Universitat Autònoma de Barcelona - Universitat de València
ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS 44-3 (2026), 193-211
Historia y Epistemología
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6659
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

© del autor

La historia en la formación del profesorado: un estudio empírico del cálculo de Leibniz

History in Teacher Education: An Empirical Study of Leibniz's Calculus

Miguel Esteve Blasco, María Teresa González Astudillo, Miguel Ángel Fuertes Prieto, José María Chamoso Sánchez, María Mercedes Rodríguez Sánchez.
Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca, Salamanca, Castilla y León, España
miguel.esteve@usal.es, maite@usal.es, fuertes@usal.es, jchamoso@usal.es, meros@usal.es
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9511-274X, https://orcid.org/0000-0003-4800-365X , https://orcid.org/0000-0002-6914-6871, https://orcid.org/0000-0002-4943-4657, https://orcid.org/0000-0002-1020-6681

RESUMEN • La necesidad de una sólida formación del profesorado de matemáticas que trascienda el dominio algorítmico e incorpore una comprensión conceptual del cálculo integral ha motivado la revisión de episodios históricos. A partir del cálculo de Leibniz, se diseñó e implementó una ingeniería didáctica que sitúa la suma y la resta como ejes de la definición de la integral. Desde esta perspectiva, la integral se concibe como suma infinita de diferencias infinitesimales, permitiendo interpretar la relación entre integrar y derivar como procesos inversos análogos a sumar y restar, lo que conduce al teorema fundamental del cálculo. La experimentación con futuros profesores, basada en trabajo grupal y análisis de interacciones, muestra una comprensión sólida del concepto, vinculada a la suma continua, y puede constituir una propuesta para la formación inicial del profesorado de matemáticas.

PALABRAS CLAVE: Formación del profesorado de matemáticas; Historia de la matemática; Cálculo integral; Leibniz; Sumas y diferencia.

ABSTRACT • The need for strong Mathematics teacher education that goes beyond algorithmic mastery and promotes a conceptual understanding of integral calculus has prompted renewed attention to historical developments. Drawing on Leibniz's calculus, a didactic engineering sequence was designed and implemented, with addition and subtraction at the heart of the definition of the integral. From this perspective, the integral is conceived as the infinite sum of infinitesimal differences, enabling integration and differentiation to be understood as inverse processes that are analogous to addition and subtraction, leading to the Fundamental Theorem of Calculus. The study, conducted with prospective Mathematics teachers, which was based on group work and interaction analysis, indicates a sound conceptual understanding of the integral as continuous summation and suggests a valuable approach to initial Mathematics teacher education.

KEYWORDS: Teacher training in Mathematics; History of Mathematics; Integral calculus; Leibniz; Sums and differences.

Recepción: marzo 2026 • Aceptación: agosto 2026 • Publicación: noviembre 2026

Esteve Blasco, M., González Astudillo, M. T., Fuertes Prieto, M. Á., Chamoso Sánchez, J. M. y Rodríguez Sánchez, M. M. (2026). La historia en la formación del profesorado: un estudio empírico del cálculo de Leibniz. *Enseñanza de las Ciencias, 44*(3), 193-211.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6659

INTRODUCCIÓN

La enseñanza del cálculo integral adopta con frecuencia un enfoque predominantemente algorítmico en el que los procedimientos prevalecen sobre la comprensión conceptual (Serhan, 2015; Artigue, 2001). En particular, la integral de Riemann suele presentarse como un conjunto de reglas derivadas del cálculo diferencial, lo que puede favorecer una comprensión parcial del concepto. Como consecuencia, persiste una brecha entre el dominio técnico y la comprensión conceptual de la integral (Orton, 1983; Tall y Vinner, 1981; Greefrath et al., 2021), aspecto que puede resultar problemático en la formación inicial del profesorado.

Diversos estudios muestran que el futuro profesorado reproduce enfoques procedimentales sin desarrollar un conocimiento explicativo que sustente su enseñanza ni permita anticipar dificultades de aprendizaje (Harel y Sowder, 2005; Greefrath et al., 2021), lo que limita la articulación entre representaciones, significados y procedimientos (Ball et al., 2008). Este déficit se asocia, entre otros factores, a la escasa presencia del enfoque histórico-epistemológico en la formación docente (Ho, 2008; Furinghetti, 2007). Como señaló Klein (1978), comprender las matemáticas exige analizar los problemas, métodos y obstáculos que dieron origen a sus conceptos. En esta línea, la historia de la matemática permite recuperar significados ocultos tras las presentaciones formales y evitar una transmisión cerrada del conocimiento (Maza, 1994; Fauvel y van Maanen, 2000).

En el cálculo integral, las dificultades de aprendizaje se vinculan con la conceptualización del límite, la interpretación de la integral como proceso de acumulación y la articulación entre representaciones gráficas, numéricas y simbólicas (Tall y Rashidi Razali, 1993; Serhan, 2015; Artigue, 1995b), así como con la transición desde una comprensión intuitiva hacia una definición formal con significado (Vinner y Dreyfus, 1989).

Este trabajo recurre al desarrollo histórico del cálculo integral, en particular a la concepción de Leibniz como marco para reconstruir su significado en la formación de profesores. Sus ideas, fundamentadas en autores del siglo XVII como Fermat, Pascal, Wallis y Roberval, se concretan en el *genus calculi singularis* (1684) y en la formalización del símbolo $\int$ como suma (1686). Desde esta perspectiva, la integral se entiende como una suma infinita de diferencias infinitesimales y la diferencial como su resta, articulando lo discreto y lo continuo mediante la interpretación de la curva como un polígono de infinitos lados (Guicciardini, 1989; Knobloch, 2002). Asimismo, este enfoque permite interpretar numéricamente el teorema fundamental del cálculo como la relación entre suma y resta en su versión infinitesimal, idea situada por Leibniz en el origen de su cálculo diferencial (Remaki, 2021; Muñoz et al., 2023). En este contexto, el propósito de esta investigación es analizar cómo una secuencia de tareas fundamentadas en la perspectiva leibniziana del cálculo favorece la comprensión conceptual de la integral definida en futuros profesores de matemáticas.

REVISIÓN DE LA LITERATURA

Introducir la historia de las matemáticas en la formación inicial del profesorado puede favorecer tanto el conocimiento del contenido como el pedagógico (Shulman, 1987; Clark, 2012; Fauvel, 2007; Furinghetti, 2007). Además, puede proporcionar una comprensión más profunda de los conceptos al considerar los problemas históricos como generadores de significado matemático (Furinghetti, 2007; Esteve et al., 2026). Desde esta perspectiva, la presente propuesta busca favorecer un conocimiento del contenido que permita a los futuros profesoras comprender el significado matemático de la integral definida y fundamentar su enseñanza desde un enfoque conceptual (Shulman, 1987; Ball et al., 2008). Asimismo, su utilización puede promover cambios en las actitudes, las creencias y el conocimiento matemático para la enseñanza (Clark, 2012).

No obstante, resulta importante considerar no solo por qué utilizar la historia de las matemáticas en el aula, sino también cómo hacerlo. En términos generales, la historia de las matemáticas puede entenderse como una colección de relatos sobre matemáticos o como una forma de hacer las matemáticas más accesibles mediante tareas basadas en los aspectos esenciales de un determinado período histórico. Jankvist (2009, 2010, 2011) distingue entre la «historia como fin» y la «historia como herramienta». Esta última procura favorecer la motivación y la comprensión mediante el desarrollo histórico de los conceptos. Aunque diversos estudios han evidenciado el valor de la historia en la enseñanza de las matemáticas (Galante, 2014; Clark, 2016; Liu, 2003; Jankvist, 2010), pocos han analizado su aplicación al cálculo integral (Ignatuschina y Zuboba, 2025; Muñoz et al., 2023). La mayoría se centran en el conocimiento del profesorado mediante entrevistas o grabaciones de aula, mientras que apenas existen investigaciones dirigidas a la formación docente y al diseño de tareas con este propósito (Yan et al., 2020).

