ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS 43-3 (2025), 31-50
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6472
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

© de la autoría

Perfiles de estudiantes para profesor de matemáticas al mirar profesionalmente el razonamiento proporcional

Prospective Mathematics Teachers' Profiles When Noticing Proportional Reasoning

Jonathan Espinoza-González
Universidad Nacional, Costa Rica
jonathan.espinoza.gonzalez@una.cr
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0082-4926

Àngela Buforn, Salvador Llinares
Universidad de Alicante, España
angela.buforn@ua.es, sllinares@ua.es
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5373-2403, https://orcid.org/0000-0002-0801-316X

RESUMEN • El estudio caracteriza perfiles de la competencia mirar profesionalmente el razonamiento proporcional de 14 estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria, al identificar e interpretar características del razonamiento proporcional y decidir sobre cómo continuar la enseñanza. Identificamos tres perfiles de estudiantes para profesor considerando el desempeño en las destrezas (atender, interpretar y decidir): perfil notable, caracterizado por un desempeño alto en las tres destrezas; perfil mixto, caracterizado por un desempeño desigual; y perfil emergente, que evidencia dificultades significativas en las tres destrezas. Estos perfiles revelan dos características en el aprendizaje de esta competencia docente: *i*) la dificultad de los estudiantes para profesor, al considerar al mismo tiempo varios elementos matemáticamente relevantes; y *ii*) la no linealidad entre las destrezas.

PALABRAS CLAVE: Mirar profesionalmente; Razonamiento proporcional; Estudiantes para profesor; Desarrollo de competencias docentes; Formación de profesores de matemáticas.

ABSTRACT • The study characterizes profiles of professional noticing proportional reasoning of fourteen prospective secondary mathematics teachers as they attend to and interpret characteristics of proportional reasoning to decide how to proceed with teaching. We characterize three prospective secondary teachers' profiles regarding the development of the three skills (attend to, interpret and decide). The notable profile was characterized by high performance in the three skills; the mixed profile was characterized by uneven performance across the skills; and the emerging profile when prospective teachers had difficulties in the three skills. These profiles reveal two features of the learning of professional noticing: (i) the difficulty in simultaneously considering multiple mathematically relevant elements, and (ii) the non-linearity between the skills.

KEYWORDS: Professional noticing; Proportional reasoning; Prospective teachers; Development of teaching competences; Mathematics teacher education.

Recepción: mayo 2025 • Aceptación: julio 2025 • Publicación: noviembre 2025

Espinoza-González, J., Buforn, A. y Llinares, S. (2025). Perfiles de estudiantes para profesor de matemáticas al mirar profesionalmente el razonamiento proporcional. *Enseñanza de las Ciencias*, *43*(3), 31-50.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6472

INTRODUCCIÓN

La competencia docente de mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes consiste en reconocer características de la comprensión de los estudiantes de tópicos matemáticos a partir de las estrategias utilizadas para resolver problemas de manera que permita justificar decisiones de enseñanza (Mason, 2002). Jacobs et al. (2010) consideran que esta competencia está formada por tres destrezas: *i*) identificar elementos matemáticos claves en las respuestas de los estudiantes; *ii*) interpretar su comprensión; y *iii*) decidir cómo continuar la enseñanza considerando la comprensión de los estudiantes.

Investigaciones previas han intentado caracterizar la relación entre las tres destrezas (Sánchez-Matamoros et al., 2019; Scheiner, 2021, 2023; Weyers et al., 2024) asumiendo una relación anidada (primero identificar, luego interpretar y finalmente decidir) (Barnhart y van Es, 2015; Jacobs et al., 2010). Sin embargo, existen estudios cuestionando esta visión secuencial (Buforn et al., 2022; Scheiner, 2021, 2023), mientras que otros indican la necesidad de considerar la relación entre las características de los problemas y las estrategias usadas por los estudiantes (Moreno et al., 2025). Estos resultados sugieren una relación compleja entre las destrezas que puede depender de los contextos de formación, del tópico matemático específico considerado y de las características de los instrumentos usados para evidenciar su relación (Dindyal et al., 2021). Por otra parte, las investigaciones centradas en caracterizar la competencia docente de mirar el pensamiento matemático de los estudiantes en relación con un tópico matemático específico suelen analizar respuestas de estudiantes a un problema (Amador et al., 2024; Buforn et al., 2022; Tyminsky et al., 2021) o a varios problemas, pero analizados de forma independiente (Burgos y Godino, 2022; Jacobs et al., 2024). Esta característica de los instrumentos usados (en las propuestas formativas o en los instrumentos de investigación) dificulta recoger evidencias de cómo los estudiantes para profesor interpretan el nivel de comprensión de un estudiante considerando las respuestas a varios problemas con diferentes características. Para aportar información sobre estas dos cuestiones (relación entre las destrezas y el papel desempeñado por las características del instrumento de recogida de datos), nuestro estudio examina cómo estudiantes para profesor identifican los elementos matemáticos que intervienen en las estrategias usadas por estudiantes a un conjunto de problemas de proporcionalidad y cómo interpretan su comprensión para justificar decisiones instruccionales.

Los conceptos de razón y proporción junto con el razonamiento proporcional son clave en las matemáticas escolares en Educación Secundaria (Fernández y Llinares, 2012; Lamon, 2007; Lobato et al., 2010; Tjoe et al., 2014). En particular, el razonamiento proporcional promueve el desarrollo del pensamiento algebraico (Lamon, 2007) y facilita la comprensión de las funciones lineales, ecuaciones algebraicas y pendiente de una recta, entre otros (Lobato et al., 2010). Sin embargo, los resultados de las investigaciones indican que los estudiantes tienen dificultades con estos conceptos y, en particular, para diferenciar problemas proporcionales de los no proporcionales (Fernández y Llinares, 2012; Tjoe et al., 2014) que puede depender del trabajo de los profesores. Esta cuestión plantea la necesidad de estudiar cómo estudiantes para profesor aprenden a interpretar el razonamiento proporcional de los estudiantes para mejorar su enseñanza cuando tienen que tener en cuenta varios aspectos relevantes relativos al tópico matemático, a su aprendizaje, y el contexto curricular específico.

MARCO CONCEPTUAL

Esta investigación considera dos referencias teóricas. Por una parte, las transiciones entre niveles de comprensión del razonamiento proporcional en estudiantes de educación secundaria y, por otra parte, la particularización de la competencia docente mirar profesionalmente la comprensión de los estudiantes del razonamiento proporcional.

En primer lugar, razonar proporcionalmente implica la habilidad de establecer una relación multiplicativa entre dos cantidades (de igual o distinta magnitud) y extenderla a otro par de cantidades (Lamon, 1993) y de reconocer situaciones proporcionales de las no proporcionales (van Dooren et al., 2005). Copur-Gencturk et al. (2023) destacan la covarianza (el cambio en una cantidad afecta a la otra cantidad) y la invarianza de la razón funcional como dos aspectos claves del razonamiento proporcional. Además, el desarrollo del razonamiento proporcional exige una serie de transiciones entre niveles de comprensión de los conceptos de razón y proporción (Buforn et al., 2018; Fernández y Llinares, 2012; Lamon, 1993; Lobato et al., 2010; Noelting, 1980a, 1980b; Valverde y Castro, 2012) que se puede sintetizar en tres transiciones (figura 1). Estas transiciones describen el paso desde un razonamiento no proporcional (nivel 0) hacia un pensamiento relativo basado en la identificación de una relación multiplicativa entre dos cantidades, es decir, formar una razón (nivel 1). Luego, se avanza a la construcción de múltiples razones escalares mediante la propiedad de la covarianza, iniciando la comprensión de la invarianza de las razones funcionales, aunque con dificultades en su representación (nivel 2). Finalmente, se logra el reconocimiento y uso de la invarianza de la razón funcional, representándola en diferentes registros: tabular, verbal y simbólico (nivel 3).

