hallar diferentes rectángulos con una cuerda de longitud fija. Pregunta: 1.1. Usando una cuerda para simular el cerco de la huerta, determine ¿Cuáles son algunos de los posibles cercos rectangulares que se pueden construir? Elabora estos cercos usando una cuerda, dibújalos en el cartón y determine los valores de los lados de cada rectángulo.

Eliminación/Incorporación de preguntas específicas

Los FPM quitaron en la AA2 la pregunta sobre perímetro y área y en la AA3 eliminaron las preguntas tercera, quinta, sexta y séptima sobre la ubicación del punto I cuando el área es máxima y sobre rectángulos de área mínima y de igual área.

Por otra parte, los FPM agregaron algunas preguntas a las actividades para que los estudiantes obtengan la representación algebraica de la función cuadrática a partir de diferentes valores de los lados y el área presentados en tablas o figuras. Por ejemplo, los FPM incorporaron tablas con valores faltantes:

I: entonces completa la siguiente tabla.
M: ah, puede ser. Démosles a algunos que tengan.
I: ¿Los valores?
M: que tengan un valor y que ellos completen.

Los FPM añadieron una pregunta con tres figuras de rectángulos con perímetro fijo 20, con sólo el valor de un lado (tabla 9). Estas figuras propician el análisis de la variación y relación de los valores de los lados respecto al área de los rectángulos para obtener expresión algebraica de la función cuadrática. Los FPM expresaron:

M: si uno hace una pregunta, por ejemplo, en ese sentido de si este lado vale tanto cuánto vale el otro.
I: pero eso tiene que ver con esa tabla. (…)
M: o sea, se responde en la tabla, pero algunos no son conscientes de eso.
I: entonces tendrían que hacer una pregunta. (…)
J: podemos colocar un rectángulo.
I: quitándole las medidas.
M: colocarle dos rectángulos y al final preguntarles si este lado vale x, entonces, ¿Cuánto vale el otro?

Esta pregunta con la figura del rectángulo con valores faltantes relaciona los lados con el perímetro y la fórmula del área (base por altura). Al considerarse el rectángulo de base x y perímetro fijo 20, se obtiene la altura como 10-x y con la fórmula del área y se halla la representación algebraica de la función cuadrática como y=x(10-x). Al respecto, los FPM dicen lo siguiente:

I: bueno, entonces que sean otros que no sean de los que escogieron aquí no, porque aquí ya tenemos otros.
M: pero esa parte va a ser clave para la última generalización.
I: sí, porque si él dice x, pues este tiene que medir diez menos x. Y ahora, entonces ¿Cuál es el área? Base por altura y no tiene que hacer ni, ¿Cómo se llama? ni sustitución. (…)
J: ni reemplazar los valores en términos de otros.
M: mplícitamente lo va a hacer. Pero no va a ser consciente de eso.

Los FPM señalaron que el uso de tablas y figuras de las actividades permitieron la exploración de casos particulares, lo cual ayudó a los estudiantes a la comprensión de la función cuadrática. Las preguntas específicas de las AA que los FPM añadieron pretendían guiar a los estudiantes hacia la obtención de la representación algebraica de la función cuadrática (tablas 9 y 10).

Tabla 9.
Cambios de AA2 en el rediseño de una lección subrayados

Familia de rectángulos.

En esta actividad los estudiantes requieren reconocer que el perímetro de los rectángulos es fijo, mientras que el valor del área varía.

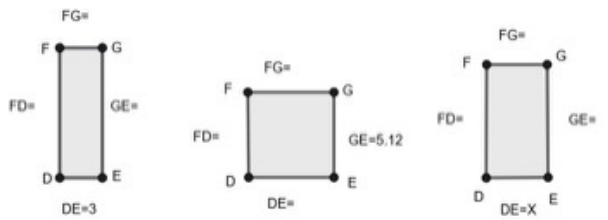
Pregunta: Abra el archivo familiarectangulos.ggb, mueva el punto C y observa los posibles cercos rectangulares.

