ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS 43-2 (2025), 165-185
Innovaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6115
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Una experiencia de enseñanza con una tarea de final abierto de contenido específico

A Teaching Experience With a Content-Specific Open-Ended Task

Daniela Pagés Rostán
Universidad de la República, Montevideo, Uruguay
danielapages@gmail.com

María Verónica Scorza Arló
Consejo de Formación en Educación, Dirección General de Educación Secundaria, Montevideo, Uruguay
scorzamariaveronica@gmail.com

RESUMEN • Reportamos una experiencia de enseñanza que tuvo dos objetivos: evaluar el potencial matemático de una tarea abierta e indagar si el trabajo con ella promueve que surja la propiedad de la desigualdad triangular en un contexto geométrico. Se modificó una tarea estándar de un libro de texto y se analizaron las producciones de 116 estudiantes de secundaria (13-15 años) sobre la base de los siguientes criterios: las representaciones semióticas, los conjuntos numéricos utilizados, las formas de indicar la multiplicidad de soluciones, el caso del triángulo equilátero, las estrategias utilizadas y la aparición de la propiedad de la desigualdad triangular. Los resultados muestran que el surgimiento de esta propiedad está sujeto a los registros de representaciones semióticas usados. Se concluye que la tarea tiene alto potencial matemático y promueve la flexibilidad.

PALABRAS CLAVE: Tareas matemáticas abiertas; Flexibilidad; Registros de representación; Desigualdad triangular.

ABSTRACT • We report on a teaching experience that had two objectives: to assess the mathematical potential of an open-ended task and to explore whether working with it promotes the emergence of the triangle inequality property in a geometric context. A standard task from a textbook was modified, and the productions of 116 secondary school students (aged between 13 and 15) were analyzed basing on the following criteria: semiotic representations, numerical sets used, ways of indicating the multiplicity of solutions, the case of the equilateral triangle, strategies used, and the emergence of the triangle inequality property. The results show that the emergence of this property is conditioned by the semiotic representation registers employed. Based on the students' work, it is concluded that the task has high mathematical potential and promotes flexibility.

KEYWORDS: Open-ended mathematical tasks; Flexibility; Representation registers; Triangle inequality.

Recepción: diciembre 2023 • Aceptación: enero 2025 Publicación: junio 2025

Pagés Rostán, D. y Scorza Arló, M. V. (2025). Una experiencia de enseñanza con una tarea de final abierto de contenido específico. *Enseñanza de las Ciencias*, *43*(2), 165-185. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6115

INTRODUCCIÓN

Varios autores señalan la importancia de las tareas abiertas con múltiples soluciones para potenciar el aprendizaje matemático en la clase (Klein y Leikin, 2020, 2023; Leikin, 2014, 2018; NCTM, 2000; Sullivan et al., 2011; Sullivan et al., 2013). En particular, Leikin (2014, 2018) considera que este tipo de tareas son herramientas especialmente efectivas para desafiar el potencial de los estudiantes. A su vez, Klein y Leikin (2023) señalan que las tareas abiertas no suelen aparecer en los libros de texto para los alumnos y por tanto raramente se llevan al aula de matemática. La falta de familiaridad de los profesores con ellas hace que su implementación sea un proceso difícil de llevar a cabo. Así, al desafío de seleccionar o diseñar tareas abiertas se suma el de planificar acciones asociadas, de modo que el trabajo con ellas permita a los estudiantes desarrollar compromiso, pensamiento crítico y establecer conexiones cognitivas (Sullivan et al., 2011).

Existen diversas variables que hacen que la labor de los docentes sea compleja: los recursos disponibles, los tipos de interacciones y los contextos sociales y culturales, entre otras (Barbosa y de Oliveira, 2013; Watson y Ohtani, 2015; Zaslavsky y Sullivan, 2011). En este sentido, contar con ideas o procedimientos para diseñar tareas matemáticas abiertas y familiarizarse con modelos para implementarlas en el aula de forma efectiva adquiere especial relevancia para el trabajo de los docentes y los futuros docentes.

Se presenta un estudio que está focalizado en el diseño y la implementación de una tarea de final abierto de contenido específico que fue diseñada modificando una tarea estándar de un libro de texto de enseñanza secundaria, relativa a las medidas de los lados de un triángulo isósceles de perímetro dado. Esta tarea se implementó en tres grupos de 7.º grado, dos de 8.º y dos de 9.º de educación secundaria (116 estudiantes de 13 a 15 años). Se siguieron las sugerencias didácticas de Sullivan et al. (2013) para el trabajo con tareas abiertas y un modelo específico para el trabajo con tareas de alta demanda cognitiva propuesto por Stein et al. (2008).

La experiencia tuvo un doble objetivo. Por un lado, evaluar el potencial matemático de la tarea diseñada a través del análisis de lo que los estudiantes lograron producir, sobre la base de los siguientes criterios: el registro de representación semiótica que usaron, los conjuntos numéricos en los que hicieron variar las medidas de los lados del triángulo, la forma en que expresaron la multiplicidad de soluciones de la tarea, la consideración del triángulo equilátero como una solución particular, el tipo de estrategia que usaron para abordar la tarea. Por otro lado, evaluar si el trabajo con la tarea permitía que surgiera la propiedad de la *desigualdad triangular* como contenido específico. Esta propiedad establece que en todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es mayor a la longitud del lado restante. Si bien el foco estuvo en el análisis de las producciones de los estudiantes, también reportamos algunos pasajes de lo que ocurrió en las clases para dar cuenta de la forma en la que se implementó la tarea.

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Las tareas como herramienta para la producción matemática en el aula

Para Klein y Leikin (2020), el principal objetivo de la educación matemática es lograr que los estudiantes desarrollen su potencial matemático y es responsabilidad de los profesores crear las oportunidades para que eso ocurra. Entre las posibles acciones las autoras consideran que a los estudiantes se les deben plantear actividades desafiantes. Recomiendan especialmente las tareas matemáticas abiertas, pues permiten la producción de ideas originales. Para Leikin (2014), una tarea abierta debe cumplir con cuatro condiciones: primero, la persona que trabaja con ella debe estar motivada a encontrar una solución;

segundo, el procedimiento para encontrar una solución no debe ser evidente de antemano; tercero, es necesario hacer varios intentos y persistir en la búsqueda de la solución; y cuarto, la tarea debe tener varias formas de resolverse o varias soluciones posibles. También considera que un indicador del potencial matemático de la tarea se refiere a que pueda desarrollar el pensamiento crítico de los estudiantes y les permita hacer conexiones matemáticas significativas.

Un aspecto que varios autores señalan como central al diseñar o seleccionar tareas es atender su demanda cognitiva (Stein et al., 2009; Sullivan et al., 2013; Watson y Ohtani, 2015). Stein et al. (2009) definen la demanda cognitiva de una tarea como "el tipo y nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para que se involucren exitosamente con la tarea y la resuelvan" (p. xxiv). En relación con esto, proponen una guía de análisis de tareas para determinar su demanda cognitiva, y establecen dos grandes categorías: las tareas de baja demanda cognitiva y las de alta demanda cognitiva. Entre las primeras se encuentran las tareas que son rutinarias y, que, en general, se abordan con alguna estrategia que está explícita en su consigna o no hay ambigüedad acerca de lo que hay que hacer. Son tareas que requieren la memorización o la aplicación de procedimientos ya estudiados. Se focalizan en obtener *la* respuesta correcta y no se necesita que los estudiantes den grandes explicaciones o descripciones de lo que hicieron. Por otro lado, las tareas de alta demanda cognitiva no se pueden resolver utilizando sin sentido un procedimiento aprendido; los estudiantes deben entender lo que están haciendo y poder explicarlo. Promueven que los estudiantes centren su atención en los significados, las ideas y los conceptos que subyacen tras los procedimientos necesarios para resolver la tarea, por eso permiten que se desarrollen niveles más profundos de comprensión matemática. Las tareas de alta demanda cognitiva dan lugar a que se utilicen múltiples formas de representación y a que se realicen conexiones entre ellas que ayuden a desarrollar significado. La resolución de la tarea puede involucrar también que se exploren diferentes caminos o estrategias, ya que no hay un procedimiento sugerido en la consigna o de ella no se desprende uno claramente.