El cálculo de Leibniz destaca el papel de la suma y la diferencia infinitesimal para comprender la integral como acumulación (Bos, 1974; Knobloch, 2002), así como su potencial didáctico para abordar la derivada y el teorema fundamental del cálculo (Artigue, 1991; Tall, 1993). Sin embargo, son escasas las investigaciones que reconstruyen estos argumentos y los traducen en tareas para la formación docente. En este marco se sitúa la presente investigación, cuyo objetivo es analizar cómo una secuencia de tareas fundamentadas en la perspectiva leibniziana favorece, en futuros profesores de matemáticas, la comprensión conceptual de la integral definida desde su significado como acumulación de diferencias infinitesimales (Burgos et al., 2021). Para ello se plantean los siguientes objetivos específicos: *i*) comprender la integral definida como suma infinita de diferencias infinitamente pequeñas; *ii*) asociar la diferencial con la resta y la integral con la suma; y *iii*) comprender el teorema fundamental del cálculo en su versión numérica. En consonancia con estos objetivos, se formula la siguiente pregunta de investigación: ¿La implementación de tareas fundamentadas en la perspectiva leibniziana del cálculo integral favorece, en los futuros profesores de matemáticas, la comprensión de la integral definida como suma infinita de diferencias infinitesimales y el teorema fundamental del cálculo como resultado numérico de asociar la diferencial con la resta y la integral con la suma?

DIMENSIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Cuando se recurre al desarrollo histórico del cálculo integral como herramienta para enriquecer su comprensión y enseñanza, es posible distinguir tres dimensiones complementarias que estructuran el concepto: epistemológica, cognitiva y didáctica (Artigue, 2001; Fauvel y van Maanen, 2000). Estas dimensiones permiten abordar el concepto de integral definida de manera integrada, atendiendo tanto a su construcción matemática como a su comprensión y transmisión en contextos educativos.

Dimensión epistemológica

Esta dimensión, vinculada al análisis histórico, permite comprender los argumentos de Leibniz para definir la integral y la diferencial, así como interpretar la versión numérica del teorema fundamental del cálculo como relación entre las operaciones de suma y resta. Estudios como los de Klein (1978) y Artigue (1995b) destacan el valor de la historia para acceder al significado profundo de los conceptos matemáticos.

El análisis de una sucesión y de sus primeras diferencias muestra que la suma acumulada de estas reconstruye los términos de la sucesión, principio clave en la concepción leibniziana del cálculo (Katz, 2009,p. 565; Guicciardini, 1989; Knobloch, 2002; Rabouin, 2015). Leibniz interpretó inicialmente la función como una sucesión con incrementos discretos, concibiendo dx y dy como diferencias entre

términos contiguos (Leibniz, 1684/1858), para extender posteriormente esta idea al continuo, al interpretar la curva como un polígono de infinitos lados, donde *dx* y *dy* representan cantidades infinitesimales (Leibniz, 1686/1858). En la transición de lo discreto a lo continuo, el refinamiento de la partición hace que las diferencias *dy* se aproximen a los incrementos reales de la función y su suma converja en la integral definida (Tall y Vinner, 1981). Así, integrar consiste en sumar infinitas diferencias infinitesimales, mientras que derivar implica calcularlas; la integral constituye, por tanto, el límite continuo de un proceso discreto de reconstrucción.

Dimensión cognitiva

Diversas investigaciones señalan que el profesorado de matemáticas requiere un conocimiento conceptual del cálculo integral que trascienda la aplicación de reglas y evite una enseñanza basada en la mecanización de algoritmos (Ma, 1999; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008). En este sentido, comprender el origen y la evolución histórica del concepto de integral constituye un factor clave (Furinghetti, 2007). En particular, recuperar el enfoque de Leibniz, basado en sumas y diferencias infinitesimales, permite abordar la integral desde una perspectiva centrada en la suma y no exclusivamente en la búsqueda de primitivas (Sealey y Oehrtman, 2015). Este enfoque contribuye a superar dificultades habituales, como identificar la integral con un procedimiento algebraico, concebir el área bajo la curva como suma infinita de áreas infinitesimales o coordinar suma y límite en un mismo proceso conceptual (Thompson y Silverman, 2008; Castillo-Garsow, Johnson y Moore, 2013). Así, definir la integral con los argumentos de Leibniz permite situar su significado en una perspectiva numérica, concibiéndola como suma infinita de diferencias infinitesimales y diferenciándola de la integral entendida como antiderivada.

Dimensión didáctica

En los últimos años, la enseñanza del cálculo integral ha tendido a presentar la integral como consecuencia directa del cálculo diferencial, asociándola a la obtención de primitivas. Este enfoque dificulta el trabajo con los argumentos geométricos y numéricos que dieron origen al concepto y favorece una enseñanza procedimental centrada en la regla de Barrow, lo que puede limitar su comprensión conceptual (Artigue, 1995b; González-Martín, 2009).

La construcción de la integral fue un proceso progresivo, marcado por intentos y dificultades. Incorporar las ideas de Leibniz puede favorecer un enfoque investigativo en el que el estudiantado reconstruya la integral como suma infinita de cantidades infinitesimales (Fauvel y van Maanen, 2000). Como señaló Gil (1980), el enfoque histórico permite problematizar conocimientos presentados como cerrados y visibilizar la actividad matemática que les dio sentido. Asimismo, contribuye a que el profesorado tome conciencia de dificultades ligadas a la partición infinita, la suma de infinitesimales, el paso al límite o la relación entre área y primitiva (Orton, 1983; Greefrath et al., 2021). En este sentido, integrar desarrollos históricos basados en Leibniz puede favorecer una comprensión profunda de la integral, más allá de su tratamiento como resultado numérico.

Estas tres dimensiones han sido esenciales para el diseño de las tareas y la definición de las variables de control empleadas en el análisis *a posteriori*. En este sentido, las variables de control concretan dichas dimensiones y permiten analizar su presencia en los razonamientos del futuro profesorado de matemáticas durante la resolución de las tareas.

METODOLOGÍA

Este trabajo se enmarca en una investigación más amplia sobre el potencial formativo de la historia del cálculo integral en la formación inicial del profesorado de matemáticas, con especial atención a la integral definida. Aunque dicha investigación abarca distintas etapas históricas, este artículo se centra en la perspectiva de Leibniz. Se adopta un enfoque cualitativo basado en la ingeniería didáctica para diseñar, implementar y analizar situaciones de enseñanza (Artigue, 1995a).

La investigación se estructuró en cuatro fases: preliminar, análisis *a priori*, experimentación y análisis *a posteriori* que permitieron el diseño, la implementación y el análisis de la situación de enseñanza. Las fases preliminares y de análisis *a priori* se vinculan al diseño y definición de objetivos, la experimentación a la implementación y el análisis *a posteriori* al estudio de los resultados. La validación se basó en la confrontación entre los resultados previstos en el análisis *a priori* y los datos obtenidos en la fase experimental.

Fase preliminar

Se comenzó con un análisis histórico del desarrollo del cálculo integral a través de distintas etapas, que permitió identificar los elementos conceptuales clave del concepto de integral. A partir de este análisis se diseñó un cuestionario diagnóstico para analizar en qué medida el futuro profesorado reconoce, comprende y articula estrategias vinculadas a su construcción. El cuestionario incluyó tareas sobre el tratamiento del infinito en sus versiones potencial y actual, sucesiones y series numéricas, así como una orientada a analizar la dependencia de técnicas diferenciales en la resolución de problemas de cálculo de áreas. Sus resultados fundamentaron el diseño de los instrumentos de recogida de datos y de las tareas formativas, centradas en la perspectiva leibniziana.

