ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 41-1 (2023), 149-173
Innovaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5835
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Desarrollo del pensamiento algebraico a través de la justificación en educación primaria

Development of Algebraic Thinking Through Justification in Elementary Education

Eder Pinto
Universidad de O`Higgins, Instituto de Ciencias de la Educación, Rancagua, Chile
eder.pinto@uoh.cl

Cristina Ayala-Altamirano
Universidad de Málaga, departamento de Didáctica de la Matemática, Ciencias Sociales y Ciencias Experimentales, Málaga, España
cristina.ayala@uma.es

Marta Molina
Universidad de Salamanca, departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, Ávila, España
martamolina@usal.es

María C. Cañadas
Universidad de Granada, departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Granada, España
mconsu@ugr.es

RESUMEN • El objetivo de este trabajo es describir una propuesta de enseñanza que promueva el pensamiento algebraico a través de la expresión y justificación de ideas matemáticas al resolver tareas relacionadas con tres enfoques distintos del pensamiento algebraico. Diseñamos un experimento de enseñanza implementado durante la pandemia de la COVID-19 en Chile. Analizamos las discusiones orales y las producciones escritas de niños de cuarto de primaria (9-10 años). Los resultados muestran que los niños expresaron y justificaron ideas algebraicas cada vez más sofisticadas. Es decir, adoptaron paulatinamente un lenguaje matemático más preciso y abstracto. Concluimos que esta modalidad de trabajo, en la cual se destaca el carácter algebraico de la aritmética a través de diversas instancias de discusión, es un aporte para los docentes, al guiarlos en abordar los desafíos de enseñanza actuales.

PALABRAS CLAVES: Conjetura; Educación primaria; Generalización; Justificación; Pensamiento algebraico.

ABSTRACT • The aim of this paper is to describe a teaching proposal that promotes algebraic thinking through the expression and justification of mathematical ideas when solving tasks related to three different approaches to algebraic thinking. We designed a classroom teaching experiment implemented during the COVID pandemic in Chile. We analyze the oral discussions and the written productions of children in fourth grade (9-10 years old). The results show that the children expressed and justified increasingly sophisticated algebraic ideas. That is, they gradually adopted a more precise and abstract mathematical language. We conclude that this modality of work, in which the algebraic character of arithmetic is highlighted through various instances of discussion, is a contribution for teachers, by guiding them in addressing current teaching challenges.

KEYWORDS: Conjecture; Elementary education; Generalization; Justification; Algebraic thinking.

Recepción: noviembre 2022 • Aceptación: enero 2023 • Publicación: marzo 2023

Pinto, E., Ayala-Altamirano, C., Molina, M. y Cañadas, M. C. (2023). Desarrollo del pensamiento algebraico a través de la justificación en educación primaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *41*(1), 149-173.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5835

INTRODUCCIÓN

Los currículos de diferentes países han introducido, desde hace varios años, el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros cursos (Pincheira y Alsina, 2021). Recientemente, el currículo español ha introducido la noción de «sentido algebraico», la cual involucra «los saberes relacionados con el reconocimiento de patrones y las relaciones entre variables, la expresión de regularidades o la modelización de situaciones con expresiones algebraicas» (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2022, p. 93). Dichos saberes se reconocen como elementos que forman parte del pensamiento algebraico (Kaput, 2008). Además, un creciente número de investigaciones han reportado cómo niños de 4 a 12 años interactúan con contenidos algebraicos (por ejemplo, Blanton et al., 2022; Cetina-Vázquez y Cabañas-Sánchez, 2022; Morales et al., 2018; Pinto y Cañadas, 2021; Radford, 2021). Sin embargo, aún quedan desafíos respecto a cómo introducir el pensamiento algebraico en educación primaria.

Las experiencias de comunicación y representación para dar significado a las ideas matemáticas han cobrado interés en el desarrollo del pensamiento algebraico (por ejemplo, Ayala-Altamirano y Molina, 2021; Kaput, 2008; Rusell et al., 2017; Stephens et al., 2017) y constituyen una línea abierta en la investigación sobre pensamiento algebraico (Kieran, 2022). Si bien la manera de introducir el álgebra en la escuela varía según el país, existe un interés común en que los niños construyan justificaciones cada vez más sofisticadas para autoconvencerse y convencer a otros sobre las regularidades encontradas (por ejemplo, Carpenter et al., 2003; Lannin et al., 2011; Russell et al., 2017). En el contexto del pensamiento algebraico, la justificación permite a los niños refinar y expresar con mayor claridad sus ideas matemáticas generales (Stephens et al., 2017) y ayuda al profesorado a tomar decisiones pedagógicas bien informadas (Ingram et al., 2019), a partir de lo que expresan los niños (Morgan et al., 2014).

Uno de los desafíos de la educación del siglo XXI, destacado en las orientaciones del currículo español, es implementar en el aula metodologías activas que permitan dinamizar la actividad mediante el intercambio de ideas, la elaboración de argumentos, la investigación y la reflexión grupal (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2022). Considerando esto, en este trabajo presentamos el diseño instruccional de una escuela de verano (escuela, en adelante). La escuela es una actividad que se implementa durante períodos de vacaciones escolares y a la cual asisten niños de 9 a 10 años que tienen interés en participar. La escuela que presentamos aquí tenía por propósito trabajar durante dos semanas la expresión y justificación de ideas matemáticas generales, en el contexto del álgebra escolar.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Concebimos el pensamiento algebraico como un tipo de pensamiento matemático que se refiere a cantidades indeterminadas (incógnitas, variables, parámetros o números generalizados), y trata dichas cantidades de forma analítica, es decir, aunque las cantidades sean desconocidas, se suman, restan, multiplican o dividen como si fueran conocidas (Radford, 2018). Al pensar algebraicamente, se razona sobre la generalidad, se percibe una estructura algebraica a partir del estudio de relaciones en las operaciones y se estudian los cambios entre las cantidades involucradas (Kieran, 2004).

Prácticas esenciales y enfoques al pensamiento algebraico

El pensamiento algebraico puede entenderse a través de cuatro prácticas esenciales: (a) generalizar; (b) representar; (c) justificar; y (d) razonar con estructuras y relaciones matemáticas (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008). La *generalización* está en el centro del pensamiento algebraico y se puede interpretar como la acción de reconocer que algunos atributos de la situación matemática pueden cambiar, mientras que otros permanecen invariables (Mason, 2017). Atender a la generalización en las situaciones propuestas permite que los niños se alejen de las particularidades asociadas al cálculo aritmético y puedan identificar la estructura y las relaciones matemáticas involucradas (Blanton et al., 2011).

Al *representar*, los niños pueden emplear distintos medios para expresar sus ideas matemáticas generales, algunos convencionales y otros no, tales como los gestos, el ritmo al hablar y el lenguaje natural (Radford, 2018). Es importante mencionar que el pensamiento algebraico puede tener lugar sin que se haga uso de simbolismo algebraico (Carraher y Schliemann, 2007). Es por esto por lo que la expresión de la generalización tendrá distintos grados de sofisticación según las representaciones empleadas.

La práctica de *razonar* involucra tratar las generalizaciones como objetos en sí mismos (Blanton et al., 2018). Es decir, implica que los niños empleen las generalizaciones en otras situaciones matemáticas. La *justificación* la describiremos en el siguiente apartado.

Estas cuatro prácticas deben estar presentes en la actividad algebraica, independientemente del enfoque del álgebra escolar que se considere. En este trabajo distinguimos tres de ellos:

1. *Aritmética generalizada*. Las operaciones aritméticas se usan como contenido para desarrollar pensamiento algebraico, y se focalizan en sus propiedades. El foco está en notar regularidades en las operaciones aritméticas que puedan ser generalizadas más allá de números específicos (Stephens et al., 2017).
2. *Equivalencia, expresiones, ecuaciones e inecuaciones*. Se busca desarrollar una comprensión relacional del signo igual, así como razonar con expresiones, establecer la equivalencia entre distintas expresiones en términos generales y plantear y resolver ecuaciones e inecuaciones (Blanton et al., 2018). Se busca fomentar el pensamiento relacional, lo que implica considerar las expresiones desde una perspectiva estructural, en lugar de como procesos que se deben seguir paso a paso (Carpenter et al., 2003; Molina, 2009).
3. *Funciones (pensamiento funcional)*. Se centra en la generalización y expresión de la relación entre cantidades que varían de forma conjunta (Blanton et al., 2011). Específicamente, la función, la relación entre cantidades y la variación conjunta entre las cantidades involucradas constituyen los elementos centrales para desarrollar el pensamiento algebraico en los primeros cursos (Cañadas y Molina, 2016, p. 210).

La justificación en educación primaria

De manera general, la justificación matemática es entendida como un proceso de interacción social que ocurre en el aula y que favorece que los niños desarrollen su comprensión y conocimiento del contenido, así como constituye una herramienta para acceder a varias formas de razonamiento matemático (Thanheiser y Sugimoto, 2022). La justificación ayuda a determinar y explicar la verdad de una conjetura o afirmación (Blanton et al., 2011). Lo anterior favorece una mejor comprensión del problema, su estructura y relaciones. Desde nuestra perspectiva, los argumentos que forman parte del proceso de justificación se construyen a partir de los conocimientos compartidos por la comunidad (Simon y Blume, 1996), es decir, se basan en ideas, definiciones y propiedades matemáticas que están al alcance conceptual de los niños.