2.1. Determine algunos posibles cercos rectangulares, completa la siguiente tabla:

Lado DE	*Lado EG*	*Perímetro DEGF*	*Área DEGF*
1			
	5		
			16
3,75			
	4,15		
		20	

2.2. Cuál de estos cercos rectangulares tiene mayor terreno? ¿Cuáles son las medidas de los lados de ese rectángulo? ¿Coincide con el rectángulo de mayor terreno de la primera actividad? Justifica tu respuesta.

2.3. Determine el valor de los lados de los siguientes rectángulos con perímetro 20.



2.4. Si el perímetro de los rectángulos es 20, ¿cuál es la fórmula para hallar el área de esta familia de rectángulos?

Los FPM adaptaron la redacción de algunas preguntas y agregaron tablas o figuras en las actividades para el análisis de casos específicos para obtener la representación algebraica de la función cuadrática (tablas 9 y 10). Explicitaron en la AA4 la representación algebraica factorizada de la función cuadrática porque valoraron que esta tenía una relación con la fórmula del área (base por altura) (tabla 11).

Tabla 10.
Cambios AA3 en el rediseño de una lección subrayados

Actividad de aprendizaje
3. La traza del punto I. En esta actividad los estudiantes relacionarán las coordenadas del punto I, con un lado del rectángulo y el área. Y analizarán la traza del punto I, para hallar la respuesta al problema. Pregunta: Abra el archivo traza.ggb, mueve el punto C, observe el punto I. 3.1 Si el punto I tiene coordenadas (x,y), determine algunos de sus valores:

x	3		7			2,84
y		24		17,6	14,3	

3.2 Acorde a los valores de los rectángulos, ¿qué representan las coordenadas del punto I = (x, y)?
3.3 ¿Cómo es la huella del punto I cuando se mueve el punto C?

Tabla 11.
Cambios AA4 en el rediseño de una lección subrayados

Actividad de aprendizaje
4. Gráfica del área frente a la base de los rectángulos de igual perímetro. Abra el archivo grafica.ggb, escriba y=x(10-x) en la entrada. 4.1. Compara la traza del punto I y la gráfica de y=x(10-x) ¿Por qué el punto I no genera un trazo en el cuadrante III y IV del plano cartesiano?

Anticipación de dificultades, errores y acciones de los estudiantes

Los FPM identificaron la dificultad de generalizar algebraicamente las relaciones entre las medidas de la base con respecto al área de los rectángulos. Los FPM consideraron que los estudiantes se resisten a usar variables. Reconocieron la tendencia de buscar respuestas exactas, acción que dificulta el proceso para obtener la generalización del área por medio de la representación algebraica de la función cuadrática. M señaló: "en el momento de generalizar (…) se destaca esa necesidad intelectual en ellos, la de la de formalizar, generalizar las ideas. Ellos pueden ver algunos puntos tabulares y entender, digamos entender la gráfica, pero la idea de generalizar algebraicamente es algo que les cuesta mucho más".

Además, los FPM identificaron la necesidad de darle un significado a la letra como variable para entender la representación algebraica de la función cuadrática que relaciona el área con un lado del rectángulo. Reconocieron la relación del movimiento del punto C con los cambios del área del rectángulo. Los FPM detectaron que los estudiantes relacionan la traza del punto I con una forma conocida, por ejemplo, una montaña o una u invertida, o determinan que es una parábola o la gráfica de una función cuadrática. Conjeturaron que los estudiantes pueden encontrar que la solución al problema está en construir un cuadrado de lado 5 metros y que el punto I se ubica en el punto máximo de la parábola, que en este caso es el vértice.

Asimismo, los FPM observaron que los estudiantes descubren que el área aumenta cuando C se mueve de A hacia el punto medio del segmento AB, y que disminuye cuando C pasa el punto medio del segmento AB y se mueve hacia B. M expresó:

> M: otra cosa que yo asociaría ya es más como de orden didáctico sería la tendencia de que ellos tenían (…) a cerrar los valores por así decirlo. Había como una negación respecto a dejar variables en las expresiones. No aceptaban que una x podía representar muchísimos valores. (…) Se nota una negación por entender lo que es una variable y hay una tendencia porque tiene que ser exactos.

