https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6046
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Trayectoria hipotética de aprendizaje sobre la inferencia lógica negación del antecedente

A Hypothetical Learning Trajectory on the Logical Inference Called Denial of Antecedent

Juan Gabriel Herrera Alva
Universidad Autónoma Metropolitana campus Cuajimalpa, Ciudad de México, México.
jherrera@cua.uam.mx

Arturo Rodríguez Espinosa
Tecnológico Nacional de México campus Puebla, Puebla, México.
arturo.rodriguez@puebla.tecnm.mx

RESUMEN • Se reportan los resultados obtenidos sobre cómo el diseño y la implementación de una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) pueden fomentar un cambio conceptual sobre un modo de inferencia no válido frecuentemente utilizado por estudiantes universitarios, la inferencia negación del antecedente en un contexto matemático. La THA se sitúa en el tema de las series infinitas y está sustentada en el modelo de inferencias lógicas, el conflicto cognitivo y el cambio conceptual, entre otros elementos teóricos relevantes. Su implementación se enmarca en las intervenciones en el aula dirigida a problemas que son claves y persistentes. La orquestación de estos elementos teóricos bajo un marco metodológico basado en el diseño muestra avances en los razonamientos deductivos de los estudiantes examinados.

PALABRAS CLAVE: Trayectoria hipotética de aprendizaje; Intervenciones en el aula; Cambio conceptual; Inferencia negación del antecedente; Investigación basada en diseño.

ABSTRACT • This paper presents the findings on how the design and implementation of a hypothetical learning trajectory (HLT) can promote a conceptual change about an invalid mode of inference frequently used by university students, the denial of antecedent inference. The HLT is situated within the study of the topic of infinite series, and it is designed following the model of logical inferences, cognitive conflict and conceptual change, among other relevant theorical elements. The HLT implementation is based on the framework of classroom interventions addressing key and persistent problems. The orchestration of these theoretical elements under a design-based methodological framework shows advances in the deductive reasoning of the students examined.

KEYWORDS: Hypothetical learning trajectory; Classroom-based interventions; Conceptual change; Denial of the antecedent inference; Design-based research.

Recepción: septiembre 2023 • Aceptación: diciembre 2024 • Publicación: marzo 2025

INTRODUCCIÓN

El razonamiento deductivo es un proceso cognitivo que se utiliza para la demostración de teoremas en matemáticas. Según Duval (2004), este tipo de razonamiento consiste en realizar inferencias lógicamente válidas partiendo de proposiciones que se toman como premisas, mediadas por terceros enunciados y las reglas de inferencia; de esta manera se obtiene la deducción de otra proposición. Esta actividad es habitual en los estudiantes de ciencias; de modo que resulta indispensable realizar inferencias lógicas de manera correcta. No obstante, varias investigaciones han evidenciado dificultades que los estudiantes enfrentan al realizarlas (Epp, 2003; Durand-Guerrier, 2003; Stylianides et al., 2004; Evans et al., 2007; Inglis y Simpson, 2008; Camacho et al., 2014; Noya y Adúriz-Bravo, 2023). Un factor común en estos reportes es la dificultad que encierran las negaciones al realizar una inferencia.

De manera abstracta, a partir de una proposición en la forma condicional $p \rightarrow q$ (regla o premisa mayor), hay cuatro maneras comunes de realizar una inferencia lógica, dos válidas, *modus ponens* ($p \rightarrow q$) y *modus tollens* ($\neg q \rightarrow \neg p$) y dos inválidas, negación del antecedente ($\neg p \rightarrow \neg q$) y afirmación del consecuente ($q \rightarrow p$). En particular, se ha identificado que la inferencia NA, también conocida como implicación en forma negativa, es un tipo de razonamiento realizado y aceptado frecuentemente. Aunque la implicación solo sea válida en una dirección ($\Rightarrow$), se tiende a negar la premisa y su conclusión, lo que lleva a deducciones erróneas. Por ejemplo, en una investigación sobre la comprensión del concepto de sucesión numérica, Bajo-Benito et al. (2021) evidenciaron un uso incorrecto de la inferencia NA a partir de la afirmación: «si una expresión matemática cumple con las condiciones para ser una progresión aritmética o una progresión geométrica, entonces se verifica que dichas expresiones matemáticas son sucesiones numéricas», algunos estudiantes dedujeron que si las condiciones para ser una progresión aritmética o una geométrica no se satisfacen, entonces esas expresiones no representaban sucesiones numéricas. Por otra parte, Noya y Adúriz-Bravo (2023) reportaron las dificultades que tuvieron 20 estudiantes de Física y Matemáticas en actividades que correspondían a la inferencia NA en un contexto matemático. Asimismo, Evans et al. (2007) mostró que, alrededor del 47 % de una población de 120 participantes tuvieron dificultades con la inferencia NA en un contexto abstracto.

Algunos de estos autores también han discutido posibles causas sobre dificultades al realizar inferencias lógicas; por ejemplo, Epp (2003) sugiere que, al razonar en el lenguaje matemático, donde la lógica es rígida, se usa el razonamiento del lenguaje cotidiano, el cual es flexible. Por ejemplo, se interpreta un condicional «si» o «solo si» como un «si y solo si», lo cual hace válida a la inferencia NA, lo que genera una fuente de dificultad. Asimismo, Stylianides et al. (2004) y Durand-Guerrier (2003) sugieren que el tipo de contexto en el que se ubica una tarea de razonamiento lógico puede influir al realizar una inferencia.

Por otra parte, Noya y Adúriz-Bravo (2023) consideran que la enseñanza tradicional de la lógica y la educación matemática han prestado poca atención a la inferencia NA. Justifican esta afirmación al abordar diferentes esquemas inferenciales, como la deducción, la inducción y la abducción, subrayando la importancia de esta última como una tercera vía de razonamiento. Explican que, en contraste con la inferencia NA, la abducción permite generar hipótesis plausibles para explicar fenómenos observados, aunque sin ofrecer certeza absoluta, lo que le confiriere un carácter constructivo. En palabras de Noya y Adúriz-Bravo (2023), «la falacia abductiva tiene un carácter constructivo que le confiere fuerza, no siendo este el caso de la falacia de negación del antecedente, y de allí tal vez proviene el escaso tratamiento de esta última en la educación matemática» (p. 36).

Para atender a la problemática de la inferencia NA y contribuir al desarrollo de intervenciones educativas que vinculen la teoría con la práctica, aportando así elementos valiosos al limitado estudio de esta inferencia en el contexto escolar universitario, este estudio emplea la investigación basada en el diseño (IBD) siguiendo las directrices de Gravemeijer (2016). Asimismo, se recurre a las trayectorias hipotéticas de aprendizaje (Simon y Tzur, 2004) que de acuerdo con Bakker y Van Eerde (2015) son un instrumento de diseño de investigación que ha resultado útil durante el desarrollo de la IBD. Recientemente, las trayectorias hipotéticas de aprendizaje han sido utilizadas en diversas áreas de la educación matemática como una herramienta de enseñanza y de investigación que proporciona un marco explicativo que permite analizar el desarrollo de los procesos de aprendizaje de un sujeto, por ejemplo (Cárcamo et al., 2021; Ivars et al., 2020; Bakker y Van Eerde, 2015).

La pregunta de investigación que se plantea es: ¿cómo puede el diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje fomentar un cambio favorable en el razonamiento deductivo de los estudiantes universitarios de cálculo que aceptan incorrectamente la inferencia NA? Los objetivos que guían la investigación son:

1. Implementar un marco didáctico adecuado para una intervención en el aula centrada en el estudio de la inferencia NA mediante una trayectoria hipotética de aprendizaje.
2. Integrar elementos teóricos en la trayectoria hipotética de aprendizaje como situaciones de conflicto cognitivo (Zazkis y Chernoff, 2008) y cambio conceptual (Vosniadou y Verschaffel, 2004), así como el modelo de inferencias lógicas (Inglis y Simpson, 2008), que promuevan la comprensión de la inferencia NA.
3. Analizar el cambio conceptual en la comprensión de la inferencia NA a partir de los conocimientos previos del estudiante y su evolución durante la intervención en el aula.
4. Evaluar la efectividad de la trayectoria hipotética de aprendizaje en términos del cambio conceptual acerca de la inferencia NA.

MARCO TEÓRICO

Es esta sección se describen los elementos o constructos teóricos incorporados en la investigación.

