ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS 41-2 (2023), 117-135
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5796
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

La concepción dinámica del límite de una función desde APOE y los registros semióticos

Dynamic Conception of the Limit of a Function from an APOS and Semiotic Registers Perspective

Lidia Aurora Hernández Rebollar, María Trigueros Gaisman, Honorina Ruiz Estrada, Estela Juárez Ruiz
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
lidia.hernandez@correo.buap.mx, mtriguerosg@gmail.com, hruizestrada@gmail.com, estela.juarez@correo.buap.mx

RESUMEN • Se presenta una investigación cuyo objetivo fue refinar la descomposición genética de Cottrill y colaboradores del límite de una función en una variable real, en su concepción dinámica, de tal forma que se incorpore a los registros semióticos de representación. El refinamiento consideró resultados de otras investigaciones en las que se utilizaron actividades diseñadas con APOE y diferentes registros semióticos. Un nuevo análisis de los datos previos mostró la necesidad de hacer explícitas las estructuras mentales en cada uno de los registros semióticos y de incorporar las estructuras de Totalidad y Objeto límite de una función en su concepción dinámica. Este es un trabajo teórico que profundiza en la comprensión de la construcción del límite de una función en su concepción dinámica y que pretende ser útil a docentes e investigadores de los niveles educativos medio superior y superior.

PALABRAS CLAVE: Teoría APOE; Límite de una función; Registros semióticos.

ABSTRACT • This is a research study with the aim of improving Cottrill and collaborators' genetic decomposition for the dynamic conception of limit for real valued functions so that it takes into account the semiotic representation registers. The refinement considered the results of other studies where activities designed with APOS theory in different semiotic representation registers were included. Results from the new data analysis showed the need to make explicit the mental construction in each representation register and to include the totality and object structures for the dynamic conception of limit of a real valued function. This theoretical study presents a deeper analysis of the dynamic conception of limit that intends to be useful for both teachers and researchers working with high school and university students.

KEYWORDS: APOS theory; Limit of a function; Semiotic registers.

Recepción: septiembre 2022 • Aceptación: abril 2023 • Publicación: junio 2023

Hernández Rebollar, L. A., Trigueros Gaisman, M., Ruiz Estrada, H. y Juárez Ruiz, E. (2023). La concepción dinámica del límite de una función desde APOE y los registros semióticos. *Enseñanza de las Ciencias*, *41*(2), 117-135. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5796

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones sobre la comprensión del concepto de límite de una función se han realizado desde diferentes perspectivas teóricas debido a su importancia en la matemática escolar de los niveles medio superior y superior. A manera de ejemplo, se pueden mencionar las de Cornu (1991) y Sierpinska (1987), quienes se interesaron en los obstáculos epistemológicos que provienen del desarrollo histórico de este concepto, como los relacionados con el concepto de función, el uso de los símbolos y el concepto de infinito. Tall y Vinner (1981) también se refieren a los obstáculos en la comprensión del límite, pero desde la perspectiva de las imágenes conceptuales que cada sujeto construye y que pueden no ser coherentes con la definición formal de este. Monaghan (1991) y Williams (1991) se enfocaron en las dificultades para la comprensión del límite de una función; el primero destaca la influencia del lenguaje y el segundo caracteriza la comprensión de los estudiantes mediante la noción de modelos intuitivos que, para este concepto, identifica como dinámico-teórico, dinámico-práctico, cota, formal o alcanzable y aproximación.

Debido a que este concepto se estudia por primera vez en el nivel medio superior y posteriormente en el superior, las investigaciones se distribuyen en estos niveles educativos. De hecho, se han dedicado trabajos a explorar la comprensión de este concepto en futuros profesores o en profesores de matemáticas en servicio (Fernández et al., 2015; Fernández et al., 2018; Guerrero, 2020). Una de las teorías que prácticamente nació con el estudio de la comprensión del concepto de límite de una función es APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema), propuesta por Dubinsky (1991) y desarrollada más adelante por el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community). Esta teoría ofrece un marco teórico y de investigación para estudiar la comprensión de conceptos matemáticos complejos. En su método propone al investigador realizar un análisis teórico sobre la forma en que un sujeto genérico construye determinado concepto matemático. Como resultado de ese análisis se obtiene lo que se denomina «descomposición genética» (DG) del concepto en estudio. Actualmente, se cuenta con algunas DG del concepto límite de una función (Cottrill et al., 1996; Swinyard y Larsen, 2012).

Otro enfoque teórico que se ha considerado frecuentemente para el estudio de la comprensión de conceptos y temas de matemáticas es el de los registros de representación semiótica (Duval, 2006). Varios autores ya han recurrido a ambas teorías para estudiar el aprendizaje de algunos conceptos matemáticos. Por ejemplo, para las funciones de dos variables, Trigueros y Martínez-Planell (2010) han propuesto una DG que incorpora a la teoría de representaciones semióticas. De manera similar, Asiala et al. (1997) propusieron una DG para el concepto de derivada considerando dos caminos: el analítico y el geométrico. Por su parte, Valls et al. (2011), Pons (2014), Pérez (2019), Analco y Hernández (2020) y Morante (2020) utilizaron la DG del límite de una función de Cottrill et al. (1996), ubicada solo en el registro algebraico, y aplicaron un conjunto de actividades diseñadas en diferentes registros semióticos (numérico, algebraico y gráfico), para analizar la comprensión del concepto de límite de una función en estudiantes de bachillerato (Valls et al., 2011; Pons, 2014; Pérez, 2019) y de nivel superior (Analco y Hernández, 2020; Morante, 2020). En todos ellos se reportó que el trabajo en ciertos registros de representación favorece la comprensión de algunos aspectos de este concepto. Sin embargo, sus resultados no coinciden cuando intentan determinar qué registro favorece la construcción de las estructuras mentales relacionadas con la concepción dinámica. Por ejemplo, Pons (2014) reportó que los estudiantes acceden al significado de la concepción dinámica en el modo gráfico, progresa en el numérico y se consolida en el algebraico-numérico. Pero en la investigación de Pérez (2019) el registro gráfico representó serias dificultades a los estudiantes y estos se desempeñaron mejor en el algebraico-numérico.

Por su parte, Fernández et al. (2018) señalaron que «el papel de la coordinación de los procesos de aproximación en los diferentes modos de representación resulta clave en la comprensión del concepto de límite» y citan los trabajos de Pons et al. (2012), Valls et al. (2011) y Pons (2014), quienes «caracterizaron niveles de comprensión del límite de una función desde el punto de vista de la coordinación de las aproximaciones en los diferentes modos de representación» (p. 146).

El objetivo de este trabajo es refinar la DG de Cottrill et al. (1996) del límite de una función en una variable real, de tal forma que se describan las estructuras y mecanismos necesarios en cada uno de los registros semióticos en los que se representa este concepto. El refinamiento será el resultado de un nuevo análisis de datos obtenidos en una investigación previa (Analco y Hernández, 2020) y de la revisión de literatura relacionada con el estudio de la estructura de totalidad. Este estudio se restringe a la concepción dinámica por la complejidad que implica el análisis de la concepción métrica, la cual se presentará en otro reporte.

La pregunta de investigación es: ¿Qué construcciones sugiere el análisis de los resultados de trabajos previos sustentados en la DG de Cottrill que incorporan preguntas en distintos registros de representación?

MARCO TEÓRICO

APOE es una teoría constructivista que modela el aprendizaje de conceptos matemáticos de nivel superior. Su nombre se toma del acrónimo de las estructuras principales que la teoría define para caracterizar el pensamiento de los individuos al estudiar un concepto, las cuales son: Acción, Proceso, Objeto y Esquema. Dubinsky es el creador de esta teoría y líder del grupo RUMEC, a través del cual se generaron las primeras publicaciones. La base de su propuesta está en el trabajo de Piaget. Partiendo de sus investigaciones sobre la estructura cognitiva de los individuos, Piaget definió la abstracción reflexiva como la actividad mental que desarrolla el pensamiento y como el mecanismo que propicia el tránsito entre todas las estructuras lógico-matemáticas (Arnon et al., 2014).

