https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6334
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Justificación de las propiedades distributiva y conmutativa del producto en primaria

Justification of the Distributive and Commutative Properties of the Product in Primary School

Rafael Ramírez Uclés, Sandra Fuentes
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España,
rramirez@ugr.es, sandrafuentesm@gmail.com,
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8462-5897, https://orcid.org/0000-0002-1249-0233

Mathías A. López, Bárbara M. Brizuela
Departamento de Educación, Tufts University, Estados Unidos
mathias.lopez@tufts.edu, barbara.brizuela@tufts.edu
ORCID: https://orcid.org/0009-0000-4834-0037, https://orcid.org/0000-0002-1571-8977

RESUMEN • Se presenta una propuesta de innovación para la justificación de las propiedades distributiva y conmutativa del producto en Educación Primaria. Atendiendo a las nuevas directrices curriculares que fomentan el desarrollo del pensamiento algebraico, se plantean dos sesiones focalizadas en la comprensión conceptual de ambas propiedades en la construcción de las tablas de multiplicar en segundo ciclo. Para evaluar el impacto de la innovación, analizamos las justificaciones de 28 estudiantes (de 8 a 12 años) al entrevistarles sobre la generalización de las propiedades mediante experimentos cruciales y ejemplos genéricos. Los resultados muestran una mayor frecuencia de justificaciones aritméticas y una mayor complejidad en la propiedad distributiva, y evidencian el potencial en estas edades para elaborar justificaciones generales.

PALABRAS CLAVES: Aritmética generalizada; Justificación; Propiedad conmutativa; Propiedad distributiva.

ABSTRACT • An innovative proposal is presented for the justification of the distributive and commutative properties of the product in Primary Education. In line with new curricular guidelines that foster the development of algebraic thinking, two sessions are proposed, which focus on developing a conceptual understanding of both properties in the construction of multiplication tables in the second cycle. To evaluate the impact of the innovation, we analyzed the justifications of 28 students (8 to 12 years old) by interviewing them about the generalization of the properties through crucial experiments and generic examples. The results show a greater frequency of arithmetic justifications and greater complexity in the distributive property, demonstrating the potential to develop general justifications at these ages.

KEYWORDS: Generalized arithmetic; Justification; Commutative property; Distributive property.

Recepción: octubre 2024 • Aceptación: agosto 2025 • Publicación: noviembre 2025

Ramírez Uclés, R., Fuentes, S., López, M. A. y Brizuela, B. M. (2025). Justificación de las propiedades distributiva y conmutativa del producto en primaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *43*(3), 179-200.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6334

INTRODUCCIÓN

La nueva perspectiva curricular de primaria en España (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022) ha resaltado el desarrollo del pensamiento algebraico. Desde la investigación en educación matemática, en los últimos años se ha destacado el papel del *early algebra* y se han producido numerosas investigaciones (Bosch et al. 2024; Ellis y Ozgur, 2024) que sustentan la introducción del pensamiento algebraico en primaria e incluso en infantil (Ramírez-Uclés et al., 2024). Estos trabajos evidencian la capacidad de los estudiantes para generalizar y representar relaciones matemáticas, razonar con estas y justificar generalizaciones (Blanton et al., 2011). En el contexto de generalización, una línea de investigación abierta en aritmética generalizada es la comprensión de las propiedades aritméticas (Ramírez-Uclés et al., 2022). Se demandan procesos de enseñanza que favorezcan la comprensión conceptual más allá del uso de las propiedades en procedimientos y reglas memorizadas y que permitan una mayor flexibilidad en su uso (Star y Sylianides, 2013).

Un elemento para favorecer la comprensión relacional es conocer el qué y el porqué de los contenidos que se están aprendiendo (Skemp, 2006). Otros elementos asociados a la comprensión son propuestas con una demanda cognitiva adecuada, favoreciendo que los estudiantes hagan generalizaciones y justificaciones de sus soluciones (Stein et al., 2000). Burkhardt y Swan (2013) también resaltan el papel de las conexiones dentro de las matemáticas, evitando los contextos artificiales. En este sentido, consideramos que el reconocimiento de las propiedades aritméticas en las tablas de multiplicar es un contexto dentro de las matemáticas que puede resultar familiar al estudiante para usar los conocimientos previos adquiridos (Boaler, 1993). El currículo de primaria en España propone la introducción de las propiedades de la multiplicación en contextos que sean cercanos y desafiantes para los alumnos (MEFP, 2022).

Unificando estas ideas, consideramos innovador el diseño de prácticas docentes para introducir en primaria la comprensión conceptual de las propiedades aritméticas, desde la perspectiva del pensamiento algebraico (Cañadas et al., 2019). La innovación que detallamos en este documento pretende facilitar la comprensión relacional de «el qué» y «el porqué». Para ello se afronta un primer objetivo: implementar una propuesta de innovación para la justificación de las propiedades conmutativa del producto y distributiva en el segundo ciclo de primaria. Se contextualiza la innovación en el reconocimiento de las propiedades en las tablas de multiplicar, lo que lleva al estudiantado a representar las regularidades que descubre en la multiplicación. También se presentan ejemplos genéricos y experimentos cruciales para justificar las propiedades. Por otro lado, se espera obtener resultados en la innovación relativos a la capacidad del estudiantado de justificar estas propiedades, estableciendo posibles tipologías o diferencias entre las edades. Con esta finalidad, se aborda un segundo objetivo: analizar el impacto de la innovación realizada mediante entrevistas y comparación de resultados con un grupo control de tercer ciclo de primaria. Para esta comparación se determinan tipologías de estudiantes según el nivel de generalidad alcanzado en sus justificaciones.

Esta innovación y su análisis pretenden mejorar la praxis educativa a través de un cambio originado como respuesta a un problema (Sánchez, 2005), en este caso la comprensión instrumental basada únicamente en reglas aprendidas de memoria. Este cambio podría aportar información relevante a las nuevas recomendaciones metodológicas que establece el currículum.

Este trabajo analiza la implementación de dos sesiones con tareas contextualizadas en las tablas de multiplicar para abordar la justificación de las propiedades conmutativas del producto y distributiva en un centro de Primaria. El análisis del impacto de la innovación indagará en el tipo de justificación atendiendo al nivel de generalización alcanzado, donde esta comprensión se centrará en la generalidad.

La información obtenida, en cuanto al alcance y las diferencias entre los estudiantes de primaria (de 8 a 12 años) relativas a la justificación, aporta datos que pueden ser relevantes para responder a la demanda actual en la introducción del pensamiento algebraico en primaria.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Dentro del álgebra escolar, una de las áreas de interés es la aritmética generalizada (Blanton et al., 2011), donde Kieran (2022) sitúa el tipo de pensamiento algebraico estructural que supone reconocer relaciones, propiedades y estructuras con números, operaciones y expresiones. En general, la propiedad conmutativa del producto (PCP) es representada verbalmente en primaria como «el orden de los factores no altera el producto», e incluso a través de expresiones generales como A x B = B x A. Por otro lado, la propiedad distributiva del producto (PDP) se asocia estrechamente con el uso de los paréntesis (A x (B + C) = A x B + A x C) y afirma que cuando se multiplica un número por la suma de otro dos se puede «distribuir» la multiplicación a cada número y combinar los resultados (Brown, 2013).

Nuestra propuesta de innovación se refiere a la justificación, como un proceso cognitivo complejo asociado a la comprensión conceptual (Crooks y Alibali, 2014). Para ello, en este trabajo utilizaremos la jerarquía establecida en la taxonomía de Anderson y Krathwohl (2001) para clasificar los objetivos de enseñanza ordenados en dimensiones de menor a mayor complejidad: recordar, entender, aplicar, analizar, evaluar y crear. Este modelo permite organizar los objetivos atendiendo a la jerarquía en los procesos cognitivos en una tabla de doble entrada, junto a las dimensiones de conocimiento (factual, conceptual, procedimental y metacognitivo). En esta taxonomía, la justificación se presenta en un nivel alto de complejidad, correspondiente con la dimensión 5, evaluar («chequear»), donde el estudiantado hace juicios basados en criterios y estándares para comprobar la consistencia del razonamiento que se le ha presentado (Mayer, 2002).