La investigación basada en el diseño

De acuerdo con Gravemeijer (2016), la investigación basada en diseño (IBD) es un enfoque metodológico para desarrollar y evaluar innovaciones curriculares. Se caracteriza por ser un proceso iterativo, es decir, implica un proceso por ciclos de investigación en los que se diseñan (fase de preparación del experimento), se implementan (fase de enseñanza) y se evalúan (fase de análisis retrospectivo) las intervenciones educativas con el propósito de refinar el experimento educativo, haciendo ajustes y mejoras continuas para su mayor efectividad. La IBD busca generar teorías locales que expliquen cómo aprenden los estudiantes y cómo mejorar este proceso a través del diseño de actividades centradas en resolver problemas educativos específicos, alineando la teoría con la práctica en el aula mediante la colaboración entre investigadores y educadores.

Las intervenciones promueven la participación activa de los estudiantes y pueden ser adaptadas a contextos específicos dependiendo de las necesidades de los educandos.

El modelo de inferencias lógicas

Para explorar el razonamiento deductivo de los sujetos, los investigadores en el razonamiento lógico recurren a los cuatro modos inferenciales mencionados previamente y que se resumen en la tabla 1. En esta investigación se hará referencia a esta tabla como el modelo de inferencias lógicas. Este modelo se utiliza para fundamentar el diseño de la THA y para el análisis de los resultados.

Tabla 1.
Modelo de inferencias lógicas (Inglis y Simpson, 2008)

Inferencia	*Modus ponens (MP)*	*Modus tollens (MT)*	*Negación del antecedente (NA)*	*Afirmación de consecuente (AC)*
Válida	$p \rightarrow q$	$(\neg q \rightarrow \neg p)$	–	–
No válida	–	–	$(\neg p \rightarrow \neg q)$	$(q \rightarrow p)$

Las inferencias pueden realizarse en contextos diferentes al matemático, por ejemplo, en el contexto de la vida cotidiana o en contextos abstractos puros (en adelante abstractos), los cuales se caracterizan por símbolos carentes de significado.

Trayectoria hipotética de aprendizaje

Una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) es una herramienta pedagógica constructivista que incluye: (1) un objetivo de aprendizaje de los estudiantes, (2) un conjunto de tareas matemáticas para promover en los estudiantes el logro del objetivo indicado y (3) las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Simon y Tzur (2004) propusieron un mecanismo de reflexión entre la actividad (las tareas propuestas por el profesor y las metas que se propone el estudiante para resolver las tareas) y su efecto en el estudiante (el efecto de la actividad, consciente o inconsciente, como el desarrollo de patrones o relaciones entre los objetos matemáticos). Este elemento de reflexión actividad-efecto permite explicar cómo funciona el proceso de aprendizaje hipotético. De esta manera, los puntos (2) y (3) quedan mediados por mecanismos de actividad-efecto. Con estos elementos es posible ofrecer un relato racional explicativo basado en la evidencia de cómo las tareas matemáticas que forman parte de la THA apoyan el proceso de aprendizaje.

Conflicto cognitivo y cambio conceptual

Un conflicto cognitivo ocurre cuando nueva información entra en conflicto con los conceptos previos del estudiante, lo que crea una disonancia que les motiva a reevaluar y reflexionar sobre su comprensión (Zazkis y Chernoff, 2008). Una estrategia usual para promover un conflicto cognitivo es enfrentar al estudiante de manera controlada a situaciones que entren en conflicto con sus conceptos previos, ya sea por una inconsistencia en sus ideas, ya sea por una comprensión incompleta. En matemáticas, la noción de contraejemplo clave y la noción de contraejemplo potencial propuestas por Zazkis y Chernoff (2008) sirven para tal propósito. A saber, un contraejemplo clave es aquel que logra el objetivo de generar una disonancia en la comprensión o concepciones actuales de un tema particular; mientras que un contraejemplo potencial aún no está relacionado u organizado en la mente del estudiante, con sus ideas previas equivocadas, por lo cual no provoca en él ningún tipo de conflicto en ese momento. Mientras que no se manifiesta explícitamente el conflicto cognitivo en el estudiante, se hace referencia a él como un conflicto cognitivo potencial (Zazkis y Chernoff, 2008).

Por otra parte, el término *cambio conceptual* de Vosniadou y Verschaffel (2004) se utiliza para caracterizar o describir el tipo de aprendizaje requerido cuando se manifiesta un conflicto cognitivo. Este se puede promover al transitar por los siguientes escenarios: (1) existe una insatisfacción con las concepciones actuales, (2) la nueva concepción debe poder ser comprendida con claridad, (3) la nueva concepción ha de parecer capaz de explicar o resolver los problemas que las concepciones previas no pueden y (4) el nuevo concepto formado sugiere la posibilidad de extenderse y abrir nuevas áreas de indagación.

Adicionalmente, Stylianides y Stylianides (2009) sugieren dos directrices para el diseño de actividades que favorezcan que un conflicto cognitivo irrumpa. La primera, sugerida nuevamente por Zazkis y Chernoff (2008), se basa en la teoría de los espacios de ejemplos (Watson y Mason, 2005). En estos trabajos, se identifican tres espacios de ejemplos: (1) el personal, formado por ejemplos de fácil acceso para el estudiante, desencadenados por una tarea o alguna pista, así como por la experiencia del estudiante; (2) el potencial, que consiste en ejemplos que no son de fácil acceso, alcanzables después de alguna explicación más detallada por el instructor; y (3) el convencional, que consiste en los ejemplos de la comunidad matemática, el conocimiento oficial de los expertos. De esta manera, para favorecer que un contraejemplo potencial se convierta en un contraejemplo clave y emerja el conflicto cognitivo, se propone pensar en contraejemplos que estén fuera del espacio de ejemplos personal y dentro del espacio de ejemplos potencial del estudiante. Según los autores, al estar fuera del espacio de ejemplos personal, el estudiante no tiene acceso a cuestionar su entendimiento previo con este tipo de contraejemplos; por otra parte, al estar situados lo suficientemente cerca de su entendimiento previo, suelen ser un desafío accesible y generalmente relevante.

La segunda condición para promover un conflicto cognitivo involucra la noción teórica de pilares de conciencia conceptual (PCC) formulada por Stylianides y Stylianides (2009). Los autores proponen el diseño de actividades instructivas que dirijan la atención de los estudiantes a conceptos que son clave en una situación de aula, con el consiguiente aumento de la conciencia sobre las concepciones erróneas acerca de esos conceptos. Sugieren ubicar pilares bien diseñados antes y después de una contradicción que pretenda crear un conflicto cognitivo. De esta manera, se promueve un proceso de reflexión y revisión de esas concepciones erróneas.

La THA que se propone busca promover un cambio conceptual mediante el conflicto cognitivo, empleando en su diseño las nociones teóricas de contraejemplo clave y contraejemplo potencial. Además, se incorporan los pilares PCC, que involucran preguntas concisas, tareas de prueba de convergencia de series y actividades de simbolización de las estructuras lógicas de proposiciones.

Finalmente, se integran situaciones de institucionalización para discutir la estrategia de simbolización de estructuras lógicas y la aplicación del modelo de inferencias lógicas. Aquí, el conocimiento se convierte en parte de la cultura, se reconoce su relevancia, se valida y formaliza dentro de las normas de la comunidad matemática, en el sentido de Brousseau (1994).

Trayectoria real de aprendizaje

Para realizar el análisis de los resultados y para proporcionar evidencia del logro del objetivo de aprendizaje de la THA, se incorpora a la intervención el concepto de trayectoria real de aprendizaje (TRA), (véase Leikin y Dinur, 2003). La TRA se refiere a los eventos o procesos de aprendizaje reales que parecieron seguir los estudiantes durante la intervención. La idea es lograr un emparejamiento estrecho entre la THA y la TRA; de acuerdo con Stylianides y Stylianides (2009) esto indicaría que las hipótesis en el desarrollo del aprendizaje contempladas en el diseño de la THA fueron adecuadas y por tanto la intervención en el aula exitosa para el desarrollo del nuevo conocimiento del estudiante.

METODOLOGÍA

El diseño de la investigación se basa en las directrices descritas por Gravemeijer (2016). A continuación, se describe este proceso.