En este contexto, Dubinsky (1991) distingue cuatro estructuras mentales por las que un individuo transita cuando aprende un concepto: Acción, Proceso, Objeto y Esquema. El modo en el que se construyen estas estructuras mentales se logra mediante los mecanismos de abstracción reflexiva, denominados: interiorización, coordinación, reversión, encapsulación y desencapsulación. A continuación, se explican las estructuras y mecanismos mentales y cómo se relacionan estos en la construcción de conocimiento, según se expone en Arnon et al. (2014). Un individuo muestra una concepción Acción de un concepto si la comprensión que exhibe en la solución de diferentes problemas está limitada a transformaciones dirigidas de manera externa. Puede decirse, en términos de un concepto matemático, que el sujeto no es capaz de imaginar ni saltarse pasos mientras no supere esta etapa.

Cuando un individuo reflexiona sobre las Acciones y puede recrearlas mentalmente, sin la necesidad de depender de estímulos externos, se dice que ha interiorizado las Acciones en un Proceso. Sin embargo, hay que asegurarse de que el individuo sea capaz no solo de dejar de depender de las representaciones externas, sino también de lograr la reversión del Proceso original. También ocurre la necesidad de coordinar dos Procesos para generar otro. Así, una estructura Proceso se construye mediante los mecanismos de interiorización, de reversión o de coordinación. Cuando un individuo muestra en su trabajo, en tareas relacionadas con un concepto matemático, la construcción mayoritaria de Procesos, se concluye que ha construido una concepción Proceso de este. La construcción de un Objeto se logra a través del mecanismo de encapsulación. Cuando un individuo necesita aplicar Acciones sobre un Proceso (ente dinámico) y lo transforma en un ente estático para el cual es capaz de aplicar nuevas Acciones, se dice que el sujeto ha encapsulado el Proceso en un Objeto. Cuando el individuo muestra evidencia de la construcción del concepto como Objeto en su trabajo, se concluye que ha construido una concepción Objeto de este. Un Esquema es una construcción coherente de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas cuya reconstrucción es permanente y determinada por una situación matemática particular a la cual se enfrenta un individuo. La teoría APOE sostiene que un individuo es capaz de aprender cualquier concepto matemático mediante la construcción de las estructuras mentales antes descritas.

Para el caso particular del infinito, Dubinsky et al. (2013) observaron que para que el individuo logre el paso del infinito potencial al actual es necesario que conciba el Proceso de infinito como algo terminado; luego, mediante el mecanismo de encapsulación, debe construir el Objeto sobre el cual puede realizar Acciones. Así, estos autores propusieron la estructura de Totalidad, que permite ver el Proceso de infinito como un todo, como una entidad estática sobre la que, no necesariamente, es posible aplicar Acciones. Es por esto por lo que, en el contexto del infinito, la estructura de Totalidad se ubica entre el Proceso y el Objeto. El mecanismo mediante el cual un individuo transita de la estructura Proceso del infinito a la Totalidad fue denominado *completez* por Roa-Fuentes (2012), y se usó para demostrar la Totalidad en Villabona et al. (2022). El infinito está inmerso en el concepto de límite; para ver el Proceso infinito como terminado, el sujeto necesita considerar el límite como Objeto, como el Objeto que trasciende el Proceso (Villabona y Roa-Fuentes, 2016). «En los Procesos infinitos que son analizados a través de una situación al límite, la comprensión que tenga el individuo sobre este concepto hace la diferencia entre ver un Proceso infinito como inacabado o verlo como un todo» (Villabona et al., 2022, p. 193).

Descomposición genética (DG)

Uno de los aspectos clave de la teoría APOE es ayudar a predecir lo que los estudiantes logran aprender acerca de un concepto y cómo lo aprenden. Por lo que, una vez definidos los constructos de la teoría y los mecanismos que muestran cómo esas construcciones se entrelazan, ellos pueden integrarse en un modelo hipotético que puede ser llevado a la práctica para probar su validez y utilidad. A este modelo se le denomina descomposición genética (DG) del concepto en estudio. En una DG de un concepto matemático particular se describen las Acciones necesarias para comenzar a entender un concepto. Estas pueden ser interiorizadas en Procesos y estos, a su vez, coordinados en nuevos Procesos que podrán ser encapsulados en Objetos, y continúa de esta manera hasta conformar la descripción de todos los mecanismos y estructuras que modelan la construcción mental de un concepto matemático.

Para la construcción de una DG se tienen en cuenta elementos como la experiencia del investigador, tanto en la enseñanza como en el aprendizaje del concepto que se estudie, el conocimiento de la teoría APOE, los conocimientos matemáticos, las investigaciones sobre el concepto de interés y su desarrollo histórico. Una vez conjugados todos o parte de estos elementos, es posible establecer una DG preliminar, la misma que puede implementarse y probarse en campo. Con los datos derivados de su implementación se realiza una revisión de la DG y, de ser necesario, se propone un refinamiento. Este procedimiento puede repetirse varias veces, pero se espera que en cada nuevo ciclo iterativo de prueba y refinamiento se genere un modelo que describa mejor la construcción del concepto que se está estudiando. Otro rasgo importante de una DG es que puede ser usada para guiar el desarrollo instruccional, con lo que el diseño de actividades alrededor de un concepto consiste en proponer actividades que propicien la construcción de las estructuras y mecanismos mentales dictados por la DG.

A continuación, se presenta un resumen de la DG del límite de una función de una variable real en $x=a$ de Cottrill et al. (1996, citado en Arnon et al., 2014).

1. La Acción de evaluar f en un solo punto x que se considera cercano, o incluso igual al valor a.
2. La Acción de evaluar la función f en algunos puntos, cada uno sucesivamente más cercano al valor a que el anterior.
3. Construcción de un esquema coordinado de la siguiente manera:
    a) Interiorización de la Acción del paso 2 para la construcción de un Proceso en el dominio en el que x se aproxima al valor a.
    b) Construcción de un Proceso en el rango en el que $f(x)$se aproxima al valor L.
    c) Coordinación de (a) y (b) a través de f.

4. Encapsulación del Proceso del paso 3(c) para que el límite se convierta en un Objeto al que se pueden aplicar Acciones.
5. Reconstruir el Proceso del paso 3(c) en términos de intervalos y desigualdades. Esto se realiza mediante la introducción de estimaciones numéricas de la cercanía de las aproximaciones, en símbolos, $0 < |x-a| < \delta$ y $|f(x)-L| < \varepsilon$.
6. Aplicación de un esquema de cuantificación de dos niveles para conectar el Proceso reconstruido del paso 5 con la definición formal de límite.
7. Aplicación de una concepción completa $\varepsilon-\delta$ a situaciones específicas.

Aquí vale la pena observar cómo la descripción de las estructuras y mecanismos de la teoría se ubica exclusivamente en el registro algebraico de las funciones.

El ciclo de investigación de APOE

Un proyecto de investigación basado en la teoría APOE involucra tres componentes: análisis teórico, elaboración y aplicación de un diseño instruccional o de instrumentos de investigación, recolección y análisis de los datos. El análisis teórico inicial del concepto que se desea abordar, en el cual se explora lo que significa entender el concepto matemático y cómo un individuo puede construirlo, conduce a la propuesta de una DG preliminar. En la siguiente fase se procede al diseño instruccional que busca que los individuos construyan las estructuras mentales propuestas en el análisis teórico del concepto o se sigue con el diseño de instrumentos que evalúen dichas estructuras. Finalmente, los datos que se obtienen del tratamiento instruccional o de la aplicación de instrumentos de evaluación son analizados en el contexto de la teoría APOE y, en su caso, son utilizados para reiniciar el ciclo antes descrito con el propósito de refinar la descomposición genética inicial.