En concreto, el cuestionario incluyó las siguientes tareas:

- El cálculo del área de una circunferencia mediante sumas finitas, explorando el método de exhaución griego y la aproximación continua.
- El cálculo del área de una elipse a partir de la circunferencia, en relación con el principio de Cavalieri.
- La aproximación del área bajo la parábola $f(x)=x^2$ mediante sucesiones geométricas decrecientes, vinculadas a los métodos de Fermat.
- El cálculo del área de un triángulo a partir de sucesiones de ordenadas comparadas con su cuadrado circunscrito, vinculadas con los argumentos propuestos por Wallis.
- La derivación de funciones de la forma $z=x^n$ utilizando incrementos infinitesimales y la expresión binomial, en concordancia con la obra de Newton.
- La integración de funciones como e^{x^2}, para analizar la comprensión de la existencia de funciones que, aun no admitiendo una primitiva expresable en términos de funciones elementales, son perfectamente integrables desde el punto de vista del cálculo del área bajo su gráfica.

En todas las tareas se solicitó al futuro profesorado que describiera los procedimientos empleados, los relacionara con un contexto histórico e identificara los conceptos matemáticos implicados. El análisis de las respuestas permitió identificar dificultades que pueden obstaculizar la comprensión conceptual de la integral. A modo de ejemplo, se presentan dos respuestas de estudiantes. En la primera, relacionada con el principio de Cavalieri, se observaron razonamientos basados en la proporcionalidad entre áreas. Sin embargo, estos no se articularon en términos de indivisibles como entes generadores del área ni establecieron una relación explícita entre dichos indivisibles y las series numéricas (figura 1).

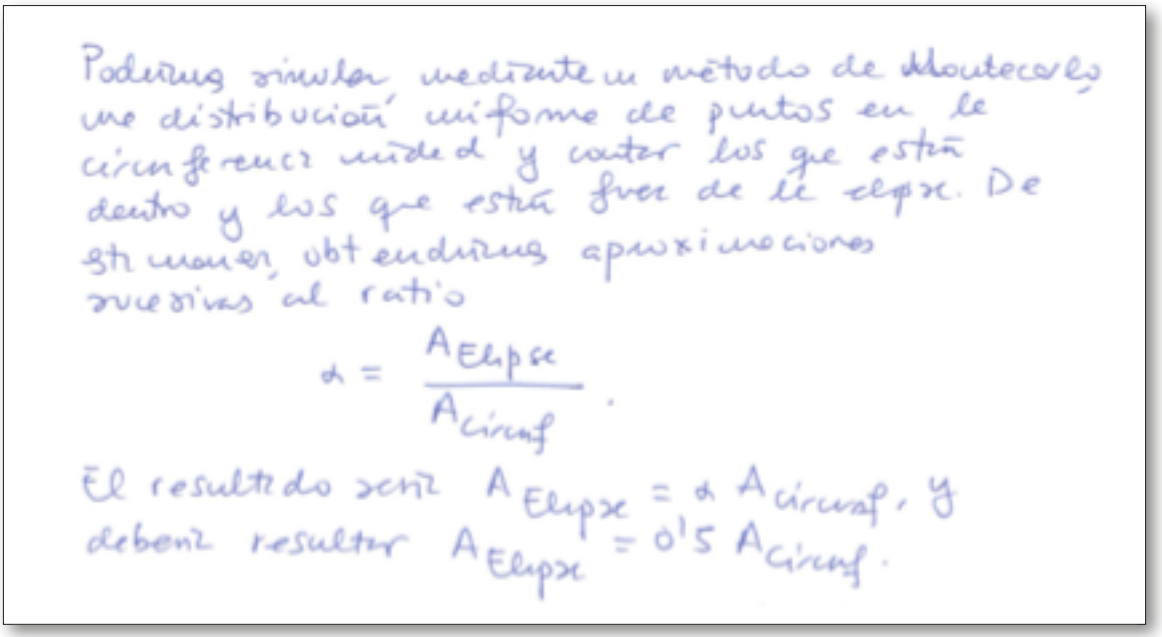


Fig. 1. Razón entre elipse y circunferencia. *Nota*: producción escrita obtenida durante la aplicación del cuestionario previo.

En la segunda respuesta, vinculada a los argumentos de Wallis, se observó una fuerte dependencia del cálculo diferencial, evidenciada por el uso reiterado de la regla de Barrow, incluso cuando se solicitaba explícitamente no utilizarla. Tampoco se estableció correspondencia entre las colecciones de líneas del triángulo y su cuadrado circunscrito, cuya agregación mediante una partición infinita permite poner de manifiesto relaciones estructurales entre áreas (figura 2). En su lugar, se recurrió sistemáticamente al cálculo diferencial, reforzando la identificación entre el cálculo de áreas y el de primitivas. Sin embargo, esta identificación es conceptualmente inadecuada, ya que no toda función continua admite una primitiva elemental. Por ejemplo, e^{x^2}, continua en [0,1], posee área, pero carece de una primitiva expresable mediante funciones elementales, lo que impide aplicar directamente la regla de Barrow (figura 3).

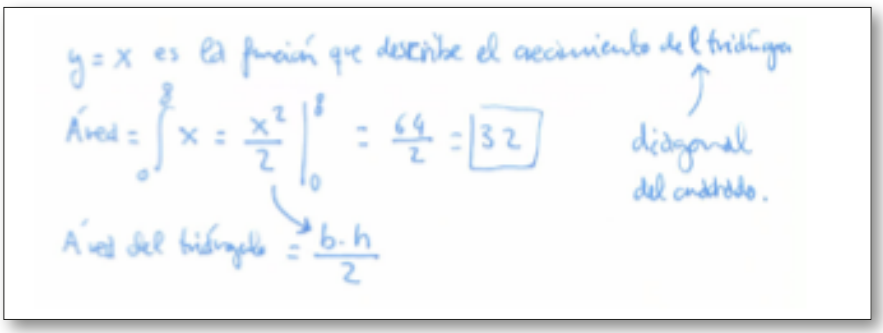


Fig. 2. Relación triángulo cuadrado circunscrito. *Nota*: producción escrita obtenida durante la aplicación del cuestionario previo.

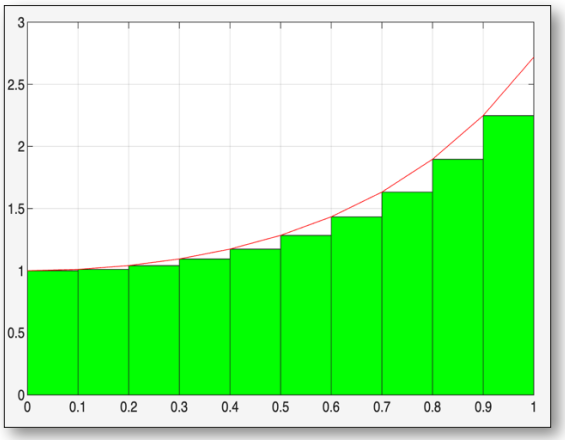


Fig. 3. Cálculo del área de $f(x)=e^{x^2}$ en el intervalo [0,1]

El análisis de las respuestas al cuestionario evidenció que relacionar los entes generadores de una figura con series numéricas puede ser clave para interpretar la integral como una suma infinita de diferencias infinitesimales y desvincularla, al menos conceptualmente, del cálculo de primitivas. Estos resultados fundamentaron el diseño de las tareas formativas, orientadas a promover una comprensión numérica de la integral mediante sucesiones. Enmarcadas en la perspectiva leibniziana del cálculo integral, dichas tareas enfatizan la interpretación de la integral como suma de diferencias infinitesimales, alejándola conceptualmente del cálculo diferencial.

Fase *a priori*

Esta fase correspondió al diseño de tareas fundamentadas en los argumentos de Leibniz sobre sumas y diferencias infinitesimales para favorecer una reconstrucción conceptual de la integral. La propuesta se apoyó en la idea de que una sucesión puede reconstruirse mediante la suma de sus primeras diferencias, extendiendo este razonamiento del ámbito discreto al continuo para interpretar la integración y la diferenciación como procesos inversos, sin recurrir inicialmente a su formulación analítica moderna.