En el modelo de niveles de Vermeulen et al. (1993) sobre cómo los sujetos toman conciencia de la PDP, los procesos asociados a la justificación se sitúan en el nivel superior cuando explican la propiedad. En este trabajo esperamos que el estudiantado argumente la veracidad de la propiedad desde un punto de vista general. Cuando se generaliza, extiende el rango de razonamiento más allá de los casos particulares considerados, identificando puntos en común entre ellos y elevando el razonamiento a un nivel superior. El papel relevante de la generalización en el pensamiento algebraico se manifiesta por estar presente en las cuatro prácticas algebraicas fundamentales: generalizar relaciones matemáticas y estructuras; representar relaciones generalizadas en distintas formas; razonar con relaciones generalizadas; y justificar las generalizaciones (Blanton et al., 2011). Así, podemos establecer un mayor nivel de sofisticación en el proceso cognitivo de justificar asociado al rango del razonamiento que el estudiante haya considerado en el nivel de generalidad de los ejemplos, según atienda únicamente a casos particulares o a casos generales (ver tabla 1). La preferencia por la utilización en las justificaciones de los casos particulares o los generales puede determinar diferentes tipologías en el estudiantado que, contextualizadas en las propiedades aritméticas, podrían suponer un estilo de razonamiento influenciado por la mayor habilidad matemática por el uso de múltiples representaciones (Ramírez-Uclés et al., 2022; Seah y Horne, 2020).

Tabla 1.
Nivel de generalidad en el proceso de justificar

Proceso cognitivo	*Nivel aritmético (casos particulares)*	*Nivel en aritmética generalizada (caso general)*
Justificar	Justificación de una situación en particular	Justificación en cualquier situación

Fuente: elaboración propia

En primaria no se aborda la justificación como una prueba formal, sino que adquiere un papel para aprender y explicar (Rocha, 2019), puesto que el proceso de generar un argumento implica profundizar en las ideas, organizar el conocimiento y contrastar. En estos cursos, no se espera que el estudiantado se sitúe en el nivel de «hacer» la justificación de un modo autónomo, pero sí podría ser establecer conexiones entre los procesos y seguir los pasos de un razonamiento lógico.

Stylianides et al. (2024) proponen que investigaciones sobre los tipos de argumentaciones son un campo de gran interés actual en la literatura sobre justificación. En este sentido, podemos abordar y analizar si los estudiantes conocen por qué ciertos procedimientos se utilizan en las tareas propuestas. En el caso particular de las propiedades aritméticas en primaria, establecer argumentos generales resulta complejo, por lo que es relevante el papel del pensamiento algebraico en las justificaciones de los estudiantes asociado al significado de las operaciones, la generalización, la representación y el uso de las variables (Ayala-Altamirano y Molina, 2021). Dependiendo de la caracterización de su pensamiento algebraico, los estudiantes potencialmente pueden alcanzar niveles de justificación más sofisticados (Campbell et al., 2020). Diferentes estudios han evidenciado el potencial de los estudiantes de los últimos cursos de primaria para usar justificaciones empíricas, ejemplos genéricos o justificaciones basadas en ejemplos (Knuth et al., 2009; Lannin, 2005). Incluso en los cursos iniciales de primaria, algunos estudios han evidenciado la capacidad de los estudiantes para justificar la paridad mediante argumentos generales (Strachota et al., 2023). En este trabajo se presentan ejemplos genéricos para evidenciar si el estudiantado percibe la generalidad o solo los justifica empíricamente como un caso particular. Particularmente, en cuanto a la justificación de la propiedad conmutativa, se ha evidenciado que estudiantes de tercer curso de primaria son capaces de utilizar la propiedad conmutativa de la adición para argumentar sus propias decisiones (Blanton et al., 2015). Aunque numerosos trabajos han mostrado que el estudiantado identifica esta propiedad, la representa y la utiliza en la resolución de problemas (entre otros, Pang y Kim, 2018), en primero y segundo de primaria muestran más dificultad en explicarla en comparación con identificarla o expresarla simbólicamente (Carpenter y Levi, 2000). Aunque, al finalizar primaria, los estudiantes tienen mayor rendimiento en la resolución de problemas que implican la propiedad, la comprensión de esta se mantiene consistente en los últimos cursos de primaria (Robinson et al., 2018).

En cuanto a la justificación de la PDP, los trabajos de Vermeulen et al. (1996) mostraron que, con la aplicación de las tareas de alta demanda cognitiva, se incrementaba el conocimiento de la propiedad distributiva en estudiantes de secundaria, pero no en estudiantes de primaria, debido a que estos se enfocaron en realizar únicamente los cálculos sin reflexionar sobre los procesos en un contexto de compras. Otros trabajos también han evidenciado un mejor entendimiento de la PDP cuando los estudiantes discutían, argumentaban ideas y validaban los resultados (Larsson, 2015; Tsai y Chang, 2009).

Dado que la intencionalidad en primaria no es alcanzar pruebas deductivas, se pueden distinguir diferentes tipos de pruebas empíricas (Marrades y Gutiérrez, 2000). En este trabajo se considera este tipo de justificaciones atendiendo a la generalidad con la que se utilizan los números. En las pruebas empíricas es predominante el papel de los ejemplos (Ramírez-Uclés et al., 2024), que pueden ser escogidos:

a) sin ningún criterio (naíf), eligen números al azar y comprueban con ellos si se cumple lo que propone la tarea;

b) seleccionando el ejemplo o la secuencia de ejemplos meticulosamente (experimento crucial); eligen números que siguen un patrón identificado en la tarea propuesta; o

c) mediante ejemplos específicos que representan todo el conjunto sobre el que se argumenta (ejemplos genéricos), expresan que cualquier número puede ser utilizado en la tarea: el resultado seguirá siendo el mismo.

METODOLOGÍA

La toma de datos se realizó en cuatro sesiones: cuestionario inicial, dos sesiones de clase de una hora para cada curso y 6 u 8 entrevistas individuales por curso. La propuesta de innovación que aquí se presenta se corresponde con: *a*) dos sesiones realizadas en segundo ciclo, correspondientes a la identificación de las propiedades conmutativa del producto y distributiva en las tablas de multiplicar y su representación; y *b*) la justificación de las propiedades mediante ejemplos genéricos y experimentos cruciales en una entrevista semiestructurada.

Características y justificación de la innovación

En cuanto a las propiedades objeto de estudio, la innovación se plantea en la identificación de las propiedades en las tablas de multiplicar y la justificación de esta mediante experimentos cruciales y ejemplos genéricos. En el segundo ciclo, la propuesta de enseñanza habitual se basaba en la representación verbal de las propiedades: conocían la regla de la conmutatividad tanto aditiva como multiplicativa, expresada como «el orden de los factores no altera el producto», ya que la habían visto en el desarrollo de sus clases regulares aplicándola a casos particulares numéricos, pero no habían utilizado representaciones gráficas ni simbólicas y tampoco habían trabajado con la propiedad distributiva. Esa propuesta de enseñanza habitual, sin innovación, es la que había recibido el estudiantado del tercer ciclo seleccionado para las entrevistas, cuando cursaban segundo ciclo en años anteriores.

La innovación se justifica en la introducción de dos nuevos objetivos de enseñanza respecto a la propuesta de enseñanza habitual que se llevaba a cabo en el centro. La propuesta habitual viene caracterizada por dos objetivos asociados a los procesos cognitivos de recordar y entender en la tabla de taxonomía (Krathwohl, 2002), que relaciona la dimensión del conocimiento con los procesos cognitivos (tabla 2). La nueva propuesta de innovación añade dos nuevos objetivos en los procesos cognitivos de aplicar y evaluar marcados en negrita en la tabla 2 y que particularizados en el objeto de estudio son: aplicar las propiedades en la construcción de las tablas de multiplicar y justificar las propiedades más allá de casos particulares. Como se ha explicitado en el marco teórico, estos dos nuevos procesos suponen una mayor complejidad.

Tabla 2.
Innovación propuesta con la inclusión de dos nuevos objetivos respecto a la enseñanza habitual

	Recordar	*Entender*	*Aplicar*	*Analizar*	*Evaluar*	*Crear*
Conocimiento factual	Conocer la terminología, detalles específicos y elementos					
Conocimiento conceptual		Conocer los principios que las rigen			**Justificar los principios y generalizaciones**	
Conocimiento procedimental			**Aplicar los criterios de uso**			
Conocimiento metacognitivo						

Fuente: elaboración propia.

Los investigadores y las investigadoras, en cursos anteriores, ya habían impartido sesiones de pensamiento algebraico a este alumnado relativas a la identificación de patrones, expresión de las relaciones funcionales entre dos variables e interpretación y construcción de tablas y gráficos. En este sentido, se espera que no hubiera dificultades en ambos ciclos relativos al uso de representaciones simbólicas. No obstante, para familiarizar al grupo control con la representación de las propiedades, se imparte en el tercer ciclo la segunda sesión dada en el primer ciclo, en la que no se aborda la justificación ni la identificación en las tablas de multiplicar.