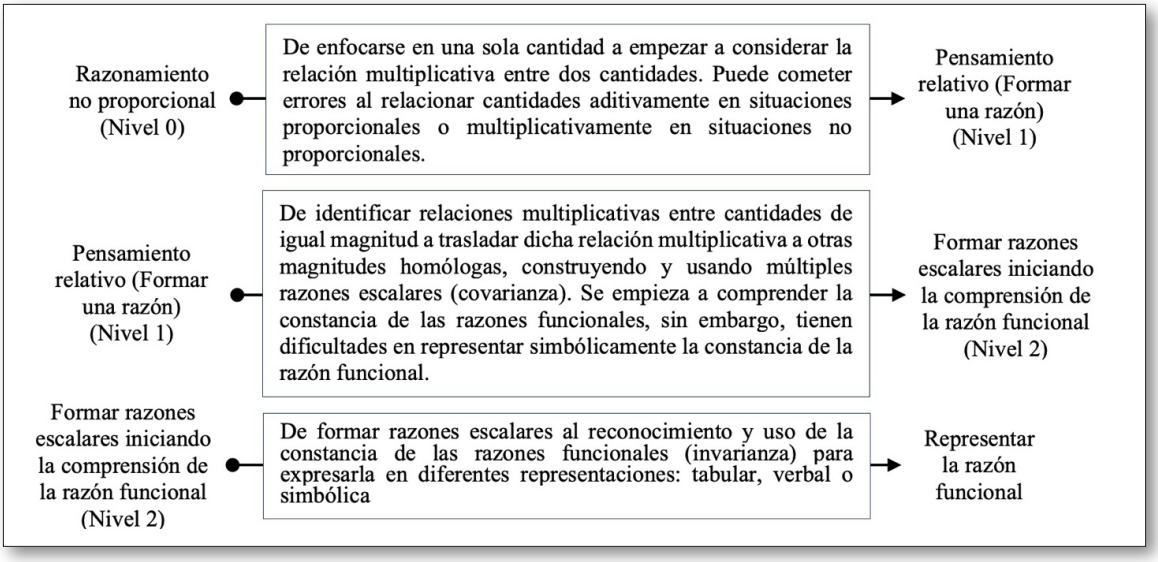


Fig. 1. Transiciones entre niveles de comprensión del razonamiento proporcional.

Por otra parte, desde la perspectiva de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento de los estudiantes con relación al razonamiento proporcional, la destreza de identificar los elementos matemáticos relevantes en las estrategias de los estudiantes implica identificar la relación entre las características de los problemas, considerando si es proporcional o no, y reconociendo las relaciones entre las cantidades usadas por el estudiante. La destreza interpretar requiere inferir la comprensión del estudiante en términos de las transiciones entre niveles de comprensión del razonamiento proporcional, considerando conjuntamente las respuestas de un estudiante a distintos problemas. Finalmente, la destreza decidir implica proponer acciones de enseñanza que apoyen las transiciones y la consolidación de la comprensión alcanzada.

Considerando estas referencias previas, el objetivo de este estudio es caracterizar perfiles de la competencia docente mirar profesionalmente el razonamiento proporcional en estudiantes para profesor de educación secundaria que participaron en una propuesta formativa teniendo en cuenta su capacidad para identificar, interpretar y decidir cómo continuar la enseñanza. Es decir, este estudio pretende

caracterizar cómo estudiantes para profesor de educación secundaria identifican los elementos matemáticos de los problemas y de las estrategias de resolución empleadas por estudiantes, para interpretar su comprensión en términos de las transiciones del razonamiento proporcional, y proponer decisiones que las apoyen.

MÉTODO

Participantes

En este estudio participaron los 14 estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria (EP) que conformaban el grupo completo de una asignatura de didáctica de las matemáticas, cursada durante el tercer año de su formación (de un total de cinco años) en una universidad pública de Costa Rica. Los EP no tenían experiencia docente formal, ni habían participado en actividades relacionadas con el desarrollo de la competencia docente. El conocimiento de los EP de los conceptos de razón y proporción se limitaba a sus estudios de pregrado, y al uso de la propiedad de los productos cruzados de una proporción («en toda proporción se verifica que el producto de los medios es igual al producto de los extremos») en la asignatura de Geometría Euclídea I del segundo año de su formación, donde la aplicaron para resolver problemas sobre semejanza de triángulos.

Propuesta formativa

Los EP participaron en una propuesta formativa de 17 semanas de duración (una sesión semanal de 150 minutos cada una y 7,5 horas de estudio independiente –total 50 horas de formación– en la cual los EP discutieron dos documentos con información teórica (DOC1 y DOC 2) y resolvieron una actividad introductoria (Act.int) y seis prácticas profesionales (PR1, PR2, …, PR6) con el objetivo de desarrollar la competencia docente en tres ámbitos: mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, planificar e implementar la enseñanza y reflexionar para mejorarla (figura 2) con relación al razonamiento proporcional. Este estudio se centra en el primero de los ámbitos.

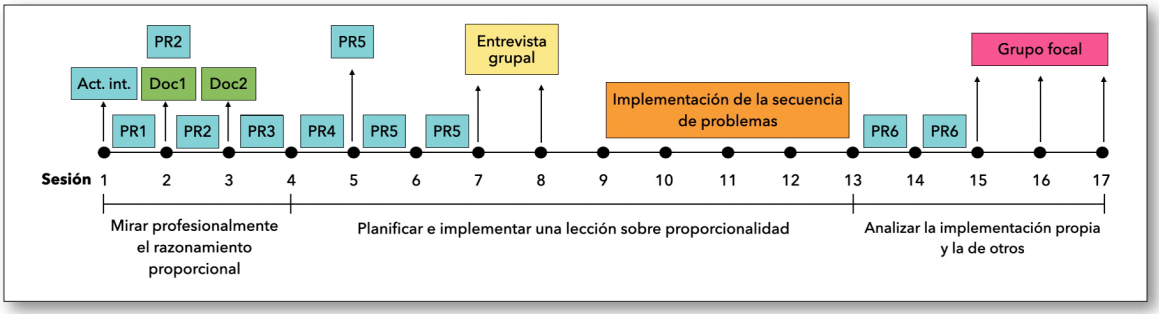


Fig. 2. Estructura de la propuesta formativa.

Las tres primeras sesiones de la propuesta formativa se centraron en la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes respecto al razonamiento proporcional. En la sesión 1, se introdujeron los conceptos de razón y proporción (Act. int.) y los EP resolvieron cinco problemas sobre razones y proporciones (PR1) y debatieron sobre sus estrategias. En la sesión 2, se discutió sobre diferentes tipos de problemas proporcionales y no proporcionales, aspectos que influyen en su dificultad, estrategias correctas e incorrectas y formas de representar la relación funcional (DOC1). Con esta información, se analizaron los problemas resueltos en la sesión anterior (PR2). En la sesión

3, se discutieron las transiciones del desarrollo del razonamiento proporcional (DOC2) (figura 1) y se analizaron las respuestas de tres estudiantes a cinco problemas de razones y proporciones (PR3). En concreto, se pidió a los EP que interpretaran la comprensión de los estudiantes y que propusieran acciones instruccionales que apoyaran las transiciones. Para realizar estas actividades los EP se organizaron en siete grupos según sus afinidades, indicando únicamente que cada grupo debía tener a lo sumo tres integrantes.

En las sesiones de la 5 a la 8 los EP analizaron y propusieron acciones de mejora al tema de proporcionalidad de un libro de texto de educación secundaria (PR4), diseñaron y analizaron una secuencia de problemas (plan de una lección) para desarrollar el razonamiento proporcional (PR5) y participaron en una entrevista semiestructurada en la que justificaron la planificación diseñada y, como consecuencia, se realizaron cambios a la planificación inicial. Finalmente, en las sesiones de la 9 a la 17, los EP implementaron el plan revisado de la lección en un aula de primero de Educación Secundaria y analizaron de forma individual su implementación (PR6) y la de sus compañeros mediante un grupo focal. Estas actividades no incidían en la evaluación sumativa de la asignatura en la que estaban matriculados los EP.

Instrumento y procedimiento

Los datos de esta investigación son las respuestas de los EP a la práctica realizada en la sesión 3 (PR3 – Análisis de las respuestas de tres estudiantes a cinco problemas similares a los resueltos en la S1 siguiendo unas cuestiones guías).