Por su parte, Sullivan et al. (2013) establecen que para que se genere aprendizaje los estudiantes deben trabajar en tareas seleccionadas cuidadosamente por los docentes que impliquen un diálogo con los otros estudiantes de la clase y el profesor. Señalan que las más adecuadas son las que proporcionan diversos contextos y grados de complejidad, estimulan el surgimiento de redes cognitivas, el pensamiento y la reflexión, y abordan temas matemáticos significativos de manera explícita. En particular, Sullivan et al. sugieren las *tareas de final abierto y contenido específico*, que tienen múltiples respuestas posibles, en las que los estudiantes pueden identificar patrones y buscar soluciones más generales, y así comprender conceptos matemáticos concretos. En este sentido, no son tareas rutinarias y se pueden considerar de alta demanda cognitiva en virtud de que comportan las características antes señaladas y del trabajo matemático que permiten desarrollar.

Para Zaslavsky (1995), el hecho de que una tarea tenga múltiples respuestas permite que todos los estudiantes puedan dar al menos una respuesta (correcta) trabajando a su manera y a su nivel, lo que asegura que cada estudiante pueda tener algún éxito; hace que los estudiantes comparen estas respuestas entre sí y con las de otros compañeros, verifiquen su validez y busquen relaciones entre ellas, pudiendo incluso llegar a generalizaciones.

Relaciones entre las representaciones semióticas, la flexibilidad y el potencial matemático de una tarea

Duval (2006) señala que la actividad matemática necesita el uso de representaciones semióticas para representar los objetos matemáticos, que son imposibles de aprehender de forma directa. Dos registros de representación son diferentes si sus contenidos son de distinta naturaleza, por ejemplo, signos numéricos y figuras. Entre las transformaciones que, como parte de la actividad matemática, se realizan con las representaciones semióticas, el autor señala dos: la *conversión* y el *tratamiento*. La conversión es el cambio de un registro de representación a otro, por ejemplo, del registro verbal al numérico. El tratamiento consiste en transformaciones de enunciados dentro de un mismo registro, por ejemplo, cuando se transforma una ecuación en otras equivalentes. Para Duval, la comprensión matemática supone la coordinación de al menos dos registros de representación.

En este estudio se propone una tarea en lenguaje natural, referida a las medidas de los lados de un triángulo isósceles de perímetro constante. Los estudiantes posiblemente tendrán que convertir este registro en otro tipo de representación que les ayude a determinar la respuesta a lo que se pregunta: las posibles medidas de los lados del triángulo. Consideramos que elegirán un registro numérico para dar ternas o sumas de números positivos, un registro tabular o un registro gráfico, como por ejemplo figuras de análisis o construcciones con regla y compás. También es posible que algunos estudiantes realicen una conversión entre estos tipos de registros durante la resolución de la tarea.

Una conversión del registro verbal al numérico puede llevar a que los estudiantes no perciban la imposibilidad de construcción de algunos triángulos, es decir, que consideren una terna de números que no representa necesariamente al objeto *triángulo*. Algo similar puede ocurrir si los estudiantes utilizan un registro gráfico con figuras prototípicas, sin tener en cuenta las medidas de sus lados, dado que las construcciones con regla y compás con las medidas, o considerando una escala, pueden fomentar que encuentren casos imposibles y los descarten. Durante la discusión general se prevé analizar la coherencia de las distintas conversiones realizadas por los estudiantes, así como la coherencia o no de estas conversiones en tanto representaciones semióticas. Por ejemplo, una solución dada por una terna numérica podría no representar al objeto triángulo.

Con respecto a las estrategias que emplean los estudiantes para resolver una tarea, un aspecto relevante es el análisis de la flexibilidad. Elia et al. (2009) definen la flexibilidad como la conducta de cambiar de estrategia durante la resolución de problemas, y sostienen que la flexibilidad determina, en gran medida, cuán bien un estudiante puede lidiar con una nueva situación y la posibilidad de tener éxito. Los autores distinguen dos tipos de flexibilidad: la flexibilidad intertarea, esto es, cambiar de estrategia de una tarea a otra; y la flexibilidad intratarea, es decir, cambiar de estrategia dentro de una misma tarea.

Sobre la base de los aportes de Stein et al. (2009), Duval (2006) y Elia et al. (2009), elaboramos cinco criterios (que se presentan en la sección siguiente) para analizar las producciones de los estudiantes, con el fin de evaluar el potencial matemático de la tarea. Este se define como la capacidad para involucrar a los estudiantes en procesos significativos de aprendizaje (Stein et al., 2009) y se manifiesta, por ejemplo, a través de la flexibilidad intratarea, que involucra cambios de estrategia, así como conversiones en las representaciones. Además, la tarea abierta con la que trabajamos en esta experiencia permite realizar conexiones entre conceptos matemáticos, como, por ejemplo, los conjuntos numéricos, el triángulo equilátero y la propiedad de la desigualdad triangular, generando su aprendizaje.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Diseño de la tarea

Para esta experiencia seleccionamos de un libro de texto para estudiantes de primer año de enseñanza secundaria, para modificarla, la siguiente tarea:

> *El perímetro de un triángulo isósceles es de 33 cm y el lado mayor es de 12 cm. ¿Cuánto mide cada uno de los otros dos lados?* (Da Costa y Scorza, 2011, p. 125)

Para Klein y Leikin (2020) es una *tarea regular* porque aparece en los materiales de estudio para la clase de Matemáticas. También se puede llamar cerrada, en el sentido de que tiene una sola respuesta correcta: cada uno de los lados iguales del triángulo isósceles es de 10,5 *cm* (o dos, si se interpreta el lado mayor en relación con la medida, y se presenta la solución 12, 12 y 9). A partir de ella decidimos diseñar una tarea abierta que cuadra mejor con la denominación *tarea de final abierto de contenido específico* de Sullivan et al. (2013), y para ello atendimos varias de las consideraciones teóricas antes presentadas. La consigna de la tarea modificada es la siguiente:

> *De un triángulo isósceles se sabe que su perímetro es de 17 cm. ¿Cuáles podrían ser las medidas de sus lados?* (Pagés y Scorza, 2022).

Para transformar la tarea original seguimos las recomendaciones de Zaslavsky (1995) y de Klein y Leikin (2020, 2023):

1. Modificamos el enunciado de la consigna omitiendo el dato de la longitud del lado mayor.
2. Cambiamos el valor del perímetro por un número impar que no fuera múltiplo de tres.
3. Reformulamos la pregunta cambiando "cuánto miden" por "cuáles podrían ser las medidas".

El propósito del primer cambio fue abrir la tarea y dar lugar a múltiples soluciones. El segundo cambio se hizo para que, de aparecer el caso del triángulo equilátero, la longitud de sus lados no fuera un número entero, manteniendo así la idea de la tarea original de trabajar con números decimales. La pregunta se reformuló para que la tarea fuera completamente abierta, en el sentido que plantean Klein y Leikin (2023), puesto que si se pregunta cuáles *son* las medidas de los lados, en lugar de cuáles *podrían ser*, la tarea se convertiría en cerrada, porque resolverla implicaría dar el conjunto completo de soluciones.

La tarea diseñada resulta ser de *final abierto y contenido específico* (Sullivan et al., 2013). Es de final abierto, pues tiene múltiples respuestas correctas, de hecho, tiene infinitas. Puede ser resuelta dando algunas soluciones, pero también puede que se llegue a soluciones más generales. Es de contenido específico, dado que, a partir de observar regularidades o patrones en las respuestas o de atender a los casos de imposibilidad de solución, tiene la potencialidad de que surja un contenido matemático: la propiedad de la *desigualdad triangular.*

Diseño metodológico de la implementación

Para diseñar la implementación de la tarea, seguimos las sugerencias didácticas de Sullivan et al. (2013) para el trabajo con tareas de final abierto y contenido específico y, además, utilizamos un modelo propuesto por Stein et al. (2008), que consiste en cinco prácticas para orquestar discusiones matemáticas productivas en torno a tareas de alta demanda cognitiva.

Sullivan et al. (2013) sugieren que el profesor debe plantear la tarea, aclarar los términos y explicar que tiene múltiples respuestas posibles, pero no debería decir a los estudiantes qué hacer ni cómo hacerlo. Al culminar el trabajo el profesor debe organizar un debate para escuchar respuestas interesantes (que haya identificado específicamente mientras los estudiantes trabajan), a partir de las cuales tratar de extraer puntos en común y generalizaciones.