Respecto a la propuesta habitual de construcción de tablas de un modo recurrente y posteriormente introducir las propiedades mediante su definición y ejemplificándose con hechos numéricos, consideramos tres innovaciones en el análisis didáctico de la sesión (Rico, 2013) en cuanto al significado de la multiplicación: sumas repetidas y producto cartesiano, multiplicidad en la representación de las propiedades (verbal, simbólica y gráfica) y «distribuir» la multiplicación a cada número y combinar los resultados (Brown, 2013).

Las dos sesiones abordan los elementos necesarios para poder presentar al estudiantado las justificaciones de las dos propiedades mediante experimentos cruciales o ejemplos genéricos. Estos experimentos se presentan en las entrevistas personales para indagar individualmente en las respuestas e interacciones con el sujeto.

Participantes

Las sesiones fueron impartidas por los investigadores con la asistencia del correspondiente maestro/a del grupo clase. En las sesiones participaron un total de 100 estudiantes correspondientes a todo el estudiantado de esos cursos de un centro público de Granada: 25 alumnos por curso de tercero, cuarto, quinto y sexto de primaria (edades de 8 a 12 años).

Para analizar el impacto de la innovación en cuanto a la justificación de estas propiedades, se analizaron las entrevistas realizadas a una selección de 16 estudiantes de segundo ciclo junto con otro grupo de 12 estudiantes del tercer ciclo, que se utiliza como grupo control para comparar los resultados.

En este documento se analizan las 28 entrevistas individuales, en las que se desglosan 16 de segundo ciclo (3.° y 4.° de primaria) y 12 de tercer ciclo (5.° y 6.° de primaria). Se entrevistó a 28 estudiantes (8 de tercero, 8 de cuarto, 6 de quinto y 6 de sexto de primaria), con edades comprendidas entre 8 y 12 años. Se decidió que fuese mayor el número de estudiantes del segundo ciclo, porque se evidenció en el cuestionario y en el desarrollo de las sesiones que algunos de ellos no extendían suficientemente sus respuestas o las dejaban en blanco, lo que podría limitar la cantidad de información recogida en la toma de datos de las entrevistas. Los estudiantes de cada curso se seleccionaron proporcionalmente según tres grupos de rendimiento (bajo, medio o alto), determinado por el profesorado regular del aula, en función de sus calificaciones y el rendimiento en el cuestionario inicial. Esta caracterización únicamente se utilizó para la selección de los sujetos, sin distinguirse posteriormente el grupo en el análisis de datos.

Sesiones de clase

La propuesta de innovación para el segundo ciclo estaba contextualizada en las tablas de multiplicar, presentadas como oportunidad de aprendizaje para identificar la PCP y PDP en la construcción de la tabla de cualquier número a partir de las tablas conocidas de números más pequeños. Más allá de la construcción habitual de la tabla por recurrencia asociada a la comprensión de la multiplicación como suma reiterada, se propuso una forma diferente de construir la tabla de cualquier número a partir de las tablas de números inferiores. Para ello, en la construcción de la tabla n, se pretendió que los niños identificaran la PCP para los casos hasta *nx(n-1)* y que para el resto de los casos aplicaran la PDP, como se muestra en la figura 1 para la $n = 5$, construyendo la tabla del 5 a partir de las tablas del 2 y del 3.

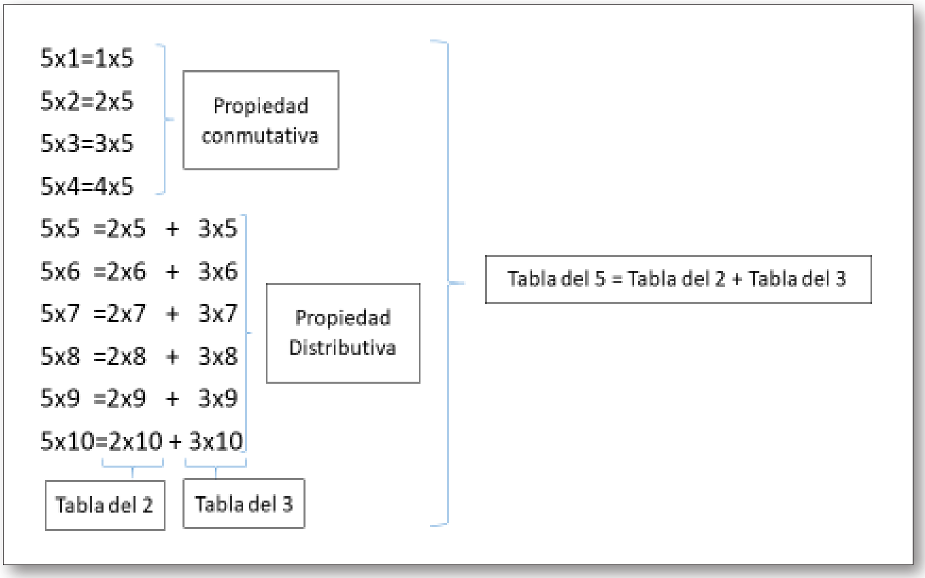

Fig. 1. PCP y PDP en la construcción de la tabla del 5 a partir de tablas conocidas.

El contexto para la segunda sesión del segundo ciclo era un juego de tarjetas para que de manera colaborativa identificaran las propiedades y las representaran inicialmente de un modo intuitivo y consensuado por el grupo y, posteriormente, de un modo simbólico.

Sesión 1 para tercero y cuarto de primaria: LAS TABLAS DE MULTIPLICAR

Los objetivos de enseñanza de esta sesión eran:

1. Identificar la PCP y PDP en las tablas de multiplicar.
2. Utilizar la PCP y PDP para construir las tablas de multiplicar.
3. Comprender el significado de la multiplicación como una suma repetida y como un producto cartesiano.
4. Expresar simbólicamente la PCP y la PDP a partir de las tablas de multiplicar.

Inicialmente, se pidió a los estudiantes que completaran la tabla del 1 y se les retó de un modo abierto a que identificaran la regularidad que habían observado (propiedad del elemento neutro). Posteriormente, se les planteó a los estudiantes completar las tablas del 2, 3 y 4, utilizando principalmente la iteración. Se preguntó qué elementos de la tabla del 6 podrían completar sabiendo las tablas del 1 al 5, con la intención de que identificaran que hasta 6 x 5 son resultados que aparecían en las tablas anteriores utilizando la PCP. En ese momento, se representó mediante rectángulos girados de dos filas y tres columnas las multiplicaciones de 2 x 3 y 3 x 2 (ver figura 2), aludiendo al significado cartesiano de la multiplicación. Finalmente, se les presentó la representación verbal y simbólica (A x B = B x A) de la PCP y se les cuestionó sobre la justificación.

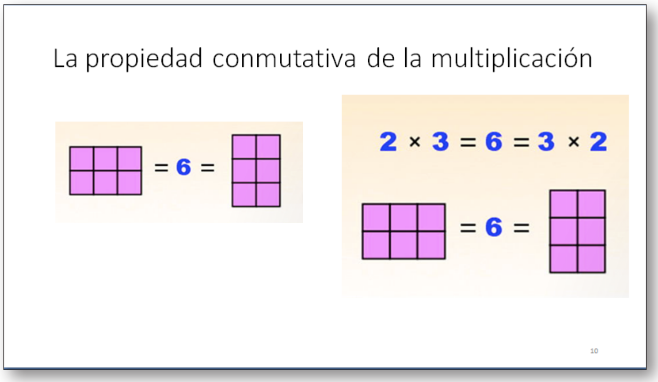

Fig. 2. Representación visual de la propiedad conmutativa con modelos rectangulares.

Se inició la segunda parte de la sesión correspondiente a la PDP entregando a los estudiantes las tablas del 1, 4 y 5, y retándolos a observar alguna regularidad. Del mismo modo, se les planteó identificar la regularidad en la tabla del 7, tanto a partir de las del 2 y del 5 como de las del 3 y 4. Y se les cuestionó sobre las posibles tablas con las que construir la tabla del 9. Se esperaba que en las puestas en común identificaran que la «suma de la tabla del 2 y del 5 es la tabla del 7» (ver figura 3), y a partir de ahí presentar, representar y justificar la PDP en cualquier tabla.