La concepción dinámica del límite de una función

En esta investigación suponemos que un sujeto que muestra una concepción dinámica del límite de una función real entiende este concepto como el número (si es que existe) al que se aproximan los valores de la función cuando sus respectivas preimágenes se aproximan a un determinado número real. Esta concepción es intuitiva e informal, y se contrapone con la concepción métrica o estática, que se identifica con la definición formal o también conocida como $\varepsilon-\delta$ (Arnon et al., 2014). La concepción dinámica del límite de una función es «un conocimiento informal del concepto, es decir, los valores de una función se acercan a un valor límite cuando los valores en el dominio se acercan a alguna cantidad» (Arnon et al., 2014, p. 45). Por estas características, la primera se estudia en el nivel medio superior y la segunda, en el nivel superior. Blázquez et al. (2006) compararon estas dos formas de entender y estudiar el límite de una función y concluyeron que la dinámica (entendida por ellos como aproximación óptima) es más fácil de comprender que la segunda. Sin embargo, Cottrill et al. (1996) mencionan que la primera puede resultar más difícil de comprender que lo que uno se imagina. Valls et al. (2011) y Pons (2014) reportaron que la conjetura de Cottrill resultó adecuada en estudiantes del nivel medio superior a los que aplicaron un conjunto de actividades. Los resultados de su análisis comprobaron que muy pocos lograron coordinar los dos Procesos de aproximación involucrados en la concepción dinámica del límite de una función (3a y 3b en la DG de Cottrill).

La teoría de registros de representación semiótica

Duval (2006) plantea que en el aprendizaje de las matemáticas es indispensable el uso de las representaciones semióticas, dado que el acceso a los objetos matemáticos no es posible sin un representante en un cierto registro semiótico. Además, son necesarias las transformaciones del objeto en un mismo registro, a lo cual llama *tratamientos*, así como del objeto de un registro a otro, a lo que denomina *conversiones*. Estas dos transformaciones tienen características cognitivas distintas, y en la enseñanza de las matemáticas suele darse mayor importancia a los tratamientos. Como se afirmó antes, ambas transformaciones son necesarias, y dar un mayor énfasis a una sola limitaría el aprendizaje de las matemáticas. Asimismo, afirma que el tránsito fluido entre diferentes registros semióticos es un indicador de comprensión, por lo que en la enseñanza debe promoverse este tránsito fluido entre registros.

MÉTODO

La investigación que se presenta es teórica, de tipo descriptivo y, fundamentada en una teoría cognitiva, pretende contribuir a la comprensión de la forma en que un sujeto construye el concepto límite de una función en una variable real. Se restringe a la concepción dinámica y contribuye a la teoría de registros de representaciones semióticas de Duval (2006), para complementar la descripción propuesta por Cottrill et al. (1996) en sus cuatro primeros pasos.

Se sigue el método de investigación propio de la teoría APOE en la fase de refinamiento de una descomposición genética del concepto en estudio. Este refinamiento se propone para los pasos del 1 al 4 de la DG de Cottrill et al. (1996), después del análisis de las respuestas de estudiantes a actividades didácticas que fueron diseñadas, originalmente, con base en esta DG en las investigaciones de Pons (2014), Pérez (2019) y Analco y Hernández (2020). En los dos primeros trabajos, las actividades fueron aplicadas a estudiantes del nivel medio superior y en el tercero, a estudiantes del nivel superior. Los tres trabajos coinciden en analizar las estructuras mentales en diferentes registros de representación semiótica. Los resultados de estas investigaciones y, en particular, el señalamiento de Fernández et al. (2018) nos condujeron a cuestionarnos la necesidad de refinar la DG mencionada, de tal forma que se describan las estructuras y los mecanismos mentales de la concepción dinámica del límite de una función en los diferentes registros: numérico, analítico, gráfico y verbal. Asimismo, se deben considerar la estructura de Totalidad del infinito y el Objeto límite de una función en su concepción dinámica.

En el trabajo de Analco y Hernández (2020), se aplicaron seis de las actividades de Pons (2014) a 56 estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, en México, como parte de un trabajo de pregrado. El objetivo de dicha investigación fue describir la comprensión del límite de una función real de los estudiantes dos semanas después de haber revisado el tema de los límites en un curso de cálculo diferencial. Las producciones de los estudiantes se analizaron con la teoría APOE, pero el tema no fue impartido siguiendo esta teoría.

El instrumento utilizado fue un cuestionario en el que se pidió a los estudiantes que justificaran cuidadosamente cada una de sus respuestas en seis actividades que consistían en una instrucción principal seguida por varias preguntas. El tiempo que los estudiantes tardaron en responder el cuestionario fue de dos horas.

El análisis de las respuestas a las actividades que se presentó en Analco y Hernández (2020) se revisó nuevamente por las autoras de este trabajo, y se enfocó en las diferencias de construcción del límite entre las distintas representaciones. Cada una de ellas revisó los resultados de manera independiente y, posteriormente, se discutieron en grupo para negociar las distintas interpretaciones, triangular la información y llegar a un acuerdo.

Actividades

Las siguientes son cuatro de las seis actividades cuya aplicación se reportó en Analco y Hernández (2020). Aquí se presentan solo las primeras cuatro porque son las que corresponden a la concepción dinámica. Para esta investigación, se retomó el análisis de los objetivos de estas actividades, pero se modificó la interpretación del último inciso que aparece en todas ellas, debido a que en algunas respuestas de los estudiantes se detectaron indicios de la estructura de Totalidad del infinito, de acuerdo con el trabajo de Villabona et al. (2022).

A continuación, se muestran las actividades, seguidas del análisis de sus objetivos en términos de la DG de Cottrill et al. (1996) y de los registros semióticos que participan. Para apreciar lo anterior, es importante notar que hay un conjunto de preguntas que se repiten en todas las actividades con la intención de evidenciar las mismas estructuras mentales, pero realizadas en diferentes registros semióticos.

Actividad 1

A partir de la siguiente tabla, responde:

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	$\cdots$	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	14.21	14.9201	14.992001	14.99920001	$\cdots$	15.0008001	15.008001	15.0801	15.81

a) ¿A qué número se aproxima x?

b) ¿A qué número se aproxima $f(x)$?

c) Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x.

d) Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 3$? Justifique su respuesta

Fig. 1. Actividad 1. *Fuente*: Analco y Hernández (2020).

Actividad 2

Si $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\cdots$	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$					$\cdots$				

a) Completa la tabla

b) ¿A qué número se aproxima x?

c) ¿A qué número se aproxima $f(x)$?

d) Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x.

e) Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 2$? Justifique su respuesta

Fig. 2. Actividad 2. *Fuente*: Analco y Hernández (2020).

Actividad 3

A partir de la siguiente tabla, responde:

x	3.99	3.993	3.9999	3.99999	$\cdots$	4.00001	4.0001	4.001	4.01
$f(x)$	15.530	15.5254	15.5015	15.50001	$\cdots$	14.00003	14.0003	14.003	14.03

a) ¿A qué número se aproxima x?

b) ¿A qué número se aproxima $f(x)$?

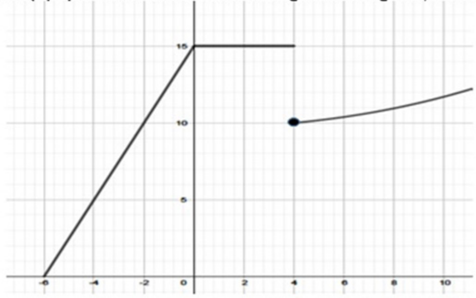
c) Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x.

d) Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 4$? Justifique su respuesta

Fig. 3. Actividad 3. *Fuente*: Analco y Hernández (2020).