Los FPM detectaron que los estudiantes reconocen que la longitud de la cuerda determina el perímetro de los rectángulos y que la cuerda unida delimita diferentes superficies y áreas. Los FPM usaron posibles procedimientos para hallar el área de un rectángulo: con los valores de los lados concretos y fórmula o conteo de cuadrados. Los FPM consideraron la relación entre los valores del área y las características del rectángulo.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación fue examinar las decisiones que toman los FPM al diseñar una lección con el uso de una THA sobre función cuadrática y al rediseñarla tras su implementación en un aula con estudiantes de educación media de Colombia (con edades entre los 15 a los 17 años). El estudio aporta evidencias sobre su mirada curricular (Dietiker et al., 2018; Lee y Lee, 2025) cuando los FPM emplean una THA como recurso curricular, en la planificación de lecciones.

Los FPM notaron las oportunidades de la THA al usar las actividades de aprendizaje propuestas en esta, sin embargo, plantearon algunos cambios. En primer lugar, los FPM cambiaron los artefactos, incorporaron material concreto y transformaron el entorno digital (GeoGebra) para enriquecer las representaciones matemáticas y facilitar la comprensión de la función cuadrática (Niss, 2020). Los cambios en la fase de diseño se centraron en la introducción de material concreto y de elementos gráficos en GeoGebra relacionados con el contexto real, mientras que, en la fase de rediseño, se introdujeron descripciones detalladas del uso de los artefactos para favorecer las interacciones de los estudiantes con las representaciones matemáticas de la función cuadrática.

En segundo lugar, los FPM cambiaron las actividades de aprendizaje, eliminando/incorporando preguntas más específicas. Los cambios tras la implementación estuvieron centrados en el análisis de casos particulares presentados con tablas y figuras, así como en la inclusión de preguntas que guiaran a los estudiantes hacia la representación algebraica de la función cuadrática. Las preguntas añadidas estaban en coherencia con la secuenciación de las actividades de aprendizaje, el objetivo de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético de la THA sobre función cuadrática.

Además, los FPM anticiparon dificultades, errores y acciones de los estudiantes en sus planificaciones al considerar la resolución de las actividades de aprendizaje y reflexionar sobre el proceso de aprendizaje hipotético de la THA. Durante la fase de diseño, previeron algunas dificultades y errores con relación a la definición de rectángulo, el uso de la escala o el procedimiento para obtener la representación algebraica de la función cuadrática. Tras la implementación, en sus planificaciones (rediseño) los FPM reportaron que algunas de sus anticipaciones de diseño se relacionaron con lo que observaron durante su implementación y, además, identificaron otras dificultades como el significado y uso de la variable o la relación entre el perímetro y el área. A partir de las dificultades, los errores y las acciones identificados después de la implementación, los FPM consideraron el desempeño de los estudiantes y decidieron cambios acordes a una enseñanza centrada en el aprendizaje de los estudiantes (Wilson et al., 2017).

La THA dada apoyó a los FPM en la planificación de una lección sobre función cuadrática, ofreciéndoles un objetivo de aprendizaje, un proceso de aprendizaje hipotético y actividades de aprendizaje. Esta información les permitió reflexionar, durante la fase de diseño de una lección, sobre aspectos de los artefactos a utilizar (el uso de material concreto y GeoGebra), a anticipar posibles dificultades de los estudiantes y a cambiar algunas de las actividades de aprendizaje incluyendo preguntas específicas que ayudaran a solventar las dificultades previamente anticipadas. Una vez que los FPM implementaron las actividades de aprendizaje de su lección, pudieron ratificar sus anticipaciones y añadir nuevos cambios a las actividades de aprendizaje relacionados con esta implementación.