Describimos brevemente las cinco prácticas del modelo de Stein et al. (2008):

– *Anticipar*. Consiste en prever qué interpretaciones y resoluciones de la tarea podrán hacer los estudiantes, qué estrategias utilizarán, las relaciones de estas con los conceptos.
– *Monitorear las respuestas de los estudiantes*. Consiste en atender especialmente el pensamiento de los estudiantes. Implica identificar qué potencial de aprendizaje tienen sus estrategias o repre-

sentaciones, qué matemática se evidencia en sus resoluciones y qué discurso desarrollan cuando discuten, así como su validez matemática.
- *Seleccionar intencionalmente aquellas respuestas de estudiantes que se presentarán en la puesta en común*. Implica seleccionar producciones con el objetivo de obtener diversidad en cuanto a las matemáticas y a los procedimientos presentes en estas. Así, será más probable que las ideas importantes sean tratadas efectivamente en la clase y no se pierdan durante la puesta en común.
- *Secuenciar las respuestas de los estudiantes de modo intencional*. Consiste en elegir en qué orden presentarán sus producciones los distintos grupos o estudiantes. El orden puede vincularse con la estrategia más utilizada, el error más común, o una resolución más original, por ejemplo.
- *Conectar las ideas de los estudiantes*. Consiste en promover que los estudiantes establezcan conexiones matemáticas entre las resoluciones o representaciones que utilizan y visualicen que una misma idea matemática puede sostener distintas estrategias de resolución.

En concordancia con lo anterior, para implementar la tarea resolvimos que, tras la presentación, íbamos a aclarar a los estudiantes lo siguiente:

- No hay una única respuesta correcta a la pregunta planteada en la tarea.
- Escriban todo lo que pensaron e hicieron.
- Asegúrense de responder la pregunta.

Asimismo, en el caso de surgir dudas acerca de la consigna, podríamos recordar o pedir a algún estudiante que explique qué es un triángulo isósceles y cómo se calcula el perímetro de un triángulo. Esto se debe a que el interés está en las soluciones que pueden dar los estudiantes y las conclusiones a las que pueden llegar. La falta de conocimientos previos no debería ser un obstáculo, puesto que, de todos modos, los estudiantes deben conectar con estos conceptos para poder resolver la tarea con éxito.

Otro de los acuerdos previos fue que el trabajo en la clase se haría en pequeños grupos, de dos o tres integrantes, conformados por afinidad o proximidad, a los efectos de respetar las características de los grupos y lograr un ambiente afectivo. También decidimos registrar por escrito algunos de los diálogos que se dieran entre la profesora y los estudiantes, o entre estos en un grupo de trabajo, pues no teníamos autorización para filmar ni grabar las clases.

La anticipación de las posibles respuestas y estrategias de los estudiantes, y las conexiones entre las ideas matemáticas que pudieran derivarse de estas, fueron planificadas, pero, por limitaciones de espacio, no se presentan en este artículo. La anticipación de las respuestas y las conexiones pueden leerse en Pagés y Scorza (2022).

Contexto de la experiencia

La tarea diseñada se implementó en siete grupos de educación media básica en Uruguay: dos de 7.° grado (12-13 años), tres de 8.° (13-14 años), y dos de 9.° (14-15 años), pertenecientes a dos liceos urbanos públicos (estatales), y participaron un total de 116 estudiantes. La tarea fue implementada en cada grupo en una clase de 80 minutos de duración, por parte de las autoras de este artículo (una de ellas a cargo de la clase y la otra como observadora).

En lo que refiere a los conocimientos previos y los hábitos de los estudiantes participantes, puntualizamos lo siguiente:

1. Era la primera vez que trabajaban con tareas matemáticas abiertas.
2. Ninguno de los grupos estaba trabajando con geometría al momento de la experiencia.

3. En los programas de matemática de 7.° grado de educación secundaria básica de Uruguay, se sugiere la construcción de triángulos (y de otras figuras) con regla y compás, sin embargo, la propiedad de la desigualdad triangular no aparece en forma explícita en los programas oficiales de los cursos donde se llevó a cabo la experiencia.

Criterios utilizados para el análisis

Registros de representación semiótica

La tarea se presenta en el registro de representación verbal. Los estudiantes tendrán que hacer alguna conversión de registro para enfrentarse a ella. Pueden aparecer los siguientes registros: *numérico-verbal*, *tabular*, *numérico-verbal* y *gráfico*.

El registro *numérico-verbal* consiste en presentar ternas de números positivos o sumas de tres números positivos, correctas o incorrectas, acompañadas de palabras. Ejemplos de esta conversión serían: (8, 8, 1); 7 + 7 + 3. Algunos estudiantes pueden presentar ambos tipos.

El registro *tabular* supone la presentación de una tabla con las ternas de números positivos que representan las medidas de los lados. Pueden obtenerse por ensayo y error, pero también podría usarse la tabla para presentar las posibles soluciones ordenadamente. En este sentido, es que lo consideramos un registro distinto que el *numérico-verbal*. Un ejemplo podría ser la tabla 1:

Tabla 1.
Ejemplo del registro tabular

x (lados iguales)	1	2	3	4	5	6	7	8
y (lado distinto)	15	13	11	9	7	5	3	1

El registro *numérico-verbal y gráfico* consiste en la presentación de triángulos dibujados, acompañados de las medidas, ya sea sobre sus representaciones o presentadas como ternas. Estos pueden ser triángulos isósceles prototípicos, sin escala, o pueden ser figuras a escala o construidas con instrumentos de geometría en verdadera magnitud. Un ejemplo se presenta en la figura 1.

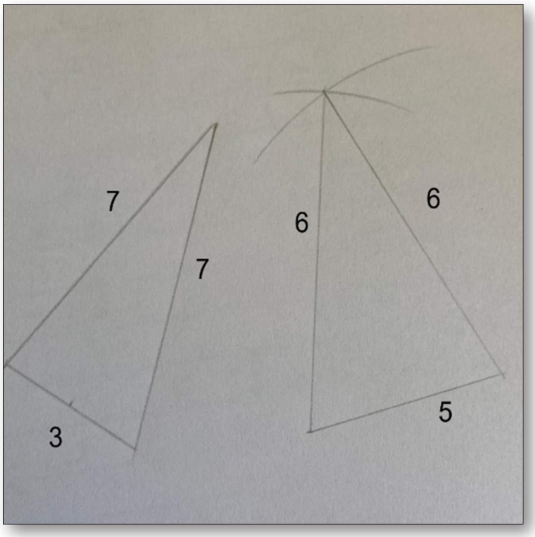

Fig. 1. Ejemplo del registro numérico-verbal y gráfico.

Distinguiremos entonces dos tipos de registro *numérico-verbal y gráfico*: los que presentan figuras construidas con regla y compás, y los que presentan figuras prototípicas.

Los conjuntos numéricos en los que varían las medidas de los lados del triángulo

Este criterio distingue aquellas producciones que solo plantean números enteros positivos para representar las medidas, o presentan enteros y decimales exactos, o decimales periódicos (no creemos que en este nivel utilicen números irracionales), y si los expresan como fracciones o utilizan la notación decimal. El uso de números racionales se vincula con la consideración del triángulo equilátero como un caso de triángulo isósceles. Si los estudiantes reducen sus ejemplos a ternas de números naturales, probablemente no consideren este caso.

La forma de expresar la multiplicidad de soluciones

Dado que la tarea pregunta cuáles pueden ser las medidas de los lados, los estudiantes podrían dar una única terna de números positivos. Pero la consigna los invita a considerar más de una terna. Así, los estudiantes podrían decir que “hay muchas”, “que son infinitas” o incluso intentar sistematizar o acotar las soluciones. En el caso de que esté disponible, podrían presentar las soluciones en lenguaje algebraico, por ejemplo, $a+2b=17$ con $2b>a$.

La consideración del triángulo equilátero como caso particular

Este criterio se vincula de forma directa con los conjuntos numéricos que los estudiantes utilicen para dar las soluciones. Como ya dijimos, el uso exclusivo de ternas de números naturales, así como la concepción del triángulo isósceles como aquel que tiene dos lados de igual medida y un tercero de medida distinta, podrá llevar a no considerar este caso. La discusión del triángulo equilátero como solución en la puesta en común puede colaborar en la conceptualización de los racionales como posibles medidas de un segmento y del triángulo equilátero como isósceles.