Tabla del 5
5 x 1 = 5
5 x 2 = 10
5 x 3 = 15
5 x 4 = 20
5 x 5 = 25
5 x 6 = 30
5 x 7 = 35
5 x 8 = 40
5 x 9 = 45
5 x 10 = 50

Tabla del 2
2 x 1 = 2
2 x 2 = 4
2 x 3 = 6
2 x 4 = 8
2 x 5 = 10
2 x 6 = 12
2 x 7 = 14
2 x 8 = 16
2 x 9 = 18
2 x 10 = 20

Tabla del 7
7 x 1 = 7
7 x 2 = 14
7 x 3 = 21
7 x 4 = 28
7 x 5 = 35
7 x 6 = 42
7 x 7 = 49
7 x 8 = 56
7 x 9 = 63
7 x 10 = 70

Fig. 3. Tablas del 2, del 5 y del 7.

Sesión 2 para tercero y cuarto de primaria: LAS FAMILIAS

Los objetivos de enseñanza de esta sesión eran:

1. Identificar diferentes propiedades aritméticas (PCP, PDP, conmutativa de la adición, asociativa de la adición y multiplicación, elemento neutro de la suma) en diferentes expresiones alfanuméricas.
2. Expresar las propiedades aritméticas.

Se establecieron grupos aleatorios de cuatro o cinco estudiantes y se les repartieron diferentes etiquetas que contenían expresiones tanto numéricas como simbólicas y alfanuméricas (ver figura 4). Se les retó a que las clasificaran con el criterio que consideraran, que explicaran ese criterio y que inventaran nuevas expresiones que pertenecieran a ese conjunto.

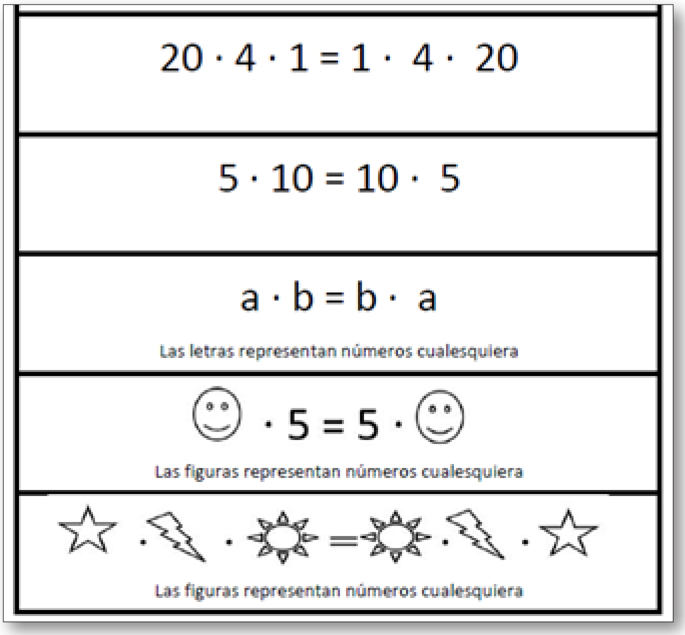

Fig. 4. Ejemplos de etiquetas para la PCP.

Para finalizar se estableció una puesta en común para compartir los criterios utilizados en las clasificaciones, las representaciones utilizadas y la comparación con las propuestas del resto de los grupos.

Esta sesión 2 fue impartida también en quinto y sexto de primaria, pero se extendió en dos días diferentes por considerarse insuficiente el tiempo dedicado a la puesta en común el primer día.

Entrevistas individuales

Las entrevistas fueron semiestructuradas y se realizaron por los investigadores en la biblioteca del centro y constaron de cuatro etapas de las que la segunda y la tercera de ellas forman parte de este trabajo.

En la segunda etapa se les presentó una situación original y contextualizada para justificar la PCP a través de un experimento crucial, se contextualizó la operación 3 x 5 en el reparto de 15 personas en tres habitaciones (ver figura 5). Se numeraron con camisetas a las personas en cada habitación y se redistribuyeron en 5 habitaciones, de modo que compartían habitación los que tenían el mismo número. Se obtuvo así 5 habitaciones de 3 personas. Se les retó a ver si con esta situación se justificaba que 3 x 5 = 5 x 3, y se les cuestionó si podrían repetir la argumentación en el caso 2 x 8. Finalmente, se les pidió justificar la PCP en el caso general N x M, para ver si alcanzaban un nivel de generalidad basado en ejemplos genéricos.

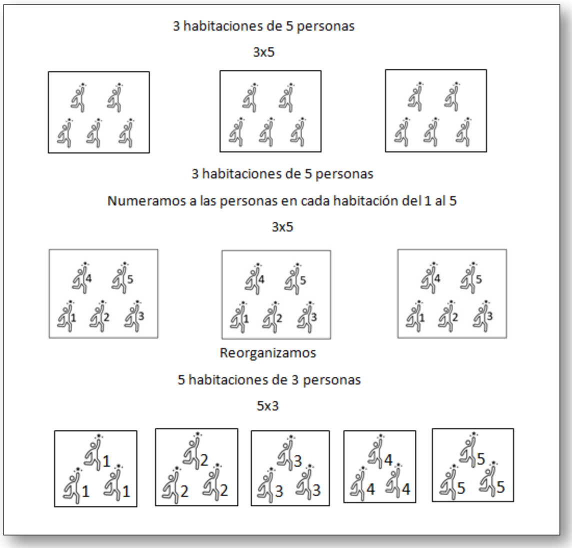

Fig. 5. Parte 2 de la entrevista sobre PCP.

Esta etapa de la entrevista estaba semiestructurada, para que, tras presentar el experimento para el caso 3 x 5, el sujeto lo reprodujera para el caso 2 x 8 y los justificara para el caso general. Las intervenciones clave del entrevistador eran la explicación del experimento, el nuevo caso y el caso general:

I: *Teníamos 5 habitaciones con 3 personas, ¿Lo has comprendido? Entonces tenemos que 3 por 5 nos ha surgido igual a 5 por 3. Esa es nuestra propiedad, la propiedad conmutativa. Entonces si yo ahora te pido que me expliques la propiedad conmutativa en el caso de 2 habitaciones de 8 personas, ¿Cómo lo justificarías?*

I: *Ahora te voy a poner un reto ¿Vale? ¿Y si en vez de haber dos habitaciones de 8 hay N habitaciones de M personas? ¿Cómo se te ocurriría justificarlo?*

En la tercera parte de la entrevista, se pidió a los estudiantes que identificaran la PDP a partir de las tablas de multiplicar, se les cuestionó sobre la argumentación más avanzada como experimento crucial o ejemplo genérico, y se les pidió que la justificaran en un caso general.

I: *Muy bien Vamos a fijarnos en esto ¿Por qué la tabla del 7 la podemos sacar con la tabla del 5 y la tabla del 2?*

I: *Muy bien. Esta es la propiedad distributiva. Entonces, vemos cómo en estas tres tablas, ¿no? Al sumar dos tablas cualesquiera, podemos tener otra tabla, una tercera tabla. ¿Tú crees que esta propiedad la podremos obtener a partir de otras tres tablas? Se puede porque…*

Análisis de datos

Para analizar el impacto de la innovación relativo a la justificación, se indagó en las respuestas aportadas por el estudiantado en las entrevistas individuales finales, tanto escritas como recogidas en la transcripción. Para la PCP, se estableció como unidad de análisis la respuesta completa del estudiante a la segunda parte de la entrevista. Y para la PDP, la respuesta completa a la tercera parte de la entrevista. Puesto que en las entrevistas se le había presentado la justificación como un experimento crucial, se establecieron las siguientes tres categorías para el proceso cognitivo de justificar, tanto en la PCP como en la PDP:

- Aritmético (A): El estudiante presenta una justificación naíf relativa a reproducir un caso particular en un contexto aritmético.
- General (G): El estudiante presenta una argumentación general a partir de un ejemplo genérico.
- No justifica (NJ): El estudiante no presenta ninguna justificación en esa propiedad.

Cada respuesta de los estudiantes recibió un código único, por cada una de las propiedades, codificando cada categoría con los códigos en A, G o NJ. Con el fin de mantener la coherencia en la codificación de los datos, y siendo suficiente una muestra del 20 % de nuestra población, un investigador y una investigadora codificaron las respuestas de 6 de los sujetos seleccionados conforme a criterios de representatividad del total de la muestra, y se obtuvo un índice Kappa de Cohen de 0,71, lo que supuso un acuerdo sustancial (Hallgren, 2012). Tras la puesta en común de acuerdos relativos a las categorías de análisis, el resto de las entrevistas se repartieron entre los dos investigadores. Los sujetos también se representaron, señalando previamente el curso al que pertenecía. Así, el 3S2 es el sujeto S2 del tercer curso.