Sobre los problemas

El diseño de los problemas considera diferentes variables (tabla 1): *i*) situación proporcional o no proporcional, dado que los estudiantes suelen aplicar relaciones aditivas o multiplicativas independientemente de la situación (Fernández y Llinares, 2012); *ii*) tipo de problema proporcional –valor perdido, comparación numérica o comparación cualitativa– (Cramer y Post, 1993); *iii*) tipo de razón (funcional o escalar), que refleja dos enfoques del razonamiento proporcional; evaluar ambos permite analizar la flexibilidad conceptual de los estudiantes (Fernández y Llinares, 2012; Van Dooren et al., 2009); (iv) estructura numérica de las razones (enteras y no enteras) (Fernández y Llinares, 2012; van Dooren et al., 2009), tamaño de los números (Kaput y West, 1994), presencia de mezclas y familiaridad del contexto (Cramer y Post, 1993), ya que influyen en la dificultad de los problemas; y *v*) representación de la relación funcional (tabular, verbal y simbólica) que es clave para comprender la relación multiplicativa entre cantidades (Valverde y Castro, 2012).

Tabla 1.
Características de los cinco problemas presentados en la práctica

<table>
<tr><th>Problemas</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>P1. Yesenia y Nicole salen a correr por las mañanas en una pista circular. Empiezan al mismo tiempo, pero Yesenia es más rápida que Nicole. Cuando Nicole ha dado 4 vueltas, Yesenia ha dado 10. Con base en la información anterior completa la siguiente tabla. En las últimas dos columnas coloca dos pares de cantidades que estén relacionadas.
<table>
<tr><td>Nicole</td><td>4</td><td>12</td><td></td><td></td><td></td><td>x</td></tr>
<tr><td>Yesenia</td><td>10</td><td></td><td>15</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td>Problema de valores perdidos en una tabla de proporcionalidad y sobre la representación simbólica de la relación funcional. Presenta una razón funcional no entera y dos razones escalares, una entera y otra no entera.</td></tr>
<tr><td>P2. Dos máquinas A y B producen tornillos a la misma velocidad, pero la máquina A se ha iniciado antes. Cuando la máquina A ha producido 160 tornillos, la máquina B ha producido 40. Cuando B ha producido 80 tornillos, ¿cuántos habrá producido A?</td><td>Situación no proporcional de tipo aditiva.</td></tr>
<tr><td>P3. Pedro y Miguel preparan una bebida de naranja a partir de un jugo concentrado. La siguiente tabla muestra la cantidad de vasos de jugo concentrado y de agua que utilizó cada uno. ¿Cuál de los dos preparó la bebida con más sabor a naranja?
<table>
<tr><td></td><td>Vasos de jugo</td><td>Vasos de agua</td></tr>
<tr><td>Nicole</td><td>12</td><td>27</td></tr>
<tr><td>Yesenia</td><td>15</td><td>36</td></tr>
</table></td><td>Situación de comparación numérica en un contexto de mezcla. Se muestran en una tabla dos razones funcionales y dos razones escalares, todas no enteras.</td></tr>
<tr><td>P4. Nicole sale a correr todos los días. Si hoy ha recorrido menos vueltas en el mismo tiempo que lo hizo ayer, indica si:
a) hoy ha corrido más rápido que ayer;
b) ayer corrió más rápido que hoy;
c) hoy ha corrido tan rápido como ayer;
d) no hay información suficiente para responder la pregunta.</td><td>Situación de comparación cualitativa en un contexto familiar.</td></tr>
<tr><td>P5. Sara descubre que en su casa hay un grifo que gotea. Para conocer la cantidad de agua derramada coloca un recipiente debajo del grifo y recoge 6 onzas cada 9 minutos.
a) ¿Cuáles de las siguientes tablas muestran cantidades que han sido derramadas por el grifo que gotea en casa de Sara?
<table>
<tr><td>Tabla 1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Onzas</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Minutos</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>Tabla 2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Onzas</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Minutos</td><td>1.5</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
</table>
b) ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones expresa la relación entre la cantidad de onzas de agua que derrama el grifo que gotea en casa de Sara y la cantidad de minutos que tarda en derramarlas?
A.1. La cantidad de onzas derramadas es igual a la cantidad de minutos que tarda en derramarlas menos tres unidades.
A.2. La cantidad de minutos es igual a $\frac{2}{3}$ la cantidad de onzas derramadas.
c) ¿Cuáles de las siguientes expresiones relaciona la cantidad de onzas de agua (x) que derrama el grifo que gotea en casa de Sara y la cantidad de minutos (y) que tarda en derramarla?
E.1 $y = 1.5x$
E.2 $y = x + 3$</td><td>Situación proporcional en la que hay que comparar la información desde dos representaciones tabulares, verbales y simbólicas de la relación funcional.</td></tr>
</table>

Sobre las resoluciones de los estudiantes

Las respuestas de los estudiantes a los cinco problemas (figura 3) se diseñaron para reflejar distintos niveles de comprensión del razonamiento proporcional según las transiciones consideradas (figura 1): *i*) uso de relaciones multiplicativas entre cantidades de igual magnitud (covarianza); *ii*) uso de relaciones multiplicativas entre cantidades de distinta magnitud y de la constante de proporcionalidad (invarianza) para representar la razón funcional; y *iii*) diferenciar situaciones proporcionales de las no proporcionales. Las dos primeras características se refieren a la invarianza y covarianza (Copur-Gencturk et al., 2023) que caracterizan las transiciones 2 y 3, mientras que la tercera variable es fundamental para el desarrollo del razonamiento proporcional (van Dooren et al., 2005).

De esta manera, el estudiante 1 (E1) reconoce y utiliza relaciones multiplicativas entre cantidades de igual magnitud (covarianza) y las traslada a la otra magnitud (P1. Primera parte, P3 y P5a). Además, E1 distingue situaciones proporcionales de las no proporcionales (P2), pero no utiliza razones funcionales fuera de contextos familiares (P4) y presenta dificultades en la representación verbal y simbólica de la relación funcional (P1. Segunda parte, P5b y P5c). Estas respuestas sugieren que E1 se encuentra en el nivel 2 (figura 1), por lo que los EP deberían definir como objetivo de aprendizaje centrarse en utilizar la constante de proporcionalidad para representar la relación funcional.

El estudiante 2 (E2) utiliza relaciones aditivas en problemas proporcionales (P1. Primera parte y P5) y multiplicativas en problemas no proporcionales (P2), sin distinguir ambos tipos de situaciones. El E2 no comprende las relaciones multiplicativas entre cantidades de distinta magnitud (P3), salvo en contextos familiares (P4), y tiene dificultades para representar la relación funcional (P1. Segunda parte y P5). Estas respuestas sugieren que el E2 está situado en el nivel 1 (figura 1), por lo que los EP deberían definir como objetivo de aprendizaje la construcción de razones escalares y la comprensión de la constancia de la razón funcional.

Las respuestas del estudiante 3 (E3) reflejan que comprende el concepto de razón funcional (P1. Primera parte, P3 y P4). Además, E3 distingue entre situaciones proporcionales y no proporcionales (P2) y expresa la relación funcional de forma verbal, tabular y simbólica (P1. Segunda parte y P5). De esta manera, E3 muestra características del nivel 3 de comprensión del razonamiento proporcional. Un objetivo de aprendizaje para este estudiante sería consolidar las características de la comprensión del nivel en el que se encuentra.