En el contexto del pensamiento algebraico, Russell et al. (2017) han desarrollado un modelo de enseñanza que busca apoyar a los profesores en el desarrollo de argumentos matemáticos. Este modelo contempla cinco fases: (a) notar un patrón o regularidad; (b) escribir una conjetura basada en la regularidad notada; (c) investigar a través de representaciones la validez de la conjetura; (d) construir un argumento matemático sobre el por qué la regularidad ocurre; y (e) comparar qué ocurre con las conjeturas al trabajar con otras operaciones aritméticas, considerando un conjunto de problemas, ecuaciones o expresiones similares a las tratadas anteriormente.

METODOLOGÍA

La escuela es una actividad que se realiza con niños de 9 a 10 años durante las vacaciones de verano y el foco estuvo en el fomento y desarrollo del pensamiento algebraico en niños de estas edades. Su objetivo fue promover que los niños expresaran y justificaran las ideas matemáticas generales encontradas al trabajar con diferentes contenidos de carácter algebraico. Esta actividad tuvo lugar durante las primeras dos semanas de enero (verano en Chile). Dado el contexto sanitario provocado por la pandemia de la COVID-19, se desarrolló de manera virtual. Los niños se conectaron desde sus hogares a través de diferentes dispositivos: móviles, tabletas u ordenadores. Adicionalmente, cada niño empleó materiales físicos que le fueron facilitados: una pizarra con marcadores de diferentes colores, una carpeta para registrar sus hallazgos en hojas de trabajos y materiales manipulativos (figuras de papel que representaban sobres, cartas, mesas y personas).

Participantes

Veintiún niños, de entre 9 y 10 años, asistieron a las sesiones. El mes anterior habían acabado 4.º de Primaria, curso que fue desarrollado completamente de manera virtual. Los niños pertenecían a una fundación educacional que atiende a niños y jóvenes de sectores de escasos recursos.

En cuanto a sus conocimientos previos, y debido a la situación sanitaria del país, durante gran parte del curso los niños trabajaron los objetivos de aprendizaje que se refieren al eje de números y operaciones. En lo que respecta al eje de patrones y álgebra, los niños trabajaron exclusivamente con patrones numéricos en tablas que involucraban una operación. En el curso anterior (3.º de Primaria), resolvieron ecuaciones de un paso que involucraban adiciones y sustracciones, empleando estrategias como ensayo y error y utilizando la operación inversa. Las representaciones matemáticas que solían usar son las simbólico-numéricas y el énfasis de las clases estaba centrado en fomentar la fluidez en el cálculo.

Los niños fueron seleccionados con ayuda de sus profesores habituales de Matemática a partir de tres criterios: (a) disposición a trabajar, dado que nos interesaba contar con niños que quisieran participar voluntariamente en las actividades; (b) diferentes intereses, ritmos de aprendizaje y calificaciones en la asignatura de Matemática; y (c) paridad de género. Esto se tradujo en que participaron 10 niñas y 11 niños.

Diseño general

El diseño de la Escuela contempló un trabajo colaborativo que involucró la participación de los profesores habituales de Matemática de los niños y de los profesores-investigadores doctores en Didáctica de la Matemática de Chile y España. Estos últimos llevan años trabajando en el pensamiento algebraico de educación primaria (www.pensamientoalgebraico.es). En el diseño de la escuela se mantuvieron cuatro reuniones entre ambos grupos de profesores para revisar conjuntamente las tareas diseñadas por los investigadores y que los profesores habituales juzgaran su adecuación desde el punto de vista de los conocimientos y experiencia previa de los niños. En la implementación, los profesores-investigaciones guiaron las sesiones y los docentes habituales cumplieron un rol observador y tras cada sesión podían comentar sus impresiones con los profesores-investigadores.

Organizamos la escuela en 10 sesiones, tal como se muestra en la figura 1.

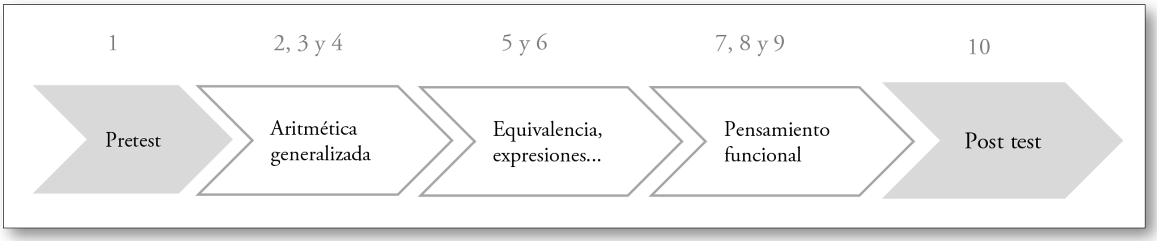


Fig. 1. Organización de las sesiones.

En la primera y última sesión aplicamos una evaluación para recoger evidencias sobre cómo los niños expresaban y justificaban sus ideas al interactuar con contenidos algebraicos. Estas evaluaciones contemplaban tres tareas, cada una asociada a un enfoque del álgebra. En el pretest, observamos que los niños abordaron las tareas centrándose en el cálculo y la búsqueda de una respuesta numérica y única. Los elementos que mencionaban en sus justificaciones estaban en coherencia con esto, es decir, adoptaban una perspectiva aritmética empleando un vocabulario coloquial o matemáticamente impreciso. En el postest observamos un cambio en las estrategias de los niños. Teniendo en cuenta nuestra caracterización del pensamiento algebraico, la mayoría de los alumnos se refirieron a cantidades indeterminadas con distintos significados (números generalizados, incógnitas o variables), percibieron la estructura de los problemas propuestos e identificaron relaciones que expresaron de modo general de diversas formas. Con respecto a las justificaciones, consideraron los elementos algebraicos antes mencionados y el vocabulario también fue más sofisticado, ya que utilizaron las palabras que se introdujeron entre las sesiones 2 a la 9 (para más detalles, ver Pinto y Ayala-Altamirano, 2021)

Las sesiones 2 a 9 las organizamos siguiendo los enfoques del álgebra escolar previamente descritos. Comenzamos con la aritmética generalizada (sesiones 2 a 4), pues conjeturamos que los contextos matemáticos relacionados con este enfoque (propiedades de las operaciones) eran más cercanos a los niños, dadas sus experiencias matemáticas previas. Luego seguimos con el trabajo con ecuaciones (sesiones 5 a 6), dado que fue un tema que los niños habían trabajado en el año anterior. Finalmente, abordamos el trabajo con funciones (sesiones 7 a 9).

La expresión y justificación de ideas matemáticas generales fue el eje transversal de nuestra propuesta. Para su desarrollo, cada una de las sesiones 2 a 9 fueron organizadas en tres bloques, tal como se muestra en la figura 2. Una de las razones por las que seguimos esta organización fue para proporcionar distintos espacios de cooperación, confrontación y discusión de ideas y para esto nos inspiramos en las ideas de Russell et al. (2017). Otra razón fue dar oportunidad a los niños de identificar paulatinamente regularidades y generalizar. Para esto último nos basamos en las ideas de Blanton (2008) y Cañadas y Castro (2007).

Inicio de la sesión – Grupo completo (21 niños) Introducción de un problema matemático para: (a) conectar con los conocimientos previos de los niños y experiencias cotidianas; (b) introducir vocabulario matemático; y (c) brindar un contexto general a la actividad del bloque 1.
Bloque 1. Búsqueda de regularidades y desarrollo de una conjetura – Grupos pequeños (4-5 niños) Los niños individualmente notan regularidades en el problema presentado. Luego, en grupos expresan una conjetura sobre el problema.
Receso 1
Bloque 2. Articular una afirmación general a través de diferentes representaciones – Grupo completo (21 niños) Basados en las conjeturas trabajadas en el grupo pequeño, los niños investigan la veracidad de dichas conjeturas a través de diferentes representaciones matemáticas. Luego intentan explicar de modo general, o refiriéndose a cantidades indeterminadas, por qué la conjetura es verdadera.
Receso 2
Bloque 3. Extender lo aprendido a otros casos – Grupos pequeños (10-11 niños por grupo) Con base en los hallazgos anteriores, los niños transfieren lo discutido a otros casos, con la posibilidad de afinar o refinar los hallazgos obtenidos.
Cierre de la sesión

Fig. 2. Estructura de cada sesión.

Cada uno de los bloques tuvo una extensión de 40-45 minutos, aproximadamente. Con la finalidad de atender a la diversidad, el docente agrupaba a los niños de diferentes formas para asegurar diversos tipos de interacciones entre los participantes durante la sesión. En lo que respecta a los grupos pequeños (bloques 1 y 3), estos favorecieron que todos expresaran sus ideas.

El rol de los profesores-investigadores fue trabajar en colaboración con los niños y promover la discusión. Para esto, el profesor realizó preguntas, introdujo vocabulario nuevo, lo relacionó con las ideas de los niños y promovió distintas formas de representación de las ideas matemáticas (nuevas o propuestas por los niños). Se buscó que en el transcurso del tiempo los niños fueran cada vez más autónomos en la resolución de diferentes situaciones y en sus respectivas discusiones.

Diseño de las sesiones

En esta sección describimos las actividades relacionadas con cada uno de los enfoques mencionados.