Preparación del experimento

Se realizó una revisión de la literatura para identificar dificultades y sus posibles causas en los procesos de razonamiento deductivo. Además, se realizó una búsqueda de elementos teóricos para el diseño de la THA (objetivo 2 de la investigación). Como punto de partida para contextualizar el estudio de la inferencia NA se eligió el tema de series infinitas. La elección de este tema se debió a que se identificó que, a lo largo de ya varios cursos de cálculo impartidos, muchos estudiantes interpretan de forma incorrecta y reiterada el criterio de divergencia, entre otros teoremas, donde tienden a usar razonamientos de tipo NA. Por esto, se consideró este tema como una oportunidad para contextualizar esta inferencia dentro de la práctica docente de un curso oficial.

A partir de nuestra experiencia docente y de las investigaciones sobre cómo los estudiantes realizan inferencias, se diseñó un instrumento de investigación que se denominó «Inferencias Lógicas en el Contexto del Cálculo» (Herrera y Rodríguez, 2022), relacionado específicamente con razonamientos de tipo NA, con la finalidad de identificar a los estudiantes que aceptan esta falacia (primer ciclo de experimentación), y que posteriormente serían elegidos para participar en la implementación de un segundo ciclo de la THA, que es el que se reporta en este documento. Se destaca la pregunta 3 de ese instrumento, la cual se tomó como inicio de la THA para este segundo ciclo de experimentación, y que en adelante se denota como S_0(figura 1).

«Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum a_n$ diverge»

¿Qué puedes inferir acerca de la serie $\sum 1/n$? Observa que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(R1) Por el criterio de divergencia podemos concluir que la serie $\sum 1/n$ converge.

(R2) No se puede garantizar la convergencia o divergencia de la serie $\sum 1/n$ con ese criterio.

Fig. 1. Situación matemática inicial S_0

El diseño de la THA se divide en dos etapas; en la primera se describe el proceso hipotético preconflicto cognitivo (tabla 2). En esta etapa se introduce el PCC1, que consiste en preguntar sobre la convergencia de la serie telescópica y de la serie-*p* (con $p = 1/2$), con la finalidad de aumentar la atención del estudiante sobre su interpretación del criterio de divergencia y cómo lo aplica a estas series. También se presenta el PCC2, que consiste en la demostración de la convergencia de la serie telescópica. Se anticipa que esto reforzará el conocimiento previo del estudiante (las tres series son convergentes), con el propósito de que la discordancia de este conocimiento y la futura prueba de la divergencia de la serie-*p* sean más intensas, lo que aumentaría las posibilidades de un conflicto cognitivo.

Se anticipa que el estudiante no tendrá la oportunidad de cuestionar su entendimiento previo sobre la supuesta convergencia de las series. Además, se anticipa que estas series están lo suficientemente cerca del entendimiento del estudiante, de modo que, tras la explicación formal del profesor, pueda reconocer con argumentos matemáticos correctos la convergencia de la serie telescópica y la divergencia de la serie-*p* y la serie armónica. En otras palabras, se prevé que las tres series se ubiquen en el espacio de ejemplos potencial del estudiante, donde la serie-*p* desempeñará el rol de contraejemplo potencial.

Tabla 2.
Proceso hipotético de aprendizaje previo al conflicto cognitivo

Tareas	*Mecanismo de reflexión actividad-efecto del estudiante*		
	Actividad	*Efecto*	*Reflexión*
Tarea 1. ¿Cómo justificas que la serie $\Sigma\frac{1}{n}$ converge?	Se propondrán la meta de justificar la convergencia de la serie. Algunos de ellos, aplicando el criterio de divergencia; otros analizarán el término $\frac{1}{n}$ y pensarán que la serie va a converger al sumar términos cada vez más pequeños, $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots$	Pensarán que sus justificaciones son razonables; no se cuestionarán su validez.	Se convencerán de que, al cumplirse $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, entonces la serie $\Sigma\frac{1}{n}$ necesariamente tiene que converger.
Tarea 2. (PCC1) ¿Es convergente la serie telescópica? ¿Es convergente la serie-*p*? (contraejemplo potencial).	Se plantearán la meta de justificar la convergencia de cada una de las dos series, para lo cual aplicarán nuevamente el criterio de divergencia o recurrirán a estrategias numéricas, como en la tarea anterior.	Pensarán que sus justificaciones son razonables; no se cuestionarán su validez.	Se convencerán de que, al cumplirse $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)}=0$ y $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$, entonces las series convergen.
Tarea 3. (PCC2) El profesor demostrará la convergencia de la serie telescópica, dejando algunos aspectos de la prueba incompletos para que los estudiantes los desarrollen.	Se propondrán la meta de seguir la demostración de la convergencia de la serie telescópica y completar los aspectos no desarrollados de la prueba.	Este resultado reforzará la idea de que las demás series deben converger (conocimiento actual).	Generalizarán el conocimiento actual mediante el lenguaje matemático: si $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, entonces $\sum a_n$ converge.

En la segunda etapa se describe el proceso hipotético posconflicto cognitivo (tabla 4). Previamente, en la tabla 3 se incorporan los cuatro niveles del desarrollo del cambio conceptual descritos en el marco teórico y se relacionan con las tareas propuestas por el profesor, para indicar el nivel de desarrollo de cambio conceptual adquirido por el estudiante.

Tabla 3.
Niveles del cambio conceptual y tareas asociadas

Niveles del cambio conceptual	*Tareas*
Existe una insatisfacción con las concepciones actuales (conflicto cognitivo).	Tarea 4. Prueba de la divergencia de la serie $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ (conflicto cognitivo potencial).
La nueva concepción debe poder ser comprendida con claridad.	Tarea 5. ¿Cambia tu idea inicial de que la serie $\sum\frac{1}{n}$ converge al saber que la serie-*p* diverge? Tarea 6. Prueba de la divergencia de la serie armónica $\sum\frac{1}{n}$.
La nueva concepción ha de parecer capaz de explicar o resolver los problemas que las concepciones previas no pueden.	Tarea 7 (PCC3). (i) Simboliza la estructura lógica del criterio de divergencia, y (ii) Simboliza la respuesta R_1de S_0.
El nuevo concepto formado sugiere la posibilidad de extenderse y abrir nuevas áreas de indagación.	Tarea 8. Determina si el siguiente razonamiento es correcto: Regla: Si Rojo, entonces x = 5. Premisa: Azul. Por lo tanto, x $\neq$ 5(contexto abstracto). Entrevista: Se cuestiona sobre la validez de la inferencia NA sobre la proposición «si p^2 es par, entonces p es par».

En esta etapa destacan la tarea 4, que se asocia con la aparición del conflicto cognitivo, y la tarea 7 (PCC3), donde se inicia el proceso de institucionalización del conocimiento (Brousseau, 1994), con el objetivo de dirigir la atención de los estudiantes hacia el conocimiento oficial, apoyando el cambio conceptual. La tabla 4 delinea este proceso hipotético de aprendizaje de acuerdo con las tareas descritas en la tabla 3.

Tabla 4.
Proceso hipotético de aprendizaje durante y posterior al conflicto cognitivo

Tarea	*Mecanismo de reflexión actividad-efecto del estudiante*		
	Actividad	Efecto	Reflexión
Tarea 4	Se propondrán la meta de completar los pasos algebraicos planteados por el profesor para demostrar que, de acuerdo con sus concepciones actuales, la serie-*p* converge.	Surgirá el conflicto cognitivo y generará un estado de sorpresa o confusión en los estudiantes al descubrir que la serie-*p* diverge, lo que contradice el conocimiento actual (la serie-*p* debería converger).	Comenzarán a cuestionar su interpretación del criterio, ya que el hecho de que el término general de cada serie tienda a 0 no garantiza necesariamente su convergencia.
Tarea 5	Se fijarán la meta de analizar y contestar a la pregunta de la tarea. Buscarán argumentos que traten de explicar las insatisfacciones generadas por el conocimiento nuevo.	Se harán conscientes que están interpretando incorrectamente el criterio de divergencia.	Se darán cuenta de que están aplicando el criterio de divergencia en casos donde no es adecuado.
Tarea 6	Completarán los pasos para la prueba de la convergencia o divergencia de la serie armónica.	Reafirmarán su reflexión de la tarea 4.	Extenderán la reflexión a un ejemplo general: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, no garantiza que la serie $\sum a_n$ converja.
Tarea 7 PCC3	Se plantearán la meta de simbolizar la estructura lógica del criterio de divergencia y la de la respuesta R_1 de la situación inicial S_0.	Experimentarán un proceso de abstracción de los enunciados para identificar las estructuras lógicas y su validez.	Adquirirán una nueva estrategia de solución en un registro lógico. Podrán identificar modos inferenciales equivalentes.