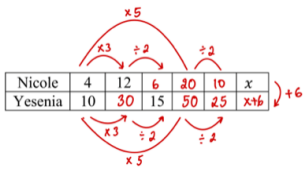
P	*Estudiante 1*	*Estudiante 2*	*Estudiante 3*
1		Nicole 4 12 9 5 6 x Yesenia 10 18 15 11 12 x+6 • 10 − 4 = 6 4 → 10 • 12 + 6 = 18 12 → 18 • 9 + 6 = 15 9 → 15 • 5 + 6 = 11 5 → 11 • 6 + 6 = 12 6 → 12 • x + 6 x → x+6	Nicole 4 12 6 1 0.4 x Yesenia 10 30 15 2.5 1 2.5x x2.5 x0.4 • 10 ÷ 4 = 2.5 vueltas de Yesenia por cada vuelta de Nicole. 12 x 2.5 = 30. • 4 ÷ 10 = 0.4 vueltas de Nicole por cada vuelta de Yesenia. 15 x 0.4 = 6.
2	A B 160 40 ¿? 80 80 − 40 = 40 R/ Como producen a la misma velocidad A producirá 160 + 40 = 200 tornillos.	• Máquina A: 160 • Máquina B: 40 160 ÷ 40 = 4 R/ 80 · 40 = 320	La diferencia entre la producción se debe a que la máquina A inicia antes. 160 − 40 = 120. R/ 80 + 120 = 200.
3	Pedro ÷3 x4 Jugo 12 4 16 Agua 27 9 36 ÷3 x4 R/ La bebida de Pedro Sabe más a naranja	R/ Miguel porque utilizó más vasos de jugo concentrado	• 27 ÷ 12 = 2.25. Pedro mezcló 2.25 vasos de agua por cada vaso de jugo concentrado • 36 ÷ 15 = 2.4. Miguel mezcló 2.4 vasos de agua por cada vaso de jugo concentrado R/ Pedro preparó una bebida con menos agua, por lo tanto tiene un sabor más a naranja.
4	R/ Ayer corrió más rápido que hoy. Por ejemplo, 5 Km/h es más veloz que 3 Km/h.	R/ Ayer corrió más rápido que hoy, porque recorrió más distancia en el mismo tiempo.	R/ Ayer corrió más rápido que hoy. • Si ayer corrió 10 Km en 2 horas entonces su velocidad es de 5 Km/h. • Si hoy corrió 8 Km en 2 horas entonces su velocidad es de 4 Km/h.
5	a) R/ La tabla 2 x3 x2 x2 Tabla 2 Onzas 1 2 3 4 Minutos 1.5 3 4.5 6 x2 x2 x3 b) R/ Ninguna. Lo correcto es que al sumar uno a las onzas se debe sumar 1.5 a los minutos. c) R/ Ninguna de las dos. la correcta es x+1 = y+1.5	a) R/ La tabla 1 porque las onzas y los minutos van de uno en uno cada uno iniciando en 6 y 9. Además, la tabla 2 no tiene los números 6 y 9. b) R/ La primera porque 6 = 9 − 3 c) R/ La segunda porque si cambio "y" por 9 y "x" por 6, se obtiene 9 = 6 + 3.	a) R/ La tabla 2 porque 9 ÷ 6 = 1.5 Es decir, 1.5 minutos por onza. onzas min 1 → 1.5 2 → 1.5 + 1.5 = 3 3 → 1.5 + 1.5 + 1.5 = 4.5 4 → 1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 = 6 b) R/ La segunda ya que 6 ÷ 9 = 0,66... = 2/3. c) R/ La primera. Tabla 2 Onzas 1 2 3 4 X Minutos 1.5 3 4.5 6 Y Y/X = 1.5 Y = 1.5X

Fig. 3. Respuestas de los tres estudiantes a los cinco problemas

Sobre las cuestiones guía

Las cuestiones planteadas estaban vinculadas con las destrezas de identificar, interpretar y decidir (figura 4). Los EP debían identificar las características de los problemas y de las respuestas de cada estudiante a los cinco problemas para interpretar su nivel de comprensión del razonamiento proporcional, y proponer decisiones para apoyar la transición en el desarrollo del razonamiento proporcional.

A continuación, se muestran respuestas de tres estudiantes a cinco problemas de las prácticas 1 y 2, con algunas modificaciones leves. Ahora realiza lo siguiente:

1. Analiza el pensamiento matemático de cada estudiante con base en los siguientes criterios.
   a) IDENTIFICAR. Describe la estrategia utilizada sin importar si es correcta o no. En caso de ser incorrecta explica qué es lo que el estudiante no comprende.
   b) INTERPRETAR el nivel de desarrollo del razonamiento proporcional. A partir de las respuestas dadas por un mismo estudiante a todas las tareas, identifica las transiciones que ha logrado alcanzar y aquellas que aún debe superar en su pensamiento para desarrollar su razonamiento proporcional. Con base en lo anterior, indica el nivel de desarrollo del razonamiento proporcional alcanzado por cada estudiante. Justifica tu respuesta.
2. DECISIONES DE ACCIÓN ¿Qué cuestiones o qué otras tareas propondrías para promover las transiciones en el pensamiento del estudiante que apoyan el desarrollo de su razonamiento proporcional?

Fig. 4. Cuestiones planteadas a los EP.

Análisis

Los datos del estudio son las respuestas escritas de los siete grupos de EP a las cuestiones guía (figura 4). Teniendo en cuenta la cantidad de variables que debemos considerar, para evaluar el desarrollo de cada destreza adaptamos la propuesta de Jacobs y colaboradores (2024) y usamos una escala de cuatro puntos (0 a 3) (tabla 2). Los descriptores para cada puntuación se generaron inductivamente por dos investigadores, analizando inicialmente las respuestas de cada grupo y refinándolos progresivamente para asegurar que eran diferenciables entre sí. En este proceso, las discrepancias fueron discutidas con un tercer investigador, hasta que se llegó a un consenso que permitió revisar la redacción de la característica de manera consensuada. Finalmente, uno de los investigadores puntuó las respuestas escritas utilizando la escala y los otros dos validaron las puntuaciones asignadas.

Tabla 2.
Escala para puntuar las respuestas de los EP en cada destreza.

Destreza	*Escala*	*Descripción*
Identificar	0	No identifica los elementos matemáticos en las resoluciones de los estudiantes o reconoce incorrectamente si la respuesta es correcta o incorrecta.
	1	Describe la estrategia de resolución y/o indica si es correcta o incorrecta.
	2	Identifica solo algún elemento matemático en la estrategia del estudiante.
	3	Conecta los elementos matemáticos de la estrategia con los aspectos matemáticos del problema.
Interpretar	0	No interpreta la comprensión del estudiante (comentario general no centrado en el razonamiento proporcional) o no asigna el nivel de comprensión o lo asigna incorrectamente.
	1	Asigna y justifica de forma incorrecta el nivel de comprensión.
	2	Justifica el nivel de comprensión a partir de la corrección de las respuestas, pero sin considerar las características del razonamiento proporcional.
	3	Justifica el nivel de comprensión del estudiante usando características del razonamiento proporcional.
Decidir	0	No propone acciones o sugiere acciones generales sin relación al tópico matemático.
	1	Propone acciones considerando los tópicos matemáticos, pero desvinculadas de las características de la comprensión del estudiante.
	2	Propone, sin especificar con claridad, al menos una acción que apoya una transición necesaria en la comprensión del razonamiento proporcional.
	3	Específica con claridad acciones que apoyan las transiciones entre los niveles de comprensión del razonamiento proporcional de los estudiantes.

A continuación, se ejemplifica cómo se ha asignado la puntuación para cada destreza.

Puntuación para identificar

Se asignó una puntuación de 0-3 a cada grupo de EP para evaluar los aspectos relevantes identificados en las estrategias usadas por los estudiantes a cada uno de los cinco problemas. Como el P1 tiene dos apartados y el P5 tres apartados, se tenían 8 puntuaciones en total. De esta manera, a cada grupo de EP se le asignaron 24 puntuaciones (3 estudiantes x 8 puntuaciones). Por ejemplo, en la respuesta de E1 al P1b (representar simbólicamente la relación funcional) se puntuó con 0 si los EP no identificaban que la respuesta era incorrecta. Se puntuó con 1 si solo indicaban que la respuesta era incorrecta sin mostrar evidencias («no comprende […] lo realiza de manera errónea», G5). Se puntuó con 2 si solo describía el error en la respuesta («utiliza un procedimiento incorrecto ya que está sumando y no sigue el patrón», G2). Se puntuó con 3 si los EP identificaban la respuesta incorrecta y proporcionaban evidencias de la estrategia usada («al final no logra comprender la secuencia, […] debería comprender la relación de cuántas vueltas de Nicole equivalen a las vueltas de Yesenia. […] Si logra comprender cuántas vueltas da Yesenia, si Nicole da 1 vuelta, podría obtener la relación que ocupa», G4). A continuación, se calculó la media de las 24 puntuaciones para cada grupo de EP como indicador de la destreza identificar. Esta puntuación media tiene el significado de un índice de lo que era capaz de identificar el EP globalmente considerando todos los elementos matemáticos que intervienen en los cinco problemas.