Sesiones de aritmética generalizada

En las sesiones 2, 3 y 4 buscamos que los niños: (a) expresaran, a través de diferentes representaciones, las regularidades encontradas al trabajar con diferentes tipos de relaciones y propiedades numéricas; y (b) construyeran justificaciones sobre la veracidad de sus conjeturas. Para conseguir lo anterior, los contextos alentaban a evitar los cálculos y, en cambio, buscaran regularidades a través de diferentes representaciones.

En la sesión 2, la actividad consistía en argumentar qué sucedía al sumar números pares e impares. Planteamos esta cuestión a partir de un juego inicial: «Yo diré un número y ustedes dirán otro número. Si sumamos los números y el resultado es par, yo gano un punto, pero si es impar, ustedes ganan el punto». Los niños debían desarrollar y comunicar estrategias para ganar, a través del uso de diferentes tipos de representaciones, tales como: (a) manipulativas, como las tarjetas par e impar, (b) simbólico-numérica, mediante cálculos aritméticos y (c) lenguaje natural, tanto oral como escrito. En esa sesión se introdujo vocabulario matemático específico (número par, número impar, sumandos, sumas y conjetura), que contribuyó a una mayor sofisticación en los argumentos.

En las sesiones 3 y 4 discutimos con los niños sobre el significado del signo igual a partir del análisis de diferentes sentencias numéricas y algebraicas (ver figura 3).

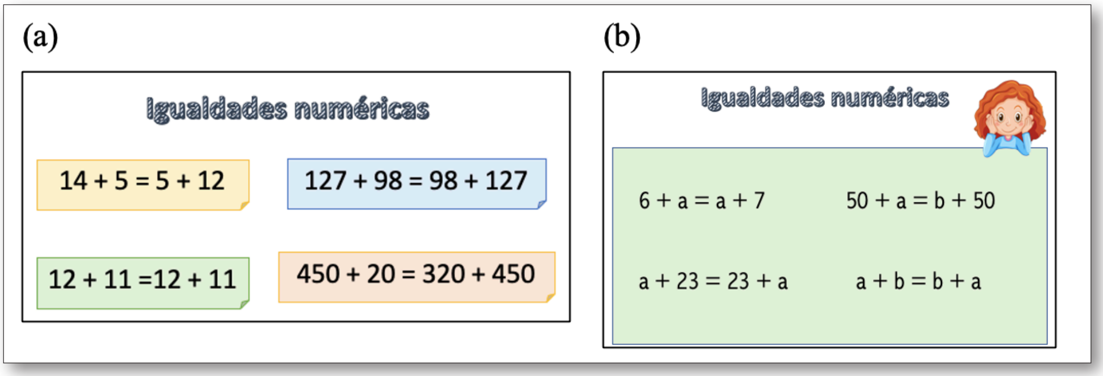


Fig. 3. Ejemplos de sentencias numéricas empleadas en las sesiones tercera (a) y cuarta (b).

Las propiedades aritméticas de la adición involucradas en ambas sesiones fueron las mismas (conmutativa, compensación, asociativa y complementaria de la suma y la resta). En estas sesiones introdujimos vocabulario específico y precisamos el significado de algunos conceptos matemáticos, tales como: sumando y suma, igualdad, propiedades conmutativa y asociativa de la adición y sentencias numéricas. Las propiedades conmutativa y asociativa fueron abordadas mediante la búsqueda de relaciones numéricas, haciendo explícita la presencia de cada propiedad. La diferencia entre ambas sesiones fue el tipo de representación matemática trabajada. En la sesión 3 abordamos las sentencias numéricas solo con representaciones simbólico-numéricas, mientras que en la sesión 4 se introdujo, por primera vez, la letra como una representación para generalizar las propiedades aritméticas (por ejemplo, $a + 23 = 23 + a$). En este caso, la letra fue introducida explicando que se empleaba para representar un número natural cualquiera. Para más información sobre estas sesiones, ver Embid (2022).

Sesiones de equivalencia, expresiones y ecuaciones

En las sesiones 5 y 6 nos propusimos que los niños: (a) representaran y resolvieran ecuaciones mediante diferentes estrategias, (b) emplearan la letra como representación de una incógnita y (c) proporcionaran evidencias que validaran explicaciones dadas. Durante esas sesiones introdujimos las ideas de igualdad, ecuación, historias matemáticas[1] y letra como incógnita.

En cada una de las sesiones se trabajó con diferentes problemas aritméticos de estructura verbal, los cuales fueron representados con lenguaje natural y los niños debían traducirlos y representarlos con lenguaje matemático. En primera instancia, las cantidades indeterminadas podían ser representadas como los niños consideraran pertinente, y luego se discutía sobre la posibilidad de representarlas con letras. En la figura 4 presentamos el problema trabajado en la quinta sesión: cartas y sobres (Jansen y Radford, 2015).

1. Corresponde a la contextualización de una expresión simbólica empleando lenguaje natural (escrito o hablado). Así, por ejemplo, «María tiene 25 lápices y pierde algunos. Al llegar a casa, solo tiene 15» sería una historia matemática asociada a la expresión $25 - x = 15$.

Silvia y Carlos tienen algunas cartas. Carlos tiene 3 cartas y Silvia tiene 2 cartas. Su madre prepara tres sobres con el mismo número de cartas en cada uno. Le da 1 sobre a Carlos y 2 a Silvia. Ahora los dos niños tienen la misma cantidad de cartas. ¿Cuántas cartas hay en un sobre?

Fig. 4. El problema de las cartas y los sobres.

En la figura 5 mostramos los problemas utilizados en la sesión 6. El primer problema, el de los lápices, involucra una incógnita y tiene una solución. El problema de las manzanas tiene asociadas dos incógnitas, cuyos valores no se pueden determinar dado que no hay datos suficientes en el enunciado. Más información sobre el desarrollo de esta sesión es discutida en Ayala-Altamirano et al. (2022).

a) Compré una caja con lápices de colores. Como en mi casa tenía 15 lápices, ahora tengo 20 en total.
b) Tengo una canasta con manzanas. En el interior de la canasta hay 20 manzanas verdes y otras rojas.

Fig. 5. El problema de los lápices (a) y el problema de las manzanas (b).

Sesiones de funciones

En las sesiones 7, 8 y 9 los problemas presentados involucraron diferentes tipos de funciones lineales, todos ellos en el contexto de una fiesta de cumpleaños. Nuestro interés era que los niños: (a) identificaran las regularidades presentes en las relaciones entre variables; y (b) desarrollaran una justificación de por qué la regla de función representa con precisión la situación del problema.

En la sesión 7 presentamos el problema de la silla musical (ver figura 6), que involucra la función $y = x - 1$. Los niños establecieron conjeturas y predicciones sobre cuántas sillas se necesitarían cuando participan 10, 8, 501, 1000, x y *cualquier* número de niños. El propósito fue concluir que el número de sillas dependería del número de jugadores: se colocará *siempre* una silla menos que el número de personas que está jugando.

Durante una fiesta de cumpleaños, los asistentes participarán del juego «la silla musical». Este juego trata de bailar alrededor de unas sillas y buscar un asiento cuando la música se detenga. Los jugadores deben estar muy atentos para no perder.

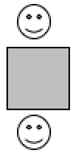
Por ejemplo:

– Cuando hay 2 jugadores, se debe colocar 1 silla.
– Cuando hay 3 jugadores, se deben colocar 2 sillas.
– Cuando hay 5 jugadores, se deben colocar 4 sillas.

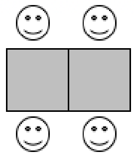
Fig. 6. Problema de la silla musical.

En la sesión 8 presentamos una adaptación del problema de las mesas y personas de Carraher y Schliemann (2007). Este problema involucra la función $y = 2x$ (ver figura 7).

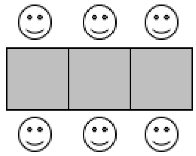
Francisco está celebrando su cumpleaños. Él dispone de mesas cuadradas y quiere asegurarse de tener un asiento para todos.
Francisco puede sentar a dos personas en una mesa, de la siguiente manera:



Si coloca otra mesa, puede sentar a 4 personas



Si vuelve a colocar otra mesa, puede sentar a 6 personas



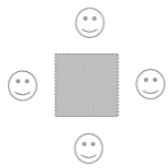
¿Cuántas personas se podrán sentar en 4, 6, 10, 8, 20, 50 y 100 mesas?

Fig. 7. Problema de las mesas y las personas (parte 1).

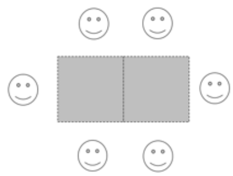
Diferentes tipos de representaciones fueron presentadas para explorar las regularidades involucradas: (a) materiales manipulativos, los cuales representaban las mesas y personas; (b) tablas, para que los niños organizaran los valores de las variables; (c) representaciones simbólico-numéricas, en las cuales los cálculos podrían ayudar a encontrar regularidades; y (d) representaciones simbólico-algebraicas, donde se presentaron evidencias del uso de la letra.

Finalmente, en la sesión 9 presentamos la segunda parte del problema de las mesas y las personas, en el cual la función involucrada es $y = 2x + 2$ (ver figura 8). Durante la resolución de este problema, el interés estaba puesto en que todos emplearan, en algún momento, la letra para relacionar las variables involucradas en la situación (mesas y personas).