Tarea	*Mecanismo de reflexión actividad-efecto del estudiante*		
	Actividad	Efecto	Reflexión
Tarea 8	Simbolizarán la estructura lógica, de las dos proposiciones. (Contexto abstracto y la entrevista)	Aplicarán su nuevo conocimiento para identificar la estructura lógica simbolizada y su validez en un contexto extendido (contexto abstracto).	Reconocerán que la nueva estrategia de solución puede abrir nuevas áreas de indagación al generalizar su aplicación a otros contextos matemáticos.

La figura 2 ilustra el esquema completo de los diferentes momentos y tareas involucradas en la THA.

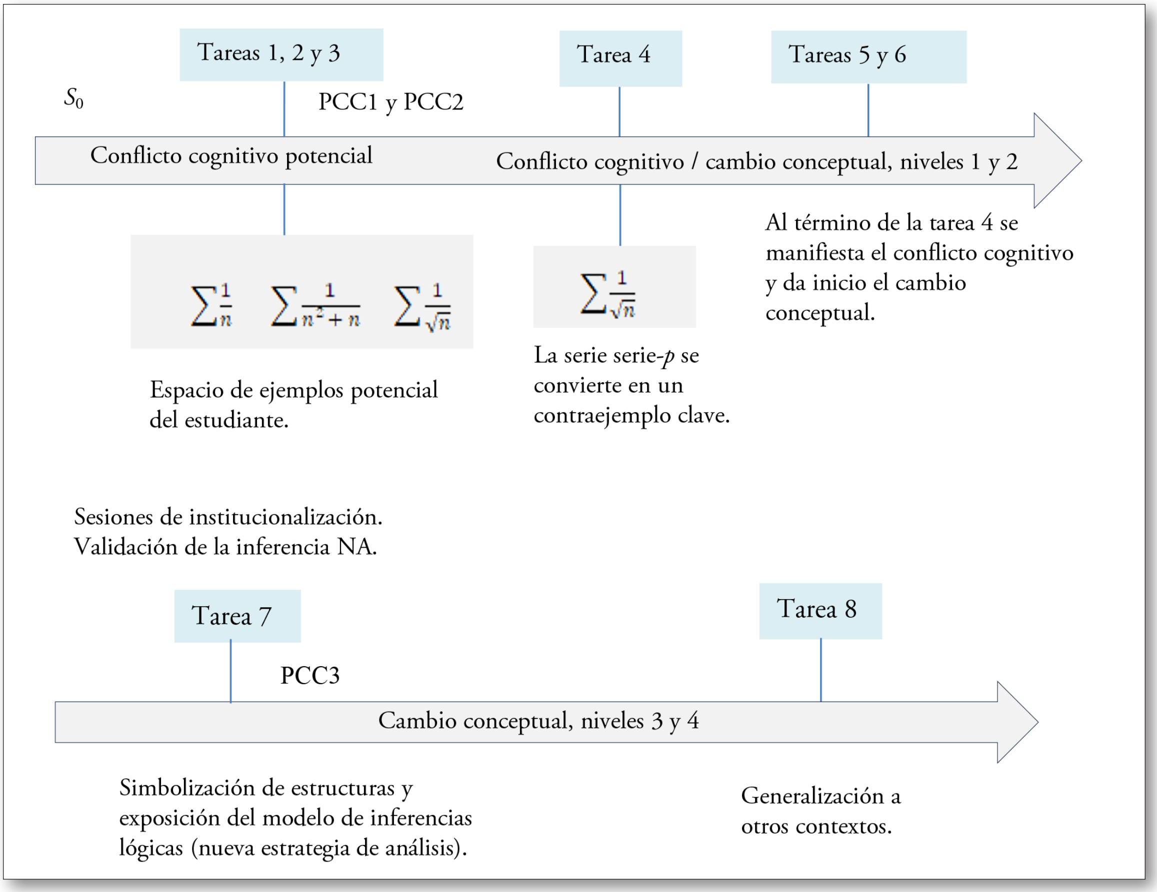


Fig. 2. Esquema de los momentos y tareas en la THA.

Fase de enseñanza: ejecución de la THA en un entorno real y recolección de datos

La implementación de la THA se desarrolló en el marco de las intervenciones en el aula orientadas a problemas clave y persistentes (Stylianides y Stylianides, 2018). Aunque este marco didáctico se contextualizó en el aprendizaje de la demostración en matemáticas, los autores no limitan su adaptación y aplicación a otros campos. Posee características apropiadas para alcanzar el primer objetivo de la investigación, a saber, sugiere dos características esenciales y una deseable: (1) Deben incluir un marco teórico explicativo sobre cómo la intervención funciona o puede funcionar en relación con su impacto en el aprendizaje de los estudiantes. Para este fin se integró el elemento de reflexión actividad-efecto que tiene la función de generar el marco explicativo sobre el funcionamiento de la THA. (2) Deben contar con un mecanismo apropiado para desencadenar y apoyar el cambio conceptual. Para este punto, se tomó el conflicto cognitivo como estrategia para desencadenar el cambio conceptual y las situaciones de institucionalización para apoyarlo. (3) Es deseable que la intervención se centre en pocos objetivos de aprendizaje bien definidos, lo que permite tener una duración relativamente corta y hace factible su implementación en una situación real de aprendizaje. Para este fin, la intervención propuesta se desarrolla en dos sesiones de 120 minutos centrada en la inferencia NA. Participaron 8 estudiantes que previamente tuvieron un pobre desempeño en el instrumento «Inferencias Lógicas en el Contexto del Cálculo» del primer ciclo de experimentación. Los estudiantes cursaban su segundo semestre de cálculo en una universidad pública de la ciudad de México, por lo que ya conocían algunos conceptos básicos de series como la definición de convergencia y algunos ejemplos de series geométricas.

Los instrumentos de recolección de datos para el análisis fueron:

– La THA-TRA.
– Observaciones y notas de los investigadores durante la implementación.
– Una entrevista semiestructurada.

Análisis retrospectivo de los datos recopilados

El análisis para determinar la percepción cualitativa del emparejamiento THA-TRA de los estudiantes se llevó a cabo como se propone en Cárcamo et al. (2021); se compararon las tareas y el proceso de aprendizaje hipotético de la THA con respuestas escritas sobre el proceso de aprendizaje observado en la TRA, las notas y la entrevista. Se recopilaron evidencias y se clasificaron cualitativamente según el mecanismo de reflexión actividad-efecto. Así, se consideró que la aproximación THA-TRA es baja, si el estudiante solo presentó evidencias de su actividad o metas realizadas durante el proceso. De manera análoga, se consideró una aproximación media, si el estudiante presentó evidencias tanto de sus actividades y sus efectos. Por último, se consideró una aproximación alta, si el estudiante mostró evidencias de su actividad, su efecto y su reflexión.

Para completar el análisis, se consideró que el estudiante experimentó un cambio conceptual adecuado si el emparejamiento THA-TRA fue alto en los primeros tres niveles del cambio conceptual (tareas 4 a 7), y al menos tuvo una aproximación media en el nivel 4 (tarea 8). Si el estudiante no presentó evidencias hasta este punto, se dirá que el proceso de cambio conceptual no fue suficientemente desarrollado. Este criterio de evaluación permite identificar si el estudiante utiliza la nueva estrategia de análisis dirigida a la estructura lógica de una proposición en un contexto abstracto y determina su validez. Lo anterior atiende a los objetivos particulares 3 y 4 de la investigación.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Se presenta el seguimiento correspondiente al estudiante E_1. Este caso fue representativo de éxito ya que evidenció un alto emparejamiento THA-TRA durante el desarrollo de la intervención. También se mencionan algunos de los comentarios relevantes de los demás estudiantes denotados por $E_2,\dots, E_8$.