Las tareas se estructuraron de manera progresiva, iniciándose en el ámbito discreto y avanzando posteriormente hacia el ámbito continuo. En la primera tarea se presenta una sucesión numérica y se solicita calcular sus primeras diferencias. Posteriormente, se pide sumar dichas diferencias con el propósito de reconstruir la sucesión original, para mostrar el carácter inverso de los procesos de resta y suma. A continuación, se plantea una transición del ámbito discreto al continuo mediante la reinterpretación de la sucesión como una función continua $f(x)$. En este nuevo marco, se solicita reproducir los razonamientos anteriores, identificando los incrementos diferenciales como diferencias infinitamente pequeñas y entendiendo su suma como un proceso continuo. Este proceso permite interpretar la integral como una suma infinita de diferencias infinitesimales.

Tarea 1. Dada la sucesión:

$$\{x_i\}=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\ \ldots$$

a) Calcule la diferencia entre dos términos consecutivos, es decir, calcule la sucesión x_{i+1}-x_i=$\{y_i\}$.
b) Obtenga el término n_8 de $\{x_i\}$ a partir de la sucesión $\{y_i\}$. Explique el procedimiento.
c) Sea la sucesión de números cuadrados:

$$\left\{z_i^2\right\} = 0,1,4,9,16,25,36$$

Obtenga el término n_7 de $\left\{z_i^2\right\}$ a partir de sus primeras diferencias. Explique el procedimiento.

d) ¿Cómo calcularía el término 25 de la sucesión $\{K_i^n\}$? Razone su respuesta.
e) Sea ahora $f(x)=x$ una función continua. Si llamamos dy a sus diferencias, que en este caso serán infinitamente pequeñas, ¿cómo calcularía $f(4)$ por medio de estas diferencias?

En la segunda tarea se introdujeron explícitamente las ideas de Leibniz sobre sumas y diferencias infinitesimales para interpretar la integral definida como un proceso de suma continua de diferencias. Como punto de partida, se consideró el área bajo la curva como la suma de diferencias asociadas a una sucesión, dondem dx representa el número de términos y dy_i sus diferencias.

Para una función continua $f(x)$ en [a, b], la suma de diferencias discretas con particiones cada vez más finas (dx=1, dx=0,5, etc.) genera aproximaciones decrecientes del área bajo la curva, interpretadas gráficamente como sumas de rectángulos. Al tender dx→0 y aumentar indefinidamente el número de diferencias, estas sumas convergen a la integral definida: $\int_a^b f(x)dx$.

Aunque Leibniz desarrolló distintas aproximaciones al cálculo, como el método inverso de las tangentes y el problema de las cuadraturas (Scriba, 1965), en este trabajo se adopta la perspectiva que concibe la integral como el límite de un proceso de suma de diferencias. Desde este enfoque, integrar consiste en sumar de manera continua las imágenes de la función, mientras que derivar consiste en restar sus diferencias infinitesimales. Esta interpretación dota de significado al símbolo $\int$, concebido por Leibniz como una S alargada derivada de *summa* y refuerza la comprensión de la integral definida como un proceso de suma continua que generaliza las sumas discretas**.**

Tarea 2. Leibniz concibió el área bajo una curva como la suma de las áreas de sus respectivos rectángulos verticales de base $[x, x+\varepsilon]$ y altura $f(x+\varepsilon)$. Observe la siguiente imagen:

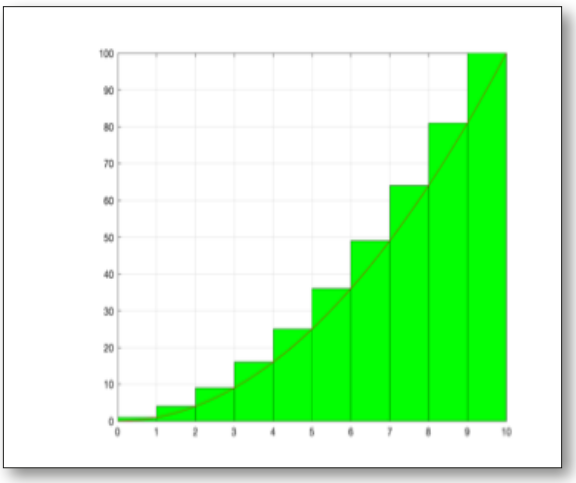


Fig. 4. Partición por exceso. $f(x)=x^2$

a) Calcule sus primeras diferencias, es decir, calcule la sucesión dy_i
b) Calcule el área de los rectángulos mediante la suma de diferencias, es decir, calcule:

$$dy+\sum_1^2 dy_i+\ldots+\sum_1^{10} dy_i$$

c) ¿Qué cree que ocurriría con el área verde si $dx \mapsto 0$ y $dy \mapsto 0$ ¿ Por qué? Razone su respuesta.

d) ¿Por qué se dice que la integral es la inversa de la diferencial? ¿Qué significa para usted el símbolo $\int$? Razone su respuesta.

La tabla 1 recoge los objetivos de la investigación, asociados a un conjunto de variables de control (VC1, VC2 y VC3), derivadas de las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica descritas en la sección anterior. Estas variables guiaron el diseño de las tareas y el análisis a posteriori de las producciones, permitiendo valorar la activación de los razonamientos esperados sobre la articulación entre cálculo diferencial e integral, la reconstrucción de sucesiones y la interpretación de la integral como suma continua. Cada variable de control articula un conjunto de comportamientos matemáticos cuya presencia, ausencia o transformación permitió analizar los razonamientos de los futuros docentes.

Tabla 1.
Variables de control y objetivos formativos

Objetivos asociados	*Variables de control*
OB1. Asociar el cálculo diferencial e integral con las operaciones aritméticas de adición y sustracción. OB2. Interpretar de manera aritmética la relación inversa entre diferenciación e integración y dotar de significado al teorema fundamental del cálculo.	VC1. Articulación aritmética del cálculo diferencial e integral. Asociar, en el campo continuo, la diferencial con la resta y la integral con la suma y llegar a la versión numérica del teorema fundamental del cálculo.
OB3. Comprender los argumentos utilizados por Leibniz para reconstruir una sucesión discreta a partir de la suma de sus diferencias y justificar el paso conceptual hacia una sucesión continua.	VC2. Reconstrucción estructural de una sucesión mediante sumas de diferencias, tanto en el campo discreto como en el campo continuo.
OB4. Comprender el cálculo del área bajo una curva como una suma infinita de diferencias infinitesimalmente pequeñas y relacionar esta interpretación con el cálculo integral actual.	VC3. Interpretación de la integral como proceso de acumulación continua, es decir, ver la integral como una suma infinita de diferencias infinitesimales.

Fase de experimentación

Las tareas se implementaron en una sesión de dos horas centrada en los argumentos de Leibniz sobre sumas y diferencias en el Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, especialidad de Matemáticas. Participaron trece estudiantes con formación diversa: matemáticos (7), físicos (5) e ingenieros (1), lo que permitió observar distintos enfoques y estrategias. La mayoría eran recién graduados, salvo un participante con mayor distancia respecto a su formación inicial. Se organizaron cuatro grupos (uno de cuatro y tres de tres estudiantes) para favorecer la discusión y la explicitación de razonamientos, analizándose las producciones grupales y no individuales.

La sesión comenzó con una contextualización histórica realizada por uno de los autores, seguida del trabajo autónomo de los grupos para resolver las tareas, sin intervención de los investigadores. La recogida de datos incluyó las grabaciones de las interacciones grupales, posteriormente transcritas con consentimiento informado y las producciones escritas. La combinación de ambas fuentes permitió analizar los razonamientos, las estrategias y las soluciones desarrolladas.

Fase *a posteriori*

En esta fase se confrontaron los datos obtenidos durante la implementación con los objetivos establecidos en el análisis *a priori*. Para ello, se analizaron las producciones de los grupos en relación con las variables de control derivadas de dichos objetivos (tabla 1), evaluando la activación de los razonamientos esperados. En la sección de resultados, la consecución de cada variable de control se identifica mediante su correspondiente referencia (VC), garantizando la trazabilidad entre los objetivos de la investigación, el diseño de la intervención y las producciones del estudiantado.