Los FPM realizaron acciones sobre las actividades de aprendizaje de la THA, tales como proponer, seleccionar, eliminar o adaptar preguntas específicas y elementos de información. El uso de la THA como recurso curricular en la planificación favoreció que, durante la fase de diseño, los FPM anticiparan posibles respuestas de los estudiantes y que, en el proceso de rediseño, analizaran respuestas reales surgidas de la implementación de las actividades. Los resultados de este estudio se alinean con dos de los usos identificados por Wickstrom y Langrall (2020): el diseño y modificación de tareas matemáticas, y la consideración del pensamiento de los estudiantes como parte de la planificación de lecciones.

La planificación de lecciones de los FPM permitió incluir otras representaciones matemáticas en las actividades de aprendizaje en coherencia con el objetivo de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético propuesto en la THA. Asimismo, se resalta que las preguntas específicas relacionadas con el uso de tablas y figuras favorecieron el análisis de la variación y contribuyeron a la construcción de la representación algebraica de la función cuadrática como modelo de solución al problema (Ramírez et al., 2022). En cuanto al uso y extensión del contexto real y geométrico en las actividades de aprendizaje, los FPM buscaron otorgar significado a los conocimientos matemáticos formales en relación con el contexto real (Azizah et al., 2021; González-Polo y Castaneda, 2024).

Este estudio presenta algunas limitaciones. En primer lugar, el análisis se centró únicamente en la destreza de decidir de la mirada curricular, una futura investigación podría centrarse en la relación entre cómo los FPM interpretan el recurso curricular (limitaciones y potencialidades de la THA) y cómo deciden. No obstante, a través de sus decisiones se pueden inferir las limitaciones que los FPM identifican en la THA. En segundo lugar, no se realizó un análisis sistemático de la implementación de los FPM en el aula (grabaciones). Por ello, los resultados sobre las anticipaciones de errores y dificultades se basan en las decisiones tomadas por los FPM tras su implementación. Sería interesante explorar cómo los FPM miran el pensamiento matemático de los estudiantes durante la implementación y cómo se relacionan los cambios de la secuencia de actividades de aprendizaje tras la implementación con el análisis sobre el pensamiento matemático de los estudiantes (Kang, 2022). Además, sería pertinente seguir explorando cómo los FPM desarrollan la práctica de planificar lecciones durante los cursos de formación inicial y continua usando THA como recursos curriculares.

REFERENCIAS

Amador, J. M., Males, L. M., Earnest, D. y Dietiker, L. (2017). Curricular noticing: Theory on and practice of teachers' curricular use. En E. Schack, M. Fisher y J. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks. Research in Mathematics Education* (pp. 427-443). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-46753-5_25

Amador, J. M. (2019). Preservice teachers' use of curricular resources for mathematics lesson design. *Mathematics Teacher Education and Developmen*t, *21*(1), 51-81. https://mted.merga.net.au/index.php/mted/article/view/565

Azizah, N. N., Susiswo, S. y Sisworo, S. (2021). Analytical thinking process of students in solving mathematical problems of quadratic functions. *AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, *10*(1), 328-338. https://ojs.fkip.ummetro.ac.id/index.php/matematika/article/view/3440

Bohrer, A. y Tinti, D. S. (2021). Mapping of studies on the quadratic function in contexts of mathematics teaching and/or learning. *Educação Matemática Pesquisa*, *23*(1), 201-230. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i1p201-230

Cárcamo, A. y Fuentealba, C. (2023). Un modelo para la construcción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje preliminares. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *37*, 577-601. https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10

Dietiker, L., Males, L. M., Amador, J. M. y Earnest, D. (2018). Curricular Noticing: A framework to describe teachers' interactions with curriculum materials. *Journal for Research in Mathematics Education*, *49*(5), 521-532. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.49.5.0521

Dindyal, J., Schack, E. O., Choy, B. H. y Sherin, M. G. (2021). Exploring the terrains of mathematics teacher noticing. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01249-y

Edgington, C. (2014). Teachers' uses of a learning trajectory as a tool for mathematics lesson planning. En J. J. Lo, K. R. Leatham y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 261-284). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02562-9_14

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J., y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: Characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *13*, 39-61. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229

González-Polo, R. I. y Castaneda, A. (2024). Progressive mathematics of functions in secondary school students using a free-fall activity. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *19*(1), em0765. https://doi.org/10.29333/iejme/14108

Gravemeijer, K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155-177. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0102_4

Ivars, P. y Fernández, C. (2023). Snapshots of curricular noticing: planning a subtraction algorithm lesson in primary education. En: M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel., y M. Tabach (Eds.), *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 107-114). PME.