Conflicto cognitivo potencial

Tarea 1: E_1 escribió para la serie armónica « $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \Rightarrow \sum\frac{1}{n}$ no diverge», lo que ilustra su actividad al usar el criterio de divergencia. No cuestionó la validez de este razonamiento, por el contrario, dedujo que « $\sum\frac{1}{n}$ no diverge $\Rightarrow$ $\sum\frac{1}{n}$ converge» (figura 3), lo que proporciona evidencia de su efecto. E_1 realizó una interpretación ingenua del criterio de divergencia, entendiendo por esto que una condición necesaria para la convergencia de la serie $\sum\frac{1}{n}$, a saber, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, se interprete como una condición suficiente, lo que se infiere como evidencia de su reflexión. E_1 empleó la simbolización de enunciados como una técnica para organizar sus ideas, pero sin ser consciente del significado lógico, por lo tanto, en este punto el emparejamiento THA-TRA fue alto.

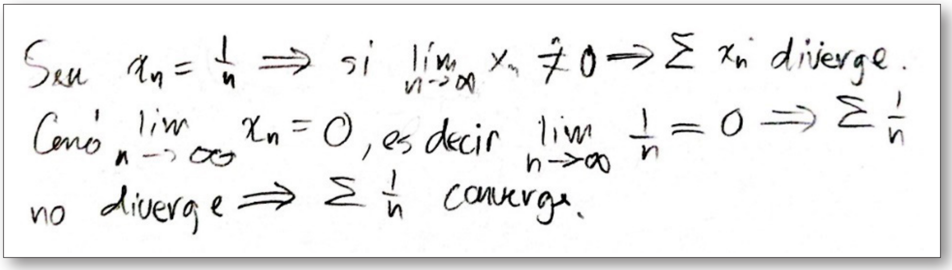


Fig. 3. Evidencia de la actividad y el efecto en E_1.

Los demás estudiantes dieron argumentos similares, por ejemplo, E_2: «converge ya que si $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ es la negación del teorema».

Tarea 2 (PCC1): E_1 evidenció su actividad, su efecto y su reflexión de manera muy similar a como lo exhibió en la tarea anterior, al escribir que « $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)}=0$ y $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ » y concluir que ambas series convergen (figura 4). En otras palabras, E_1 realizó una reflexión inadecuada de la situación al recurrir a un razonamiento de tipo NA. El pilar PCC1 coadyuvó a centrar la atención en el conocimiento actual de E_1.

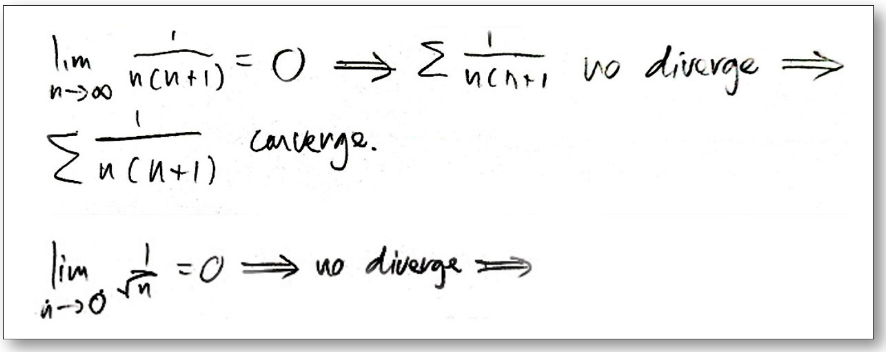


Fig. 4. Evidencia de la reflexión de E_1

El caso de E_4 y E_6 se caracterizó por el uso de una estrategia numérica para justificar la convergencia de estas dos series, por ejemplo, E_6, al referirse a la serie telescópica, comentó: «llevando a cabo un análisis aritmético de la serie podemos concluir que la serie converge, pues el denominador tiene un exponente cuadrático dividiendo a un coeficiente fijo que es el 1». Y respecto a la serie-*p*, E_4 y E_6 realizaron ensayos numéricos con enteros grandes en la expresión $\frac{1}{\sqrt{n}}$, para justificar que este término también tiende a cero, lo que les permitió afirmar que esta serie también converge.

Tarea 3 (PCC2): E_1 aportó evidencia de su actividad al seguir y completar sin contratiempos la prueba de la convergencia de la serie telescópica; esto también evidenció su efecto, ya que era lo esperado para E_1, reforzando su creencia de que las tres series convergen (figura 5). En cuanto a la reflexión, el lenguaje utilizado por E_1 relacionó lo general de la expresión del criterio de divergencia con lo particular de cada serie aplicando un razonamiento de tipo NA, lo que es evidencia de la reflexión sobre su conocimiento actual.

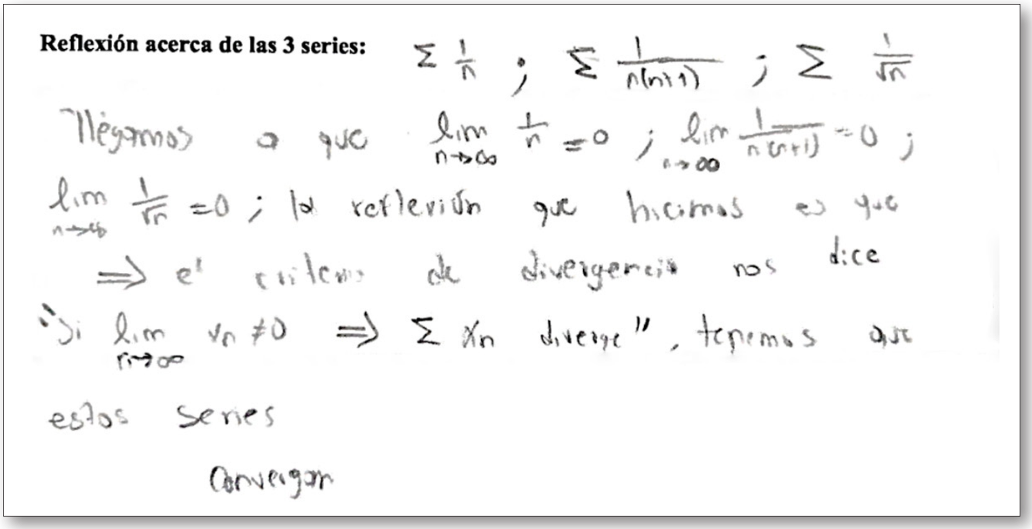


Fig. 5. Reflexión de E_1 sobre las tres series.

El análisis sugiere que los pilares PCC1 y PCC2 coadyuvaron a centrar la atención de E_1 en su conocimiento actual (las tres series convergen). E_1 proporcionó evidencia de su actividad, de su efecto y de su reflexión, lo que permitió concluir que en esta etapa el emparejamiento THA-TRA fue alto para este estudiante.

De manera similar, $E_2,\ldots, E_8$ estaban convencidos de que las tres series convergían, reforzando esta creencia mediante el pilar PCC2, por lo que se consideró que el acercamiento THA-TRA también fue alto para ellos.

Conflicto cognitivo y los cuatro niveles del cambio conceptual

Esta etapa se caracterizó por el conflicto cognitivo y el desarrollo del cambio conceptual (tablas 3 y 4).

Nivel 1: Insatisfacción con las concepciones actuales

La etapa comenzó con la tarea 4 y fue guiada por el profesor. Los estudiantes analizaron las sumas parciales de la serie-*p*, $s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Posteriormente, demostraron por inducción que $s_n \geq \sqrt{n}$ para toda $n \in N$. Por último, aplicaron el límite $\lim_{n\to\infty} s_n \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$, para concluir mediante el criterio de comparación que la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge. E_1 completó de manera satisfactoria los desarrollos para la prueba de la divergencia de la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, lo que da evidencia de su actividad; esto también confirma que la serie-*p* se ubicó correctamente en el espacio de ejemplos potencial de E_1, para pasar a formar parte de su espacio de ejemplos personal. En cuanto al efecto, E_1 no pareció sorprendido por el resultado de la prueba de la divergencia de la serie-*p*. Esto se debió a que ya dudaba de que su razonamiento previo fuera correcto; la duda ocurrió durante el desarrollo de esta prueba, lo cual proporciona evidencia de su reflexión. Su reacción al cuestionarse sobre la legitimidad de su razonamiento no invalida que haya experimentado el conflicto cognitivo, pues sí se presentaron inconsistencias con sus ideas previas. La tarea 4 provocó una reorganización de su conocimiento previo acerca de la convergencia de una serie y del criterio de divergencia, lo que se ilustra en la figura 6. Este análisis muestra que E_1 proporcionó elementos de su actividad, su efecto y su reflexión, por lo que el emparejamiento THA-TRA fue alto.