Las estrategias utilizadas

Pueden presentarse distintas estrategias. Proceden por *ensayo y error* si declaran que “fueron probando”, ya sea que sus respuestas resulten correctas o no. La estrategia de *listado o búsqueda sistemática* recoge aquellas estrategias en las que se buscan todos los casos posibles con medidas naturales con alguna sistematicidad (por ejemplo, aumentando la medida de uno de los lados iguales y determinando la del tercero), o señalando los casos de imposibilidad. La estrategia de *prueba o comprobación* consiste en dar una lista de soluciones y comprobarlas construyendo los triángulos con regla y compás o solo con regla, respetando las medidas, es decir, validan las ternas a través de un segundo cambio de registro de representación semiótica, por ejemplo, del numérico al gráfico (a escala o con regla y compás).

El surgimiento de la propiedad de la desigualdad triangular

Este criterio se relaciona con el tipo de representaciones semióticas que utilizan los estudiantes, ya que si usan solo el registro *numérico-verbal* es probable que no consideren la propiedad de la desigualdad triangular. En cambio, si recurren a construcciones con regla y compás, realizadas a escala o en verdadera magnitud, o incluso si realizan una búsqueda sistemática en una tabla, pueden encontrar casos imposibles y establecer esta propiedad como condición para las soluciones.

Resultados del análisis de las producciones de los estudiantes

Presentamos los resultados del análisis con base en los criterios descritos anteriormente.

Los registros de representación utilizados por los estudiantes

Encontramos evidencia del uso de diferentes registros de representación semiótica (Duval, 2006) para dar las posibles soluciones a la tarea. La mayoría de los estudiantes (52 %) utilizaron el registro *numérico-verbal*. En algunos casos presentaron ternas de números cuya suma es 17, en otros plantearon las sumas con sus resultados. Constatamos que muy pocos estudiantes recurrieron al registro *tabular* (6 %) y los que lo utilizaron (a excepción de un equipo de estudiantes) están en 9.º grado. Algunas respuestas (42 %) aparecen en el registro *numérico-verbal y gráfico*, y la mayoría de las construcciones con regla y compás se dieron en 7.° y 8.° grados.

En la tabla 2 presentamos el resumen de los resultados en relación con los tipos de registro de representación semiótica, y en la figura 2 algunos ejemplos.

Tabla 2.
Tipos de registros de representación semiótica utilizados

	Numérico- Verbal	*Tabular*	*Numérico-verbal y gráfico* (figuras de análisis)	*Numérico-verbal y gráfico* (figuras construidas)
7.º	15	0	4	9
8.º	29	1	13	15
9.º	16	6	6	2
Total	60	7	23	26
Porcentaje	52	6	20	22

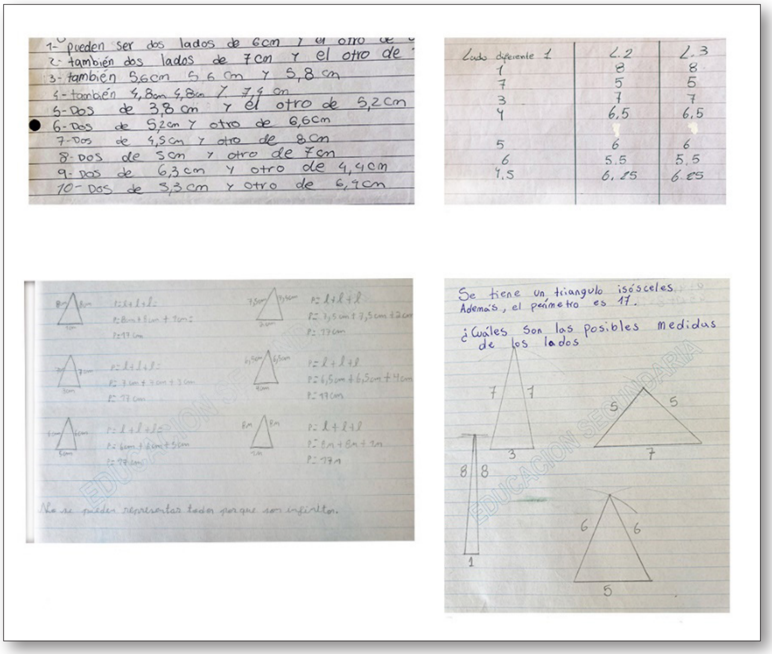

Fig. 2. Ejemplos de las producciones de los estudiantes en relación con los registros de representación semiótica utilizados: numérico-verbal, tabular, numérico-verbal y gráfico (con figuras de análisis y con construcciones con regla y compás)

Los conjuntos numéricos en los que hicieron variar las medidas de los lados del triángulo

La mayoría de los estudiantes consideraron números enteros positivos (53 %) y hubo también muchos casos en los que se usaron, además, números decimales positivos exactos (43 %). No hubo evidencia del uso de otras representaciones para expresar las medidas, como por ejemplo las fracciones, a pesar de que es un contenido que se trabaja en todos los cursos. Hubo un solo caso, en 9.º grado, en que apareció el uso de decimales periódicos. A continuación, presentamos algunos ejemplos de la escritura de los estudiantes (ver figura 3), y en la tabla 3 se muestran resumidos los conjuntos numéricos utilizados.

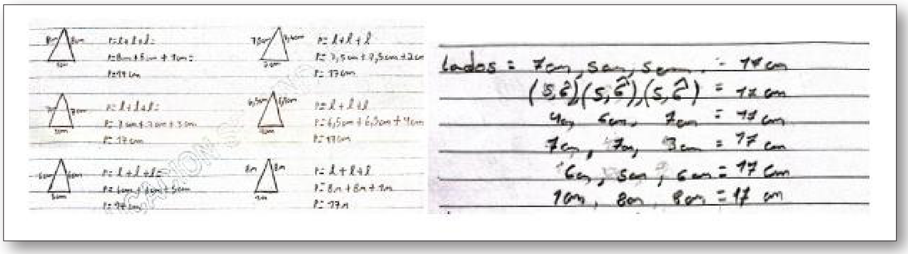

Fig. 3. Ejemplos de conjuntos numéricos utilizados.

Tabla 3.
Conjuntos numéricos utilizados para las respuestas

	Solo enteros	*Enteros y decimales exactos*	*Decimales periódicos*
7.º	18	10	0
8.º	38	20	0
9.º	9	20	1
Total	65	50	1
Porcentaje	56	43	1

Forma de expresar la multiplicidad de soluciones de la tarea

Todos los grupos de estudiantes dieron al menos una terna de números para expresar las medidas de los lados del triángulo. Para este criterio consideramos, además, si declaran que hay algunas soluciones (o las presentan), afirman que hay muchas soluciones posibles o dicen que son infinitas. Encontramos que en todos los niveles se usa la palabra *infinito*. En la figura 4 se muestran algunos ejemplos de las expresiones de los estudiantes, y la tabla 4 recoge los resultados.

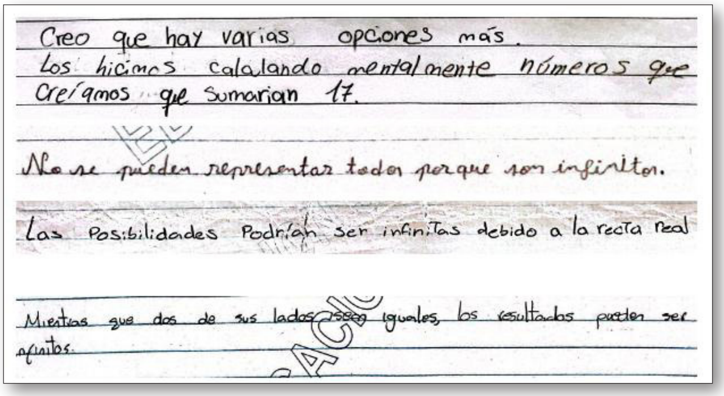

Fig. 4. Expresiones para la multiplicidad de soluciones.