ACTIVIDAD 4

De la función f(x) que se muestra en la siguiente figura, contesta a las preguntas:



a) Elige un valor para x, y calcula el valor de $f(x)$, en ese punto.
b) Cuando x tome los valores 3.9, 3.99, 3.999,... ¿A qué número se aproxima $f(x)$?
c) Cuando x tome los valores 4.1, 4.01, 4.001,... ¿A qué número se aproxima $f(x)$?
d) Describe el comportamiento de $f(x)$, con relación a la variable x.
e) Di, si es posible, ¿cuál es el límite de la función en $x = 4$? Justifique su respuesta.

Fig. 4. Actividad 4. *Fuente*: Analco y Hernández (2020).

En las actividades 2 y 4 se piden las imágenes de valores en el eje x que los estudiantes deben obtener de una expresión en el registro algebraico (actividad 2) o ubicando dichas imágenes mediante el uso de la función en el registro gráfico (actividad 4). Con lo anterior, se evalúa si los estudiantes realizan las Acciones 1 y 2 de la DG, primero en el registro algebraico y luego en el gráfico. En las primeras tres actividades se plantean las preguntas ¿A qué número se aproxima *x*? y ¿A qué número se aproxima *f*(*x*)? Estas preguntas tienen la finalidad de que los estudiantes muestren si conciben el Proceso de aproximación de los valores dados a un número que no aparece en la tabla. En la primera pregunta, la aproximación es sobre el dominio y la segunda, sobre el rango. Así, en estas tres actividades, se espera que muestren los Procesos de dominio y rango de la DG, pasos 3a y 3b en el registro numérico y en una representación tabular.

En la actividad 4 se solicita únicamente el Proceso en el rango, dada una sucesión de valores del dominio (registro numérico) que los estudiantes deben ubicar en el plano (conversión al registro gráfico), para luego usar la gráfica y deducir a qué número se aproximan sus imágenes. En esta actividad también se solicita que el estudiante determine la imagen de un número *x* arbitrario, que debe ser seleccionado por él, para cuya función solo se proporciona su representación gráfica. Así, con esta solicitud, se espera observar si el estudiante realiza la Acción del paso 1 de la DG, en el registro gráfico.

En las cuatro actividades se incluye la solicitud «Describe el comportamiento de *f*(*x*), con relación a la variable *x*», cuya intención es evaluar si el estudiante evidencia el Proceso que resulta de coordinar los Procesos de dominio y rango, solicitados previamente en las distintas representaciones, incluyendo la evidencia en el registro verbal a través de sus justificaciones. En las tres primeras actividades, este Proceso se debe construir en el registro numérico y, en la cuarta actividad, en el registro gráfico.

El último inciso de las cuatro actividades pide al estudiante que establezca, si es posible, cuál es el límite de la función en un cierto valor *x*, según sea el caso, y que justifique su respuesta. Si el estudiante determina que el límite existe (actividades 1y 2) y lo justifica correctamente mediante las aproximaciones, tanto por la derecha como por la izquierda, entonces demostrará que es capaz de imaginar las aproximaciones infinitas como un Proceso. En su argumentación, también podría dar evidencia de considerar ese Proceso como terminado. En este caso, el estudiante debe probar haber construido la Totalidad del infinito y los indicios del Objeto límite (Villabona, 2016; Villabona y Oktac, 2022). En las actividades 3 y 4 el límite no existe porque los límites laterales, en el valor de interés, no coinciden. Si el estudiante describe esta situación, en términos de la no coincidencia de los límites laterales, evidenciará haber visto los Procesos infinitos en el rango como terminados, ya sea en el registro numérico (actividad 3) o en el gráfico (actividad 4).

NUEVA REVISIÓN DE LOS DATOS

En Analco y Hernández (2020) se reportó que, al aplicar estas cuatro actividades, todos los estudiantes evidenciaron la concepción de Acción del límite de una función y los Procesos dominio y rango, pero que no todos mostraron el Proceso resultante de la coordinación de dichos Procesos (paso 3c de la DG). Ahora, en esta investigación, revisamos los mismos datos, encontramos que coincidimos en la concepción de Acción y de los Procesos dominio y rango, pero que los porcentajes de los estudiantes que dieron muestras del Proceso coordinado dependen del registro en el que está planteada la actividad. Además, consideramos que las respuestas al último inciso de cada actividad podrían analizarse a la luz de la estructura de Totalidad del infinito y del Objeto límite, en lugar de como evidencias de una encapsulación del Proceso coordinado. A continuación, detallamos la revisión del Proceso coordinado y de la Totalidad del infinito.

Acerca del proceso coordinado

La actividad 1, inciso c), exige la coordinación de los Procesos dominio y rango en el registro numérico, al pedir que se describa el comportamiento de la función representada en una tabla. En esta actividad, el 66,06 % de los estudiantes dio muestras de la construcción del Proceso coordinado al dar respuestas similares a « $\lim_{x\to 3} f(x) = 15$ porque cuando *x* tiende a 3, *f*(*x*) tiende a 15», la cual fue la más frecuente.

La actividad 2, inciso d), solicita lo mismo, pero, para una función en una representación algebraica y una tabla con una sucesión de valores en el dominio, los estudiantes deben completar la tabla y describir su comportamiento. En este caso, el 75 % dio muestras del Proceso coordinado, ya sea en el registro algebraico, en el numérico o en el verbal. La mayoría de estos respondió: «cuando $x \to 2$, $f(x) \to \frac{1}{4}$», mientras que algunos precisaron, «cuando *x* tiende a 2 por la izquierda o por la derecha, *f*(*x*) se aproxima a 0,25». Es importante mencionar que un 20 % de los estudiantes intentó describir el comportamiento de la función usando la expresión algebraica e imaginando o dibujando su gráfica, por lo que dieron respuestas como las siguientes: «La gráfica tiene pendiente negativa», «en $x = -2$ es asintótico y en $x \to 2$ hay un hueco», o hicieron dibujos de rectas con huecos como el de la figura 5 (véase inciso d).

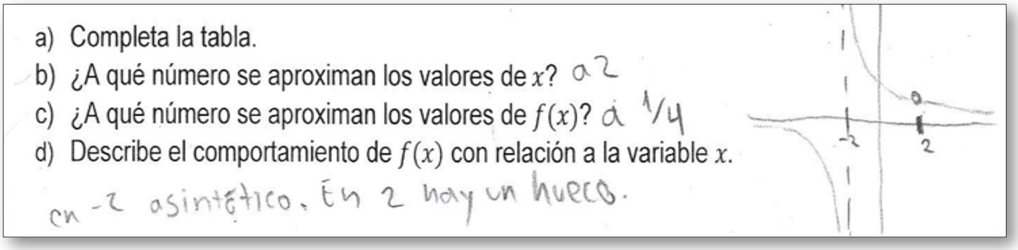

a) Completa la tabla.
b) ¿A qué número se aproximan los valores de x? a 2
c) ¿A qué número se aproximan los valores de $f(x)$? a 1/4
d) Describe el comportamiento de $f(x)$ con relación a la variable x.
en -2 asintótico. En 2 hay un hueco.

Fig. 5. Ejemplo de la respuesta de un alumno a la actividad 2, inciso d).

La actividad 3 es similar a la primera, se presenta en el registro numérico y se proporcionan los valores de una función en una tabla, pero la diferencia es que la sucesión de valores en el rango se aproxima a distintos números cuando los del dominio se aproximan a 4, mientras que en la actividad 1 la sucesión de valores en el rango converge a un mismo número. Aquí, el 82,14 % dio muestras del Proceso coordinado al responder el inciso c). La mayoría de los alumnos respondió de manera similar a lo que muestra la figura 6.