Puntuación para Interpretar

A cada grupo de EP se le asignaron tres puntuaciones (de 0 a 3) vinculadas a la interpretación de la comprensión de cada estudiante considerando globalmente sus respuestas a los cinco problemas. Se intentó identificar en qué medida los EP razonaban con lo que asumían que comprendía. Por lo tanto, a cada grupo de EP le asignamos tres puntuaciones para reflejar cómo habían identificado la comprensión de cada uno de los estudiantes. Por ejemplo, en el caso del E1 (nivel 2), se puntuó con 0 si los EP además de asignar un nivel de razonamiento proporcional incorrecto, realizaban comentarios generales que no mencionaban las características específicas del nivel de razonamiento del estudiante que se evidenciaban en su respuesta («me parece que tiene bases endebles, el concepto no parece haber sido asimilado adecuadamente», G1). Se puntuó con 1 si mencionaban características del estudiante como razonador proporcional, pero no le asignaban el nivel correspondiente o lo indicaban o justificaban de forma incorrecta («parece tener nociones respecto a la proporcionalidad […] no es capaz en ocasiones de utilizar los datos para establecer una proporción general», G7). Se puntuó con 2 si los EP interpretaban que E1 mostraba algunas evidencias del nivel 2 y lo justificaban mencionando las estrategias usadas o la corrección de las respuestas («a pesar de que algunos ejercicios no logra resolverlos adecuadamente, en general utiliza técnicas correctas», G2), pero no usaban todas las evidencias de las características del nivel para determinar la comprensión. Finalmente, se puntuó con un 3 cuando los EP justificaban el nivel de comprensión del estudiante basándose en características del razonamiento proporcional («nivel 2, ya que puede usar estrategias constructivas; sin embargo, le falta establecer la comparación de dos cantidades multiplicativamente por lo cual no alcanza aún el nivel 3», G6). A continuación calculamos la media de las 3 puntuaciones asignadas a cada grupo de EP como un indicador de la destreza interpretar.

Puntuación para decidir

A cada grupo de EP se le asignaron tres puntuaciones (de 0 a 3) vinculadas con las decisiones de enseñanza que indicaban para cada estudiante teniendo en cuenta cómo habían interpretado su comprensión. Por ejemplo, para el E1 se puntuó con 0 si no sugerían acciones o si estas eran generales y no se relacionaban con el tema de razones y proporciones («daríamos un repaso sobre los resultados finales», G3). Se puntuó con 1, si la acción sugerida consideraba el tema de razones y proporciones, pero no ayudaba a expresar la razón funcional simbólicamente («implementación de una tabla de valor perdido y que así avance de […] a estrategias constructivas», G1). Se puntuó con 2 si la acción ayudaba al estudiante a expresar simbólicamente la razón funcional, pero no estaba claramente especificada («enseñar otras estrategias en distintos ejemplos» –G2). Finalmente, se puntuó con 3, si la acción propuesta presentaba con claridad una ayuda para que el estudiante expresara simbólicamente la razón funcional («ejercicios con números un poco más complejos y grandes […]», G5). A continuación, se calculó la media de las tres puntuaciones asignada a cada grupo de EPs como indicador de la destreza decidir.

Puntuación general

Finalmente, calculamos la media de las puntuaciones dada a cada destreza para determinar una puntuación general de la competencia docente mirar profesionalmente el razonamiento proporcional de estudiantes. Teniendo en cuenta la gran cantidad de elementos matemáticos relevantes para el razonamiento proporcional que los EP debían identificar, consideramos los siguientes rangos de la puntuación general para determinar perfiles que pueden caracterizar el desarrollo de la competencia docente mirar el pensamiento matemático de los estudiantes en relación al razonamiento proporcional:]2,3]);

]1,2], y [0, 1]. De esta manera, se intentó tener en cuenta la necesidad de analizar conjuntamente los elementos matemáticos que aparecían en diferentes problemas y en las respuestas de los estudiantes, para interpretar su nivel de comprensión y justificar las propuestas de acción específicas para cada uno. Además, representamos en diagramas de barras de diferentes colores las puntuaciones de las tres destrezas particularizadas a la manera de mirar cada uno de los tres estudiantes que reflejaban diferentes niveles de desarrollo del razonamiento proporcional (estudiante 1, nivel 2; estudiante 2, nivel 1; estudiante 3- nivel 3) (Espinoza-González et al., 2025). Esta manera de representar los valores de las variables cualitativas nos permitieron poder caracterizar los perfiles identificados.

RESULTADOS

Los resultados muestran tres perfiles a partir de las medias obtenidas en las tres destrezas evaluadas. Se estableció el perfil notable para los grupos con puntuaciones generales superiores a 2, mixto entre 1 y 2, y emergente para valores generales inferiores a 1. Estos umbrales fueron definidos considerando la identificación de elementos matemáticos específicos, la justificación de la comprensión proporcional y la formulación de propuestas de enseñanza.

Tabla 3.
Perfiles y puntuaciones general y por destreza para cada grupo

Perfil	*Grupo*	*Puntuaciones*						
		General	*Identificar*	*Id(g)*	*Interpretar*	*Int(g)*	*Decidir*	*Dec(g)*
Notable	G6	2.5	2.1	2.1	3.0	3.0	2.3	2.3
Mixto	G2	2.0	1.2	1.47	2.0	1.75	2.7	1.6
	G4	1.9	2.3		1.7		1.7	
	G5	1.5	1.1		2.3		1.0	
	G7	1.1	1.3		1.0		1.0	
Emergente	G1	0.5	0.8	0.7	0.0	0.00	0.7	0.35
	G3	0.2	0.6		0.0		0.0	

El perfil *notable* (al que pertenece el G6) se caracteriza por un alto desempeño en las tres destrezas, lo cual se refleja en medias superiores a 2 en cada destreza específica. Es decir, los EP de este perfil identificaron una gran cantidad de aspectos relevantes del razonamiento proporcional en los problemas, en las estrategias de los estudiantes y en la relación entre ambos. Esto les permitió interpretar el nivel de comprensión de los estudiantes y fundamentar adecuadamente sus decisiones de acción. El perfil *mixto* (G2, G4, G5, G7) muestra un desempeño desigual en las destrezas, con medias superiores a 2 en algunas de ellas y entre 1 y 2 en otras. Como resultado, los EP de este perfil no son consistentes en la identificación de aspectos relevantes, ni en la interpretación del nivel de comprensión de los estudiantes o en la justificación de sus decisiones educativas, lo que evidencia un desarrollo parcial e inestable de las destrezas evaluadas. Por su parte, el perfil *emergente* (G1, G3) presenta un bajo desempeño en las tres destrezas, con medias inferiores a 0.8 en cada destreza, e incluso presentan medias iguales a cero en algunas de ellas. Es decir, estos EP identifican pocos elementos matemáticos relevantes, lo que limita su capacidad para interpretar adecuadamente la comprensión de los estudiantes y justificar adecuadamente las decisiones educativas. Finalmente, estos tres perfiles se distinguen también por sus puntuaciones generales decrecientes: 2.5 para el perfil notable, entre 1.1 y 2.0 para el perfil mixto y entre 0.2 y 0.5 para el perfil emergente (tabla 3 y Espinoza-González et al., 2025).

A continuación se describen las características de cada uno de los perfiles.