Tabla 4.
Formas de expresar la multiplicidad de soluciones

	Algunas	*Dicen que son muchas*	*Dicen que son infinitas*
7.º	20	4	4
8.º	42	12	4
9.º	20	9	1
Total	82	25	9
Porcentaje	71	22	7

Presentamos aquí un pasaje de uno de los diálogos registrados durante la fase de trabajo en el que los estudiantes se explican entre ellos la posibilidad de que la tarea tenga infinitas soluciones. Sin embargo, los estudiantes de este equipo no se dan cuenta de que no todas las ternas de números, dos iguales y uno diferente, que sumen 17 serán solución de la tarea. En la figura 5 mostramos la hoja de trabajo de este equipo.

Diálogo entre dos estudiantes (A2 y A3) del equipo 1 del 9° 8.

A3: Son infinitos
A2: No
A3: Sí, ¿te explico por qué? Vos pensá que pueden ser infinitos decimales
A2: No entendí
A3: Vos estás pensando en las fáciles, pero no tienen por qué ser números completos, pueden ser con coma.
A2: Pero con coma hay muchos
A3: Por eso te dije infinitos

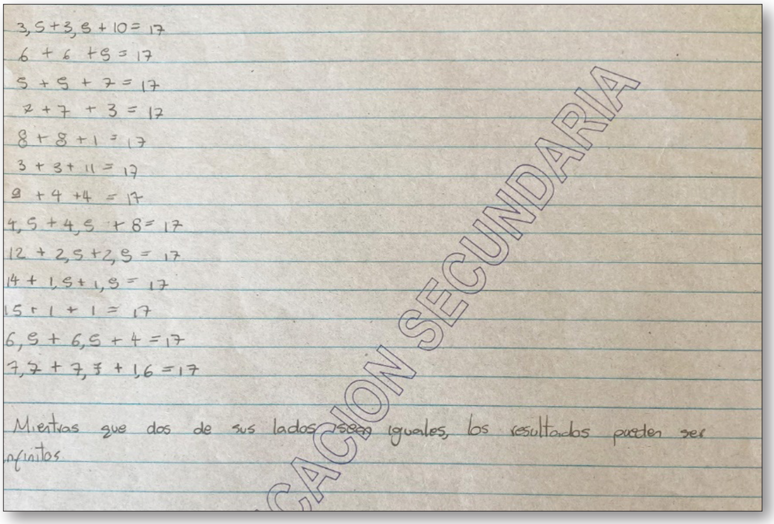

Fig. 5. Hoja de trabajo de estudiantes del equipo 1 del 9° 8.

La consideración del triángulo equilátero como una solución particular

Muy pocos estudiantes presentan un triángulo equilátero como una solución posible. Los que lo hacen (4 %) dan las medidas de forma aproximada, y un solo estudiante da la solución $5,\overline{6}+5,\overline{6}+5,\overline{6}=17$. Y estos casos solo se dan en 9.º grado.

Presentamos el resumen en la tabla 5.

Tabla 5.
El triángulo equilátero como solución

	Sí aproximado	*Sí exacto*	*No*
7.º	0	0	28
8.º	0	0	58
9.º	5	1	24
Total	5	1	110
Porcentaje	4	1	95

En uno de los grupos en el que surgió el caso del triángulo equilátero, pero con medidas aproximadas, la profesora decidió discutirlo en la puesta en común. Transcribimos aquí lo que aconteció en esa clase.

Las estudiantes del equipo 5 (E5) lo plantearon así (ver figura 6):

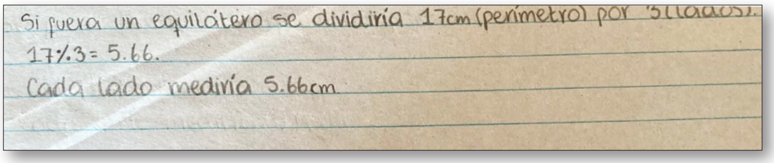

Fig. 6. Planteo del caso del triángulo equilátero.

En primer lugar, la profesora preguntó a las alumnas por qué habían considerado un triángulo equilátero cuando la tarea se refería a un triángulo isósceles. Este fue el diálogo que se dio:

A5: El triángulo equilátero tiene tres lados iguales.
P: Sí, es cierto. Pero en la tarea dice triángulo isósceles.
A6: Pero, es lo mismo.
P: ¿Qué querés decir con lo mismo?
A6: Que los isósceles tienen dos lados iguales y los equiláteros tres iguales, entonces pensamos que podía ser, por eso pusimos si fuera equilátero.
P: [Hablando a la clase] Es así como dicen ellas, el triángulo equilátero es un caso particular de triángulo isósceles.

Luego la profesora preguntó a la clase si estaban de acuerdo con que cada lado del triángulo equilátero era de 5,66 cm, como habían dicho las alumnas A5 y A6. Un estudiante respondió que no, pues 5,66 + 5,66 + 5,66 no da como resultado 17, sino 16,98, y además dijo que él había dividido 17 entre 3 con la calculadora y obtenía 5,66666667. Entonces, esa era la medida de cada lado. Ante esto, la profesora intervino para recordar que la calculadora tiene un visor que es finito y muestra resultados aproximados. Propuso hacer en el pizarrón el cálculo 5,66666667 + 5,66666667 + 5,66666667 [siguiendo la lógica del estudiante que intervino]. Se vio que el resultado era 17,00000001 y no 17. Ningún estudiante propuso multiplicar 5,66666667 por 3. A raíz de esta discusión, la profesora preguntó a la clase cuál era entonces la medida del lado de un triángulo equilátero de perímetro 17 [volviendo al inicio del problema planteado]. Aparecieron algunas ideas, como que el lado medía entre 5 y 6, pues así el perímetro que era 17 quedaba entre 15 y 18. Pasaron unos cuantos minutos de silencio [la profesora se mantuvo sin intervenir] hasta que un estudiante sugirió plantear la siguiente ecuación: $x+x+x=17$ (que luego se simplificó a $3x=17$), lo que llevó a concluir que el lado mide $\frac{17}{3}$, pues $\frac{17}{3}+\frac{17}{3}+\frac{17}{3}=\frac{17\times 3}{3}=17$. Además, se concluyó que $\frac{17}{3}$ y 5,66666667 no eran el mismo número.

Tipos de estrategias utilizadas para abordar la tarea

Se evidenciaron distintas estrategias. Algunos grupos presentaron una única solución de tres números positivos cuya suma fuera 17 o enumeraron varias ternas, en ambos casos por ensayo y error (69 %). Hubo quienes hicieron una búsqueda con alguna sistematicidad (8 %), por ejemplo, aumentando la medida de uno de los lados iguales y determinando la del tercero. Finalmente, otros comprobaron la validez de las ternas a través de un segundo cambio de registro de representación semiótica (23 %), por ejemplo, del *numérico-verbal* al *numérico-verbal y gráfico* (a escala o con regla y compás, para todos o algunos de los ejemplos numéricos presentados). En la tabla 6 presentamos estos resultados y luego los ejemplos a los que hacemos referencia (ver figuras 7, 8, 9 y 10).

Tabla 6.
Tipos de estrategias utilizadas para abordar la tarea

	Ensayo y error	*Listado o búsqueda sistemática*	*Prueba o comprobación*
7.º	16	3	9
8.º	37	6	15
9.º	26	2	2
Total	79	11	26
Porcentaje	68	10	22

Presentamos aquí algunos ejemplos de la estrategia *listado o búsqueda sistemática.*

En la figura 7 se muestra el listado de una búsqueda sistemática con todas las soluciones correctas posibles con medidas naturales, en orden decreciente para las medidas de los lados iguales.

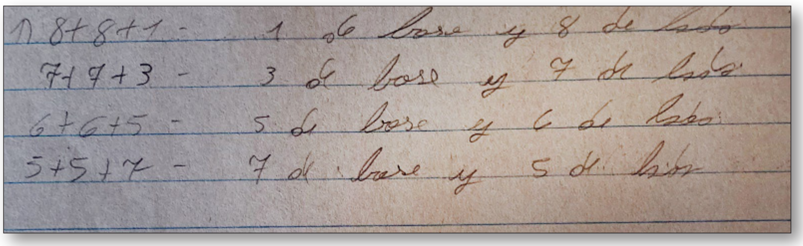

Fig. 7. Búsqueda sistemática con naturales.