Esta codificación cualitativa fue posteriormente utilizada en un análisis de datos que permitió matizar las diferencias entre los tipos de justificaciones de ambas propiedades y los dos ciclos. Además, se caracterizaron seis tipologías de estudiantes atendiendo al nivel de generalidad (A, G o NJ) manifestado en cada propiedad (tabla 4):

Tabla 4.
Tipologías

	Justificación en la PCP	*Justificación en la PDP*
Tipo 1	Aritmética	No justifica
Tipo 2	Aritmética	Aritmética
Tipo 3	Aritmética	General
Tipo 4	General	No justifica
Tipo 5	General	Aritmética
Tipo 6	General	General

Fuente: elaboración propia.

Cada tipología viene nombrada por el tipo de justificación evidenciada en la PCP, seguido del tipo de justificación evidenciada en la PDP. Así, por ejemplo, el perfil aritmético-general lo formaban los estudiantes que hubieran presentado justificaciones aritméticas en la PCP y justificaciones generales en PDP. No hubo perfiles asociados a que los estudiantes no justificaran la PCP.

RESULTADOS

Inicialmente se presentan los resultados relativos a los tipos de justificaciones que ha mostrado el estudiantado. Posteriormente, se muestran los resultados relativos a las tipologías de estudiantes.

Tipos de justificaciones

Presentamos los resultados globales relativos a la frecuencia del número de estudiantes en los distintos tipos de justificaciones (ver tabla 5). Por ejemplo, hay 9 estudiantes del segundo ciclo (lo que supone un 56,2 % de dicho ciclo) que evidenciaron una justificación aritmética de la PCP.

Tabla 5.
Número de estudiantes y porcentaje respecto a cada ciclo

	Justificación aritmética		*Justificación general*		*NJ*	
	2.º ciclo	3.er ciclo	2.º ciclo	3.er ciclo	2.º ciclo	3.er ciclo
PCP	9 (56,2 %)	7 (58,3 %)	7 (43,8 %)	5 (41,7 %)	-	-
PDP	10 (62,5 %)	7 (58,3 %)	4 (25 %)	2 (16,7 %)	2 (12,5 %)	3 (25 %)

Fuente: elaboración propia.

En ambas propiedades, la justificación aritmética ha sido más frecuente que la general en los dos ciclos, por lo que, pese a los experimentos cruciales presentados, ha sido mayoritario que los estudiantes sustenten sus justificaciones en casos particulares. En cuanto a las diferencias entre las propiedades, destacamos un menor rendimiento en ambos ciclos respecto a la propiedad PDP frente a la PCP en la justificación general. Se puede interpretar que justificar de un modo general la propiedad PDP a partir de las tablas ha resultado más complejo que la justificación general de la PCP a través del contexto de las habitaciones. Además, esta complejidad viene apoyada por el número de NJ que únicamente aparece en la PDP.

En la tabla 5, respecto a las diferencias entre los ciclos, no se percibieron diferencias notables en la PCP. Es decir, ni la diferencia de edad en los ciclos ni la diferente instrucción recibida en la innovación de la sesión 1 del segundo ciclo relativa a las tablas pueden ayudar a explicar las diferencias en el número de estudiantes que alcanzaron la justificación general de la PCP frente a la aritmética. Se puede interpretar desde una doble perspectiva: *a*) la complejidad para justificar generalmente la PCP en el contexto de las habitaciones no viene marcada por diferencias derivadas de la supuesta mayor comprensión en edades superiores; y *b*) la instrucción recibida por el segundo ciclo respecto a la comprensión de las propiedades a partir de las tablas podría explicar las diferencias esperadas por la edad.

Por el contrario, esta diferencia entre ciclos sí se ha percibido en la justificación general de la PDP, siendo incluso mayor el porcentaje de estudiantes del segundo ciclo que el del tercero. En este sentido, se puede interpretar que la instrucción recibida por los estudiantes de menor edad en relación con las tablas puede haber supuesto que la frecuencia de estudiantes que alcanzaron la justificación general para la PDP en el segundo ciclo fuera mayor que la de estudiantes de cursos superiores.

Tipologías de estudiantes según el tipo de argumentación

En cuanto a las tipologías, se identificaron seis, atendiendo a los tipos de justificación (aritmética, general o no justifica) mostrados en las dos propiedades. Así, el tipo 2 se corresponde a los 10 estudiantes que evidenciaron justificación aritmética tanto en la PCP como en la PDP. En la tabla 6 se muestra la frecuencia absoluta y la relativa para cada uno de los ciclos en cada una de las tipologías

Tabla 6.
Tipologías identificadas

	Propiedad		*Resultado por ciclo*		*Total*
Tipos	PCP	PDP	2.º	3.º	
Tipo 1	Aritmético	-	2 (12,5 %)	2 (16,66 %)	4
Tipo 2	Aritmético	Aritmético	6 (37,5 %)	4 (33,33 %)	10
Tipo 3	Aritmético	General	1 (6,25 %)	1 (8,33 %)	2
Tipo 4	General	-	0 (0 %)	1 (8,33 %)	1
Tipo 5	General	Aritmético	4 (25 %)	3 (25 %)	7
Tipo 6	General	General	3 (18,75 %)	1 (8,33 %)	4
Total			16	12	28

Fuente: elaboración propia.

La determinación de estas tipologías permite comparar los resultados por ciclos y valorar el impacto de la innovación. Se constata que el tipo mayoritario para ambos ciclos fue el aritmético-aritmético, es decir, el perfil asociado a justificar aritméticamente las dos propiedades. El segundo tipo con mayor frecuencia, también en ambas propiedades, fue el tipo 5, correspondiente a aquellos estudiantes que evidenciaron una justificación general en la PCP, pero que alcanzaron únicamente la justificación aritmética en la PDP. Es reseñable que la mitad de los estudiantes, en al menos una de las propiedades, evidenciaron la justificación general.

Solo 4 estudiantes alcanzaron la tipología asociada a un nivel superior en cuanto a la generalización (tipo 6), ya que justificaron de un modo general las dos propiedades. Es destacable que fue mayor el porcentaje de estudiantes de segundo ciclo en este tipo, lo que nuevamente sugiere que el papel de la instrucción recibida en la sesión 1 puede haber reducido e incluso superado las diferencias de menor comprensión asociadas a los cursos inferiores.

Los resultados permiten caracterizar las diferentes tipologías que han mostrado semejanzas en el comportamiento de los sujetos de ambos ciclos a la hora de justificar. Se muestran algunos ejemplos de evidencias de sujetos del segundo ciclo en la caracterización de algunas tipologías.

En el tipo 1, los alumnos lograron justificar con un ejemplo numérico concreto la propiedad conmutativa, pero la distributiva del producto no la lograron justificar, fue el caso del alumno 3S1 (tabla 7), que justificó la propiedad conmutativa para el caso concreto de 8 x 5, donde se remitió solo al caso concreto y no generalizó; esto queda evidenciado en la figura 6. En cambio, cuando el investigador le explicó la actividad de la relación entre las tablas, solo contestó con una respuesta ambigua sumar las dos tablas, información que fue entregada por el investigador.

Tabla 7.
Fragmentos de entrevistas de tipo 1 (A = 3S1)

PCP	PDP
A Porque 8 x 5 es lo mismo que 5 x 8, es la propiedad conmutativa igual que arriba. I ¿Y por qué se cumple la propiedad conmutativa que es tan chula? A Porque la propiedad conmutativa significa que, aunque le des la vuelta, sigue dando lo mismo.	I Muy bien, pero también hablamos de una propiedad muy rara que se llamaba la propiedad distributiva, que dijimos que la tabla de 7 la podemos sacar a través de la tabla del 2 y de la tabla del 5… que en la tabla del 2 le sumamos cada filita la tabla del 5 nos sale la tabla del 7, mira 2 más 5 siete, 4 más 10, 14 y la pregunta que yo te hago es: ¿Por qué crees que la tabla del 7 la puedo sacar como la tabla del 2 más la del 5? A Mmmm, no sé. I ¿No se te ocurre alguna manera de sacarlo? A Sumando las tablas del 2 y del 5.

Fuente: elaboración propia.