El análisis fue realizado a partir de las producciones escritas y las transcripciones de las interacciones orales. Las unidades de análisis fueron segmentos de ambas fuentes, codificados según la variable de control (VC1, VC2 o VC3) que mejor representaba el razonamiento desarrollado. La asignación de los segmentos a las distintas variables de control se realizó por consenso entre los autores, contrastando conjuntamente la información procedente de las producciones escritas y las discusiones orales.

RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados del análisis de las producciones escritas y de las interacciones orales durante la resolución de las tareas formativas. El análisis, estructurado en torno a las variables de control definidas en el análisis *a priori*, permitió identificar avances conceptuales, dificultades y diferencias entre los grupos de trabajo.

En la primera tarea, todos los grupos calcularon correctamente la sucesión de primeras diferencias a partir de la sucesión inicial (figura 5).

$$\{x_i\}=\{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

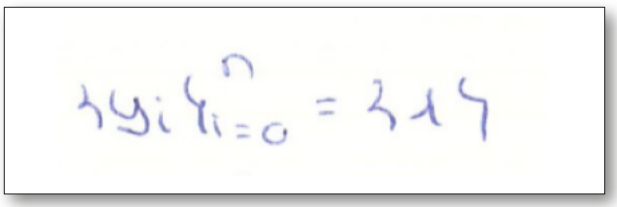


Fig. 5. Sucesión de primeras diferencias. *Nota*: producción escrita del Grupo 2.

A partir de este cálculo, todos los grupos reconocieron que cualquier término de la sucesión puede reconstruirse mediante la suma de sus primeras diferencias, poniendo de manifiesto la relación inversa entre ambos procesos (VC2. Discreto) (figura 6).

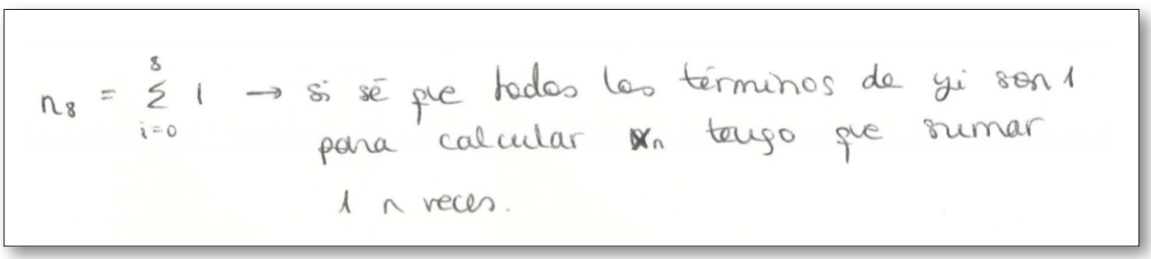


Fig. 6. Reconstrucción del término n_8 a partir de la suma de diferencias. *Nota*: producción escrita del Grupo 1.

La sucesión de los cuadrados puso de manifiesto las primeras dificultades conceptuales. Aunque todos los grupos calcularon correctamente la sucesión de primeras diferencias, correspondiente a la sucesión de números impares, uno de ellos no reconstruyó la sucesión mediante su suma, sino que obtuvo el término general de las primeras diferencias a partir del término anterior de la sucesión de cuadrados. Aunque este procedimiento es matemáticamente correcto, no responde al enfoque leibniziano y limita su generalización a sucesiones n-potenciales (figura 7).

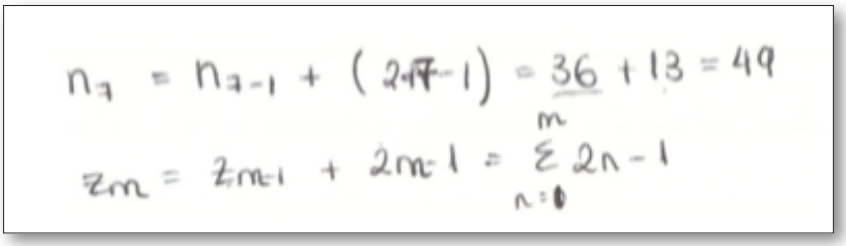


Fig. 7. Resultado correcto, pero no se sigue el planteamiento de Leibniz. *Nota*: producción escrita del Grupo 1.

Tras reconsiderar su estrategia inicial, el Grupo 1 reorientó su razonamiento adoptando los argumentos desarrollados para la sucesión de los números naturales (sucesión 1-potencial). Este cambio se reflejó en la discusión oral, donde se explicitó la necesidad de analizar la sucesión a partir de sus diferencias y su posterior suma:

«Hay que hacerlo con diferencias».
«Claro, esta será igual. Será la suma de todas las diferencias».

El Grupo 1 (figura 8) generalizó los argumentos utilizados en sucesiones 1-potenciales al caso de sucesiones n-potenciales, donde D_i representa la sucesión de primeras diferencias. Esta extrapolación refleja la construcción progresiva de un razonamiento estructural basado en la acumulación de diferencias.

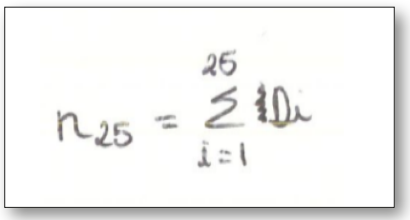


Fig. 8. Sucesión n-potencial. *Nota*: producción escrita del Grupo 1.

El Grupo 2 identificó, al igual que el Grupo 1, que la sucesión de primeras diferencias no era constante y que el término de una sucesión 2-potencial podía reconstruirse mediante su suma. Además, extendió este razonamiento a sucesiones 3-potenciales y observaron que sus terceras diferencias formaban una sucesión constante. Este hallazgo permitió generalizar el procedimiento a sucesiones n-potenciales al reconocer un patrón estructural común (figura 9).

«Vamos a ver qué pasa en exponente 3».
«Claro, la suma de las diferencias es igual al número que buscamos».

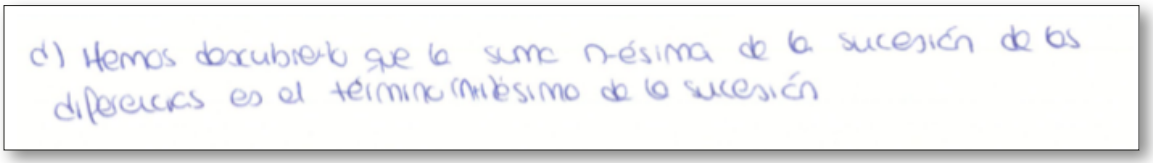


Fig. 9. Generalización a sucesiones n-potenciales. Nota: producción escrita del Grupo 2.

Estos resultados evidenciaron que los grupos 1 y 2 no solo aplicaron el procedimiento de suma de primeras diferencias para reconstruir el término de la sucesión inicial, sino que identificaron la estructura general que rige distintas familias de sucesiones (VC2. Discreto. Sucesiones n-potenciales). Sin embargo, esta generalización no se produjo de forma inmediata ni homogénea. En el Grupo 1, inicialmente se recurrió al cálculo explícito del término general de la sucesión de primeras diferencias, mientras que los grupos 3 y 4 no lograron extender los argumentos al caso de sucesiones n-potenciales. En la transición del ámbito discreto al continuo, mediante el estudio de la función $f(x)=x$, también se observaron diferencias entre los grupos. Los grupos 1, 2 y 4 interpretaron *dy* como una diferencia infinitesimal y establecieron que el valor de la función en un punto, por ejemplo $f(4)$, puede entenderse como la suma continua de sus primeras diferencias infinitesimales (VC2. Continuo) (figura 10).