En la figura 8 presentamos otro caso de una búsqueda sistemática (declaran “no hay más”), pero con soluciones incorrectas y con una explicación que refiere al valor del perímetro.

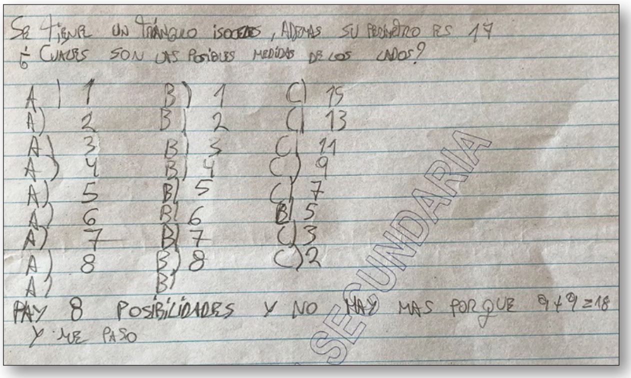

Fig. 8. Búsqueda sistemática con soluciones incorrectas.

Por último, presentamos la búsqueda de soluciones a través de la siguiente estrategia: *Si resto uno a los lados* [iguales] *y sumo 2 a la base, tengo como resultado el mismo número* (17) *(solo funciona 4 veces).* El mismo equipo construyó los triángulos en verdadera magnitud y descartó los que no eran construibles, desarrollando una estrategia de comprobación, como se muestra en las figuras 9 y 10. Esto evidencia también una doble conversión entre los registros de representación: de *verbal* a *numérico-verbal* y de este al *numérico-verbal y gráfico*.

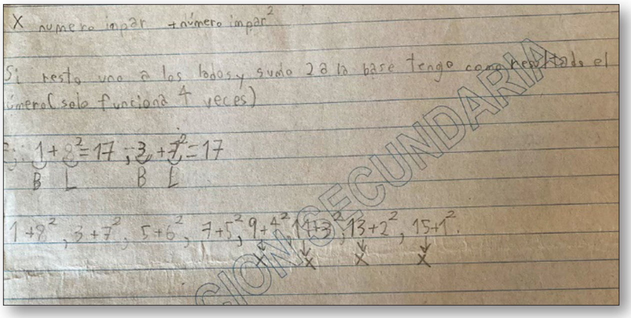

Fig. 9. Estrategia en el registro numérico-verbal.

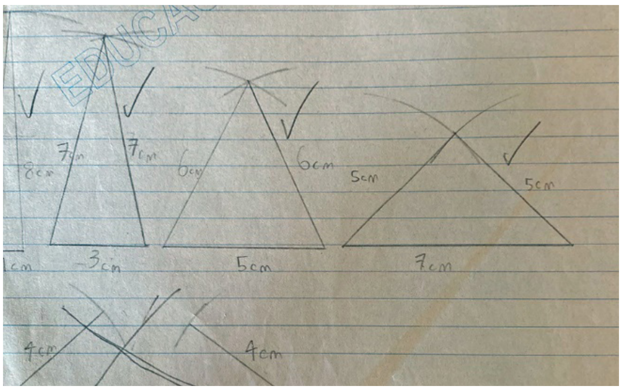

Fig. 10. Estrategia de comprobación.

Propiedad de la desigualdad triangular

En relación con la propiedad de la desigualdad triangular, algunos estudiantes parecen considerarla, aunque no logren explicitarla, lo que se evidencia en el descarte de algunas soluciones (5 %). Por otro lado, el 7 % de los estudiantes enuncian explícitamente la propiedad, expresando la imposibilidad de construir un triángulo con ciertas medidas o dando una condición para la posibilidad de construcción. En la figura 11 presentamos algunos ejemplos de producciones de estudiantes que muestran casos en que sí dan lugar a la propiedad y los resultados de este criterio se presentan en la tabla 7.

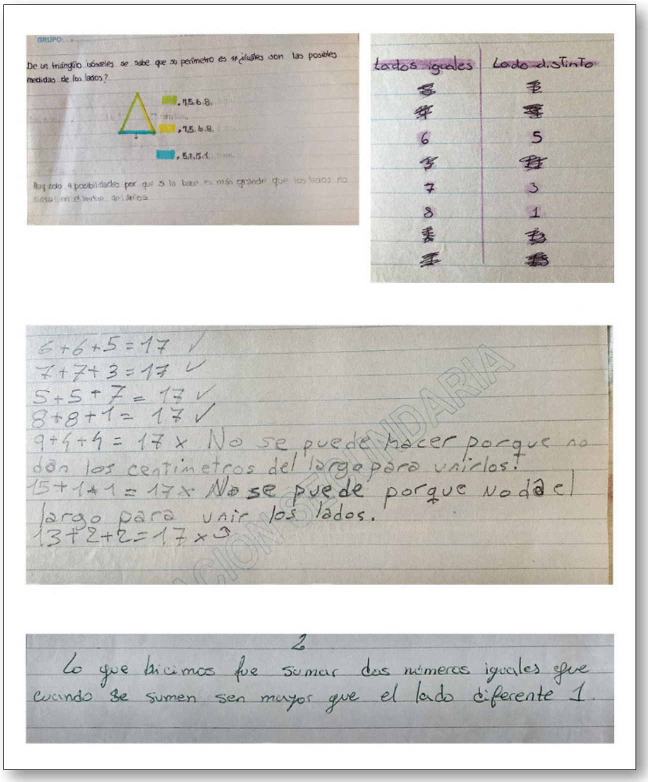

Fig. 11. Evidencias de la propiedad de la desigualdad triangular.

Tabla 7.
Enunciado de la propiedad de la desigualdad triangular

	Sí (descartan)	*Sí (enuncian)*	*No enuncian la propiedad, pero solo presentan soluciones correctas*	*No (presentan soluciones imposibles)*
7.º	3	2	13	10
8.º	2	0	45	11
9.º	1	6	6	17
Total	6	8	64	38
Porcentaje	5	7	55	33

A continuación, ejemplificamos la fase de trabajo de uno de los equipos para mostrar que advirtieron que había infinitas soluciones (aunque no supieran decir por qué), y además en su hoja apareció la imposibilidad de construir un triángulo con un lado de 11 cm. Esto lo expresan escribiendo: *No nos dio por el largo de 11 cm*. Esto da cuenta de que en este equipo surgió la propiedad de la desigualdad triangular, aunque fuera expresada en lenguaje coloquial y no aportaran, por ejemplo, una prueba gráfica de la imposibilidad de construir un triángulo de lados de longitud 3, 3, y 11 cm.

Diálogo entre la profesora (P) y un alumno (A4) del Equipo 4 (E4) del 7.° 1.

A4: Profe, ¿cuántos ponemos?
P: Todas las soluciones que encuentres.
A4: Pero hay infinitas…
P: Bueno, si vos pensás que hay infinitas, escribí eso. Pero tenés que explicar por qué pensás eso.
A4: Sí. Yo creo que son infinitas, pero no sé por qué. Y profe, esperá… ¿Los que no se forman también tenemos que escribirlos?

En relación con la última pregunta del diálogo, los estudiantes escribieron esto en su hoja de trabajo:

Pensamos en este, pero no nos dio por el largo de 11 cm.
Escribieron:

$$3 + 3 + 11 = 17\,cm$$
$$A + B + C = 17\,cm$$

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Esta experiencia de enseñanza trabajando con una tarea de final abierto de contenido específico buscaba, por un lado, evaluar el potencial matemático de la tarea sobre la base de cinco criterios que definimos y, por otro, indagar si era pertinente para hacer surgir la propiedad de la desigualdad triangular.