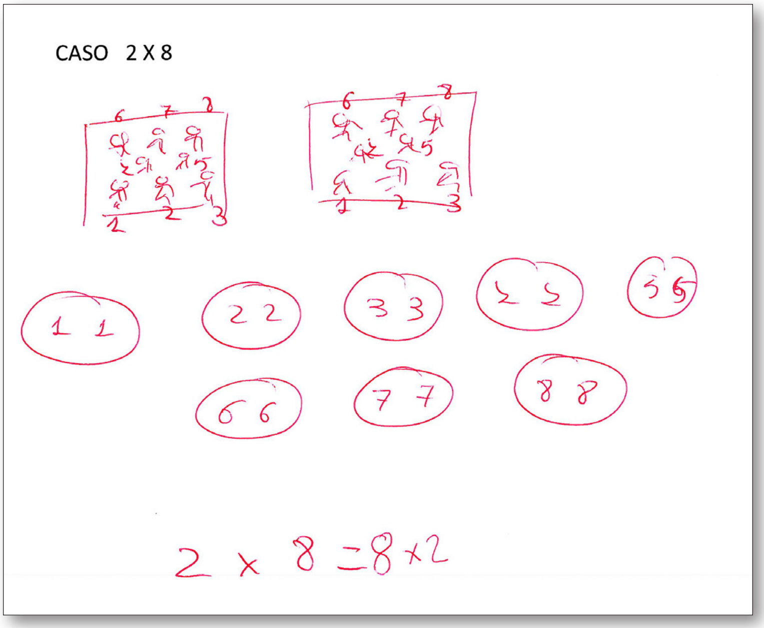

Fig. 6. Producción escrita alumno 3S1 sobre la PCP.

El tipo 2, en el que se encuentra una mayor cantidad de alumnos (10), es el aritmético-aritmético, donde los alumnos lograron justificar con casos concretos las propiedades conmutativa y distributiva del producto. En la información recogida en la entrevista a 4S2 (tabla 8), el alumno solo respondió para el caso particular que se le entregó como información, pero no lo llevó a otros casos o a la generalización (ver figura 7). En la propiedad distributiva ocurrió algo similar, se remitió a buscar un caso concreto de 7 x 3 y lo justificó con la suma de las tablas del 2 y del 5 (ver figura 8).

Tabla 8.
Fragmentos de entrevista de tipo 2 (A = 4S2)

PCP	PDP
A Voy a poner 2 habitaciones con 8 personas cada uno. I Bueno, si quieres. La persona lo dibuja lo más sencillo. Si quieres dibujar un puntito por persona, pon un puntito. A [Dibuja en el folio]. I Muy bien. Y ahora ¿qué sería el siguiente paso? A Pues habría que cambiarle el orden a 8 x 2. I ¿Qué piensas que hay que hacer? A 2 por 8. I Muy bien. ¿Y entonces qué obtenemos en multiplicación? ¿Eso qué sería? A 8 por 2 I Pónmelo ahí... y la propiedad, entonces, conmutativa que tenemos, ¿qué nos dice? A Que en 8 habitaciones que hay, hay 2 personas en cada una.	A Ah, ya lo entiendo. La tabla del 5 y la tabla del 2 se suman, 2 más 5, que son las tablas, daría 7, y ahí ya tengo los resultados que se suman distinto. I Vale. ¿Y ves alguna relación además de los resultados en estos numeritos de aquí? A Mmm... Sí. Sí. I Ahí tú podrías expresar, además, hay una propiedad que se llama distributiva, que la podemos expresar con la tabla. ¿Tú sabrías expresarla? A Que son 2 por 3 y 5 por 3, que son 2 más 5, daría 7, que por 3 da 21.

Fuente: elaboración propia.

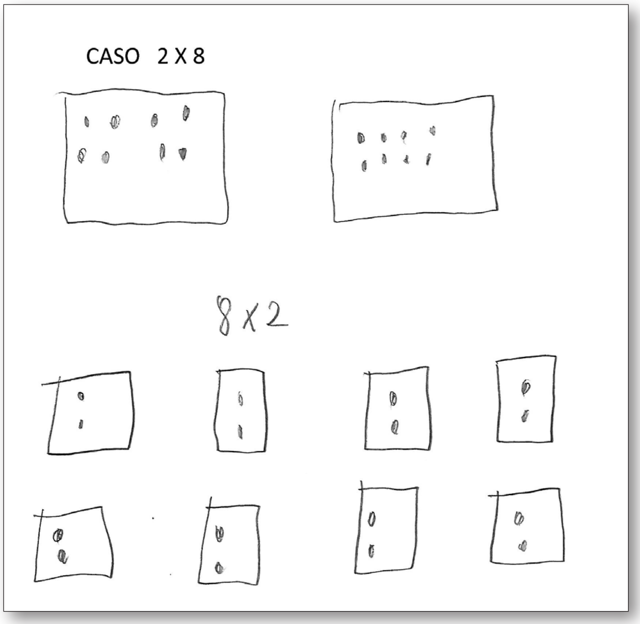

Fig. 7. Producción escrita alumno 4S2 sobre la PCP.

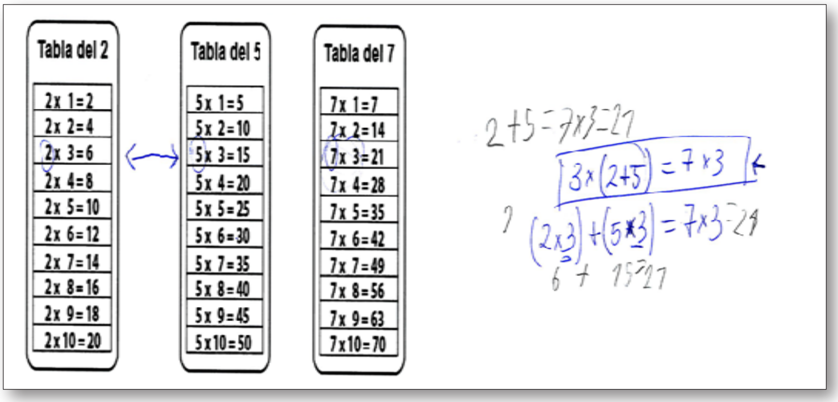

Fig. 8. Producción escrita alumno 4S2 sobre la PDP.

En el tipo 3, los alumnos justificaron la propiedad conmutativa con ejemplos concretos; en cambio, la propiedad distributiva la justificaron generalizando para un caso cualquiera. Dada la mayor complejidad observada en la PDP, son 2 casos interesantes, puesto que su rendimiento en cuanto a la justificación fue mayor en la PDP. El alumno 5S2 justificó la multiplicación M x N con un caso concreto de 8 x 8, y le asignó valores a las letras. Sin embargo, en la PDP encontró la regularidad y dio un ejemplo cualquiera; en este caso, en un trío de tablas que no fueron presentadas por el investigador a cargo de la entrevista, es decir, es capaz de encontrar cualquier trío que sirva para esta tarea.

En la tipología 4, los estudiantes justificaron un caso general en la PCP y no encontramos evidencias de la justificación en la propiedad distributiva. En el caso del alumno 6S3, generalizó que M x N es igual a N x M y dio un caso concreto de 2 x 7 = 7 x 2. En el desarrollo de la distributiva, volvió a trabajar la conmutativa como parte de la justificación de esa propiedad.

En el tipo 5, el porcentaje de estudiantes fue similar en los dos ciclos y correspondió a estudiantes que justificaron para un caso general la propiedad conmutativa, pero que no alcanzaron esta generalización en la PDP y la justificaron con un ejemplo numérico concreto. El sujeto 3S7 (tabla 9) justificó la propiedad conmutativa con la idea de que no importa con cuantas personas estemos trabajando: el orden de las camisetas y de las habitaciones va a cambiar; pero cuando justificó la propiedad distributiva se enfocó en valores concretos de las 3 tablas.

Tabla 9.
Fragmento de entrevista tipo 5 (A = 3S7)

PCP	PDP
I ¿Vale? Entonces, has justificado… que esto es lo mismo que esto, ¿verdad? Y si ahora tienes… n por m. Venga, a ver cómo va a ser. ¿Qué tendríamos ahí? A Tenemos una idea. I ¿Qué estás pensando? Cuéntamelo. A Tratar de hacer lo mismo de antes. I Cuéntamelo. A A cada uno… le han dado… es, han competido en una carrera. Y lo han puesto así. ¿Vale? El primero ha sido… segunda… tercera… cuarta. Ahora, en la n… en la n han hecho un concurso de la cantidad. Ahora… Esta le he dado la primera… la segunda… la tercera… la tercera la cuarta. Y… Ahora se van a juntar… para hablar… para hablar por la televisión.	I ¿Qué tiene que ver la tabla del 2 con la del 5 o con la del 7? A 5 más 2, 7. 5 más 2, 7. 4 más 10, 14. 6 más 15 igual a 21 I Muy bien. Estás sumando que la tabla del 2 y la tabla del 5 tienen algo que ver con la del 7 A Sí.