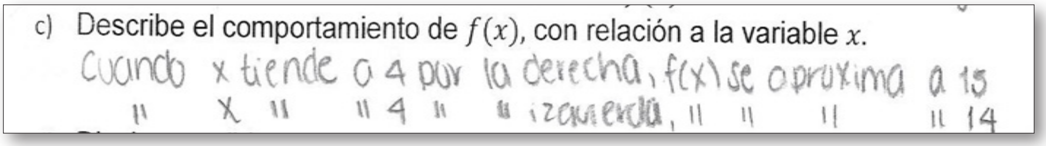

c) Describe el comportamiento de $f(x)$, con relación a la variable x.
Cuando x tiende a 4 por la derecha, f(x) se aproxima a 15
" X " " 4 " " izquierda, " " " " 14

Fig. 6. Ejemplo de la respuesta más frecuente a la actividad 3, inciso c).

La actividad 4, inciso d), solicita lo mismo que las actividades previas, pero para una función representada únicamente en el registro gráfico, y tiene la característica de que, cuando *x* se acerca a 4, por la derecha y por la izquierda, *f*(*x*) se aproxima a números distintos. En esta situación, solo el 35,71 % de los alumnos pudo explicar el comportamiento de la función en términos de las aproximaciones, en el dominio y en el rango, y dar muestras, así, del Proceso coordinado, empleando las palabras «tiende a» o «se aproxima a». Aquí llama la atención que el 46,42 % del total de los estudiantes mencionó otras características de la función, como «es una función a trozos» y «no es una función continua», o intentó hacer una conversión al registro gráfico, en lugar de señalar el fenómeno de las aproximaciones a diferentes valores en el rango (véase la figura 7).

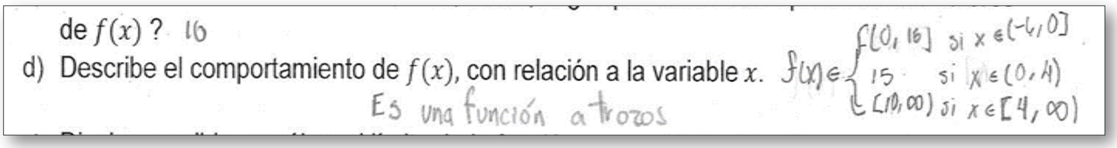

de $f(x)$? 16
d) Describe el comportamiento de $f(x)$, con relación a la variable x.
$f(x) \in \begin{cases} [0,16] & \text{si } x \in (-4,0] \\ 15 & \text{si } x \in (0,4) \\ [10,\infty) & \text{si } x \in [4,\infty) \end{cases}$
Es una función a trozos

Fig. 7. Respuesta de un estudiante al inciso d) de la actividad 4.

Acerca de la existencia del límite

Ahora pasaremos al último inciso, en el que se solicita decir, si es posible, si existe el límite de la función y que se justifique la respuesta.

En la actividad 1, en la que se contaba con una tabla de valores y los valores de la función se aproximaban a 15 (registro numérico), el 55 % de los estudiantes respondió que el límite era 15 y lo justificó recurriendo al hecho de que los límites laterales coincidían. El 18 % del total justificó que 15 era el límite, y afirmó que cuando x tiende a 3, $f(x)$ tiende a 15. Así, un 73 % de los estudiantes podría haber construido la estructura de totalidad del infinito cuando habla de un proceso infinito (cuando x tiende a 3, $f(x)$ tiende a 15), que concluye (el límite es 15) y da indicios del Objeto límite en su concepción dinámica. El resto de los estudiantes afirmó que 15 era el límite de la función cuando x tiende a 3, pero no proporcionó ninguna justificación o lo calculó mediante una expresión algebraica que ellos supusieron (7 %), como la que se muestra en la figura 8. Estos estudiantes no nos informan en sus respuestas si imaginan el proceso infinito como terminado, por lo que no dan evidencia de la Totalidad del infinito ni del Objeto límite.

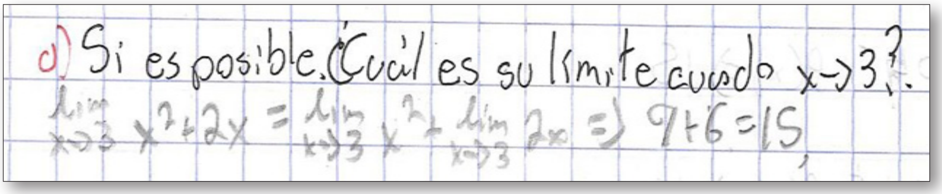


Fig. 8. Ejemplo de respuesta a la actividad 1, inciso d).

En la actividad 2, los estudiantes contaban con la representación algebraica de la función y debían completar una tabla con valores en el eje x (registro numérico). En este caso, casi el 40 % afirmó que el límite de la función existía en $x = 2$, que era 0,25, y lo justificó mediante la coincidencia de los límites laterales (véase figura 9). Ellos dan indicios de la Totalidad del infinito y del Objeto límite. Otro 40 % evaluó la función en $x = 2$ y halló el límite o solo escribió que el límite era 0,25, pero no dio ninguna justificación. El resto (20 %, aproximadamente) afirmó que el límite no existía porque, como la función no estaba definida en $x = 2$, el límite no se alcanzaba. Algunos de ellos escribieron: «No es posible porque la función se indefine cuando $x = 2$». Así, se tiene que el 60 % de los estudiantes no da indicios de la Totalidad del infinito.

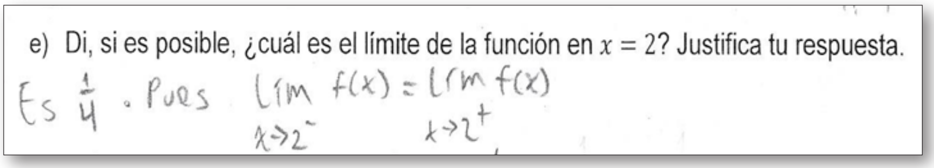


Fig. 9. Ejemplo de respuesta a la actividad 2, inciso e), en la que usan los límites laterales para justificar la existencia del límite.

En la actividad 3, los estudiantes contaban solo con información en el registro numérico, en el que se observaba que, cuando x se acercaba a 4, los valores de la función se aproximaban a dos números diferentes. En esta situación, el 84 % concluyó que el límite no existía porque los límites laterales no coincidían, y algunos de ellos escribieron: «el límite no existe ya que los límites laterales no coinciden». El resto proporcionó erróneamente un límite, afirmó que la función tenía dos límites o dejó en blanco la respuesta.

En la actividad 4, la función se presentó únicamente en el registro gráfico y tenía una discontinuidad de salto en $x = 4$. En este caso, el 87,5 % respondió fácilmente que el límite no existía en ese valor porque los límites laterales no coincidían (véase figura 10). El porcentaje de los que dieron un límite o dijeron que existían dos límites fue de casi un 10 %.

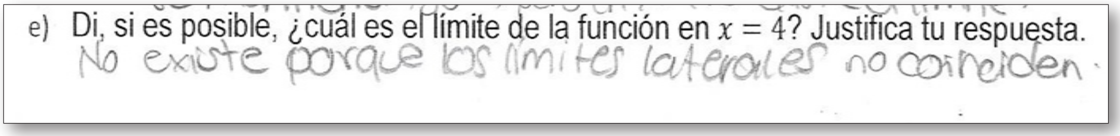


Fig. 10. Ejemplo de respuesta a la actividad 4, inciso e).