En relación con el primer criterio, encontramos en las producciones de los estudiantes evidencia del uso de diferentes registros de representación semiótica (Duval, 2006) para dar las posibles soluciones a la tarea. El registro *numérico-verbal* (solo o combinado con el gráfico) fue el más utilizado para expresar el conjunto de soluciones (94 %). Los casos en los que combinan el registro *numérico-verbal* con el gráfico dan cuenta de que, además de responder la pregunta de la tarea, desarrollan una estrategia de comprobación construyendo con regla y compás (22 %). El registro tabular fue el menos usado (6 %). Esto da cuenta de que es un registro que no está disponible en los grados más bajos y que los estudiantes adaptan sus soluciones a los conocimientos previos. En el caso de Uruguay, el concepto de función, que podría asociarse con una tabla de valores, se trabaja recién a finales de 8.° grado y se retoma en 9.° grado. Otra explicación del bajo porcentaje del uso del registro tabular es que les resulte difícil utilizar tablas en un contexto geométrico. El uso de este registro permitió a algunos de los equipos organizar las soluciones de forma ordenada e incluso en uno de los casos mostrar la imposibilidad de construir el triángulo para algunas ternas. En lo que refiere al registro gráfico, para algunos estudiantes la construcción solo ofició de figura de análisis y no se ajustó a las medidas reales. Fueron utilizadas figuras prototípicas (ver figura 2), y los equipos que las dibujaron no visualizaron la imposibilidad de construir algunos triángulos. Esto es consistente con lo que plantean Bernabeu et al. (2022), en cuanto a que el uso de este tipo de figuras genera limitaciones en la construcción de las estructuras conceptuales (en este caso del triángulo) caracterizadas por el vínculo entre las ideas matemáticas y sus representaciones. Hubo casos en los que los triángulos sí se construyeron en verdadera magnitud usando regla y compás y en otros usando solo la regla, y se dieron en mayor medida en 7.° y 8.° grados. Interpretamos esto también en relación con los conocimientos previos, puesto que la construcción de figuras con regla y compás es una temática del curso de Matemáticas de 7.° y muy habitual en los cursos de enseñanza primaria. En algunos casos, que explicaremos más adelante, la doble conversión favoreció la aparición de la desigualdad triangular, ya sea que la expresaran explícitamente o que descartaran casos imposibles.

En cuanto a los conjuntos numéricos, el hecho de que se usaron mayoritariamente enteros positivos o decimales exactos para expresar las medidas de los lados de un triángulo da cuenta de las experiencias previas de los estudiantes con tareas de construcción. En efecto, las medidas que en general se dan para hacer las construcciones (y así aparecen en los libros de texto) son de ese tipo y no aparecen por ejemplo medidas irracionales construibles como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ o $\sqrt{5}$,entre otros.

En lo que se refiere a la multiplicidad de las soluciones, un pequeño porcentaje (7 %) de los estudiantes pudo expresar que la tarea tenía un conjunto infinito de soluciones (Klein y Leikin, 2023). En algunos casos el uso de la palabra *infinito* (que apareció en todos los niveles) fue coloquial, poniendo en evidencia la necesidad de transmitir que la solución no es única (principal característica de las tareas de final abierto), o que no es posible dar todas las soluciones. Todos comprobaron que la solución no es única, expresando algunas soluciones o diciendo que "hay muchas" o "hay muchas más". Un resultado importante es que todos los equipos de todos los grupos dieron respuesta a la tarea, lo que evidencia una de las principales virtudes de las tareas abiertas (Zaslavsky, 1995).

Se evidenció el uso de tres estrategias: ensayo y error (69 %), listado o búsqueda sistemática (8 %) y prueba o comprobación (23 %). No sorprende que la estrategia más simple, el *ensayo y error*, fuera la más empleada. En menor medida, hubo estudiantes en todos los grupos que apelaron a los otros tipos de estrategia para resolver la tarea. Esto evidencia la característica de las tareas abiertas de promover que se exploren diferentes caminos de resolución, ya que no hay un procedimiento sugerido en la consigna o de ella no se desprende uno claramente (Stein et al., 2009). Las dos últimas estrategias fueron usadas por estudiantes que intentaron construir los triángulos en verdadera magnitud, y esto los llevó a detectar casos de imposibilidad que antes habían presentado en forma *numérico-verbal*. Algunos de estos estudiantes, a partir de esta estrategia, enunciaron la propiedad de la desigualdad triangular.

Por último, encontramos que la mayoría de los estudiantes evocan como definición de triángulo isósceles la que indica que tiene dos lados iguales y el tercero de distinta medida, en lugar de la definición que indica que es isósceles aquel triángulo que tiene dos lados iguales (y por tanto incluye al equilátero) y que hay una evolución conceptual en 9.º grado. En esta experiencia, uno de los aprendizajes que deriva del trabajo con la tarea diseñada es que el triángulo equilátero es un caso especial de triángulo isósceles. Este es un conocimiento que no todos los estudiantes tenían disponible, pero fue una idea que quedó instalada tras la puesta en común en los grupos que se dio esta discusión.

Tomando en cuenta las consideraciones expresadas, sostenemos que la tarea diseñada tiene un alto potencial, dado que permitió involucrar a los estudiantes en procesos significativos de aprendizaje (Stein et al., 2009). Este aprendizaje se manifestó en el tipo de trabajo matemático que se logró con la tarea y en las ideas que circularon en las clases. Además, si tenemos en cuenta las diferentes estrategias usadas para abordar la tarea, resulta ser también de inicio abierto, por lo que para algunos estudiantes resultó una tarea de investigación (Klein y Leikin, 2020).

En relación con el segundo objetivo, esperábamos, para los niveles en que propusimos la tarea, que al menos advirtieran la imposibilidad de construir los triángulos cuyos lados no cumplieran con la desigualdad triangular. No esperábamos que enunciaran la propiedad. Sin embargo, aunque en un pequeño porcentaje (12 %), algunos equipos lograron expresar esa imposibilidad para el caso de algunas medidas o incluso algunos esbozaron la propiedad con las condiciones para poder construir un triángulo. Dos causas que encontramos para que no emergiera la propiedad fueron la de representar los triángulos en forma prototípica (y no en verdadera magnitud) y la de trabajar exclusivamente en el registro *numérico-verbal*. Un aspecto que merece atención es el hecho de que una mayoría (55%) dio solo soluciones correctas a la tarea, pero no expresaron la propiedad. Esto puede tener varias interpretaciones. Una de ellas es que sí hayan considerado la imposibilidad de construir el triángulo con ciertas medidas. Otra es que hayan considerado casualmente solo triángulos construibles. Si se cruzan estos datos con las estrategias utilizadas, se puede inferir que ambas explicaciones son factibles, puesto que el 69 % de los estudiantes procede por ensayo y error, y solo un 23 % apela a una prueba o comprobación (como la construcción con regla y compás en verdadera magnitud). Otros casos para destacar son aquellos que mostraron flexibilidad intratarea (Elia et al., 2009) en el uso de diferentes estrategias. En efecto, constatamos que aquellos equipos que usaron más de una representación semiótica para descartar los casos imposibles pudieron hacer evidente la propiedad de desigualdad triangular (ver figuras 9 y 10).

En virtud de lo expresado, creemos que la tarea tiene el potencial para hacer surgir la propiedad, pero nos despierta ciertas interrogantes en relación con su implementación, específicamente acerca de las variables didácticas, como por ejemplo el grado de intervención docente. En este sentido, nos preguntamos si, en el transcurso de la clase, pedir a los estudiantes que construyeran con regla y compás o con el programa GeoGebra algunas de las soluciones que dieron hubiera permitido que emergiera la propiedad de la desigualdad triangular en más equipos de trabajo. Asimismo, pensamos que una nueva redacción de la consigna podría también propiciar el surgimiento de la propiedad, si en lugar de pedir las medidas de los lados se piden ejemplos de los triángulos. Cabría evaluar, sin embargo, si esta nueva propuesta no va en detrimento del potencial matemático.

IMPLICACIONES

Como mencionamos en la introducción, el diseño y el trabajo con tareas matemáticas abiertas no son habituales entre los profesores de Matemáticas, por lo que esta experiencia puede ser inspiradora para que más profesores se esfuercen por incorporarlas en sus clases. Es importante señalar que tanto Zaslavsky (1995, 2008) como Leikin (2018) consideran las tareas abiertas como una herramienta que sirve para atender los diferentes niveles de los estudiantes en el aula. En ese sentido, una misma tarea se puede presentar a toda la clase y no es necesario crear tareas diferenciadas.