Fuente: elaboración propia.

Finalmente, en la tipología 6, en ambas propiedades los alumnos justificaron utilizando casos generales o ampliando la propiedad encontrada para todos los posibles casos. El alumno 4S3 (tabla 10) expresó que M x N es igual a N x M en la propiedad conmutativa, y en la distributiva fue capaz de encontrar otro trío de tablas distintas de las entregadas por el investigador y que cumplían la condición de ser distributivas (ver figura 9).

Tabla 10.
Fragmento de entrevista tipo 6 (A = 4S3)

PCP	PDP
I Vale. ¿Y a qué llegaríamos, entonces, al final? ¿La propiedad, todos tendríamos que sería? A Conmutativa. I ¿Y cómo sería, en este caso? Lo que has escrito antes aquí, de que 8 x 2 es igual a 2 x 8. En este caso, ¿qué nos quedaría? A Eh, que el 13 es, bueno, es m por n, es igual que n por m. I En el caso, porque tú has puesto que la 13 por 14. A 14 por 13.	I Muy bien. Esta es la propiedad distributiva. Entonces, vemos cómo en estas tres tablas, ¿no? Al sumar dos tablas, podemos tener otra tabla, una tercera tabla. ¿Tú crees que esta propiedad la podremos obtener a partir de otras tres tablas? Acuérdate que esta se puede porque... A Sí, se puede. I ¿Cuál expresión? Dime tres. A La tabla del 3, la tabla del 6 y la tabla del 9. I ¿Cómo? ¿Con tres tablas? La del 3, la del 6 y la del 9. Muy bien. ¿Y me puedes poner una expresión concreta para alguno de esas tres tablas? A [Escribe en el folio]. I 9 por 6 + 3 es igual a 9 x 9.

Fuente: elaboración propia.

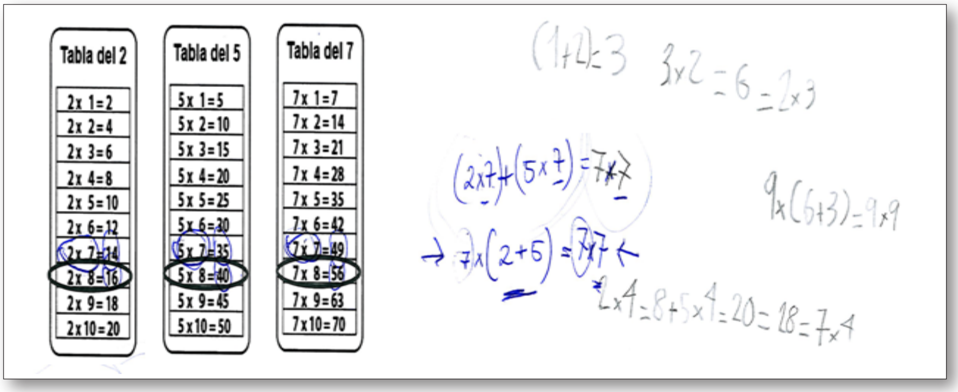

Fig. 9. Producción escrita alumno 4S3 sobre la PDP.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado una innovación en la enseñanza de las propiedades conmutativa y distributiva del producto, al identificarlas en la construcción de las tablas de multiplicar y justificarlas en casos generales. El objetivo relativo al analizar el impacto se ha abordado mediante los resultados relativos a los tipos de justificación y las tipologías del segundo ciclo con un grupo control de tercer ciclo.

En este trabajo, se evidenció el potencial de los estudiantes de segundo y tercer ciclos de primaria para alcanzar justificaciones generales de las propiedades PCP y PDP. Si bien fue mayoritaria la frecuencia en la que aparecieron justificaciones aritméticas basadas en casos particulares, a partir de una justificación basada en un experimento crucial, la mitad de los estudiantes analizados alcanzaron argumentaciones generales a partir de ejemplos genéricos en al menos una de las propiedades, incluso en segundo ciclo, correspondiente a cursos inferiores respecto a lo observado en otras investigaciones (Knuth et al., 2009; Lannin, 2005).

Este potencial para argumentar de un modo general apoya la viabilidad de propuestas innovadoras de enseñanza en primaria que se focalicen en la comprensión conceptual de las propiedades aritméticas, desde la perspectiva de favorecer la generalización que propone el pensamiento algebraico (Cañadas et al., 2019). En este sentido, la contextualización en las tablas de multiplicar ha podido favorecer que los estudiantes de segundo ciclo llegasen a alcanzar justificaciones generales incluso con mayor frecuencia que los de tercer ciclo, presentando una mayor flexibilidad en su uso más allá de la regla aprendida La tipología mayoritaria en ambos ciclos fue el aritmético-aritmético, asociada a justificar aritméticamente las dos propiedades. El mayor porcentaje de estudiantes de la tipología general-general en el segundo ciclo respecto al tercero evidencia que en edades tempranas se pueden alcanzar justificaciones generales de ambas propiedades.

Atendiendo al papel relevante en cuanto a complejidad que distintas taxonomías y trabajo con propiedades han atribuido a la justificación (Anderson y Krathwohl, 2001; Vermeulen et al., 1993), y más específicamente dentro del pensamiento algebraico a la justificación de las generalizaciones (Blanton et al., 2011), se evidenció que estudiantes de segundo ciclo pueden afrontar objetivos de enseñanza relativos a los procesos cognitivos de aplicar y evaluar conectando los conocimientos conceptual y procedimental.

Aunque la justificación general del PDP supuso una mayor dificultad, los resultados mostraron que las tareas propuestas de innovación fueron adecuadas, y estas favorecieron que algunos y algunas estudiantes hayan logrado la generalización y la hayan justificado (Stein et al., 2000). Estos resultados apoyan la propuesta de innovación que podría plantearse en el segundo ciclo, con una secuencia de enseñanza que consistiría en: 1) construcción de las tablas de multiplicar utilizando las propiedades del producto conmutativa y distributiva; 2) representaciones múltiples de las propiedades (verbales, simbólicas y gráficas); y 3) justificación de las propiedades mediante experimentos cruciales y ejemplos genéricos.

Respecto a la PCP, se constató una consistencia en la comprensión en los dos ciclos (Robinson et al., 2018). Al analizar la tabla 4, no evidenciamos diferencias notables debidas a la edad (ciclos), y se mostró el potencial desde tercero de primaria para utilizar esta propiedad en sus argumentaciones (Blanton et al., 2015). Sin embargo, en la PDP se evidenciaron diferencias entre los ciclos. La mayor comprensión de la PDP asociada a la justificación general de la propiedad se evidenció incluso en mayor medida en el segundo ciclo, lo que podría apoyar el impacto de la innovación en la construcción de las tablas de multiplicar.

Reconocemos la limitación de este trabajo en cuanto a la posible generalización de resultados más allá de la muestra analizada, pero la variedad de tipologías de estudiantes encontrada muestra la diversidad en cuanto a la comprensión de las propiedades por parte del estudiantado. Dada la mayor frecuencia de justificación aritmética basada en casos particulares, se evidenció que en estas edades se pueden alcanzar justificaciones generales, si se presentan procesos de enseñanza que las demanden y son asequibles al estudiantado (Burkhardt y Swan, 2013). La determinación de tipologías supone una información relevante para atender los distintos tipos, enfatizando múltiples representaciones, ya que el tipo aritmético requiere de más atención en las representaciones propuestas por el docente que le faciliten alcanzar mayor generalidad. Además, que un niño o niña haya manifestado tipologías asociadas al pensamiento algebraico para una propiedad podría aportar estrategias para que también las utilice en otra propiedad para lo que había manifestado únicamente la justificación aritmética.

Los matices que diferencian el tipo de justificaciones tanto entre las dos propiedades como en los ciclos pueden orientar al profesorado al diseño de situaciones aprendizaje que desarrollen el sentido algebraico en la nueva propuesta curricular (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022). Dado que los estudiantes alcanzaron la justificación de un modo general a partir de mostrarles experimentos cruciales en contextos familiares, se pueden diseñar situaciones de aprendizaje dirigidas a la justificación de las propiedades u otros contenidos curriculares. Particularmente, la propuesta innovadora en el trabajo de aula relativo a las tablas de multiplicar favoreció una mayor comprensión conceptual asociada a procesos cognitivos complejos, como la justificación (Crooks y Alibali, 2014).