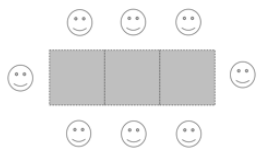
Ahora Francisco ha decidido cambiar la organización de las mesas y las personas.
Por ejemplo, puede sentar a cuatro personas en una mesa, de la siguiente manera:



Si coloca otra mesa, puede sentar a 6 personas:



Si vuelve a colocar otra mesa, puede sentar a 8 personas:



¿Cuántas personas se podrán sentar en 4, 6, 10, 8, 20, 50 y 100 mesas?

Fig. 8. Problema de las mesas y las personas (parte 2).

PRINCIPALES HALLAZGOS

Considerando el alcance y la extensión de este manuscrito, en esta sección describimos los principales hallazgos referidos a una sesión por cada enfoque al álgebra escolar. Presentamos la última sesión de cada enfoque, dado que en estas se pueden observar evidencias de cómo los niños interactúan y construyen justificaciones matemáticas más sofisticadas, apoyándose en diferentes tipos de representaciones. Describimos los principales hallazgos de esta sesión diferenciando los tres bloques en los que se estructuran. Para asegurar el anonimato de los niños, empleamos etiquetas que tienen la estructura A_i, donde i = 1 hasta 21.

Aritmética generalizada: el caso de las sentencias numéricas (sesión 4)

Los propósitos de la sesión fueron: (a) emplear la letra como representación de un número generalizado y (b) fomentar una visión relacional (no computacional u operacional) para construir argumentos matemáticos.

Bloque 1. Búsqueda de regularidades y desarrollo de una conjetura

Los niños, reunidos en grupos pequeños, discutieron sobre la veracidad o falsedad de diferentes igualdades numéricas (ver figura 3, en b). Al ser la primera interacción con la letra, en un principio los niños tuvieron dudas sobre el modo de emplear las letras en un contexto matemático. Estas dudas se disiparon al recordar las sentencias numéricas de la sesión anterior y explicar que las letras representaban un número desconocido cualquiera. El siguiente diálogo es un ejemplo representativo de lo que ocurrió en los diferentes grupos al afirmar que la sentencia $a + 23 = 23 + a$ es verdadera.

Profesor (P): ¿Qué te hizo pensar que esta sentencia es verdadera, A_1?
A_1: Porque si las dos *a* valen lo mismo y los dos 23 valen lo mismo. Y si se suman, darán lo mismo.
P: A_2 y A_3, ¿les suena a algo parecido esta sentencia? ¿Relacionado con lo que vimos ayer?
A_2: Sí, básicamente serían los mismos números cambiados de posición.
P: Bien. Son los mismos sumandos, pero cambiados de posición. A_3, ¿te acuerdas del nombre que tiene esta propiedad de la adición, en la cual se tienen los mismos dos sumandos, pero en diferentes posiciones?
A_3: ¡Hm! ¿Propiedad conmutativa?

En el extracto anterior se observa que los niños justificaron sus respuestas estableciendo relaciones entre sumandos que se muestran a cada lado del signo igual, sin tener que recurrir al cálculo, es decir, haciendo uso de un significado relacional del signo igual. Sobre la forma en la que interactúan con letras, los niños refirieron a estas como una cantidad indeterminada, no mencionando ningún número en particular. Además, aunque con ayuda del profesor, el extracto anterior da cuenta de que los niños relacionaron lo discutido en la clase anterior y evocaron propiedades de las operaciones (conmutativa de la adición, en este caso) para justificar la veracidad de las sentencias.

Bloque 2. Articular una afirmación general a través de diferentes representaciones

La clase completa analizó las conjeturas planteadas por cada grupo pequeño durante el bloque anterior. Así, por ejemplo, A_{17} explicó la conjetura que concluyeron en su grupo al analizar la sentencia $50 + a = b + 50$, indicando: «en ambos lados hay un 50, pero *creemos*[2] que *a* y *b* son números diferentes. Entonces, *creemos* que la sentencia es falsa». Ante esta afirmación, el grupo completo estuvo de acuerdo en indicar que la afirmación es falsa y se generó el siguiente diálogo con el resto de la clase:

P: ¡Qué interesante! A ver, A_8, explícame cómo lo pensaron con tu grupo.
A_8: Todo el grupo votó que era falsa porque nosotros dijimos que *a* y *b* no son iguales… dijimos que uno era más grande que el otro. Como la *a* va antes que la *b*…
P: Entiendo. O sea, podríamos decir que *a* y *b* son diferentes, pero no sabemos cuál es más grande que la otra, ¿cierto? Entonces, ¿por qué razón la sentencia es falsa?
A_8: A ver. Los números estaban bien en ambos lados…
P: ¿A qué te refieres?
A_8: Pues en ambos lados (del signo igual) está el 50.
P: Entiendo, y entonces ¿qué pasa con *a* y *b*?, ¿qué se les está sumando?
A_8: La *a* y la *b* no son la misma letra, y no nos iba a dar el mismo resultado, pues una (letra) era mayor que la otra. Entonces, diríamos que *a* podía valer 1 y *b* podría valer 2.
P: A ver. Entonces, A_3, ¿qué podríamos hacer para que esta sentencia sea verdadera?
A_3: Eh, yo creo que podría ser verdadera si cambiamos la *a* por una *b*, o la *b* por una *a*.

En este ejemplo, de nuevo los niños interpretan el signo igual como una relación al establecer relaciones entre los sumandos que se mostraban a cada lado del signo igual. Cuando les tocó comparar

2. La cursiva es nuestra.

las letras, ellos intentaron justificar sus razonamientos indicando que las letras son diferentes. Basándose en el orden del alfabeto le asignaron un posible valor a cada letra para justificar la falsedad de la sentencia, refiriendo a estos valores como unos valores posibles de dichas letras. Una conclusión que ellos acordaron en este bloque fue que *a* y *b* no pueden representar lo mismo pues son letras diferentes. Matemáticamente hablando, letras distintas sí podrían representar la misma cantidad. No obstante, esto no fue objeto de discusión dado que era el primer acercamiento al uso de letras.

Bloque 3. Extender lo aprendido a otros casos

Los niños propusieron sus propias sentencias numéricas clasificándolas como fáciles o difíciles. Sus compañeros tuvieron el desafío de averiguar si eran verdaderas o falsas. La tabla 1 muestra algunos ejemplos representativos.

Tabla 1.
Sentencias inventadas por los niños

Fáciles		*Difíciles*
$a+23=23+a$	$27+b+17=12+b$	$30+40+25+c=40+25+30+c$
$309+b=390+b$	$80+b=a+40+40$	$a+342+24+2+4+=x2+3343+42+4+n+e$
$16+a=86+x$	$a+14=a+10+4$	$1234+a=10000+200+40+3+a$
$a+14=a+10+4$	$107+a=50+50+7+a$	$1235+d=1000+200+30+5+d$
$a+1+35=34+8+x$	$34+a+b=5+5$	$x+1.200+145=145+1.000+200+x$
$b+32=a+31$	$x+21=20+1+x$	
$63+a=62+a$		

Tal como se observa en la tabla 2, la diferencia entre las sentencias «fáciles» y «difíciles» tiene relación con la cantidad de sumandos involucrados, así como en el ámbito numérico empleado. Resulta interesante señalar que la mayoría de las sentencias involucra una única letra (*a*, *b*, *c*, *d*, *x*). Por otra parte, observamos en las respuestas de los niños propiedades de adición, tales como la conmutativa ($a + 23 = 23 + a$) y la asociativa ($107 + a = 50 + 50 + 7 + a$).

Uno de los profesores propuso la sentencia $a + 0 = a$, que involucra otra propiedad, la del elemento neutro de la adición. La mayoría de los niños indicó que la sentencia era verdadera. El siguiente diálogo se generó entre el profesor y los niños:

P: ¿Por qué es verdadera, A_{12}?
A_{12}: El 0 no vale.
P: ¿Cómo es eso?
A_{17}: Se refiere a que el 0 no es un dígito que se pueda demostrar de una forma.
P: Entonces, si sumo 0…
A_{17}: No hace nada.
P: ¿Y alguien sabe cómo se llama esa propiedad?

Aunque los niños no conocían el nombre de la propiedad, en este extracto es posible observar que no rechazan el uso de la letra y en sus argumentos se refieren al efecto de sumar cero, una propiedad sobre la que no habían discutido previamente.

Equivalencia, expresiones y ecuaciones: problemas aritméticos verbales (sesión 6)

En esta sesión buscábamos que los niños: (a) representaran situaciones cotidianas con lenguaje matemático; y (b) proporcionaran evidencias que validaran las explicaciones dadas.

Bloque 1. Búsqueda de regularidades y desarrollo de una conjetura

Los niños representaron primero el problema de los lápices y, luego, el problema de las manzanas (ver la figura 5). Cada niño tuvo la oportunidad de presentar su respuesta y compararla con la de sus compañeros. Como se observa en la figura 9, los niños identificaron las estructuras de las situaciones y la expresaron de diversas formas. La mayoría emplearon una letra para representar la cantidad desconocida involucrada en el problema. Otros niños emplearon el signo «?» o realizaron dibujos acompañados con representaciones simbólicas.