En estas dos actividades, un gran porcentaje de los estudiantes respondió acertadamente que el límite no existía y lo justificó por la no coincidencia de los límites laterales. Aquí se destaca el hecho de que fueron capaces de determinar los límites laterales, es decir, de que quizás ven el proceso infinito en el rango como terminado, pero, ahora, para establecer la no existencia del límite en el valor de interés. Es por esta razón por la que sus respuestas las consideramos como indicios de Totalidad del infinito y del Objeto límite en su concepción dinámica. La tabla 1 resume los resultados anteriores y permite observar cómo el Proceso que resulta de la coordinación de los Procesos dominio y rango y la determinación de la existencia del límite con una justificación correcta (indicios de Totalidad del infinito y del Objeto límite) dependen del registro semiótico en el que se haya planteado la actividad.

Tabla 1.
Porcentajes de estudiantes que evidenciaron el proceso coordinado
y la existencia o no del límite, según el registro de representación semiótica.

Actividad	*Registro*	*Proceso coordinado*	*Indicios de totalidad del infinito y del objeto límite*
1	Numérico	66,06	73
2	Algebraico-numérico	75	40
3	Numérico	82,14	84
4	Gráfico	35,71	87,5

Fuente: elaboración propia con datos de Analco y Hernández (2020)

ANÁLISIS DE LOS DATOS

En las investigaciones de Pérez (2019) y Pons (2014), se reportó que el Proceso coordinado no se manifestaba en estudiantes de nivel medio superior y que su construcción parecía verse favorecida por algún registro semiótico y limitada en otro. Lo anterior lo concluyeron después de aplicar las mismas actividades que aquí se presentaron. En los resultados de Analco y Hernández (2020) que se acaban de describir y de resumir en la tabla 1, se muestran evidencias del Proceso coordinado en estudiantes de nivel superior y se observa claramente una diferencia entre el porcentaje de estudiantes que evidencian dicho Proceso en el registro numérico (cuando cuentan y usan una tabla de valores) y los que lo muestran en el gráfico (solo cuentan con la gráfica de la función). En este caso, es en el registro gráfico donde surgieron dificultades para hablar de las aproximaciones en el dominio y en el rango de manera simultánea, a pesar de que sí lo hacen en el registro numérico. En la actividad 4 (registro gráfico), las respuestas más frecuentes explicaban que la función estaba definida a trozos y lo hacían de manera verbal o mediante algunas expresiones algebraicas, como en la figura 7.

Esta tendencia a usar una expresión algebraica para responder sobre el comportamiento de una función también apareció en las otras actividades donde la función solo se representó en el registro numérico, pero fue en un menor porcentaje (Analco y Hernández, 2020). En el registro numérico, los estudiantes pueden observar los valores numéricos, tanto del dominio como del rango, y al notar el cambio simultáneo pueden coordinar ambos Procesos en uno nuevo. Esta coordinación se da, especialmente, en la representación tabular. Sin embargo, en el registro gráfico, los estudiantes construyen una sucesión de valores en el dominio como un Proceso, pero la construcción de ese Proceso con los valores del rango requiere la interiorización de las Acciones de usar la gráfica de la función para buscar las imágenes de cada valor en el eje *y*. Al parecer, estos estudiantes no han interiorizado esas Acciones en un Proceso y recurren entonces a focalizar la curva y a realizar las Acciones de reconocer características globales de esta, por ejemplo, si «es creciente, continua, discontinua o está definida a trozos», las cuales también aparecieron frecuentemente como respuesta (Analco y Hernández, 2020). Los resultados anteriores indican que el Proceso coordinado no se construye de la misma manera en un registro que en otro, y esto sugiere un refinamiento de la DG.

Además, en la revisión de los datos expuestos arriba, se nota una gran diferencia entre el porcentaje de estudiantes que lograron determinar el límite y justificar su existencia cuando la función se representó en el registro algebraico y se contaba con una tabla (actividad 2) y los que hicieron esto en la actividad 1, donde solo analizaron una tabla de valores (registro numérico). En la actividad 2, casi la quinta parte de los estudiantes usó la expresión algebraica y mencionó «el límite no existe (o no se alcanza) porque la función no está definida en $x = 2$» (Analco y Hernández, 2020), a pesar de que, al llenar la tabla, podían observar la aproximación a 0,25. El hecho de contar con la expresión algebraica de la función llevó a varios estudiantes a realizar únicamente la Acción de evaluar en el valor de interés y a no completar el Proceso de aproximación infinita para construir la Totalidad del infinito. En contraste con lo anterior, el 70 % de los estudiantes respondió sobre la existencia del límite en el registro numérico y lo justificó acertadamente. De estas evidencias, se deduce que el registro algebraico no favoreció la construcción de la estructura de Totalidad ni del Objeto límite en estos estudiantes.

Es importante mencionar que las respuestas sobre la existencia del límite y su justificación no arrojaron evidencias suficientes de la Totalidad del proceso infinito ni del Objeto límite, ya que no permitieron conocer si los estudiantes imaginaban el proceso infinito como terminado o afirmaban que el límite era cierto número por convención. Su justificación se basó en que los límites laterales coincidían o en que cuando x tiende a a, $f(x)$ tiende a L, pero ninguna de las dos permite afirmar si conciben que el número L se alcanza o no.

En la investigación de Pons et al. (2012), se encontró que la coincidencia o no de las aproximaciones en el rango influía en las respuestas de 129 estudiantes de primero y segundo de bachillerato cuando se analizó en ellos la construcción del significado del límite de una función. Para estos estudiantes, la construcción del Proceso coordinado se favoreció cuando las aproximaciones en el rango coincidían, mientras que la no coincidencia representó un reto mayor. En el estudio que ahora presentamos, observamos que en las actividades 3 y 4, en las que las aproximaciones en el rango no coinciden, estos estudiantes (de ciencias exactas) respondieron correctamente que el límite no existía porque los límites laterales no coincidían. Al parecer, ellos pudieron recordar fácilmente el teorema que asegura esta afirmación, aunque no fueron capaces de explicar lo que ocurre en el dominio y en el rango de manera simultánea, sobre todo en el registro gráfico.

Como consecuencia del análisis anterior, se propone un refinamiento de la DG, de tal manera que se hipotetice sobre las estructuras y los mecanismos mentales necesarios para la construcción de la concepción dinámica del límite de una función en los registros semióticos: numérico, algebraico y gráfico. Se decidió agregar al registro verbal, debido a que, aunque no se analizó en detalle su influencia en este trabajo, sí se ha destacado su papel en varias investigaciones (Monaghan, 1991; Tall, 1992). Otra modificación importante que se propone para la DG de Cottrill es la incorporación de la estructura de Totalidad del infinito, entre el Proceso coordinado y el Objeto del límite en su concepción dinámica tras reinterpretar los datos de Analco y Hernández (2020) y a la luz de los trabajos de Dubinsky et al. (2005 y 2013), Villabona y Roa-Fuentes (2016) y Villabona et al. (2022). Consideramos importante incluir la estructura de Totalidad para favorecer el diseño de actividades didácticas dirigidas a su construcción y como parte de instrumentos de investigación. Finalmente, se conserva el paso 4 de la DG de Cottrill (paso 6 en la nueva DG), en el que se plantea la construcción de un Objeto, al que se pueden aplicar Acciones, pero ahora como producto de la encapsulación de la totalidad del infinito y precisando que se trata del Objeto del límite de una función en su concepción dinámica. En las respuestas analizadas no fue posible obtener evidencia de estas estructuras, pero sí indicios apoyados en el análisis teórico de estudios previos.

RESULTADO: DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA REFINADA

En esta sección, primero se describen las estructuras mentales previas necesarias para la construcción del concepto de límite de una función real; después se presenta la DG refinada.