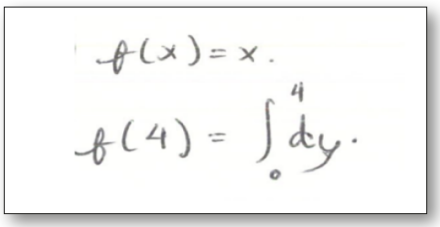


Fig. 10. Extrapolación al campo continuo. *Nota*: producción escrita del Grupo 1.

En el Grupo 3 se observó inicialmente una resistencia a abandonar el razonamiento discreto al interpretar *dy* como una diferencia discreta, es decir, una cantidad muy pequeña pero finita. Esta concepción se reflejó en su discusión oral, donde el proceso continuo se asimiló al caso discreto previamente tratado:

«Es lo mismo que antes, ir sumando primeras diferencias enteras».

No obstante, mediante la comparación con las sucesiones numéricas y la discusión colectiva, el Grupo 3 reinterpretó progresivamente *dy* como una diferencia infinitesimal y su acumulación como un proceso continuo que conduce al límite.

«La suma de infinitas diferencias» (su diferencia en infinitesimal)
«Que es el concepto de integral».

Este proceso permitió atribuir significado a la expresión:

$$f(a) = \sum_{0}^{a} dy \equiv \int_{0}^{a} dy,$$

que el estudiantado interpretó como una generalización continua del procedimiento empleado para reconstruir sucesiones discretas, estableciendo un puente conceptual entre la suma de diferencias en el ámbito discreto (sucesiones numéricas) y en el continuo (ámbito funcional).

Los resultados muestran que los Grupos 1 y 2 comprendieron la reconstrucción de sucesiones mediante la suma de sus primeras diferencias y extendieron este razonamiento a sucesiones n-potenciales al identificar patrones estructurales comunes. Asimismo, los cuatro grupos trasladaron estos argumentos al ámbito continuo, donde *dy* se interpretó como una diferencia infinitesimal cuya acumulación permite comprender la integral como una suma continua, aunque los Grupos 3 y 4 no generalizaron el procedimiento a sucesiones n-potenciales. Esta progresión, desde la reconstrucción de sucesiones hasta su reinterpretación en el continuo, constituye un indicador de la comprensión de la integral definida desde la perspectiva leibniziana.

En la segunda tarea, al abordar el cálculo del área bajo la función $f(x)=x^2$, el Grupo 1 reinterpretó el área como un proceso de suma de primeras diferencias en los ámbitos discreto y continuo (figuras 11 y 12).

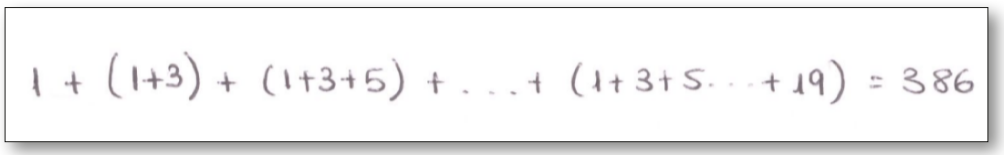


Fig. 11. Proceso de acumulación discreto. *Nota*: producción escrita del Grupo 1.

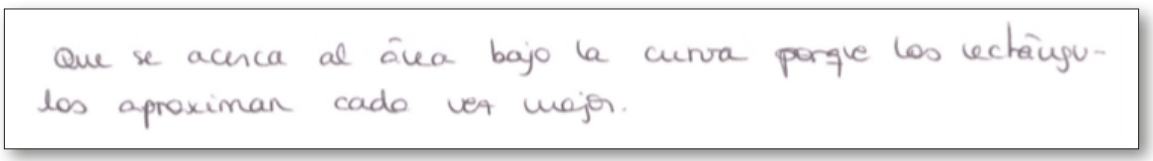


Fig. 12. Proceso de acumulación continuo. *Nota*: producción escrita del Grupo 1.

En el ámbito discreto, los participantes expresaron el área como una suma de diferencias asociadas a una sucesión numérica; en el continuo, reinterpretaron este proceso como una suma de diferencias infinitesimales, incorporando la noción de límite. Esta transición se refleja en la expresión construida por el Grupo 1, donde *p* representa el número de subintervalos del intervalo de integración y $p \longmapsto \infty$ el refinamiento infinito de la partición:

$$\lim_{p\mapsto\infty}\left(dy_1+\sum_{1}^{2}dy_1+\ldots+\sum_{1}^{20}dy_1+\ldots\right)\cdot\mathrm{dx}=\int_{0}^{10}x^2\,dx$$

Los integrantes del Grupo 1 reconocieron que, al aumentar indefinidamente el número de subintervalos $(dx \longmapsto 0)$, también aumenta el número de primeras diferencias hasta hacerse infinito. La suma continua de estas diferencias converge en el área bajo la curva, correspondiente al valor de la integral definida.

Estos argumentos resultaron conceptualmente exigentes para algunos/as integrantes del Grupo 1, especialmente para quienes poseían una formación más orientada a la aplicación de técnicas diferenciales. En estos casos, interpretar la integral como una suma infinita de diferencias infinitesimales supuso un cambio respecto a la concepción centrada en la determinación de primitivas. No obstante, el grupo reconoció que, al considerar diferencias infinitesimales y un número infinito de subintervalos, su suma converge en el área bajo la curva. Este resultado refleja la transición desde una suma finita en el ámbito discreto a una suma infinita en el continuo, constituyendo un indicador de la comprensión de la integral definida (VC3).

Un resultado particularmente significativo es que el Grupo 1 estableció explícitamente la relación entre diferencial e integral como procesos inversos, a partir del trabajo desarrollado en el ámbito dis-

creto con las operaciones elementales de sumar y restar. En este contexto, la diferencial se asoció al concepto de resta en el ámbito continuo, mientras que la integral se vinculó al concepto de suma y es entendida como el proceso de recomposición mediante la suma continua de diferencias infinitesimales. Esta conceptualización se evidenció en la discusión oral del grupo:

«Integrar es sumar y la diferencial es hacer diferencias».
«Al final son procesos inversos».

La perspectiva adoptada permitió atribuir un significado numérico y conceptual al teorema fundamental del cálculo, no como una regla que vincula la integral y la derivada, sino como la formalización de una estructura matemática que el estudiantado reconstruye progresivamente en los ámbitos discreto y continuo (VC1).

En síntesis, los resultados evidencian que los futuros profesores desarrollaron una comprensión progresiva de la integral, iniciada en la reconstrucción de sucesiones mediante la suma finita de diferencias, extendida a sucesiones n-potenciales y culminada en su reinterpretación en el ámbito continuo, donde las diferencias se conciben como infinitesimales y su acumulación mediante el límite formaliza la integral.

Este proceso no fue homogéneo y se identificaron dificultades, especialmente en la transición al continuo y en el abandono de enfoques diferenciales. En este contexto, el Grupo 1 logró articular aritméticamente el cálculo diferencial e integral al asociar la diferencial con la resta y la integral con la suma, hasta llegar al teorema fundamental del cálculo y a una comprensión del área bajo la curva como acumulación mediante una suma infinita de diferencias infinitesimales.

En conjunto, los resultados muestran que los grupos articularon las ideas de suma y diferencia en distintos registros, otorgando a la integral definida un significado numérico que trasciende su interpretación como antiderivada.

La tabla 2 sintetiza las principales evidencias identificadas en cada grupo en relación con las variables de control definidas.