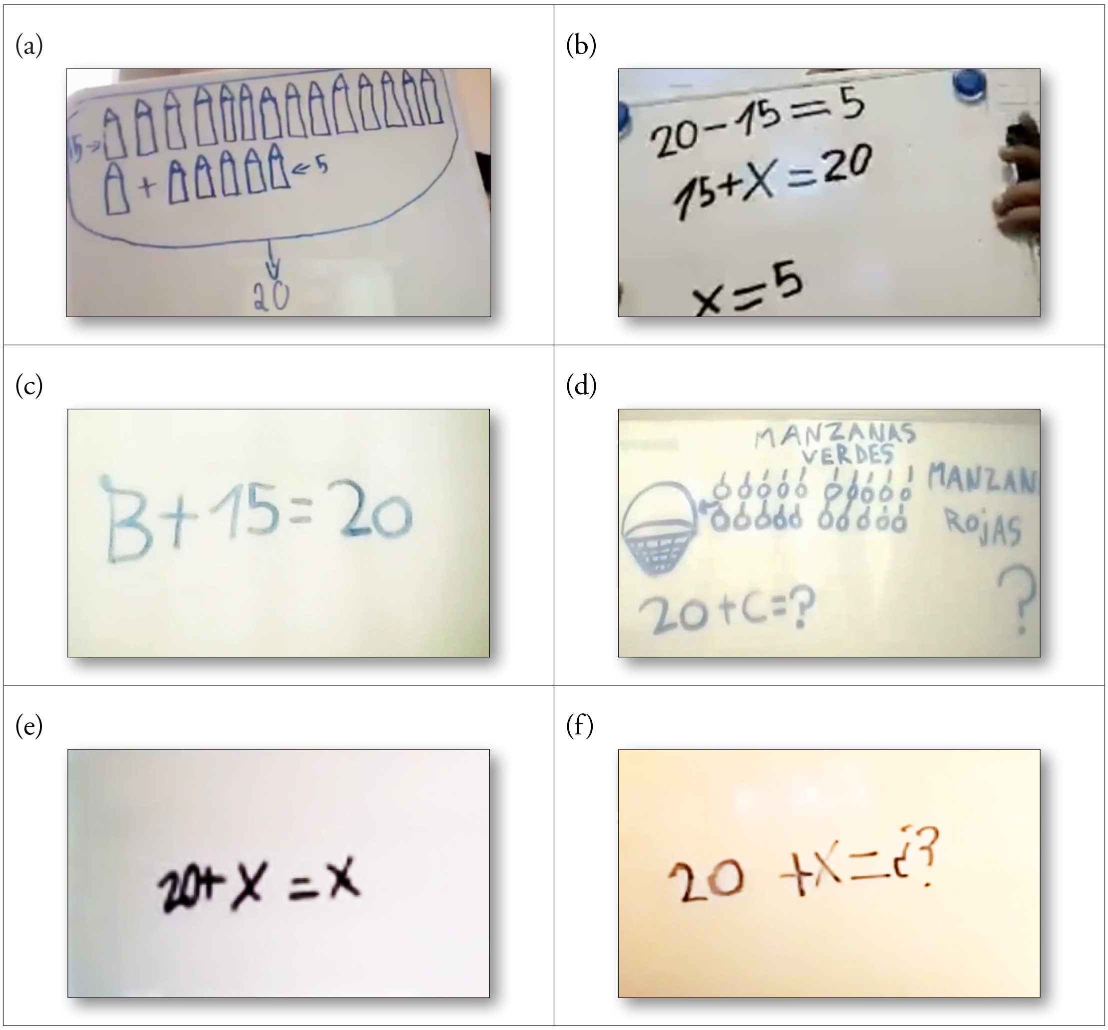


Fig. 9. Representaciones del problema de la caja de lápices en los recuadros (a), (b) y (c) y el de las manzanas, en (d), (e) y (f).

Sobre la solución de la ecuación, en el problema de los lápices los niños acordaron que la incógnita solo podía ser igual a cinco. En el caso del problema de las manzanas, al discutir sobre la solución de la ecuación en los diferentes grupos, los niños acordaron que no podrían saber cuántas manzanas había en el canasto y que, por tanto, no podían conocer el valor de las cantidades desconocidas. Así, por ejemplo, A_{12} dijo que no había suficiente información. Y A_6 dijo: «nos falta una pista. Por ejemplo, cuánto daría o cuánto fue el resultado».

Bloque 2. Articular una afirmación general a través de diferentes representaciones

Posteriormente a que los niños presentaran sus representaciones, el profesor presentó su propia representación de los problemas (ver figuras 10 y 11). Al discutir el valor de la letra *x* en el problema de los lápices (figura 10), A_2 indicó que *x* solo puede tomar el valor de 5, pues si tomara un valor diferente, el resultado cambiaría. Esto generó consenso entre los niños. Adicionalmente, una niña, A_7, indicó que $x + 15 = 20$ era lo mismo que $15 + x = 20$, dado que los sumandos se cambian de posición, tal como indica la propiedad conmutativa.

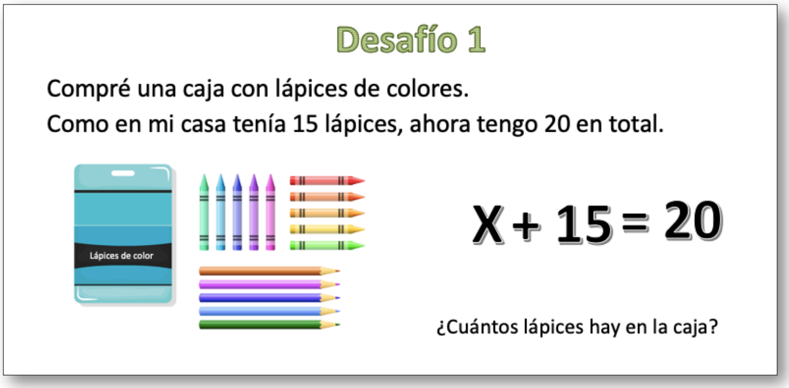


Fig. 10. Representación del profesor del problema de los lápices.

En lo que refiere al problema de las manzanas (ver figura 11), el desafío residió en la posibilidad de determinar el valor de T y S. Existió un acuerdo en la mayoría de los niños que no se podía determinar dado que «faltaba información». Los niños reconocieron que T, que representa el total de manzanas, podría ser cualquier letra. Lo mismo ocurrió con S.

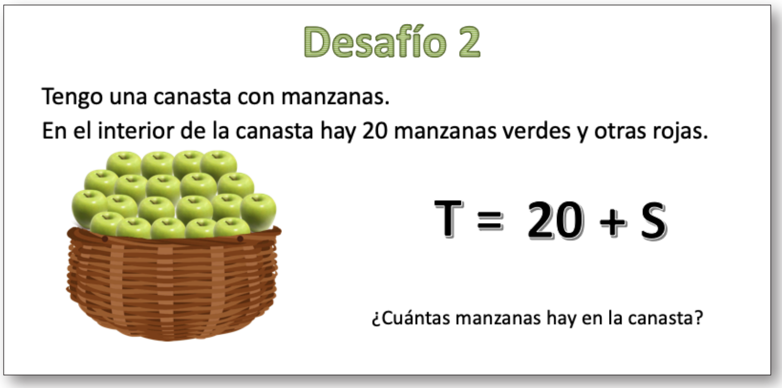


Fig. 11. Representación del profesor del problema de la canasta de manzanas.

Como una forma de contrastar ideas entre los niños, el profesor preguntó si la expresión $20 + c = c$ representa el problema, dado que había sido propuesta en uno de los grupos. El siguiente diálogo tuvo lugar entre el profesor y una niña, A_7.

P: ¿Esa expresión representa el problema de las manzanas?
A_7: No.
P: ¿Por qué?
A_7: Porque si ya tenemos la *c*, nos daría el mismo resultado que la *c*, no nos daría el resultado total…
P: ¿Cómo así? ¿podrías explicarlo de otra forma?
A_7: En vez de poner la *c* al final, debiéramos colocar otra letra.
P: ¿Cómo cuál?
A_7: Como la *a*. Puede ser cualquier letra que queramos… como la *a*, la *b*.

El extracto anterior da cuenta de un razonamiento común entre los niños: una misma letra no puede representar dos cosas diferentes (por ejemplo, número de manzanas rojas y número de manzanas total). En síntesis, al trabajar con los dos problemas, los niños identificaron que el valor que pueden tomar las letras depende de la situación y la información que se conozca. Hay situaciones en las que las letras pueden tomar un único valor (como en el problema de los lápices), mientras que otras pueden representar cualquier valor (como en el problema de las manazas).

Bloque 3. Extender lo aprendido a otros casos

En este bloque se realizó el proceso inverso, los niños inventaron una historia matemática relacionada con la ecuación $25 + u = 45$. Les dimos algunos minutos para que escribieran su problema, y luego los compartieron entre ellos y evaluaron su pertinencia. Algunos de los problemas más comunes fueron los siguientes:

- Tengo 45 lápices y 25 son de color rojo y *otros* son de color amarillo.
- Yo tengo 25 marcadores. Compré una caja y ahora tengo 45 en total. ¿Cuántos plumones tengo en la caja?
- Hay 45 personas durmiendo; 25 en camas y *algunos* en sillas.
- Sofía tiene 25 libros y Marta tiene 20 libros. ¿Cuántos libros hay en total?