Estructuras previas

- Un Esquema de número real que incluya las nociones de los diferentes conjuntos de números, en particular del número racional (en su representación numérica fraccionaria y decimal) y las propiedades de orden en los números reales.
- Una concepción de Proceso del concepto de función real en sus diferentes representaciones semióticas, lo cual significa que el estudiante logra identificar la imagen de un elemento arbitrario del dominio e imagina el rango de la función en cualquier registro semiótico.
- Una concepción de infinito como Proceso (Dubinsky et al., 2005).

Acciones

Dado un elemento cualquiera del dominio, cercano al valor $x = a$, el estudiante realiza la Acción de asociar este valor con su imagen bajo la función f en cada uno de los registros semióticos de la función. En el *registro numérico*, desempeñará las Acciones de analizar una tabla en la que se presenten parejas ordenadas de números conformadas por dos sucesiones, una en el dominio de la función y otra de las respectivas imágenes. En el *algebraico*, realizará Acciones de sustitución de elementos del dominio de la función cada vez más cercanos a $x = a$ en una expresión matemática, para determinar su imagen correspondiente. En el *registro gráfico*, hará la Acción de ubicar las imágenes en el eje y de distintos valores en el eje x pertenecientes al dominio de la función cada vez más cercanos al valor $x = a$. En el *registro verbal*, llevará a cabo la Acción de describir cada una de las acciones anteriores.

Dos estructuras de proceso, una en el dominio y otra en el rango

Al repetir las Acciones de asociación de un valor en el dominio, cercano a $x = a$ con su respectiva imagen, por la izquierda y por la derecha de $x = a$, utilizando una diversidad de funciones representadas *en cada uno de los distintos registros de representación*, y reflexionar, en cada ocasión, acerca de la proximidad, o no, de los valores en el dominio a $x = a$ y de los valores en el rango a un cierto valor $y = L$, cuando esto sea posible, el estudiante interioriza dichas Acciones en dos Procesos de aproximación infinita, uno en el dominio y otro en el rango, *en cada uno de los registros de representación* antes mencionados.

Proceso de la concepción dinámica del límite de una función real

Cuando el estudiante coordina los dos Procesos descritos arriba, utilizando distintas funciones *en cada uno de los registros de representación*, en las que el límite exista o no, construye un nuevo Proceso mediante el cual será capaz de apreciar y representar de diversas maneras las aproximaciones conjuntas; de x acercándose al valor a y de $f(x)$ aproximándose o no a un cierto valor L. Cuando el estudiante reflexiona sobre el resultado de los Procesos anteriores en cada uno de los registros de representación y los coordina por pares, construye nuevos Procesos (*numérico-gráfico*, *numérico-verbal*, *numérico-algebraico*, *gráfico-verbal*, *gráfico-simbólico*, *algebraico-verbal*). Estos últimos Procesos se coordinan nuevamente entre ellos. Ese Proceso coordinado puede considerarse como Proceso de la concepción dinámica del límite, el cual se pone en evidencia cuando el estudiante puede concluir que, cuando x se aproxima infinitamente a $x = a$, la función se aproxima al valor $f(x)=L$, independientemente de las representaciones involucradas.

Totalidad del proceso infinito en la concepción dinámica del límite

Siempre que el límite L de una función f exista en $x = a$, el estudiante podrá dar evidencia de ver el Proceso coordinado de aproximación infinita como terminado y manifestar que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ en cualquiera de los registros semióticos en los que se presente esta situación. Cuando el límite de la función no exista porque los límites laterales no coinciden, el estudiante será capaz de determinar los límites laterales y argumentar que el límite de la función no existe porque ambos límites, como aproximaciones infinitas terminadas, son diferentes.

Objeto de la concepción dinámica del límite

A través de acciones sobre el límite dinámico evidenciando la Totalidad del infinito, el alumno encapsula la concepción dinámica del límite en el Objeto y es capaz de realizar nuevas Acciones sobre él como, por ejemplo, aplicar sus propiedades.

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

Es de gran importancia que el estudiante realice las Acciones descritas en la DG en cada uno de los registros de representación y que tenga oportunidades de reflexión, experimentando tanto con funciones cuyas imágenes se aproximen a un cierto valor como con aquellas que no tengan esta propiedad en $x = a$. El uso de diferentes tipos de sucesiones de números en el dominio, que se aproximen tanto por la izquierda como por la derecha a $x = a$, en los diferentes registros, permitirá al alumno determinar si, conforme x se acerca a $x = a$, la correspondiente sucesión de números en el rango se acerca, o no, a un valor $y = L$. En los casos en los que el límite de la función no exista en $x = a$, las Acciones anteriores le permitirán observar que los valores de la función no convergen en un solo número, que no convergen en ninguno o que divergen en más o menos infinito para valores de x próximos al valor a. De esta forma, el estudiante tendrá la oportunidad de interiorizar dichas Acciones en un Proceso de aproximación en el dominio y, al mismo tiempo, construir un Proceso de aproximación en el rango de las imágenes de esas sucesiones numéricas, y acercarse infinitamente a un valor $y = L$ para cada registro de representación considerado. Las Acciones de la DG también permitirán a los estudiantes reflexionar sobre el hecho de que el límite en un punto no requiere que la función esté definida en ese punto y que los límites laterales deben coincidir para que exista ese único límite.

La construcción de la concepción dinámica del límite de una función como Proceso se favorece cuando el estudiante realiza Acciones en el registro numérico, ya que este le permite visualizar el comportamiento de los valores numéricos dados en una tabla, tanto para el dominio como para el rango. La interiorización de esas acciones se logrará al utilizar diferentes funciones y situaciones de convergencia. Luego, mediante preguntas adecuadas sobre el comportamiento de la función, se favorece la coordinación de los Procesos dominio y rango. Sin embargo, es necesario que se coordinen dichos Procesos en todos los registros, ya que los resultados que aquí se mostraron destacaron esa falta de coordinación en el registro gráfico en estudiantes de física y matemáticas.

CONCLUSIONES

En este trabajo se propone una descomposición genética refinada del límite de una función en una variable real en su concepción dinámica. Esta propuesta complementa el análisis que ofrece la teoría APOE con la teoría de representaciones semióticas para contribuir a la comprensión de los Procesos involucrados en las diferentes representaciones y su posible coordinación. La principal aportación es la descripción de las estructuras y los mecanismos mentales que un sujeto necesita para la comprensión de la concepción dinámica del límite de una función en un punto, integrando de manera explícita los registros semióticos numérico, algebraico, gráfico y verbal; lo anterior, después de haber notado diferencias drásticas entre las construcciones mentales que un grupo de estudiantes manifestó en un registro o en otro. El Proceso coordinado se evidenció en la mayoría de los casos en el registro numérico y en la representación tabular, y, en una minoría, en el registro gráfico. La Totalidad del infinito, como un indicio, se evidenció en la mayoría de los estudiantes en el registro numérico (representación tabular) y en el gráfico, pero no en el algebraico. Se ofrecieron también recomendaciones didácticas que buscan brindar suficientes oportunidades de construcción del concepto límite en su concepción dinámica, al trabajar en los diferentes registros semióticos y coordinar los Procesos construidos en cada uno de ellos.

Una aportación importante de este estudio consiste en subrayar que los estudiantes pueden haber construido distintas concepciones del concepto de límite en diferentes representaciones de este, y cómo esto incide en la posibilidad de construir el Proceso coordinado de la aproximación en el dominio y el rango de una función en la Totalidad del infinito. Lo anterior conduce a reflexionar sobre la posibilidad de analizar a mayor profundidad dichos Procesos en diferentes representaciones y la posible coordinación entre ellos.

Otras contribuciones de este trabajo que consideramos valiosas y que se señalan en la DG propuesta y en las sugerencias didácticas son, por una parte, la necesidad de subrayar que cuando el límite existe es único, y que puede existir incluso cuando el valor del límite se alcance en un punto que no está definido en el dominio de la función. Por otra parte, consideramos que la introducción de la Totalidad en la DG y la necesidad de diseñar actividades que den cuenta de ella y que permitan su construcción en la enseñanza es otra aportación importante, dada la estrecha relación del concepto de límite, aun en su concepción dinámica, con la noción de infinito.