AGRADECIMIENTOS

Este estudio forma parte del proyecto PID2020-113601GB-I00, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España, y la beca Salvador Madariaga del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades de España.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anderson, L. W. & Krathwohl, D. R. (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives: Complete Edition*. Longman.

Ayala-Altamirano, C. & Molina, M. (2021). El proceso de generalización y la generalización en acto. Un estudio de casos. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *15*(3), 211-241. https://doi.org/10.30827/pna.v15i3.18109

Boaler, J. (1993). The Role of Contexts in the Mathematics Classroom: Do they Make Mathematics More «Real»? *For the learning of mathematics*, *13*(2), 12-17.

Bosch, M., Gutierrez, A., & Llinares, S. (2024). A survey of Spanish research in mathematics education. *ZDM - Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01638-z

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B., & Zbiek, R. M. (2011). *Developing Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3-5*. Series en Essential Understandings. National Council of Teachers of Mathematics. 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-1502.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A., Isler, I., & Kim, J. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39-87. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Brown, S. I. (2013). *Insights into mathematical thought: Excursions with distributivity*. National Council of Teachers of Mathematics.

Burkhardt, H. & Swan, M. (2013). Task design for systemic improvement: Principles and frameworks. En C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education (The 22nd ICME study conference)* (pp. 433-432). ICME.

Cañadas, M. C., Blanton, M., & Brizuela, B. M. (2019). Special issue on early algebraic thinking. *Journal for the Study of Education and Development*, *42*(3), 469-478. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638569

Campbell, T. G., King, S., & Zelkowski, J. (2020). Comparing middle grade students' oral and written arguments. *Research in Mathematics Education*, *23*(1), 21-38. https://doi.org/10.1080/14794802.2020.1722960

Carpenter, T. P. & Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. (Research Report No. 00-2).* National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science

Crooks, N. M. & Alibali, M. W. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review*, *34*(4), 344-377. https://doi.org/10.1016/j.dr.2014.10.001.

Ellis, A. B. & Özgür, Z. (2024). Trends, insights, and developments in research on the teaching and learning of algebra. *ZDM - Mathematics Education*, *56*(2), 199-210. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01545-9

Hallgren, K. A. (2012). Cálculo de la fiabilidad interevaluador para datos observacionales: Resumen y tutorial. *Tutoriales en Métodos Cuantitativos para Psicología*, *8*, 23-34. https://doi.org/10.20982/tqmp.08.1.p023

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM - Mathematics Education*, *54*(6), 1131-1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Knuth, E., Choppin, J., & Bieda, K. (2009). Proof in middle school: Moving beyond examples. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15*(4), 206-211.

Krathwohl, D. R. (2002). A Revision of Bloom´s Taxonomy: An Overview. *Theory into practice*, *41*(4), 212-218.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and learning*, *7*(3), 231-258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3

Larsson, K. (2015). Sixth grade students' explanations and justifications of distributivity. En K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the 9th Conference of the European society for research in mathematics education* (pp. 295-301). ERME.

Marrades, R. & Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1), 87-125. https://doi.org/10.1023/A:1012785106627

Mayer, R. E. (2002). Rote Versus Meaningful Learning. *Theory into practice*, *41*(4), 226-232.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022*).* Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.

Pang, J. & Kim, J. (2018). Characteristics of Korean students' early algebraic thinking: A generalized arithmetic perspective. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds, ICME-13 Monographs* (pp. 141-165). Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_6

Ramírez Uclés, R., Brizuela, B. M., & Blanton, M. (2022). Kindergarten and First-Grade Students' Understandings and Representations of Arithmetic Properties. *Early Childhood Education Journal*, *50*(2), 345-356. https://doi.org/10.1007/s10643-020-01123-8

Ramírez Uclés, R., Brizuela, B. M., & Blanton, M. (2024). Kindergarten and First-Grade Students' Understandings of Arithmetic Properties Across Different Kinds of Problems. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*. https://doi.org/10.1007/s42330-024-00331-3

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *1*(33). 11-27.

Robinson, K. M., Price, J. A., & Demyen, B. (2018). Understanding arithmetic concepts: Does operation matter? *Journal of Experimental Child Psychology*, *166*, 421-436. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2017.09.003

Rocha, H. (2019). Mathematical proof: from mathematics to school mathematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, *377*(2140), 20180045. http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2018.0045

Sánchez, J. M. (2005). La innovación educativa institucional y su repercusión en los centros docentes de Castilla-La Mancha. REICE. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, *3*(1), 638-664.

Seah, R. & Horne, M. (2020). The construction and validation of a geometric reasoning test item to support the development of learning progression. *Mathematics Education Research Journal*, *32*(4), 607-628. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00273-2

Skemp, R. R. (2006). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching in the middle school*, *12*(2), 88-95. https://doi.org/10.5951/MTMS.12.2.0088

Stein, M. K., Smith, M, Henningsen, M., & Silver, E. (2000). *Implementing Standards-Based Mathematics Instruction*. Teachers College Press.

Strachota, S., Brizuela, B., Gibbins, A., Blanton, M., Gardiner, A. M., & Sawrey, K. (2023). First Graders' Definitions, Generalizations, and Justifications of Even and Odd Numbers. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *23*(3), 459-478. https://doi.org/10.1007/s42330-023-00297-8

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Moutsios-Rentzos, A. (2024). Proof and proving in school and university mathematics education research: a systematic review. *ZDM - Mathematics Education*, *56*(1), 47-59. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01518-y

Tsai, Y. L. & Chang, C. K. (2009). Using combinatorial approach to improve students' learning of the distributive law and multiplicative identities. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(3), 501-531. https://doi.org/10.1007/s10763-008-9135-x

Vermeulen, E. M., Spronk, J., & van der Wijst, N. (1993). A new approach to firm evaluation. *Annals of Operations Research*, *45*(1), 387-403. https://doi.org/10.1007/BF02282060

Vermeulen, N., Olivier, A., & Human, P. (1996). Students' awareness of the distributive property. En L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *PME20: proceedings of the 20th Confference of the International Group of the Psychology for Mathematics Education*, *4*, 379-386.

Justification of the Distributive and Commutative Properties of the Product in Primary School

Rafael Ramírez Uclés, Sandra Fuentes
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España,
rramirez@ugr.es, sandrafuentesm@gmail.com,
https://orcid.org/0000-0002-8462-5897, https://orcid.org/0000-0002-1249-0233

Mathías A. López, Bárbara M. Brizuela
Departamento de Educación, Tufts University, Estados Unidos
mathias.lopez@tufts.edu, barbara.brizuela@tufts.edu
https://orcid.org/0009-0000-4834-0037, https://orcid.org/0000-0002-1571-8977

An innovative proposal is presented for the justification of the distributive and commutative properties of the product in Primary Education, specifically in the second cycle. The innovation refers to *justification* as a complex cognitive process associated with conceptual understanding. It addresses the new curricular guidelines recently introduced in Spain, which promote the development of algebraic thinking from the first year of primary school. It calls for the introduction of the properties of multiplication in contexts that are both familiar and challenging for students. Two sessions focusing on the conceptual understanding of the two properties are proposed, in which the identification of the latter is approached through the construction of multiplication tables. To evaluate the impact of the innovation, the justifications of 28 students aged 8 to 12 are analyzed through interviews about the generalization of the properties and through crucial experiments and generic examples. The generality of the property is addressed by selecting particular cases that were carefully designed to allow observation of existing regularities. For the analysis of justifications, three categories were defined: a) Arithmetic, b) General, and c) Not Justified, for both the commutative property of the product and the distributive property. This allows us to identify six different typologies among the subjects according to the type of justification provided. For both properties, arithmetic justification was more frequent than general justification in the cycles. Therefore, despite the crucial experiments presented, most students based their justifications on particular cases. Regarding the differences between the properties, we highlight a lower performance in both cycles with the distributive property compared to the commutative property of the product in general justification. The potential of second and third cycle primary school students to reach general justifications of the properties was evident, since 13 of the 28 students analyzed reached general arguments based on generic examples in at least one of the properties, even in the second cycle. This innovation provides teachers with an analytical tool for implementation in the classroom, including sample responses within the different typologies described. The results support the proposed innovation, which could be implemented in the second cycle of primary school with a teaching sequence consisting of: 1) The construction of multiplication tables using the commutative and distributive properties of the product, 2) Multiple representations of the properties (verbal, symbolic, and graphical), and 3) The justification of the properties by means of crucial experiments and generic examples.