La mayoría de los niños crearon historias matemáticas coherentes con la estructura mostrada de la ecuación dada. Además, interpretaron la letra *u* como una cantidad indeterminada. Por ejemplo, en el primer problema, lo indeterminado hace referencia a *otros*, mientras que, en el tercero, se hace referencia a *algunos*.

Pensamiento funcional: el problema de las mesas y las personas (sesión 9)

El propósito de esta sesión fue: (a) expresar con notación algebraica la regla que relaciona la variable independiente con la dependiente; y (b) desarrollar una justificación de por qué la regla funcional representa con precisión la situación del problema.

Bloque 1. Búsqueda de regularidades y desarrollo de una conjetura

Los niños resolvieron la segunda parte del problema de mesas y personas, en el cual la función involucrada es $y = 2x + 2$ (ver figura 8). La figura 12 muestra algunas de las respuestas de los niños, las cuales consideramos representativas del grupo.

(a) (b)

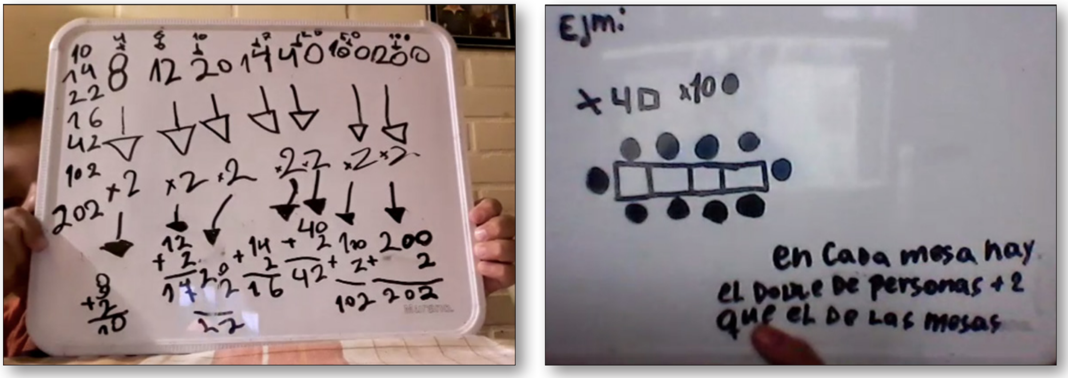
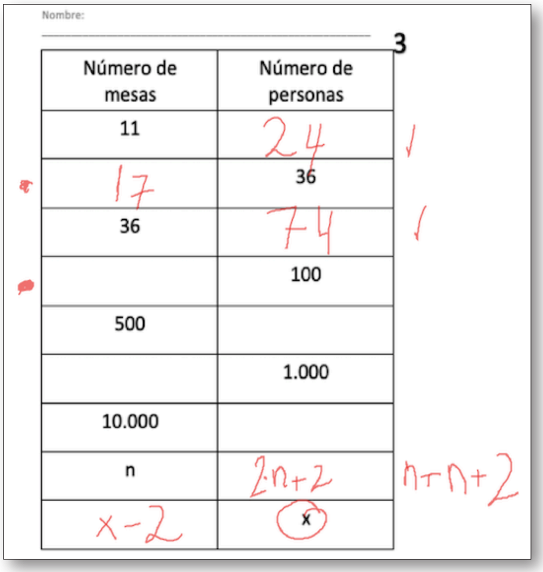


Fig. 12. Regularidades encontradas por los niños.

La mayoría de los niños encontraron regularidades haciendo referencia a los cálculos realizados (figura 12, en a), mientras que otros notaron las regularidades al analizar la configuración visual de las mesas y personas (figura 12, en b). Luego cada profesor introdujo la tabla para organizar la información y afinar las conjeturas que fueron encontrando. La figura 13 muestra la respuesta de uno de los grupos pequeños.


Nombre:

3

Número de mesas	Número de personas	
11	24	✓
17	36	
36	74	✓
	100	
500		
	1.000	
10.000		
n	2·n+2	n+n+2
x-2	x	

Fig. 13. Regularidades al organizar los datos en una tabla.

La discusión favoreció compartir las diferentes estrategias empleadas por los niños al completar la tabla. La tabla suponía abordar las relaciones para números específicos y cantidades indeterminadas mediante el uso de la letra. Además, favoreció el establecimiento de relaciones directas (dado el valor de la variable independiente, calcular el valor de la variable dependiente) e indirectas (dado el valor de la variable dependiente, calcular el valor de la variable independiente).

Bloque 2. Articular una afirmación general a través de diferentes representaciones

Al analizar y discutir las conjeturas que encontraron los niños sobre la relación entre el número de mesas y el número de personas a través de diferentes representaciones expresadas en sus pizarras (dibujos, cálculos, escritura), ellos identificaron que hay una parte que siempre se mantiene constante: las personas de los extremos. Además, identificaron que el número de personas dependía del número de mesas. Para profundizar en estas ideas, centramos la atención en las regularidades involucradas en el cálculo aritmético. Comenzamos por identificar las regularidades en los cálculos que permiten identificar la cantidad de personas para 5 y 8 mesas. La figura 14 da cuenta del análisis realizado con los niños.

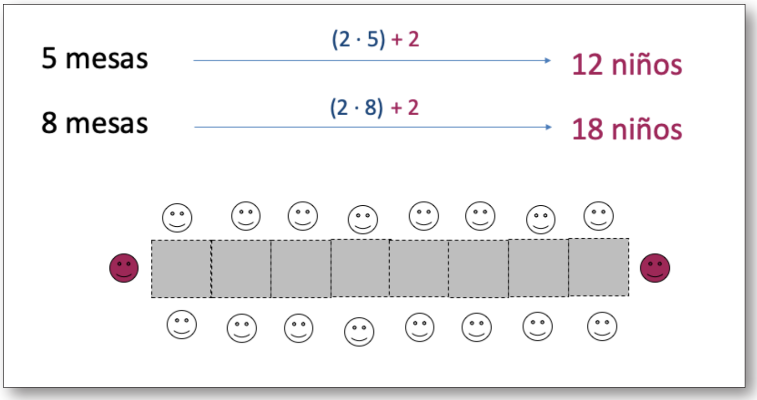


Fig. 14. Regularidades en el cálculo.

A las regularidades ya percibidas por los niños fuimos conectando sus hallazgos con las expresiones numéricas que permiten encontrar la cantidad de personas dado un número determinado de mesas: 2 × número de mesas + 2. Los niños fueron explicando el sentido de multiplicar por dos y sumar 2. De modo similar a como lo hacían en las sesiones sobre ecuaciones, se motivó a los niños a pensar si las expresiones contaban la historia del problema. Luego avanzamos con otros números para comprobar si esta regla funcionaba en otros casos hasta llegar al uso de la letra. Para ello, les pedimos que representaran con una letra la regla que relaciona el número de mesas y el número de personas. La figura 15 da cuenta de algunas de las diferentes producciones de los niños.

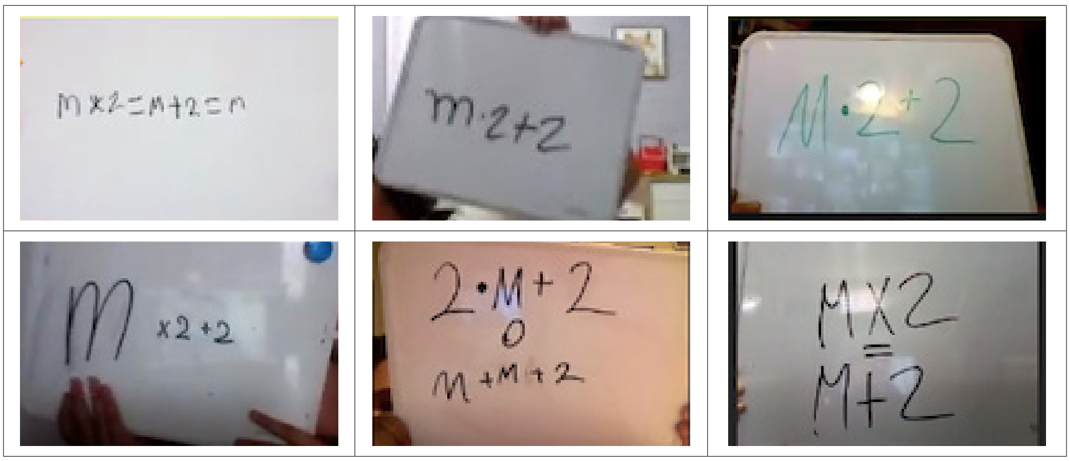


Fig. 15. Reglas de los niños empleando notación algebraica.

Las reglas encontradas por los niños les permitieron comprobar las respuestas que dieron al inicio de la clase. Esto favoreció que fueran precisando una regla que les ayude a encontrar la cantidad de personas (*x*) dada cualquier cantidad de mesas (*m*), tal como se muestra en la figura 16.

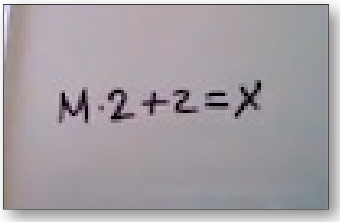


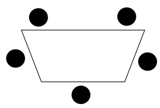
Fig. 16. Reglas que permiten encontrar el número de personas para cualquier cantidad de personas.