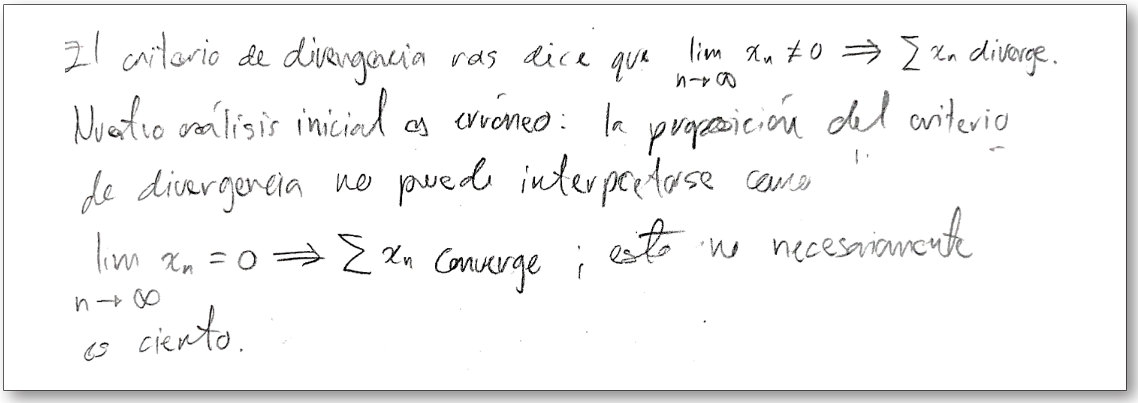

El criterio de divergencia nos dice que $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0 \Rightarrow \sum x_n$ diverge.
Nuestro análisis inicial es erróneo: la proposición del criterio de divergencia no puede interpretarse como $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \sum x_n$ converge; esto no necesariamente es cierto.

Fig. 6. Reflexión de E_1 en el nivel 1 del cambio conceptual.

La manifestación del conflicto cognitivo fue más notoria en el caso de E_2, quien comentó: «¿Por qué diverge? si el criterio dice que si $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, entonces la serie-*p* debería converger». E_2 parecía muy contrariado con este resultado. El conflicto cognitivo se manifestó en E_2,..., E_8. Por lo que se consideró que en este primer nivel de cambio conceptual el emparejamiento THA-TRA fue alto para todos los estudiantes.

Nivel 2: La nueva concepción es comprendida con claridad

Tareas 5 y 6 (tabla 3). E_1 ya había respondido de manera indirecta a la pregunta de la tarea 5 con la reflexión realizada en la tarea 4 (figura 6) motivada por el contraejemplo potencial $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, que se convirtió en un contraejemplo clave para él; el siguiente comentario lo muestra: «El análisis inicial es erróneo: la proposición del criterio de divergencia no puede interpretarse como $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \sum x_n$ converge; esto no necesariamente es cierto», y evidencia su actividad y su efecto. De esto se infiere que E_1 se percató de que el criterio de divergencia no aplica para el caso de las series involucradas en la intervención, lo que proporciona elementos de su reflexión.

Respecto a la tarea 6 (demostración de la divergencia de la serie armónica), esta fue guiada por el profesor, siguiendo el procedimiento clásico de agrupación de los términos de las sumas parciales. E_1 no tuvo inconvenientes en los desarrollos algebraicos de la demostración, lo cual proporcionó evidencia de su actividad. Esto permitió inferir que esta serie también estuvo ubicada en el espacio de ejemplos potencial de E_1. La demostración de su divergencia reafirmó las reflexiones discutidas en la tarea anterior (figura 6). Lo que dio evidencia del efecto y su reflexión. Se concluye que el acercamiento THA-TRA de E_1 fue alto.

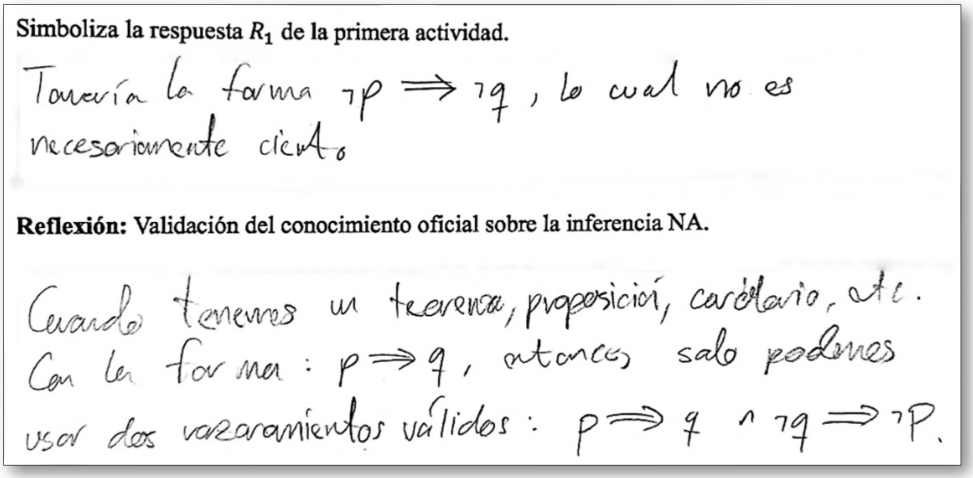
Por otra parte, E_3, E_4, E_5, E_7 y E_8 también cambiaron su postura previa respecto a la creencia de la convergencia de las tres series; la demostración de la divergencia de la serie-*p* en la tarea 4 les hizo reflexionar y darse cuenta de que estaban aplicando el criterio de divergencia en casos en los que no aplica, de modo que el contraejemplo potencial $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, también se convirtió en un contraejemplo clave para estos estudiantes. Ahora aceptan la posibilidad de que la serie armónica puede ser una serie divergente, lo que evidencia su actividad, efecto y reflexión. Estos estudiantes tuvieron un emparejamiento alto THA-TRA, a diferencia de E_2 y E_6, que no lograron superar esta etapa debido a una deficiente comprensión lógica y matemática, por lo que su emparejamiento THA-TRA fue bajo.

Nivel 3: La nueva concepción explica o resuelve los problemas que las concepciones previas no pueden

La incorporación de elementos matemáticos formales resolvió la problemática inicial S_0 pero no explica el error cometido en la interpretación del criterio de divergencia. De modo que, en este tercer nivel de cambio conceptual, se incorporó una nueva estrategia de análisis (registro lógico), a saber, la simbolización de las estructuras lógicas de enunciados sustentado en el modelo de inferencias (tabla 1).

Esta etapa guiada por el profesor comenzó con la asignación de la tarea 7 (PCC3) y la institucionalización del conocimiento. La nueva estrategia tiene el propósito de dar una explicación formal del error cometido en la interpretación del criterio de divergencia. El profesor explicó la estructura lógica de cada uno de los cuatro modos inferenciales MP, MT, NA y AC, destacando la inferencia NA. Demostró la validez de la inferencia MT y el caso en el que la NA es válida. A continuación, se describen algunos desarrollos y reflexiones de los estudiantes durante la tarea 7.

E_1 evidenció su actividad al simbolizar correctamente el criterio de divergencia y la respuesta R_1 de la situación inicial S_0 (que ya lo hacía al inicio de la intervención, pero de manera superficial), ahora con el sustento teórico del modelo de inferencias; esto le permitió ser consciente de sus simbolizaciones y su validez de manera formal. E_1: «Sean $p \equiv \lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$ y $q \equiv \sum a_n$ diverge, tenemos que, $p \Rightarrow q$». Y respecto a la respuesta, R_1 expresó: «Tomaría la forma $\neg p \Rightarrow \neg q$ lo cual no es necesariamente cierto»; la identificación del tipo de estructura lógica y su validez es evidencia de su efecto. Por último, E_1 evidenció su reflexión al relacionar los razonamientos válidos MP y MT y escribir: «Con la forma: $p \Rightarrow q$ entonces solo podemos usar dos razonamientos válidos: $p \Rightarrow q \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$», lo que se muestra en la figura 7. Por tanto, se concluye que, en este punto, el emparejamiento THA-TRA de E_1 fue alto.



Simboliza la respuesta R_1 de la primera actividad.

Tomaría la forma $\neg p \Rightarrow \neg q$, lo cual no es necesariamente cierto.