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2020). Uso de una trayectoria hipotética de aprendizaje para proponer actividades de instrucción. *Enseñanza de las Ciencias*, *38*(3), 105-124. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2947

Jacobs, V. R. y Spangler, D. A. (2017). Research on core practices in K–12 mathematics teaching. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 766-792). National Council of Teachers of Mathematics

Kalchman, M. y Koedinger, K. (2005). Teaching and learning functions. En S. Donovan y J. Bransford (Eds.), *How students learn: History, mathematics and science in the classroom* (pp. 351-396). National Academy Press.

Kang, R. (2022). *Preparing Middle and High School Teachers for Effectively Teaching Mathematical Modeling through Curricular and Professional Noticing* [Doctoral dissertation]. University of Georgia. https://esploro.libs.uga.edu/esploro/outputs/doctoral/PREPARING-MIDDLE-AND-HIGH-SCHOOL-TEACHERS/9949450528502959

Lee, M. y Lee, J. E. (2025). Investigating pre-service teachers' problem-solving ability and their curricular noticing ability through pedagogical sequencing activities. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *23*(5), 1211-1236. https://doi.org/10.1007/s10763-024-10506-x

Llinares, S. (2019). Enseñar matemáticas como una profesión. Características de las competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *14*(18), 30-43.

Llinares, S., Fernández, C., Ivars, P., González-Forte, J. M. y Zorrilla, C. (2026). Features of pre-service primary school teachers' curricular noticing: the fraction concept. *ZDM Mathematics Education*, *58*(1-2), 217-230. https://doi.org/10.1007/s11858-025-01726-8

Males, L. M. y Setniker, A. (2019). Planning with curriculum materials: Interactions between prospective secondary mathematics teachers' attention, interpretations and responses. *International Journal of Educational Research*, *93*, 153-167. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2018.09.016

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* MEN. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Moreno, M. y Llinares, S. (2018). Prospective mathematics teachers' perspectives on technology. En M. E. Strutchens, R. Huang, D. Potari, y L. Losano (Eds.), *Educating prospective secondary mathematics teachers: Knowledge, identity and pedagogical practices* (pp. 125-142). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-91059-8_8

Niss, M. (2020). Functions Learning and Teaching. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 303-305). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_96

Parrish, C.W., Snider, R.B. y Creager, M.A. (2023). Investigating how secondary prospective teachers plan to launch cognitively demanding tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 26*(3), 395–423. https://doi.org/10.1007/s10857-022-09534-7

Qi, C., Zuo, S. y Liu, L. (2025). Curricular noticing in Chinese lesson study: teachers' interactions with textbooks for project-based learning. *ZDM Mathematics Education*, *57,* 1035-1049. https://doi.org/10.1007/s11858-025-01679-y

Ramírez, R., Cañadas, M. C. y Damián, A. (2022). Structures and representations used by 6th graders when working with quadratic functions. *ZDM Mathematics Education*, *54*, 1393-1406. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01423-w

Remillard, J. T. (2013). Examining resources and re-sourcing as insights into teaching. *ZDM Mathematics Education*, *45*(7), 925-927. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0549-8

Rezat, S. (2024). Research on curriculum resources in mathematics education: a survey of the field. *ZDM Mathematics Education*, *56*, 223-237. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01559-x

Simon, M. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.26.2.0114

Simon, M. (2020). Hypothetical Learning Trajectories in Mathematics Education. En S., Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 354-357). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_72

Strauss, A. y Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques*. Sage.