Bloque 3. Extender lo aprendido a otros casos

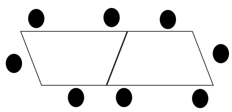
A los niños les presentamos un nuevo problema, que involucraba la función $y = 3x + 2$ y fue respondido individualmente para, luego, compartir los hallazgos. En la figura 17 presentamos el problema.

Javiera celebrará su cumpleaños. Ella ha conseguido algunas mesas y ha decidido sentar a sus amigos de la siguiente forma:

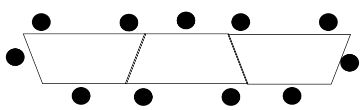
Si tiene 1 mesa, 5 niños podrían sentarse:



Si tiene 2 mesas, 8 niños podrían sentarse:



Si tiene 3 mesas, 11 niños podrían sentarse:



– ¿Cuántas personas se sentarán en 5, 10, 60 y 100 mesas?
– ¿Cuál será la regla que relaciona cualquier número de mesas y el número de personas?

Fig. 17. Problema de las mesas de Javiera.

El problema de las mesas de Javiera (ver figura 17) involucra las mismas variables tratadas en los problemas anteriores, a excepción de la disposición geométrica de las mesas y las personas. A través de este problema pretendíamos que los niños extendieran las regularidades encontradas en los problemas anteriores (relaciones entre las variables), con la finalidad de expresar reglas usando notación algebraica. Inicialmente, la discusión se centró en explorar las regularidades dadas en los dibujos de las mesas y personas. Muy pocos niños encontraron regularidades. Por ejemplo, A_{15} indicó que «en las mesas siempre hay dos personas frente a una». Otro niño, A_3, indicó que «la regularidad es un patrón de 3, ya que va de 3 en 3. O sea, en cada mesa se agrega de 3 en 3». Esta regla ayudó a los niños a visualizar y comprobar, mediante diferentes casos particulares, las regularidades encontradas en el problema.

Luego se les pidió a los niños que explicaran cuál era la regla que relacionaba el número de mesas y personas usando letras. Un niño, A_8, escribió en su pizarra la regla que había encontrado, tal como se muestra en la figura 18.

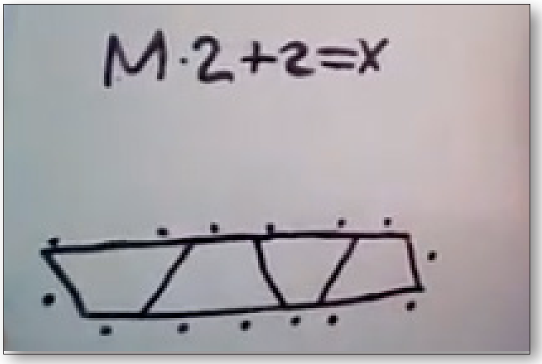


Fig. 18. Respuesta de A_8.

A partir de la respuesta de A_8, el resto del grupo analizó la expresión y mostró su desacuerdo en que esa fuera la regla, pues «al probar con otros números, no da». Ante esta respuesta, se produce el siguiente diálogo entre el profesor y los niños.

P: A ver, pero ¿cuál sería la regla que relaciona el número de mesas con el número de personas?
A_3: Yo antes multiplicaba por dos y sumaba dos. Ahora hay que multiplicar por 3 y sumar 2
P: ¿Por qué?
A_3: Por ejemplo, probé con cuatro mesas. Lo comprobé en el dibujo. Multiplico tres por cuatro y le sumo dos. Y me da catorce.
P: ¿Estás pensando en esto, A_3? (ver figura 19)
A_3: Sí.
P: Vale. ¿Y qué tal si todos probamos esta regla con 5 mesas?

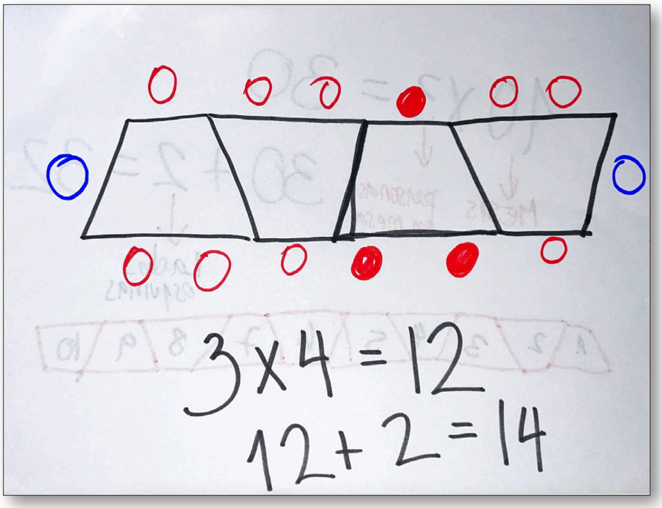


Fig. 19. Respuesta de A_3 escrita por profesor.

La regularidad anterior, basada en la representación pictórica, favoreció que los niños dieran sentido a las operaciones aritméticas involucradas en la situación (multiplicar por tres y sumar dos).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este artículo describimos el diseño y desarrollo de una escuela de verano en la cual niños de 9 a 10 años expresaron y justificaron ideas matemáticas generales al trabajar con diferentes contenidos algebraicos.

Los actuales currículos de Matemática promueven que los docentes a creen instancias de discusión e intercambio de ideas (por ejemplo, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2022), que, según diversas investigaciones (Ayala-Altamirano y Molina, 2021; Blanton et al., 2011; Carpenter et al., 2003; Russell et al., 2017; Simon y Blume, 1996; Thanheiser y Sugimoto, 2022), son claves para la adquisición del conocimiento matemático y para generar oportunidades que involucren a todos los niños. Además, existe el reto de tratar desde temprana edad el álgebra, pero desde una perspectiva que vaya más allá de abordar primero la aritmética para luego avanzar hacia el álgebra. En este trabajo, siguiendo la propuesta del *early algebra*, se busca «algebrizar» las matemáticas elementales, lo que implica potenciar el currículum tradicional y crear hábitos de pensamiento que atiendan a la estructura matemática (Kaput, 2008). En concreto, la contribución de este trabajo es evidenciar cómo situaciones aritméticas cotidianas (por ejemplo, la descripción de las propiedades de las operaciones aritméticas o la resolución de problemas aritméticos) permiten a los niños dialogar sobre saberes algebraicos.

La implementación de la propuesta muestra que los niños participantes, sin importar el enfoque del algebra que se tratara, evidenciaron que manejaban un pensamiento algebraico cuando se referían a cantidades indeterminadas (números generalizados, incógnitas o variables), y trataban dichas cantidades de forma analítica (Radford, 2018). También razonaron sobre la generalidad y percibieron una estructura algebraica a partir del estudio de relaciones en las operaciones (Kieran, 2004). Esto se evidenció en las distintas sentencias propuestas para representar las propiedades aritméticas, en las ecuaciones propuestas para representar los problemas o en la expresión de la regla funcional.

Es importante destacar que lo anterior se logró paulatinamente. En un inicio, se centraban en el cálculo y buscaban una respuesta numérica y única. Algunas intervenciones docentes que conjeturamos que ayudaron a este cambio son:

a) Animarles a evitar los cálculos.
b) Pedirles que contaran historias matemáticas para sentencias numéricas, sin calcular. Se buscaba que atendieran a la estructura de las sentencias y desde ahí establecer conclusiones.
c) Hablar de cantidades indeterminadas paulatinamente y con distintos significados: presentándola como un número cualquiera en las sentencias numéricas (aritmética generalizada) o un dato desconocido o incógnito del problema (ecuaciones) o una cantidad que puede variar (funciones).
d) Permitir que las cantidades desconocidas se representaran de distintos modos.

También los resultados muestran que la organización de cada sesión en torno a tres bloques (búsqueda de regularidades y desarrollo de una conjetura; articular una afirmación general a través de diferentes representaciones; y extender lo aprendido a otros casos) permitió que los niños percibieran lo general y se refirieran a cantidades indeterminadas expresando sus argumentos e ideas matemáticas de maneras cada vez más sofisticadas. Más allá del contenido matemático involucrado, los tres momentos de discusión se convirtieron en espacios para cooperar, confrontar y discutir ideas matemáticas, lo que favoreció «cultivar hábitos de pensamiento que atiendan a la estructura que subyace a las matemáticas» (Molina, 2009, p. 136). Lo anterior también se vio favorecido porque los argumentos se construyeron a partir de los conocimientos compartidos por los niños (Simon y Blume, 1996), lo que permitió generar un espacio para expresar las ideas y comparar las representaciones con distintos grados de sofisticación, considerándolas todas válidas y dando oportunidades para que todos los niños participaran, no solo aquellos más avanzados. Si bien no todos los niños emplearon el simbolismo algebraico, la adopción de este lenguaje fue progresiva. El diseño instruccional recogió los conocimientos previos de los niños, se incorporó progresivamente un vocabulario específico (nombre de las propiedades de las operaciones, por ejemplo) y se fomentó el uso de variadas representaciones (concretas, pictóricas y simbólicas).