Tabla 2.
Síntesis de las evidencias obtenidas en las tareas según las variables de control

Variable de control	*Evidencias principales*	*Grupos*
VC1. Reconstrucción de sucesiones (Tarea 1)	Todos los grupos reconstruyen sucesiones mediante la suma de diferencias. Los Grupos 1 y 2 generalizan el procedimiento a sucesiones *n*-potenciales.	G1, G2, G3 y G4 (generalización: G1 y G2)
VC2. Transición al continuo (Tarea 1)	Los cuatro grupos extrapolan el razonamiento al ámbito continuo, aunque el Grupo 3 requiere discusión para reinterpretar la diferencial como diferencia infinitesimal.	G1, G2, G3 y G4
VC3. Integral como suma continua de diferencias (Tarea 2)	El Grupo 1 interpreta la integral como límite de una suma continua de diferencias infinitesimales y relaciona el refinamiento de la partición con el proceso de acumulación.	G1

Nota: la Tarea 1 fue analizada en los cuatro grupos. La Tarea 2 se ilustra mediante la producción del Grupo 1, al ser el único que completó íntegramente la tarea y desarrolló los razonamientos asociados a la variable de control VC3.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados sugieren que el trabajo con sumas y diferencias, desarrollado inicialmente en el ámbito discreto y extendido al continuo, puede constituir una vía adecuada para reconstruir conceptualmente la integral en la formación inicial del profesorado de matemáticas. Esta reconstrucción resulta especialmente relevante a la luz del cuestionario diagnóstico, que evidenció una fuerte dependencia de procedimientos algorítmicos, en particular de la regla de Barrow, aplicada de forma automática y desprovista de significado.

En consonancia con estudios previos (Serhan, 2025; Artigue, 2001), el futuro profesorado tendía a identificar la integral como la operación inversa de la derivada, reduciendo su comprensión a una relación operativa mediada por el teorema fundamental del cálculo. Frente a ello, la propuesta fundamentada en los argumentos de Leibniz ofrece una alternativa centrada en los procesos de suma y resta, y en la interpretación de la integral como suma continua de diferencias infinitesimales (Remaki, 2021; Muñoz et al., 2023).

La secuencia de tareas, fundamentada en un análisis histórico, parece favorecer una transición progresiva desde razonamientos discretos hacia razonamientos continuos. Aunque este tránsito no fue homogéneo, la mayoría del estudiantado articuló coherentemente las nociones de suma y diferencia para construir el concepto de integral. En particular, el trabajo con sucesiones y la reconstrucción de sus términos mediante la suma de primeras diferencias resultó clave para interpretar la integral como suma continua de diferencias infinitesimales (Remaki, 2021; Muñoz et al., 2023), vinculándola con procesos de acumulación infinita y no únicamente con el cálculo de una antiderivada.

Este enfoque prioriza la comprensión conceptual frente al uso procedimental de reglas de cálculo (Serhan, 2015; Artigue, 2001) y puede contribuir a superar interpretaciones de la integral como mera consecuencia del cálculo diferencial (Orton, 1983; Tall y Vinner, 1981; Greefrath et al., 2021). Asimismo, resignifica la relación entre diferencial e integral al interpretar la primera como una resta en el ámbito continuo y la segunda como el proceso inverso de recomposición mediante una suma continua de diferencias. De este modo, el teorema fundamental del cálculo deja de entenderse como un vínculo exclusivamente operativo entre derivación e integración para interpretarse como la formalización de la relación entre suma y resta en el continuo. Este resultado coincide con las dificultades descritas por Dreyfus (1991) y con las observaciones de Artigue (1991) sobre la tendencia a «calcular primitivas en lugar de integrar», sugiriendo que un enfoque históricamente fundamentado puede contribuir a reconfigurar dicha comprensión.

Desde una perspectiva didáctica, la investigación muestra que es posible abordar la integral sin recurrir exclusivamente al cálculo de primitivas, interpretándola como suma infinita de diferencias infinitesimales y recuperando su significado geométrico y conceptual (Tall y Rashidi Razali, 1993; Serhan, 2015; Artigue, 1995b). Esto puedo ampliar el repertorio didáctico del profesorado y reforzar el valor formativo de la historia de las matemáticas cuando se utiliza como recurso didáctico y no como mera contextualización (Jankvist, 2009, 2010, 2011). En particular, el estudio de los argumentos de Leibniz permitió comprender la construcción histórica de la integral a partir de procesos de suma y resta que la enseñanza habitual suele ocultar tras formulaciones formales. En este sentido, la historia constituye un recurso para hacer visibles los procesos de construcción conceptual y anticipar las dificultades cognitivas del estudiantado.

En definitiva, esta investigación sugiere que la incorporación de argumentos históricos cuidadosamente seleccionados puede enriquecer la formación inicial del profesorado de matemáticas (Ignatuschina y Zuboba, 2025). Los resultados indican que la secuencia formativa favorece la comprensión conceptual de la integral al proporcionar un marco coherente que integra los ámbitos discreto y continuo y permite interpretarla a partir de operaciones elementales como la suma y la resta. Además, abre nuevas posibilidades para integrar la historia de las matemáticas como recurso para la comprensión conceptual y la enseñanza de los contenidos.

Limitaciones del estudio

El presente estudio presenta algunas limitaciones que deben considerarse al interpretar sus resultados. En primer lugar, la investigación se centra en una intervención desarrollada con un grupo reducido de futuros profesores de matemáticas, por lo que los resultados deben interpretarse en su contexto específico. En segundo lugar, el estudio se orienta a analizar la comprensión conceptual de la integral definida durante la resolución de dos tareas, sin evaluar la transferencia de estos aprendizajes al diseño o la implementación de propuestas de enseñanza. En consecuencia, será necesario desarrollar investigaciones posteriores que analicen en qué medida esta comprensión conceptual se refleja en la práctica docente del futuro profesorado de matemáticas.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1991). Analysis. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Kluwer Academic Publishers.

Artigue, M. (1995a). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). Una Empresa Docente.

Artigue, M. (1995b). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). Una Empresa Docente.

Artigue, M. (2001). What can we learn from educational research at the university level? En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 207-220). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_21

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Barrow, I. (1910). *The geometrical lectures of Isaac Barrow* (J. M. Child, Trans.). Open Court. (Trabajo original publicado en 1670).

Bos, H. J. M. (1974). Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus. *Archive for History of Exact Sciences*, *14*(1), 1-90. https://doi.org/10.1007/BF00327456

Burgos, M., Bueno, S., Godino, J. D. y Pérez, O. (2021). Onto-semiotic complexity of the definite integral: Implications for teaching and learning calculus. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, *10*(1), 4-40. https://doi.org/10.17583/redimat.2021.6778

Castillo-Garsow, C., Johnson, H. L. y Moore, K. C. (2013). Chunky and smooth images of change. *For the Learning of Mathematics*, *33*(3), 31-37.

Clark, K. M. (2012). History of mathematics: Illuminating understanding of school mathematics concepts for prospective mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(1), 67-84. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9361-y

Clark, K., Kjeldsen, T., Schorcht, S., Tzanakis, C. y Wang, X. (2016). History of mathematics in mathematics education: Recent developments. *History and Pedagogy of Mathematics*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01349230

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Kluwer Academic Publishers.

Ely, R. (2010). Nonstandard student conceptions about infinitesimals. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 117-146. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0117

Esteve, M., González, M. T. y Fuertes, M.A. (2026). The latitude of the forms. An asset in the teaching and learning of Integral Calculus. Springer. Press.

Fauvel, J. y van Maanen, J. (Eds.). (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(2), 131-143. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9070-0

Galante, D. (2014). The use of the history of mathematics in the teaching of pre-service mathematics teachers. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, *3*(2), 110-120. https://doi.org/10.4471/redimat.2014.45

Gil, D. (1980). *La enseñanza de las matemáticas y las ciencias*. Siglo XXI.

González-Martín, A. S. (2006). Enseñanza y aprendizaje del concepto de integral definida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 39-64.

González-Martín, A. S. (2009). El concepto de integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(1), 5-20.

Greefrath, G., Vorhölter, K. y Kaiser, G. (2021). Basic mental models of integrals: Theoretical conception, development of a test instrument, and first results. *ZDM Mathematics Education*, 53, 1303-1315. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01207-0

Guicciardini, N. (1989). *The development of Newtonian calculus in Britain, 1700–1800*. Cambridge University Press.