Perfil notable

En este perfil está situado el grupo G6, que *i*) identifica las estrategias aditivas y multiplicativas en problemas proporcionales y no proporcionales, y *ii*) reconoce la importancia de la constante de proporcionalidad para representar la relación funcional en diferentes formas (verbal, tabular, simbólica). Esto les ayuda a interpretar el nivel de comprensión de los estudiantes, relacionando de manera global las características de los problemas y las respuestas de los estudiantes para proponer acciones instruccionales que apoyan la transición entre los niveles de razonamiento proporcional. En este perfil, la puntuación en la destreza identificar (2.1) es menor que las puntuaciones para interpretar (3.0) y decidir (2.3), posiblemente porque los estudiantes para profesores pueden estar asumiendo que ya se tienen en cuenta los elementos matemáticos en las interpretaciones y en la toma de decisiones

Por ejemplo, para la destreza identificar, el G6 (Id(g) = 2.1) reconoce que el E1 en el P1 utiliza una estrategia «mal aplicada […] donde debe encontrar la razón o el valor de «y» cometió el error de tomarlo como una adición». Este grupo destaca que el E1 no identifica la razón funcional para establecer la relación entre las dos magnitudes, representando simbólicamente una relación aditiva incorrecta. De manera similar, indican que el E2 establece una relación aditiva en el problema proporcional P1, «estrategia aditiva mal aplicada, porque establece la relación de manera aditiva entre dos datos y llega a una razón que no es multiplicativa». Mientras que en relación con E3 en el P1 indican que realiza «un enfoque funcional bien aplicado, logra determinar la razón de la proporcionalidad completando la tabla correctamente».

Para la destreza interpretar, el G6 (Int(g) = 3.0) considera las respuestas de cada estudiante a todos los problemas, en conjunto, para asignar y justificar un nivel de razonamiento. Por ejemplo, considerando las respuestas del estudiante E1 a los cinco problemas de manera conjunta le asignan el «nivel 2 ya que puede utilizar estrategias constructivas; [se refieren a las resoluciones de P1 y P3 en las que se usan razones escalares] sin embargo, le falta establecer la comparación de dos cantidades multiplicativamente por lo cual no alcanza aún el nivel 3» [refiriéndose a las razones funcionales]. Estos EP reconocen que, aunque el E1 emplea la covarianza de las razones, todavía presenta dificultades para comparar multiplicativamente dos cantidades de distinta magnitud (invarianza) y expresar la relación funcional de forma simbólica.

Finalmente, para la destreza decidir, el G6 (Dec(g) = 2.3) propone acciones de enseñanza basadas en la comprensión identificada para el E1 y el E2, pero no para el E3, quien muestra mayor nivel de comprensión. Por ejemplo, para el E1, que mostraba dificultades para expresar la relación funcional simbólicamente, sugieren «pedirle que calcule valores muy grandes o decimales para que deba dejar atrás la adición seguido de una serie de ejercicios dónde deba hallar la razón de la proporcionalidad [definiendo de manera implícita como objetivo de aprendizaje la identificación de la razón funcional]». Es decir, el G6 propone modificar el tamaño y tipo de números en las razones para guiar al estudiante al uso de la constante de proporcionalidad, y pueda expresar dicha relación de forma simbólica. En contraste, para el E3 que presenta un mayor nivel de comprensión y que puede situarse en el nivel 3 sugiere acciones pedagógicas generales como «una serie de ejercicios más allá del nivel del promedio para evitar el aburrimiento y desinterés en clase».

Perfil mixto

Este perfil incluye cuatro grupos (G2, G4, G5 y G7) con una puntuación global en interpretar (Int(g) = 1.75) superior a la de identificar (Id(g) = 1.47). Esto es debido al comportamiento desigual de los grupos de este perfil con relación a las destrezas de identificar e interpretar (tabla 3). Este perfil se caracteriza porque los EPs *i*) se centran en la corrección de la respuesta del estudiante o en nombrar estrategias, sin proporcionar evidencias de elementos matemáticos específicos. De manera ocasional, en algunos problemas mencionan la relación entre cantidades (idea de razón) presente en las estrategias, *ii*) justifican el nivel de comprensión de los estudiantes solo a partir de la corrección de las respuestas sin mencionar las características de cada nivel. Y *iii*) en algunos casos proponen acciones que se justifican atendiendo a la comprensión del razonamiento proporcional, aunque no siempre las detallan.

Por ejemplo, para la destreza identificar (Id(g) = 1.47), los grupos en este perfil reconocen el uso de relaciones aditivas incorrectas para determinar valores perdidos en una tabla proporcional y para representar simbólicamente la relación funcional. Así, para el P1 el G5 señala que el E2 «no comprende el concepto de razón por lo que realiza comparaciones aditivas esperando a que funcione», y, respecto a la representación simbólica de la relación funcional, el G7 indica que E2 «no parece ver/utilizar la proporción dada al inicio y procede a sumar 6 unidades». Estos grupos también identifican el uso correcto de la invarianza de las razones escalares para determinar valores perdidos en una tabla proporcional, como el G4 que respondió con relación a la respuesta del E1 al P1 que «Nicole pasa de dar 4 vueltas a 12, lo cual sería el triple; ahora si Nicole dio el triple de vueltas, Yesenia daría el triple de vueltas también»; o el uso correcto de la constancia de las razones funcionales, como el G2, que menciona que para el P3 el E3 «utilizó la unidad del agua entre el jugo y respondió con la de menos resultado». Sin embargo, en otros problemas, que no son de valor perdido, estos EPs solo mencionan la estrategia empleada y si es correcta, pero no justifican por qué la respuesta es correcta o incorrecta. Por ejemplo, el G2, con relación a la respuesta de E2 al problema P2, respondió que «la estrategia utilizada no es correcta, está utilizando regla de tres». De manera similar, el G4 al referirse a la respuesta del E3 al segundo apartado del P5 señaló que «la ecuación de $y = 1.5\,x$ es la manera correcta de expresar la relación».

En relación con la destreza interpretar (Int(g) = 1.75), estos EP determinan el nivel de comprensión de los estudiantes basándose únicamente en la corrección de las respuestas a los problemas. Por ejemplo, el G2 afirma que el E1 alcanzó el nivel 3 porque «siempre utiliza técnicas correctas». Sin embargo, esta interpretación omite considerar la dificultad que tiene el E1 para expresar simbólicamente la relación funcional, una característica del nivel 3, pero que habían reconocido al analizar la respuesta del E1 en el segundo apartado del P1.

Por último, en la destreza decidir (Dec(g) = 1.6), los EP de este perfil ocasionalmente proponen acciones pedagógicas vinculadas al razonamiento proporcional y la comprensión del estudiante, aunque no siempre las especifican. Por ejemplo, el G2, al notar que el E3 resuelve correctamente todos los problemas, sugiere «utilizar más ejercicios en dónde la persona estudiante cambie de técnica o de estrategia, entre ellas: la regla de tres, la constructiva, etc.». Sin embargo, para el E1 recomiendan «enseñar algunas otras estrategias en distintos ejemplos para que el estudiante logre entender con una mayor facilidad aquellos en los que está fallando», sin precisar qué estrategias o tipos de problemas podría ayudar al estudiante a mejorar su razonamiento proporcional.

Perfil emergente

En este perfil se sitúan dos grupos (G1 y G3), cuyos EP presentan dificultades para articular las características de los problemas y de las respuestas de los estudiantes para interpretar su razonamiento

proporcional y decidir cómo continuar la enseñanza. En particular, estos EP *i*) no identifican las características de los problemas, *ii*) no reconocen relaciones aditivas o multiplicativas en las estrategias de los estudiantes y *iii*) confunden situaciones proporcionales con no proporcionales y respuestas correctas con incorrectas y viceversa. Esto les impide interpretar adecuadamente la comprensión de los estudiantes y tomar decisiones apropiadas.

En particular, para la destreza identificar (Id(g) = 0.7), el G3 indica erróneamente que el P1 es «situaciones no proporcionales», y en el problema no proporcional P2 indican que es «situaciones proporcionales». Esta confusión podría deberse a la disposición de los datos en la respuesta del E2 al P2 que se asemeja a la estrategia de regla de tres, pero también muestra una relación aditiva entre cantidades de igual magnitud. Además, estos EP no identifican algunos elementos matemáticos en las estrategias de los estudiantes. Por ejemplo, el G3 no reconoce para los tres estudiantes aspectos relacionados con la representación de la relación funcional en el P1 y el P5, mientras que el G1 solo menciona la respuesta incorrecta del E1 en el P1, señalando que «observa el comportamiento de la primera casilla en vertical y no corrobora si se cumple para las demás proporciones».

Para la destreza interpretar (Int(g) = 0), estos EP tienen dificultades para evaluar de forma global la comprensión de los estudiantes. En particular, el G3 asigna distintos niveles de razonamiento proporcional a un mismo estudiante según el problema, mientras que el G1 asigna incorrectamente el nivel de razonamiento proporcional de algunos estudiantes debido a su enfoque en estrategias aditivas y su dificultad para identificar elementos de razonamiento proporcional en las respuestas.