Consideramos que la propuesta es adecuada y está alineada con los planes de estudios de distintos países. La implementación de los tres enfoques de contenido gracias al aprovechamiento del conocimiento aritmético no implica más tiempo, más bien sugerimos una reestructuración del diseño de aula. Con respecto a los tres bloques de discusión, sostenemos que es posible transferir este diseño a otros temas de las matemáticas escolares, dado que la interacción con ideas generales constituye el corazón del pensamiento matemático (Mason, 1996). Incluso es transferible a otras áreas de conocimiento.

Concluimos y destacamos, tal como lo señalan otros autores (por ejemplo, Carraher y Schliemann, 2007), la importancia de centrar la atención más allá de los cálculos. En el aula de Matemática es necesario generar espacios para que los niños interactúen con cantidades cada vez más abstractas, lo que permitirá que estos adapten, ajusten y reorganicen un conjunto de experiencias matemáticas previas; entiendan por qué existen determinadas relaciones matemáticas y que piensen y aprendan matemática por y para ellos mismos, entre otras ideas (Carpenter y Levi, 2000; Carraher y Schliemann, 2015; Russell, Schifter et al., 2017).

Si bien investigaciones previas han abordado formas de abordar la enseñanza del álgebra o la introducción de competencias matemáticas como la modelización (Trelles, Toalongo y Alsina, 2022; Cetina-Vásquez y Cabañas-Sánchez, 2022), la originalidad de nuestro estudio tiene relación con que el diseño y desarrollo de la escuela abordó de forma integrada contenidos algebraicos relativos a enfoques diferentes del álgebra y a la aritmética.

AGRADECIMIENTOS

Gracias a los niños, a sus padres y a los profesores involucrados en la escuela.

Esta investigación se enmarca en un proyecto financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile a través del proyecto FONDECYT INICIACIÓN 11220843. Asimismo, este trabajo se ha realizado en el proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España.

REFERENCIAS

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(2), 359-382. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1

Ayala-Altamirano, C., Pinto, E., Molina, M. y Cañadas, M. C. (2022). Interacting with indeterminate quantities through arithmetic word problems: Tasks to promote algebraic thinking at elementary school. *Mathematics 10*(1), 2229. https://doi.org/10.3390/math10132229

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. NCTM.

Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., Stroud, R., Fonger, N. y Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C. Kieran (ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 27-49). Springer.

Blanton, M., Gardiner, A. M., Ristroph, I., Stephens, A., Knuth, E. y Stroud, R. (2022). Progressions in young learners' understandings of parity arguments. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-32. https://doi.org/10.1080/10986065.2022.2053775

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67-78. https://doi.org/10.30827/pna.v1i2.6213

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz-Hidalgo y M. Torralbo (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.

Carpenter, T. y Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades* (Research report No. 00-2). National Center for Improving student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). NCTM.

Cetina-Vázquez, M. y Cabañas-Sánchez, G. (2022). Estrategias de generalización de patrones y sus diferentes formas de uso en quinto grado. *Enseñanza de las Ciencias*, *40*(1), 65-86. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3096

Embid, S. (2022). *Una mirada a los números pares, impares e igualdades numéricas: ¿Cómo justifican generalizaciones los niños de 9-10 años según su pensamiento algebraico?* (trabajo de fin de máster). Universidad de Granada.

Ingram, J., Andrews, N. y Pitt, A. (2019). When students offer explanations without the teacher explicitly asking them to. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(1), 51-66. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9873-9

Janßen, T. y Radford, L. (2015). Solving equations: Gestures, (un)allowable hints, and the unsayable matter. En K. Krainer y N. Vvondrová (eds.), *Proceedings on the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 419- 425). Charles University.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is the algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM – Mathematics Education*, 1-20. https://doi.org/10.1007/S11858-022-01435-6

Lannin, J., Ellis, A. B. y Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning*. NCTM.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bernarz, C. Kieran y L. Lee (eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Springer.

Mason, J. (2017). Overcoming the algebra barrier: Being particular about the general, and generally looking beyond the particular, in homage to Mary Boole. En S. Stewart (ed.), *And the rest is just algebra* (pp. 97-117). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7_6

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2022*). Real Decreto 157/2022 de 01 de marzo, por el que se establece la ordenación y enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. BOE, *52*, 24386–24504.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en Educación Primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156. https://doi.org/10.30827/pna.v3i3.6186

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de educación primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(3), 59-78. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2472

Morgan, C., Craig, T., Schuettte, M. y Wagner, D. (2014). Language and communication in mathematics education: An overview of reserarch in the field. *ZDM – Mathematics Education*, *46*(6), 843-853. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0624-9

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática*, *33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/em3301.06

Pinto, E. y Ayala-Altamirano, C. (2021). Álgebra más allá de letras y números: Oportunidades para desarrollar el pensamiento algebraico en la educación primaria. *Tangram – Revista de Educação Matemática*, 4(4), 35-48.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *33*(1), 113-134. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5 - 12 year- olds. ICME 13 Monographs* (pp. 3-25). Springer.

Radford, L. (2021). O ensino-aprendizagem da ágebra na teoria da objetivação. En V. Moretti y L. Radford (eds.), *Pensamento algébrico nos anos iniciais: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural* (pp. 171-195). Livraria da Física.

Russell, J., Schifter, D. y Bastable, V. (2017). *Connecting arithmetic to algebra. Strategies for building algebraic thinking in the elementary grades*. Heinemann.

Simon, M. A. y Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*(1), 3-31.

Stephens, A. C., Ellis, A. B., Blanton, M. L. y Brizuela, B. M. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. En J. Cai (ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 386-420). NCTM.

Thanheiser, E. y Sugimoto, A. (2022). Justification in the context of elementary grades: Justification to develop and provide access to mathematical reasoning. En K. Bieda, A.M. Conner, K.W. Kosko y M. Staples (eds.), *Conceptions and consequences of mathematical argumentation, justification, and proof* (pp. 35-48). Springer.

Trelles, C., Toalongo, X. y Alsina, Á. (2022). Una actividad de modelización matemática en primaria con datos auténticos de la COVID-19. *Enseñanza de las Ciencias*, *40*(2), 193-213. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3472

Development of Algebraic Thinking Through Justification in Elementary Education

Eder Pinto
Universidad de O`Higgins, Instituto de Ciencias de la Educación, Rancagua, Chile
eder.pinto@uoh.cl

Cristina Ayala-Altamirano
Universidad de Málaga, departamento de Didáctica de la Matemática, Ciencias Sociales y Ciencias Experimentales, Málaga, España
cristina.ayala@uma.es

Marta Molina
Universidad de Salamanca, departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, Ávila, España
martamolina@usal.es

María C. Cañadas
Universidad de Granada, departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Granada, España
mconsu@ugr.es

The interest in algebraic thinking in the first years of elementary education (6-12 years old) is an aspect of growing interest in the research agenda in mathematics education and in the Mathematics curriculums of different countries. Despite the multiple efforts to introduce this type of mathematical thinking in primary classrooms, there are still challenges regarding how to incorporate it in these educational grades.

In this paper, we present the instructional design of an activity that we developed in summer and whose purpose was to promote algebraic thinking among elementary school children: the *Summer School*. Specifically, the *Summer School* sought to develop algebraic thinking in children through the expression and justification of general mathematical ideas, in the context of school algebra.

The conceptual framework adopted in this proposal considers that algebraic thinking is organized around four core practices: *a*) generalize; *b*) represent; *c*) justify; and *d*) reason with mathematical structures and relationships. These four core practices must be present in the algebraic activity, regardless of the school algebra approach that is considered: *a*) generalized arithmetic; *b*) equivalence, expressions, equations, and inequalities; and *c*) functions. Specifically, we are interested in how children express their algebraic ideas using different types of mathematical representations (pictures, words, symbols, tables) and the way in which they construct arguments allowing them to determine and explain the truth of a conjecture or statement.

Twenty-one Chilean children from 9-10 years old, from low-income educational schools, participated in the summer school for two weeks. The activity was implemented online, given the health contingency caused by COVID-19, and we organized it in 10 sessions. The usual teachers of the children participated in the design and implementation of the summer school together with teacher-researchers from Chile and Spain.

In sessions 1 and 10 we applied an assessment, and the remaining sessions (2 to 9) were organized around the different approaches to school algebra. In general, through these sessions we wanted the children to express and justify their mathematical ideas in increasingly sophisticated ways. Thus, we organize each session into three blocks: *a*) search for regularities and development of a conjecture, in which we divide the children into small groups; *b*) articulate a general affirmation through different representations, carried out with the whole group; and *c*) extend what was learned to other cases, which involved working with a small group of students. This model made it possible to provide different spaces for cooperation, confrontation and discussion of algebraic ideas.

The main results show how children interact with general mathematical ideas through different mathematical representations (drawings, words, numbers, tables and symbols). In addition, these representations allow them to build increasingly sophisticated arguments when interacting with different content. For example, children can understand the different meanings of the equal sign through different number relationships involving different properties of arithmetic operations, or the search for different regularities between covarying quantities.

The contribution of this work is to show how everyday arithmetic situations (e.g., description of the properties of arithmetic operations or solving arithmetic problems) allow children to discuss algebraic knowledge. This does not take more time out of class, but we rather suggest a restructuring of the classroom design. Additionally, the instructional design of this *Summer School* allowed children to perceive the general and refer to indeterminate quantities, expressing their arguments and mathematical ideas in increasingly sophisticated ways. This can be extrapolated to other topics of school mathematics, given that the interaction with general ideas constitutes the heart of mathematical thought.