Reflexión: Validación del conocimiento oficial sobre la inferencia NA.

Cuando tenemos un teorema, proposición, corolario, etc. Con la forma: $p \Rightarrow q$, entonces solo podemos usar dos razonamientos válidos: $p \Rightarrow q \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$.

Fig. 7. Evidencia de E_1 sobre la reflexión de los modos de inferencia válidos.

Por otra parte, E_8 expresó: «Negación del antecedente es válido si hay $\Leftrightarrow$ i.e. $P \leftrightarrow Q$ [...]», o E_5 «La NA solo se puede usar con si y solo si, de otra forma no es correcto». El pilar PCC3 dirigió la atención de los estudiantes al análisis de las estructuras de los enunciados con el modelo de inferencias lógicas, evidenciando en E_3, E_5, E_7 y E_8 un emparejamiento alto de la THA-TRA. Sin embargo, E_2, E_4 y E_6 no lograron realizar de manera correcta los análisis con la nueva estrategia, por ejemplo, E_6 simbolizó R_1 mediante $\neg p \Rightarrow \neg q$, lo que es correcto; sin embargo, de ahí dedujo $\neg q \Rightarrow \neg p$, es decir, aplicó un razonamiento AC, lo que es incorrecto. En general, E_2, E_4 y E_6 evidenciaron un emparejamiento bajo de la THA-TRA.

Nivel 4: El nuevo concepto se extiende y se abren nuevas áreas de indagación

Tarea 8. Aquí se enfrentaron a la aplicación de la nueva estrategia de análisis (registro lógico) en un contexto abstracto, con el propósito de centrar su atención solo en la estructura lógica de una proposición, aislando la influencia de significados. En entrevista se pudo constatar que E_1 evidenció su actividad y su efecto al ser cuestionado sobre la siguiente situación:

Profesor: Regla: si rojo, entonces $x = 5$. Premisa menor: azul, entonces $x \neq 5$. ¿Correcto?
E_1: Falso.
Profesor: ¿Por qué?
E_1: «El enunciado no es válido, pues se niega el antecedente de la regla, y a partir de esa negación se niega la conclusión».

E_1 identificó que se trataba de una inferencia NA y determinó su invalidez. De manera similar, E_3, E_5, E_7 y E_8 identificaron correctamente la invalidez de la proposición, por ejemplo, E_8: «$P \rightarrow Q$ donde P = Rojo y $Q = x = 5$, $\neg P \rightarrow \neg Q$ donde $\neg P = Azul$ y $\neg Q = x \neq 5$ esto solo es válido para un si y solo si». Por otra parte, E_2, E_4 y E_6 no proporcionaron argumentos válidos que sustentaran su respuesta, por ejemplo, E_4: «no se puede afirmar que $Azul \Rightarrow x \neq 5$, pues no tiene nada que relacione el azul con el Rojo».

A continuación, se presentó una nueva proposición para indagar si el estudiante E_1 había considerado relevante la nueva estrategia de solución para aplicarla en un contexto diferente a los estudiados.

Profesor: En la proposición «si p^2 es par, entonces p es par», ¿es correcto inferir que si p^2 no es par, entonces p no es par?
E_1: No, este razonamiento no es válido.
Profesor: ¿Sabes que la proposición en realidad es un si y solo si?
E_1: [...] no recordaba que era un si y solo si; pero con la forma que tiene este ejemplo [E_1 se refería a la forma $p \rightarrow q$] la negación de antecedente no es válida. *A priori* no; puede ser que en la demostración la implicación se cumpla matemáticamente, pero en términos generales la inferencia por negación de antecedente es incorrecta lógicamente.
Profesor: No escribí la proposición en la forma de un si y solo si para que reflexionaran sobre su validez, pues sabían que la inferencia NA es válida en un si y solo si. ¿El contexto influyó?
E_1: Sí, es otro sesgo aparte.

La entrevista con E_1 evidenció que la estrategia no logró integrarse con el análisis de los significados matemáticos de la proposición; se esperaba que ahora el estudiante no solo centrara su atención en la estructura lógica, sino que enriqueciera su análisis con los significados matemáticos, pues sabían que la inferencia NA es válida en una implicación reversible. Por lo que se consideró que el emparejamiento THA-TRA de E_1 fue medio en esta última etapa del cambio conceptual, al no proporcionar evidencia de una reflexión correcta en este contexto matemático diferente.

Los resultados muestran que, a lo largo de las cuatro etapas del desarrollo del cambio conceptual, E_1, E_3, E_5, E_7 y E_8 alcanzaron un cambio conceptual adecuado, mientras que E_2, E_4 y E_6 no lo consiguieron, debido a fallas conceptuales, como fue el caso de E_2, o al poco entendimiento de la nueva estrategia de análisis en el registro lógico.

DISCUSIÓN

La implementación del segundo ciclo de la IBD permite obtener respuestas a la pregunta inicial: ¿Cómo puede el diseño de una THA fomentar un cambio favorable en el razonamiento deductivo de los estudiantes universitarios de cálculo que aceptan incorrectamente la inferencia NA? Las respuestas subyacen tras la incorporación y articulación de diversos elementos teóricos eficaces, por ejemplo, en la etapa preconflicto cognitivo, los pilares PCC1 y PCC2 fueron determinantes para enfocar la atención de los estudiantes en sus concepciones previas; especialmente, la demostración de la convergencia de la serie telescópica coadyuvó a reforzar la creencia de que las series $\sum \frac{1}{n}$ y $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ también eran convergentes. Así surgió una fuerte inconsistencia entre este conocimiento previo y la prueba posterior de la divergencia de la serie-*p* (contraejemplo potencial), lo que dio paso a la aparición del conflicto cognitivo en los estudiantes.

Asimismo, en la transición pre/posconflicto cognitivo, las muestras de sorpresa o de incertidumbre ante la inconsistencia de las creencias previas sobre la supuesta convergencia de la serie-*p* y su refutación posterior evidencian que la serie-*p* resultó estar ubicada en el espacio de ejemplos potencial de los participantes (excepto E_2), pues al principio estos estudiantes no cuestionaron su convergencia, y posteriormente, tras una explicación breve del profesor, lograron advertir su divergencia. El contraejemplo potencial se transformó en un contraejemplo clave; la serie-*p* se incorporó al espacio de ejemplos personal de cada uno de estos estudiantes como una serie divergente.

Las actividades de institucionalización donde se discutió la simbolización de enunciados y el modelo de inferencias lógicas (nueva estrategia de análisis) también fueron claves en el diseño de la THA; promovieron que E_1, E_3, E_5, E_7 y E_8 identificaran el tipo de estructura lógica implícita en los enunciados matemáticos involucrados, lo que les permitió adoptar esta estrategia como una primera herramienta de análisis para determinar la posible validez de una inferencia.

Los resultados obtenidos muestran que E_1, E_3, E_5, E_7 y E_8 lograron un cambio conceptual adecuado; es decir, se percataron de que interpretaron y aplicaron de manera incorrecta el criterio de divergencia, generalizando ahora de manera correcta que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ no garantiza la convergencia de la serie. Estos estudiantes lograron extender el uso de la estrategia lógica de un contexto abstracto hacia otro matemático, excepto E_1. En entrevista, se observó que si bien E_1 aplicó la estrategia lógica a la proposición «si p^2 es par, entonces p es par», descartó los significados matemáticos, llevándolo a no aceptar la validez de la inferencia NA. Así, se concluye que E_1 limitó su análisis en vez de enriquecerlo con ambos acercamientos (el lógico y el matemático).

Por otra parte, la THA contribuye de manera significativa al escaso estudio sobre la inferencia NA señalado por Noya y Adúriz-Bravo (2023), integrando y articulando una variedad de elementos teóricos en su diseño para atender algunos aspectos lógicos en el razonamiento deductivo. Puede ser una herramienta metodológica útil para el investigador, por el potencial de ayudar a mostrar la evolución de los conceptos desarrollados por los estudiantes e identificar las etapas del diseño que promueven los cambios esperados en su pensamiento, lo que resulta también útil para los profesores que deseen implementar estrategias didácticas constructivistas mediante intervenciones en el aula enfocadas a problemas clave y persistentes (Stylianides y Stylianides, 2018).