Para la destreza decidir (Dec(g) = 0.35), estos EP proponen acciones desvinculadas del razonamiento proporcional y de la comprensión de los estudiantes. Por ejemplo, el G3 sugiere para el E3 que «la animaría a trabajar con sus compañeros en grupo, que ella sea una estudiante líder».

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Este estudio tiene como objetivo caracterizar perfiles de la competencia docente mirar profesionalmente el razonamiento proporcional en EP. Los EP analizaron las respuestas de tres estudiantes, con distintos niveles de comprensión del razonamiento proporcional, a cinco problemas de razones y proporciones con características distintas para decidir acciones de enseñanza. Representamos gráficamente los elementos matemáticos que los EP fueron capaces de reconocer y la interpretación de la comprensión de los estudiantes de educación secundaria, considerando globalmente sus respuestas a varios problemas para decidir cómo apoyar las transiciones en el desarrollo del razonamiento proporcional (Espinoza-González et al., 2025). Teniendo en cuenta los elementos matemáticos que debían ser atendidos, asignamos un valor a cada destreza y una puntuación general con el objetivo de identificar las características de tres perfiles de la competencia docente: notable, mixto y emergente.

El perfil notable evidencia un alto desempeño de la competencia mirar profesionalmente el razonamiento proporcional. Los EP de este perfil identifican numerosos elementos matemáticos relevantes en los problemas e interpretan adecuadamente los niveles de comprensión de los estudiantes, considerando globalmente sus estrategias. Además, justifican sus decisiones pedagógicas en función de la comprensión inferida, proponiendo acciones que apoyan las transiciones en el desarrollo del razonamiento proporcional. En el perfil mixto, los EPs identifican menos elementos matemáticos a tener en cuenta en los problemas, centrándose en la corrección de las respuestas. Además, interpretan la comprensión de los estudiantes y toman decisiones para apoyar las transiciones de manera poco específica. Por último, en el perfil emergente los EP identifican pocos elementos matemáticos relevantes en los problemas evidenciando un conocimiento limitado sobre razón y proporción. Estos EP confunden estrategias correctas con incorrectas y clasifican erróneamente situaciones no proporcionales como proporcionales.

Como resultado, sus interpretaciones y toma de decisiones carecen de referencia al tópico matemático específico. Estos tres perfiles muestran dos características de la competencia mirar profesionalmente el razonamiento proporcional: *i*) la dificultad de los EP para considerar simultáneamente varios elementos matemáticamente relevantes sobre el razonamiento proporcional en los problemas, y *ii*) la no linealidad entre las destrezas de identificar, interpretar y decidir que determinan la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento de los estudiantes.

En primer lugar, tener en cuenta al mismo tiempo varios elementos matemáticos relativos al razonamiento proporcional en los problemas y en las estrategias de los estudiantes no resulta fácil para los EP. Nuestros resultados indican que la coordinación de la información generada desde cada una de las respuestas de un estudiante a los cinco problemas es compleja. De esta manera, podemos considerar que analizar de forma global las respuestas de cada estudiante a cinco problemas con características diferentes puede ser considerado un buen indicador del desempeño de la competencia docente. Este resultado subraya la necesaria coordinación entre la identificación de los elementos matemáticos de los problemas y la interpretación de la comprensión de los estudiantes que se puede generar usando solo un problema (Amador et al., 2024; Buforn et al., 2022; Tyminsky et al., 2021). Además, las decisiones relativas a cómo continuar la enseñanza para estudiantes con un alto nivel de razonamiento proporcional propuestas en el perfil notable, como retomar la enseñanza o plantear ejercicios más difíciles sin detallarlos, indica las dificultades para proponer acciones efectivas que permitan la consolidación de la comprensión (Buforn et al., 2022; Moreno et al., 2025) (el G6 propuso acciones pedagógicas relacionadas con la comprensión identificada para los estudiantes E1 (nivel 2) y E2 (nivel 1), pero no para el E3 (nivel 3) (Espinoza-González et al., 2025).

En segundo lugar, nuestros resultados indican que las destrezas de la competencia docente no tienen necesariamente una relación secuencial (Jacobs et al., 2010), ya que algunos EP interpretaban más de lo que inicialmente identificaron (G1, G2, G5) (tabla 3). Una posible explicación es que la manera en que se genera la relación entre las destrezas de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en un contexto de formación inicial, depende de la estructura matemática del tópico considerado y de la manera en la que se integra la información sobre el aprendizaje. En nuestro caso, la manera en la que los EP conocían la idea de razón y proporción e integraban esta información con el conocimiento sobre las transiciones en el desarrollo del razonamiento proporcional. Considerando el diseño de los instrumentos en la propuesta formativa, los EP tenían que considerar una gran cantidad de elementos matemáticos relativos a la razón y proporción en los problemas, pero también las respuestas de varios estudiantes que mostraban diferentes características del desarrollo del razonamiento proporcional. La integración de estos dos tipos de conocimiento (sobre las matemáticas y sobre cómo se aprende) parece definir la naturaleza de las relaciones que se establecen entre las destrezas de la competencia docente en un contexto de formación inicial. Es decir, nuestros resultados parecen apoyar una naturaleza interrelacionada de las destrezas en los contextos de formación (Scheiner, 2021, 2023).

La identificación de perfiles (notable, mixto y emergente) permite describir cómo los EP identifican, interpretan y deciden cómo continuar la enseñanza, al mirar profesionalmente el razonamiento proporcional, así como analizar la heterogeneidad y evolución de estas destrezas. Esta clasificación ofrece un marco para diseñar intervenciones didácticas diferenciadas en la formación docente inicial. Además, permite reconocer dificultades específicas de cada perfil, como la confusión entre relaciones aditivas y proporcionales en el perfil emergente, lo que sugiere la necesidad de una instrucción más focalizada en la estructura de las situaciones proporcionales. Los perfiles también funcionan como herramienta diagnóstica para orientar el acompañamiento en prácticas formativas centradas en el análisis del pensamiento estudiantil. Desde una perspectiva investigativa, los perfiles ofrecen un modelo analítico para estudiar la competencia profesional docente, trazar trayectorias de desarrollo, explorar

relaciones entre destrezas e identificar el impacto de diversas intervenciones. En síntesis, los perfiles caracterizan a los EP y aportan insumos para mejorar el diseño curricular, promover la reflexión profesional y enriquecer futuras investigaciones.

Finalmente, aunque la organización grupal y el número de participantes respondían al diseño metodológico del estudio, durante la implementación surgieron diversos desafíos. Uno de ellos fue la dificultades para dar seguimiento a la participación individual de los EP, lo que impidió comprobar la equidad en los aportes y limitó la identificación de destrezas individuales. También, por restricciones de tiempo, no fue posible realizar la revisión preliminar de los análisis elaborados por cada grupo de EP para identificar errores, imprecisiones u omisiones, lo que posiblemente limitó la recolección de respuestas más detalladas. Además, el tamaño reducido de participantes restringió la diversidad de perfiles identificados. Aunque estas limitaciones no fueron previstas en el diseño inicial, resultaron relevantes para interpretar los resultados.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo forma parte del proyecto PID2023-149624NB-I00, de la Agencia Estatal de Investigación, Ministerio de Ciencia e Innovación, España. Ademas, se contó con el apoyo económico de la Junta de Becas de la Universidad Nacional, Costa Rica.

Nota: Las ideas previas que han sido desarrolladas en este artículo fueron presentadas en el XXVI (2023) Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Amador, J. M., Glassmeyer, D., & Brakoniecki, A. (2025). Teachers' noticing of proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *28*(4), 879-907. https://doi.org/10.1007/s10857-024-09625-7

Barnhart, T. & van Es, E. (2015). Studying teacher noticing: Examining the relationship among preservice science teachers' ability to attend, analyze and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education*, *45*, 83-93. https://doi.org/10.1016/j.tate.2014.09.005

Buforn, À., Llinares, S., Coles, A., & Brown, L. C. (2022). Pre-service teachers' knowledge of the unitizing process in recognizing students' reasoning to propose teaching decisions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(2), 425-443. https://doi.org/10.1080/0020739x.2020.1777333

Buforn, À., Llinares, S., & Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *23*(76), 229-251.