La concepción dinámica del límite de una función en una variable real se considera un acercamiento informal que es suficiente para la construcción de los conceptos de la materia de cálculo en los niveles medio superior y superior (por ejemplo, en carreras de ingeniería). Por lo que esperamos que esta descripción teórica y las recomendaciones didácticas sean útiles para el diseño instruccional en estos niveles. Sin embargo, esta concepción del límite es también necesaria para la construcción de la concepción métrica de este (Cottrill et al., 1996; Pons, 2014), por lo que también es una propuesta para los docentes de las carreras de ciencias exactas. Las actividades que se consideraron aquí pueden ser un punto de partida, pero se recomienda también la secuencia propuesta por Morante et al. (2022).

REFERENCIAS

Analco, A. G. y Hernández, L. A. (2020). Comprensión del concepto de límite de una función en estudiantes de Actuaría, Física y Matemáticas. En F. Macías y D. Herrera (Eds.), *Matemáticas y sus Aplicaciones*, *15*, 51-73. Editorial BUAP.

Arnon, I., Cotrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory, A framework for research and curriculum development in Mathematics Education*. Springer. https://doi-org.proxydgb.buap.mx/10.1007/s40753-015-0015-9

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. y Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 399-431. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90015-8

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(2), 189-209.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Kluwer Academic Press.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 167-192.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. En L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 160-202). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3178-3_9

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A. y Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 1. *Educational studies in mathematics*, *58*(3), 335-359.
https://doi.org/10.1007/s10649-005-2531-z

Dubinsky, E., Arnon, I. y Weller, K. (2013). Preservice Teachers' Understanding of the Relation Between a Fraction or Integer and its Decimal Expansion: The Case of 0.9 and 1. *Canadian Journal of science, mathematics and Technology education*, *13*(3), 232-258.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Callejo, M. L. y Moreno, M. (2015). ¿Cómo estudiantes para profesor de matemáticas comprenden el aprendizaje del límite de una función? En C. Fernández, M. Molina, N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 249-257). Universidad de Alicante.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M. y Callejo, M. L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(1), 143-162. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2291

Guerrero, J. (2020). *La reconstrucción del concepto de límite en un grupo de profesores del nivel medio superior utilizando la teoría APOE* [Tesis de maestría]. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. https://repositorioinstitucional.buap.mx/handle/20.500.12371/11388

Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the Learning of Mathematics*, *11*(3), 20-24.

Morante, J. D. (2020). *Una secuencia didáctica para la construcción de la definición formal del límite de una función basada en teoría APOE* [Tesis de maestría]. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. https://www.fcfm.buap.mx/posgrados/assets/docs/catalogotesis/mem/2020/JoseDavidMoranteRodriguez.pdf

Morante, J. D., Hernández, L. A. y Ruiz, H. (2022). Contribuyendo a la transición de la concepción dinámica a la concepción métrica del límite de una función de una variable real en estudiantes de ingeniería. *Educación Matemática*, *34*(1), 249-279. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol34/1/09_REM_34-1.pdf

Pérez, A. (2019). *Implementación de una secuencia didáctica para el concepto límite de una función basada en la teoría APOE* [Tesis de maestría]. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. https://www.fcfm.buap.mx/posgrados/assets/docs/catalogo-tesis/mem/2019/AntonioPerezGonzalez.pdf

Pons, J. T. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto* [Tesis doctoral]. Universidad de Alicante.

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435-445). SEIEM.

Roa-Fuentes, S. (2012). *El infinito: Un análisis cognitivo de niños y jóvenes talento en matemáticas* [Tesis doctoral]. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational studies in Mathematics*, *18*(4), 371-397.
https://doi.org/10.1007/BF00240986

Swinyard, C. y Larsen, S. (2012). Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(4), 465-493.
https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.4.0465

Tall, D. (1992). *Student's Difficulties in Calculus*. Plenary presentation in working Group 3 (pp. 1-8). ICME.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.
https://doi.org/10.1007/BF00305619

Trigueros, M. y Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(1), 3-19.
https://doi.org/10.1007/s10649-009-9201-5

Villabona Millán, D. P. y Roa Fuentes, S. (2016). Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE. *Educación matemática*, *28*(2), 119-150. www.scielo.org.mx/pdf/ed/v28n2/1665-5826-ed-28-02-00119.pdf

Villabona, D., Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2022). Concepciones dinámicas y estáticas del infinito: procesos continuos y sus totalidades. *Enseñanza de las Ciencias*, *40*(1), 179-197.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3277

Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(3), 325-338. https://ensciencias.uab.cat/article/view/v29-n3-valls-pons-llinares

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 219-236.
https://doi.org/10.5951/jresematheduc.22.3.0219

Dynamic Conception of the Limit of a Function from an APOS and Semiotic Registers Perspective

Lidia Aurora Hernández Rebollar, María Trigueros Gaisman, Honorina Ruiz Estrada, Estela Juárez Ruiz
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
lidia.hernandez@correo.buap.mx, mtriguerosg@gmail.com, hruizestrada@gmail.com, estela.juarez@correo.buap.mx

Cottrill and collaborators' genetic decomposition (GD) model for constructing the notion of limit of a real valued is a general model. It does not question the possibility that constructions may differ between different representation registers. This research study aims to focus on students work with limits while using different representation registers, as well as to refine Cottrill and collaborators' GD for the dynamic conception limit of a real valued function by incorporating constructions needed at different representation registers. The study considered the results obtained in previous research studies where activities designed with APOS theory were included. More particularly, responses given by students in Analco & Hernández (2020) provided a set of activities related to the limit of real valued functions. Results of this new analysis put forward the need of making constructions in each semiotic register and the inclusion of the infinite's totality and object structures in a refinement of the GD for the dynamic conception of the limit of a function.

As an example, it was found that the process resulting from the coordination of a process constructed in the function's range and in its domain was favored when information in a numerical register was used, as well as when coordinating the algebraic and the numerical registers, but not in the graphic register.

Regarding the construction of the totality of the infinity in the construction of a limit, it was observed that most students were able to mention the limit existence in the numerical register while justifying it as: «The limit of a function when x approaches 3 is 15, since when x tends to 3 both limits, from the left and from the right, $f(x)$ approaches 15». This was considered as an indication that students could be conceiving the finite process as completed and that they may consider the limit in its dynamic conception as an object. However, the results were not conclusive in this respect.

As a result of this study a refined GD for the limit of a real valued function was proposed. In this refined GD, the mental structures that a student would need to construct on each semiotic register –numeric, algebraic, graphical and verbal– are introduced. Furthermore, the interiorization into a process for each pair of those registers and their coordination in a new process is proposed. We denominated this process *the process of the limit's dynamic conception*. When the student can bear in mind this process as finished and is able to explain that $\lim_{x \to a} f(x) = L$ regardless of the semiotic register, we consider that the infinitum totality in the dynamic conception of the limit has been constructed independently of the semiotic register. Finally, through actions on the dynamic limit, and from evidence about the totalized infinity, the student encapsulates the dynamic conception of limit as an object and can perform actions on it, for example, applying its properties.

The description presented in the former paragraph is a summary of the GD proposed in this article and a contribution of this study to the literature on the limits of real valued functions. Another important contribution is the didactic suggestions to further foster the construction of this concept derived from the theoretical analysis conducted, which can be summarized in terms of the need to design activities to promote the constructions described in the refined GD in each semiotic register and the need to promote the coordination of the processes constructed in each semiotic register.

This is a theoretical proposal delving in the analysis of the construction of the limit of a real valued function in its dynamic conception. It pretends to be useful both to teachers and researchers working at high schools and universities.