Por otra parte, como formadoras sabemos que los estudiantes de profesorado de Matemáticas toman contacto con las tareas abiertas en los cursos de didáctica de la matemática que tienen en su formación inicial. El estudio del diseño y la implementación de tareas es teórico y rara vez tienen la oportunidad de implementarlas en sus clases de práctica o de observar su implementación por otro profesor. Por lo antedicho, consideramos de suma importancia hacer visible a los futuros profesores el trabajo con tareas matemáticas abiertas. Una de las formas de hacerlo es llevar a la clase de didáctica representaciones de la práctica (Grossman, 2011), por ejemplo, artefactos producidos en la práctica, que en este caso serían las producciones de los estudiantes trabajando con la tarea abierta diseñada. Una de las finalidades del trabajo con estas producciones podría ser la enseñanza de la mirada profesional (*noticing*, Fernández et al., 2019), que es una habilidad que los futuros profesores de matemática deben desarrollar para el ejercicio de la docencia.

Finalmente, entendemos que en el caso de replicar esta experiencia de enseñanza habría que tomar en consideración en el análisis los conocimientos previos de los estudiantes, y ver cómo evolucionan en el trabajo con la tarea.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barbosa, J. C. & de Oliveira, A. M. (2013). Collaborative groups and their conflicts in designing tasks. En C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of the International Commission on Mathematical Instruction Study 22, pp. 541-548). http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2022). Cambios en la comprensión de las relaciones entre polígonos en estudiantes de 8-9 años. *Enseñanza de las ciencias*, *40*(2), 49-70. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3208

Da Costa, S., y Scorza, V. (2011). Matemática 1. Prácticas Santillana. Ediciones Santillana S. A.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de RSME*, *9*(1), 143-168. https://gaceta.rsme.es/vernumero.php?id=61

Elia, I. V., den Heuvel-Panhuizen, M. y Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM*, *41*, 605-618. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0184-6

Fernández, C., Ivars, P. y Llinares, S. (2019). Principles in the design of tasks to support pre-service teachers' noticing enhancement. En M. Graven, H. Venkat, A. Essien y P. Vale (Eds.), *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 408-415). PME.

Grossman, P. (2011). Framework for Teaching Practice: A Brief History of an Idea. *Teachers College Record*, *113*(12), 2836-2843. https://doi.org/10.1177/016146811111301205

Klein, S., y Leikin, R. (2020). Opening mathematical problems for posing open mathematical tasks: what do teachers do and feel? *Educational Studies in Mathematics*, *105*(3), 349-365. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09983-y

Klein, S. y Leikin, R. (2023). Open-ended tasks which are not completely open: Challenges and creativity. En M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel y M. Tabach, *Proceeding of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3). University of Haifa, Israel: PME

Leikin, R. (2014). Challenging Mathematics with Multiple Solution Tasks and Mathematical Investigations in Geometry. En Y. Li, E. A. Silver, S. Li (Eds.), *Transforming mathematics instruction. Multiple approaches and practices.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-04993-9_5

Leikin, R. (2018). Openness and constraints associated with creativity-directed activities in mathematics for all students. En N. Amado, S. Carreira y K. Jones (Eds), *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving.* A Focus on Technology, Creativity and Affect. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99861-9

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* https://www.rainierchristian.org/NCTM_principles-and-standards-for-school-mathematics.pdf

Pagés, D., y Scorza, V. (2022). Las tareas de alta demanda cognitiva. Cinco prácticas para implementarlas en la clase de matemática. En C. Ochoviet y M. Olave (Eds), *Diseño de tareas y prácticas de la enseñanza de la matemática* (pp. 55-72). Contexto. ISSN/ISBN: 978-9915-9319-4-4

Stein, M., Engle, R., Smith, M. y Hughes, E. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. y Silver, E. A. (2009). *Implementing Standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development* (2nd edition). Teachers College Press. Kindle version.

Sullivan, P., Jorgensen, R. y Mousley, J. (2011). Using a Model for Planning and Teaching Lessons as Part of Mathematics Teacher Education. En O. Zaslavsky y P. Sullivan (Eds.), *Constructing Knowledge for Teaching Secondary Mathematics*, Mathematics Teacher Education 6, https://doi.org/10.1007/978-0-387-09812-8

Sullivan, P., Clarke, D. y Clarke, B. (2013). Teaching with Tasks for Effective Mathematics Learning. *Mathematics Teacher Education*. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4681-1

Watson, A. y Ohtani, M. (Eds.) (2015). *Task design in mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers' professional development. *For the Learning of Mathematics*, *15*(3), 15-20.

Zaslavsky, O. (2008). *Attention to similarities and differences: A fundamental principle for task design and implementation in mathematics education*. Invited presentation at the Topic Study Group (TSG34) on Research and Development on Task Design and Analysis, the 11th International Congress on Mathematics Education (ICME-11), Monterrey, México.

Zaslavsky, O. y Sullivan, P. (2011). Setting the Stage: A Conceptual Framework for Examining and Developing Tasks for Mathematics Teacher Education. En O. Zaslavsky y P. Sullivan (Eds.), *Constructing Knowledge for Teaching Secondary Mathematics, Mathematics Teacher Education* (pp. 1-22). https://doi.org/10.1007/978-0-387-09812-8

A Teaching Experience With a Content-Specific Open-Ended Task

Daniela Pagés Rostán
Universidad de la República, Montevideo, Uruguay
danielapages@gmail.com

María Verónica Scorza Arló
Consejo de Formación en Educación, Dirección General de Educación Secundaria, Montevideo, Uruguay
scorzamariaveronica@gmail.com

Several researchers emphasize the importance of open-ended tasks with multiple solutions to enhance mathematical learning in the classroom (Leikin, 2014, 2018; Sullivan et al., 2011). However, such tasks are rarely included in textbooks and are infrequently implemented in mathematics classes (Klein & Leikin, 2023). Teachers' unfamiliarity with open-ended tasks poses challenges to their implementation, which requires a planning that fosters student engagement, critical thinking, and cognitive connections.

This study focused on designing and implementing a content-specific open-ended task by modifying a closed textbook task about the side lengths of an isosceles triangle with a given perimeter. The task was carried out with 116 secondary school students (ages ranging from 13 to 15 years old) across the 7th, the 8th and the 9th grades in public schools. The teaching strategy adhered to literature recommendations for open-ended tasks (Sullivan et al., 2013) and cognitively challenging tasks (Stein et al., 2008).

The study aimed to: 1) Evaluate the mathematical potential of the task by analyzing the students' outputs using criteria such as semiotic representations, numerical sets, solution multiplicity, treatment of equilateral triangles as a special case, and strategies used; and 2) assess whether the task facilitated the emergence of the triangle inequality property, which states that the sum of the lengths of any two sides of a triangle is greater than the length of the remaining side.

Findings reveal several key insights. In terms of semiotic representation (Duval, 2006), most students (52 %) expressed solutions in a numerical-verbal format, presenting number triples with accompanying words. Only 6 % used tabular representation, suggesting difficulty in applying tables in geometric contexts. About 20 % used graphical representations but often employed prototypes without proper scaling, leading to errors in constructing valid triangles. Regarding numerical sets and solutions, students primarily used positive integers and exact decimals for side lengths. Only 7 % recognized the infinite solution set characteristic of open-ended tasks, though some used «infinity» colloquially, highlighting a need to convey the non-uniqueness character of solutions. All the student teams were able to respond to the activity, demonstrating one of the key virtues of open-ended tasks (Zaslavsky, 1995). Strategies employed by students were reflective of the exploratory nature of the task (Stein et al., 2009). Trial-and-error was the predominant approach, used by 69 % of participants, while 8 % employed systematic searches and 23 % relied on verification. Students attempting to construct triangles at true scale occasionally identified impossible cases, with a few articulating the triangle inequality property as a result. Most students defined isosceles triangles as having two equal sides and one different side, excluding equilateral triangles. However, students from the 9th grade showed a conceptual evolution, recognizing the equilateral triangle as a special isosceles case through classroom discussions. The task also achieved its second objective by prompting students to detect impossible cases when side lengths violated the triangle inequality. Although only 12 % of students explicitly articulated the property, those who utilized multiple semiotic representations or showed intra-task flexibility (Elia et al., 2009) in the use of different strategies were more likely to identify and describe the conditions for valid triangles. Conversely, reliance on numerical-verbal formats and prototypical representations posed barriers to recognizing the property. In conclusion, the designed task demonstrated substantial potential by engaging students in meaningful mathematical processes, fostering exploratory strategies, and promoting significant learning outcomes. The task encouraged the emergence of the triangle inequality property, particularly among students using diverse representations. For some students, the task functioned as a mathematical investigation, reinforcing its value in developing critical concepts and flexible thinking.