Burgos, M. & Godino, J. (2022). Prospective primary school teachers' competence for the cognitive analysis of students' solutions to proportionality tasks. *Journal of Mathematik-Didactik*, *43*, 347-376. https://doi.org/10.1007/s13138-021-00193-4

Copur-Gencturk, Y., Baek, C., & Doleck, T. (2023). A closer look at teachers' proportional reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *21*(1), 113-129. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10249-7

Cramer, K. & Post, T. (1993). Proportional reasoning. *The Mathematics Teacher*, *86*, 404-407.

Dindyal, J., Schack, E., Choy, B. H., & Gamoran, M. (2021). Exploring the terrains of mathematics teacher noticing. *ZDM Mathematics Education*, *53*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01249-y

Espinoza-González, J., Buforn, À., & Llinares, S. (2025). *Anexo 1. Diagramas con las puntuaciones asignadas a cada grupo de estudiantes para profesor en las tres destrezas según los tres niveles de razonamiento proporcional*. [Archivo de datos]. Figshare. https://doi.org/10.6084/m9.figshare.29803679.v3

Fernández, C., Valls, J., & Llinares, S. (2011). El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente «mirar con sentido» el pensamiento matemático de los estudiantes. En M. Marín et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). SEIEM.

Fernández, C. & Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(1), 129-142. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n1.596

Jacobs, V. R., Empson, S. B., Jessup, N., Dunning, A., Pynes, D., Krause, G., & Franke, T. M. (2024). Profiles of teachers' expertise in professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *27*(3), 295-324. https://doi.org/10.1007/s10857-022-09558-z

Jacobs, V. R., Lamb, L. C., & Philipp, R.A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169-202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

Kaput, J. & West, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. En G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 235-287). State University of New York Press.

Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive processes. En T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 131-156). Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-669). Information Age Publishing.

Lobato, J., Ellis, A. B., & Zbiek, R. M. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics: Grades 6-8*. National Council of Teachers of Mathematics.

Mason, J. (2002). *Researching your own practices: The discipline of noticing.* Routledge.

Moreno, M., Valls, J., Sánchez-Matamoros, G., & Aráuz, D. F. (2025). Desarrollo profesional de futuros docentes de matemáticas de educación secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *43*(2), 61-80. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6320

Moreno, M., Sánchez-Matamoros, G., & Valls, J. (2025). Influence of professional materials on the decision-making of preservice secondary teachers when noticing students' mathematical thinking. *Education Sciences*, *15*(4), 418. https://doi.org/10.3390/educsci15040418

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I— Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(2), 217-253. https://doi.org/10.1007/BF00304357

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II— Problem-structure at successive stages—Problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(3), 331-363. https://doi.org/10.1007/BF00697744

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., & Llinares, S. (2019). Relationships among prospective secondary mathematic teachers' skills of attending, interpreting and responding to students' understanding. *Educational Studies in Mathematics*, *100*(1), 83-99. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9855-y

Scheiner, T. (2021). Towards a more comprehensive model of teacher noticing. *ZDM-Mathematics Education*, *53*(1), 85-94. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01202-5

Scheiner, T. (2023). Shifting the ways prospective teachers frame and notice student mathematical thinking: from deficits to strengths. *Educational Studies in Mathematics*, *114*(1), 35-61. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10235-y

Tjoe, H. & De la Torre, J. (2014). On recognizing proportionality: Does the ability to solve missing value proportional problems presuppose the conception of proportional reasoning? *Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 1-7. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.09.002

Tyminsky, A. M., Simpson, A. J., Land, T. J., Drake, C., & Dede, E. (2021). Prospective elementary mathematics teachers' noticing of children's mathematics: A focus on extending moves. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *24*(6), 533-561. https://doi.org/10.1007/s10857-020-09472-2

Valverde, G. & Castro, E. (2012). Prospective elementary school teachers' proportional reasoning. *PNA*, *7*, 1-19. https://doi.org/10.30827/pna.v7i1.6134

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M., & Verschaffel, L. (2009). Students' overuse of proportionality on missing-value problems: How numbers may change solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(2), 187-211. https://doi.org/10.2307/40539331

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities of overgeneralization. *Cognition and Instruction*, *23*(1), 57-86. https://doi.org/10.1207/s1532690xci2301_3

Weyers, J., König, J., Scheiner, T., Santagata, R., & Kaiser, G. (2024). Teacher noticing in mathematics education: A review of recent developments. *ZDM Mathematics Education*, *56*(2), 249-264. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01527-x

Prospective Mathematics Teachers' Profiles When Noticing Proportional Reasoning

Jonathan Espinoza-González
Universidad Nacional, Costa Rica
jonathan.espinoza.gonzalez@una.cr
https://orcid.org/0000-0003-0082-4926

Àngela Buforn, Salvador Llinares
Universidad de Alicante, España
angela.buforn@ua.es, sllinares@ua.es
https://orcid.org/0000-0002-5373-2403, https://orcid.org/0000-0002-0801-316X

This study characterizes profiles of the so-called competence «noticing proportional reasoning» among 14 prospective secondary mathematics teachers. Noticing involves identifying key elements in students' responses, interpreting their understanding, and making instructional decisions. This study analyses how prospective teachers examined the responses of three fictitious students—with different levels of proportional reasoning—to five ratio and proportion problems.

The study draws on two main frameworks: *i*) levels and transitions in the understanding of proportional reasoning, and *ii*) the domain-specific articulation of noticing proportional reasoning. The first framework describes a progression from non-proportional reasoning (Level 0) through the recognition of multiplicative relationships (Level 1), the construction of scalar ratios and the emerging understanding of functional invariance with representation difficulties (Level 2), to the representation of the functional relationship across different registers (Level 3). The second framework emphasizes that noticing is highly tied to specific content, which requires an understanding of developmental progressions in the area, as well as the ability to recognize mathematical ideas related to proportionality that underly students' actions.

The research context was a secondary mathematics teaching initial program. During the first three sessions of a 17-week training program, participants engaged in professional learning tasks focused on identifying, interpreting, and making instructional decisions based on the strategies used by the three fictitious students when solving five problems. The problems were designed considering variables such as the presence or absence of proportional situation, the problem type (qualitative, quantitative, comparative, and lost value problems); the enter and non-enter ratio, the numerical structure, the familiarity with context and the representation modes. The responses reflected distinct levels of proportional reasoning (Student 1 – Level 2; Student 2 – Level 1; Student 3 – Level 3).

Prospective teachers worked in groups to solve tasks that involved problem analysis, noticing students' strategies, and deciding how to proceed. Their performance was assessed using a four-point scale (0 to 3) for each skill (identifying, interpreting, deciding). Mean scores per skill were calculated as performance indicators, along with an overall score for each group that derived from the average of the three skill means. Based on these scores, three profiles were identified: notable, mixed, and emerging. The notable profile (G6), with scores above 2, showed high and balanced performance across all three skills. The mixed profile (G2, G4, G5, and G7), with scores between 1 and 2, displayed uneven performance and struggled to link mathematical elements to pedagogical decisions. The emerging profile (G1 and G3), with scores below 1, showed general difficulties, especially in distinguishing between proportional and additive situations and in justifying instructional decisions.

Two key findings emerged. Firstly, prospective teachers found it difficult to consider multiple mathematical elements simultaneously when analyzing proportional reasoning. Secondly, the development of these skills was not linearly determined by the learning context. Some participants (e.g., G1, G2, and G5) were able to go beyond what they initially identified, suggesting that progress in these skills may be influenced by specific features of the learning context.

This study offers a useful framework for diagnosing the development of noticing proportional reasoning and designing teacher education interventions. It also provides evidence on how developmental pathways within the domain of proportional reasoning have an impact on the learning of noticing and it highlights the need for further research on learning trajectories and inter-skill relationships. Despite methodological limitations—such as small sample size and the inability to isolate individual contributions—the findings have relevant implications for curriculum design and teacher training focused on analyzing students' mathematical thinking.