Finalmente, para mejorar la efectividad de la THA, en un futuro ciclo de la IBD se debería tomar en cuenta la necesidad de relacionar de manera más cuidadosa tanto las estructuras lógicas como los significados matemáticos, para un análisis más enriquecido de las proposiciones por tratar. Asimismo, se recomienda considerar las fallas y limitantes conceptuales que presentaron algunos estudiantes respecto a los conceptos relacionados con las series; por ejemplo, al recurrir a estrategias numéricas para justificar la convergencia, confundieron el límite del término general con el límite de la sucesión de las sumas parciales, lo que limitó lograr un cambio conceptual adecuado.

CONCLUSIONES

El presente estudio muestra que la THA enmarcada en las intervenciones en el aula dirigida a problemas que son clave y persistentes, bajo un marco metodológico basado en el diseño, puede ser una propuesta efectiva para ayudar a los estudiantes universitarios a identificar la inferencia lógica NA, y en consecuencia mejorar su desempeño en el razonamiento deductivo. Los resultados sugieren que el diseño de tareas matemáticas de la THA debe fomentar análisis enriquecidos, combinando conjuntamente estrategias de análisis lógico y análisis de los significados matemáticos involucrados en una proposición. De esta manera, es primordial que los ejemplos propuestos se encuentren al alcance de los estudiantes para garantizar su manejo; es decir, deben considerarse dentro de su espacio de ejemplos personal/potencial (Watson y Mason, 2005). Esto podría reducir la posible influencia que un contexto matemático desconocido tenga en el momento de aceptar y realizar inferencias (Stylianides et al., 2004; Durand-Guerrier, 2003).

Este estudio puede tomarse como base para futuras investigaciones e implementaciones que busquen integrar resultados teóricos y prácticos en el área del razonamiento deductivo. Se sugiere que en nuevos diseños se incorporen actividades enfocadas a los demás modos inferenciales MT, MP y AC, aplicando la simbolización de estructuras y el modelo de inferencias lógicas, sin descuidar los significados matemáticos para el mejoramiento del razonamiento deductivo.

AGRADECIMIENTOS

Al programa de Estancias Posdoctorales por México (Beca 170160), del Consejo Nacional de Humanidades Ciencia y Tecnología (CONAHCyT). Asimismo, a la sección de servicios especializados de la biblioteca de la UAM-C.

REFERENCIAS

Bajo-Benito, J. M., Sánchez-Matamoros García, G. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2021). The use of logical implication as an indicator of understanding the concept of number sequences. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *17*(12), em2058. https://doi.org/10.29333/ejmste/11429

Bakker, A. y Van Eerde, D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. En A. Bikner, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 429–466). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_16

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra e I. Saiz (Comps.), *Didáctica de matemáticas aportes y reflexiones* (pp. 65-94). Paidós Educador.

Camacho, V., Sánchez Pozos, J. J. y Zubieta, G. (2014). Los estudiantes de ciencias, ¿pueden reconocer los argumentos lógicos involucrados en una demostración? *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 117-138. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.983

Cárcamo, A., Fortuny, J. M. y Fuentealba, C. (2021). Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje: un ejemplo en un curso de álgebra lineal. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(1), 45-63. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2857

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *53*(1), 5-34. https://doi.org/10.1023/A:1024661004375

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (2.ª ed., trad. de R. M. Vega [1995]). Programa Editorial Universidad del Valle.

Epp, S. (2003). The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Monthly*, *110*, 886-899. https://doi.org/10.1080/00029890.2003.11920029

Evans, J. S. B. T., Handley, S. J., Neilens, H. y Over, D. E. (2007). Thinking about conditionals: a study of individual differences. *Memory & Cognition*, *35*(7), 1772-1784. https://doi.org/10.3758/BF03193509

Gravemeijer, K. (2016). Design-research-based curriculum innovation. *Quadrante*, *25*(2), 7-23. https://doi.org/10.48489/quadrante.22935

Herrera, J. G. y Rodríguez, A. (2022). Inferencias Lógicas en el Contexto del Cálculo. [Microsoft Forms]. https://forms.office.com/r/bP2qLmzzz5

Inglis, M. y Simpson, A. (2008). Conditional inference and advanced mathematical study. *Educational Studies in Mathematics*, *67*, 187-204. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9098-9

Ivars, P., Fernández, C. y Linares, S. (2020). Uso de una trayectoria hipotética de aprendizaje para proponer actividades de instrucción. *Enseñanza de las Ciencias*, *38*(3), 105-124. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2947

Leikin, R. y Dinur, S. (2003). Patterns of flexibility: teachers' behavior in mathematical discussion. En M. A. Mariotti (Ed.), *Electronic Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Noya, S. I. y Adúriz-Bravo, A. (2023). Dificultades con los modos inferenciales falaces en estudiantes de matemática y física. *Revista de Educación Matemática*, *38*(3), 28-58. https://doi.org/10.33044/revem.43986

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 91-104. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_2

Stylianides, A. J., Stylianides, G. J. y Philippou, G. N. (2004). Undergraduate students' understanding of the contraposition equivalence rule in symbolic and verbal contexts. *Educational Studies in Mathematics*, *55,* 133-162. http://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000017671.47700.0b

Stylianides, G. J. y Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(3), 314-352. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.40.3.0314

Stylianides, A. J. y Stylianides, G. J. (2018). Addressing key and persistent problems of students' learning: the case of proof. En A. Stylianides y G. Harel (Eds.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving* (pp. 99-113). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_7

Vosniadou, S. y Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction*, *14*(5), 445-451. http://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.014

Watson, A. y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781410613714

Zazkis, R. y Chernoff, E. J. (2008). What makes a counterexample exemplary?. *Educational Studies in Mathematics*, *68*(3), 195-208. http://doi.org/10.1007/s10649-007-9110-4

A Hypothetical Learning Trajectory on the Logical Inference Called Denial of Antecedent

Juan Gabriel Herrera Alva
Universidad Autónoma Metropolitana campus Cuajimalpa, Ciudad de México, México.
jherrera@cua.uam.mx

Arturo Rodríguez Espinosa
Tecnológico Nacional de México campus Puebla, Puebla, México.
arturo.rodriguez@puebla.tecnm.mx

The article proposes the integration of various theoretical elements for the design and implementation of a hypothetical learning trajectory (HLT). It addresses the difficulties faced by university students when making logical inferences, specifically the denial of antecedent inference (DA). This inference consists in denying the premise and conclusion of a conditional proposition; that is, from the proposition, $p \rightarrow q$, $\neg p \rightarrow \neg q$ is deduced. This inferential mode is valid only when the double implication, $p \leftrightarrow q$, is fulfilled.

The use of the inferential mode DA appears frequently in students' reasoning, even when the proposition is valid only in one direction, which leads them to deduce erroneous conclusions. This turns out to be a key and persistent problem in students' deductive reasoning within a mathematical context.

The present study is situated in the context of infinite series, where the authors have identified throughout several calculus courses that many students interpret the divergence criterion of an infinite series incorrectly. This criterion is valid only in one direction, $p \rightarrow q$. However, students usually apply DA reasoning to extend the use of the criterion and thus determine the convergence of a series, even though the criterion is not useful for this purpose.

The present work addresses this problem through the design of an HLT focused on cognitive conflict and conceptual change, in addition to other theoretical elements. The pillars of conceptual awareness are applied to support the focus and increase the students' awareness of their previous conceptions, as well as the situations of institutionalization, where the model of logical inferences (MP, MT, DA and AC) support the design of the HLT tasks and serves as a frame of reference for the analysis of the data of the experimentation. The series that are integrated into the HLT were chosen following the recommendations of the theory of example spaces, trying to incorporate examples that are easily accessible and achievable after the instructor intervenes. Finally, a new analysis strategy (logical register) is proposed to support and validate an appropriate conceptual change.

The research was supported by the design-based research methodology (DBR), where the following activities were developed: a literature review to identify difficulties in deductive reasoning; the design of a hypothetical learning trajectory (HLT) based on relevant theoretical elements; the implementation of classroom interventions based on situations of cognitive conflict within the didactic framework of classroom interventions, addressing key and persistent problems; and the evaluation of conceptual change through the students' actual learning trajectories (ALT).

The results obtained suggest that the design of the HLT and its implementation have led to significant improvements in the understanding and development of students' deductive reasoning skills, using symbolization and logical analysis strategies, after the intervention in the classroom. This work contributes to the few studies that have been carried out to promote a better understanding of logical inferences, in particular DA, within a mathematical context in real classroom situations.