Harel, G. y Sowder, L. (2005). Advanced mathematical thinking at any age: Its nature and its development. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 27-50. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0701_3

Ho, W. K. (2008). *Using history of mathematics in the teaching and learning of mathematics in Singapore*. En *Proceedings of the 1st RICE*. Raffles Institution. https://www.semanticscholar.org/paper/Using-history-of-mathematics-in-the-teaching-and-of-Ho/7a29dadd8fcdd6184fb1457f11dfdba06523ceef

Ignatuschina, I. V. y Zuboba, I. K. (2025). Application of mathematics history in integral calculus teaching under conditions of social isolation. En A. L. Semenov et al. (Eds.), *Structural and technological transformation of education in the post-pandemic period: Problems and prospects* (pp. 117-125). Springer Nature Switzerland. https://doi.org/10.1007/978-3-031-84039-5_12

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the «whys» and «hows» of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 235-261. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9

Jankvist, U. T. (2010). An empirical study of using history as a «goal». *Educational Studies in Mathematics*, *74*(1), 53-74. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9227-8

Jankvist, U. T. (2011). Anchoring students' metaperspective discussions of history in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(4), 346-385.

Katz, V. J. (2009). *A history of mathematics: An introduction* (3rd ed.). Pearson Addison-Wesley. https://www.math.mcgill.ca/darmon/courses/history/katz.pdf

Katz, M. y Sherry, D. (2013). Leibniz's infinitesimals: Their fictionality, their modern implementations, and their foes from Berkeley to Russell and beyond. *Erkenntnis*, *78*(3), 571-625. https://doi.org/10.1007/s10670-012-9370-y

Klein, F. (1978). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Geometry* (E. R. Hedrick y C. A. Noble, Trans.). Dover. (Trabajo original publicado en 1908).

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press.

Knobloch, E. (2002). From Leibniz to nonstandard analysis. *Historia Mathematica*, *29*(2), 141-152. https://www.sciencedirect.com/journal/historia-mathematica

Leibniz, G. W. (1858). *Mathematische Schriften* (C. I. Gerhardt, Ed., Vol. 5). Asher. (Trabajos originales publicados en 1684 y 1686).

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Lawrence Erlbaum.

Maza, J. M. (1994). *Historia de la matemática y enseñanza*. Síntesis.

Muñoz, J. (2000). La enseñanza del cálculo integral: Aspectos conceptuales y dificultades de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3*(2), 189-207.

Muñoz, W., León, O. L. y Font, V. (2023). *A Visualization in GeoGebra of Leibniz's Argument on the Fundamental Theorem of Calculus*. *Axioms*, *12*(10), 1000. https://doi.org/10.3390/axioms12101000

National Council for Accreditation of Teacher Education (2003). *Standards for secondary mathematics teachers*. NCATE.

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(1), 1-18. https://doi.org/10.1007/BF00410540

Rabouin, D. (2015). Leibniz's rigorous foundations of the method of indivisibles. En V. Jullien (Ed.), *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited* (pp. 347-364). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-00131-9_15

Remaki, A. (2021). *L'art combinatoire en tant qu'art d'inventer chez Leibniz, sur la période 1672–1680*. (Tesis doctoral, Université Paris Cité). HAL. https://theses.hal.science/tel-03948833

Schoenfeld, A. H. y Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education* (vol. 2, pp. 321-354). Sense Publishers.

Scriba, C. J. (1963). *The inverse method of tangents: A dialogue between Leibniz and Newton (1675–1677). Archive for History of Exact Sciences*, *2*(2), 113-137. http://users.uoa.gr/~apgiannop/Sources/Scriba-inverse-method-of-tangents.pdf

Serhan, D. (2015). Students' understanding of the definite integral concept. *International Journal of Research in Education and Science*, *1*(1), 84-88.

Sealey, V. y Oehrtman, M. (2015). Understanding definite integrals: Learning through quantity and accumulation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(2), 230-274.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Sullivan, K. (1976). The teaching of elementary calculus using the nonstandard analysis approach. *The American Mathematical Monthly*, *83*(5), 370-375. https://doi.org/10.2307/2318657

Tall, D. (1993). Students' difficulties in calculus. En *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus (ICME-7)*. Université Laval.

Tall, D. y Rashidi Razali, M. (1993). Diagnosing students' difficulties in learning mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *24*(2), 209-222. https://doi.org/10.1080/0020739930240206

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Thompson, P. W. y Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. En M. P. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education* (pp. 43-52). MAA.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.20.4.0356

Yan, X., Marmur, O. y Zazkis, R. (2020). Calculus for teachers: Perspectives and considerations of mathematicians. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *20*(2), 355-374. https://doi.org/10.1007/s42330-020-00090-x

History in Teacher Education: An Empirical Study of Leibniz's Calculus

Miguel Esteve Blasco, María Teresa González Astudillo, Miguel Ángel Fuertes Prieto, José María Chamoso Sánchez, María Mercedes Rodríguez Sánchez.
Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca, Salamanca, Castilla y León, España
miguel.esteve@usal.es, maite@usal.es, fuertes@usal.es, jchamoso@usal.es, meros@usal.es
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9511-274X, https://orcid.org/0000-0003-4800-365X , https://orcid.org/0000-0002-6914-6871, https://orcid.org/0000-0002-4943-4657, https://orcid.org/0000-0002-1020-6681

The teaching of integral calculus often prioritises the application of procedures and finding antiderivatives over a conceptual understanding of the definite integral. This approach can make it difficult for prospective Mathematics teachers to interpret the integral as a process of accumulation, coordinate its representations and understand the relationship between integration and differentiation. In this context, the history of Mathematics can make it possible to reconstruct the problems, methods and obstacles from which concepts emerged and to transform them into learning situations.

The aim of this study is to analyse how a sequence of tasks grounded in Leibniz's perspective supports prospective Mathematics teachers' conceptual understanding of the definite integral. The proposal draws on Leibniz's idea that a sequence can be reconstructed by summing its first differences and then extends this reasoning from the discrete to the continuous domain. Accordingly, the differential is interpreted as an infinitesimal subtraction and the integral as a continuous sum of infinitesimal differences. The Fundamental Theorem of Calculus is thereby given a numerical meaning that is linked to the inverse nature of addition and subtraction.

A qualitative methodology based on didactical engineering was adopted and structured into four phases: preliminary analysis, a priori analysis, experimentation and a posteriori analysis. During the preliminary phase, a historical-epistemological analysis of integral calculus was carried out and a diagnostic questionnaire was administered to identify difficulties related to infinity, sequences, series and reliance on differentiation techniques when calculating areas. Based on these results and the study of Leibniz's arguments, two tasks were designed. The first focused on reconstructing sequences by summing their first differences and extending this reasoning to the continuous domain. The second examined the area under a curve as the limit of a continuous sum of infinitesimal differences and promoted the interpretation of the integral and the differential as inverse processes.

The experiment was conducted in a two-hour session with thirteen students enrolled in a Master's degree in Secondary Teacher Education who are specialising in Mathematics. The data consisted of written work and transcriptions of oral interactions. The analysis was organised around three control variables: the arithmetical relationship between differential and integral calculus; the reconstruction of sequences in the discrete and continuous domains; and the interpretation of the integral as continuous accumulation.

The results show that all groups reconstructed sequences by summing their differences. Two groups generalised the procedure to n-power sequences by recognising common patterns. All four groups transferred the reasoning to the continuous domain, although they encountered difficulties in reinterpreting the differential as an infinitesimal difference and moving beyond reasoning characteristic of the discrete domain. One group successfully completed the second task, conceived the area under the curve as the limit of a continuous sum of infinitesimal differences and established that integrating is equivalent to summing, whereas differentiating is equivalent to calculating differences, thereby assigning the Fundamental Theorem of Calculus a conceptual rather than merely operational meaning.

Overall, the sequence supported the transition from discrete to continuous reasoning and enabled the integral to be reconceptualised as accumulation, beyond its identification with the antiderivative. Although the results should be interpreted in the light of the small sample size and the fact that transfer into teaching practice was not examined, the study highlights the potential of a historical-epistemological reconstruction to enrich initial teacher education and broaden prospective teachers' pedagogical repertoire for the teaching of integral calculus.