Weyers, J., König, J., Scheiner, T., Santagata, R. y Kaiser, G. (2024). Teacher noticing in mathematics education: a review of recent developments. *ZDM–Mathematics Education*, *56*, 249-264. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01527-x

Wickstrom, M. H. y Langrall, C. W. (2020). The case of Mrs. Purl: Using a learning trajectory as a tool for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *23*(1), 97-125. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9412-8

Wilson, P. H., Mojica, G. F. y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(2), 103-121. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.12.003

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C. y Confrey, J. (2014). Teachers' use of their mathematical knowledge for teaching in learning a mathematics learning trajectory. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(2), 149-175. https://doi.org/10.1007/s10857-013-9256-1

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C. y Myers, M. (2015). Teachers' uses of a learning trajectory in student-centered instructional practices. *Journal of Teacher Education*, *66*(3), 227-244. https://doi.org/10.1177/0022487115574104

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C., Webb, J. y Myers, M. (2017). Changes in teachers' discourse about students in a professional development on learning trajectories. *American Educational Research Journal*, *54*(3), 568-604. https://doi.org/10.3102/0002831217693801

Zorrilla, C., González-Forte, J. M., Ivars, P. y Fernández, C. (2024). Mirar profesionalmente los materiales curriculares: coherencia entre interpretar y decidir. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 537-544). SEIEM.

Planning Quadratic Function Lessons With a Hypothetical Learning Trajectory

María Fernanda Mejía-Palomino
Facultad de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Cali, Valle del Cauca, Colombia
maria.fernanda.mejia@correounivalle.edu.co
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0267-5856

Ceneida Fernández Verdú
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante, San Vicente del Raspeig, Alicante, España
ceneida.fernandez@ua.es
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4791-9247

Andrea Cárcamo Bahamonde
Facultad de Ciencias de la Ingeniería, Universidad Austral de Chile, Valdivia, Región de los Ríos, Chile
andrea.carcamo@uach.cl
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5782-3479

Diego Garzón Castro
Facultad de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Cali, Valle del Cauca, Colombia
diego.garzon@correounivalle.edu.co
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7553-6705

Lesson planning requires teachers to interpret curriculum resources and make informed decisions about how to adapt them to students and instructional goals. Hypothetical learning trajectories (HLTs), which have a learning goal, learning activities and a hypothetical learning process, can support this work. This study explores the decisions made by two prospective Mathematics teachers (PMTs) when using an HLT to design a lesson on the quadratic function and, subsequently, redesign it after implementation with twenty-nine Colombian upper-secondary students who were aged fifteen to seventeen. The analysis focuses on decision-making as a component of curricular noticing.

The HLT was developed using the emergent models design heuristic and informed by an analysis of school textbooks and research on teaching and learning the quadratic function. The progression was from constructing rectangles with a fixed perimeter in a meaningful context to identifying covariation, interpreting the relationship between base and area graphically and formalizing the quadratic function algebraically. The study adopted a qualitative, category-generating approach that was based on inductive analysis. Data consisted of the PMTs' written lesson plans and redesigns and semi-structured interviews that were conducted before and after implementation. The analysis proceeded in two phases: firstly, the written documents were examined to identify decisions concerning the use of the HLT; and, secondly, the interviews were analyzed to identify the evidence and justifications underlying those decisions. Four researchers discussed the emerging categories until they reached a consensus.

The PMTs retained the sequence of learning activities proposed in the HLT but modified the characteristics and uses of physical and digital artifacts and removed, reformulated or added specific questions. During the initial design, they incorporated concrete materials and contextual elements into GeoGebra, added questions concerning area and perimeter and anticipated students' difficulties, errors and possible actions. In the redesign, they adjusted the use and visual presentation of GeoGebra, incorporated tables and diagrams to support the analysis of cases and added prompts intended to guide students toward an algebraic representation of the quadratic function. Their decisions after implementation drew on the students' observed performance, although classroom data were not analyzed systematically. Overall, the HLT functioned as a curriculum resource that supported lesson planning by providing a learning goal, an ordered set of activities and a hypothetical learning process against which the PMTs could anticipate and reconsider instructional decisions. Given the exploratory nature of the study and the limited number of participants, future research should examine how curricular attending, interpreting and decision-making are connected and should include systematic classroom evidence.