



Uso de realidad virtual en Geometría para el desarrollo de habilidades espaciales

Using Virtual Reality in Geometry for the development of spatial skills

Silvia Natividad Moral-Sánchez

Departamento de Didáctica de la Matemática, de las CC. SS. y de las CC. EE. Universidad de Málaga (Málaga), España.
silviamoral@uma.es • <https://orcid.org/0000-0002-0200-3569>

María Teresa Sánchez-Compañía

Departamento de Didáctica de la Matemática, de las CC. SS. y de las CC. EE. Universidad de Málaga (Málaga), España.
teresasanchez@uma.es • <https://orcid.org/0000-0001-7474-5038>

Isabel Romero Albaladejo

Departamento de Educación. Universidad de Almería (Almería), España.
isromero@ual.es • <https://orcid.org/0000-0002-4557-5284>

RESUMEN • En el siglo XXI, surge la necesidad de un cambio en el paradigma educativo, siendo las TIC un medio vehicular que puede hacer posible esta consecución. En este artículo se exponen un conjunto de actividades sobre poliedros en 3.º de la ESO (estudiantes entre 14 y 16 años) para fomentar la adquisición y mejora de habilidades espaciales. Partiendo de los errores geométricos detectados en una evaluación inicial, se diseñan actividades sustentadas en las ventajas que ofrecen los entornos inmersivos de realidad virtual para el desarrollo de dichas habilidades, además de actividades realizadas con materiales manipulativos. Se analizan las resoluciones de los estudiantes mostrando y comparando las estrategias utilizadas en ambos casos. El análisis de dichos resultados muestra evidencias en el desarrollo de habilidades espaciales y mejora en cuanto a la subsanación de errores cometidos.

PALABRAS CLAVE: Habilidades espaciales; Geometría; Realidad virtual; Innovación educativa; TIC.

ABSTRACT • In the 21st century, there is a need for a change in the educational paradigm, and ICT can serve as a means to make it possible. This article presents a set of activities on polyhedra in 3rd of ESO (students aged between 14 and 16) to promote the acquisition and improvement of spatial skills. Based on the geometric errors detected in an initial assessment, activities are designed based on the advantages offered by immersive virtual reality environments for the development of these skills, in addition to activities carried out with manipulative materials. The students' resolutions are analysed, showing and comparing the strategies used in both cases. The analysis of these results proves the development of spatial skills and an improvement in overcoming errors.

KEYWORDS: Spatial skills; Geometry; Virtual reality; Educational innovation; ICT.

Recepción: mayo 2021 • Aceptación: octubre 2022 • Publicación: marzo 2023

Moral-Sánchez, S. N., Sánchez-Compañía, M. T. y Romero Albaladejo, I. (2023). Uso de realidad virtual en Geometría para el desarrollo de habilidades espaciales. *Enseñanza de las Ciencias*, 41(1), 125-147.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5442>

INTRODUCCIÓN: JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS

Varias investigaciones argumentan que se debería dar un mayor énfasis a la geometría en los planes de estudio y, dentro de dicho bloque, trabajar las habilidades espaciales (Ramírez-Uclés, 2012; Sinclair y Bruce, 2015; González-Parra, 2018).

En didáctica de la matemática, cuando el objeto de estudio es la geometría tridimensional, se emplean los términos *visualización* o *visualización espacial* para indicar los procesos y habilidades de los individuos para realizar tareas que requieren «ver» o «imaginar» mentalmente los objetos geométricos espaciales, así como relacionar estos objetos y realizar operaciones o transformaciones geométricas sobre ellos (Gutiérrez, 1991, 1998b; Cajaraville et al., 2007; Escrivá et al., 2018).

Presmeg (2006) afirmaba que quizás el asunto más apremiante de investigación en este siglo ha sido y es encontrar una enseñanza o herramienta eficaz para aumentar el uso y poder de la visualización espacial en la educación matemática. Dado que este tema ha despertado un gran interés desde hace más de cien años, numerosos trabajos han destacado la visualización como la causa de gran parte de la dificultad de aprendizaje y como la fuente principal de error en geometría (Guillén, 2010; Ramírez-Uclés et al., 2018).

Por otra parte, la incorporación de las TIC se vuelve necesaria ante una sociedad adolescente nativa digital. Este cambio metodológico en las aulas supone una verdadera transformación en el paradigma educativo, ya que mejora los modelos tradicionales y considera la tecnología como un apoyo para la enseñanza de las matemáticas (Geefrath y Siller, 2018). En el plano cognitivo de la visualización espacial, De Freitas y Sinclair (2012) afirman que son necesarios tanto el gesto como el dibujo, pues constituyen la base material del experimento del pensamiento matemático. Dentro de las herramientas digitales, Ayala et al. (2020) confirman el potencial de la realidad virtual (RV) como lugar inmersivo que permite representar objetos de manera gráfica en tres dimensiones y en un ambiente ubicuo, desarrollando habilidades de dibujo que subsanen los errores de visualización. En varias investigaciones se muestra cómo los *softwares* tridimensionales e inmersivos reducen la carga cognitiva de la memoria al fomentar la llamada memoria virtual (Santos et al., 2014; Escrivá et al., 2018). Experiencias como la de Carrillo y Cortés (2016) con herramientas de RV demuestran el logro alcanzado en una inmersión completa dentro del ambiente virtual, y logran secuencias didácticas válidas en el área de geometría, así como demuestran un gran interés por parte del alumnado.

La finalidad de este artículo es compartir y analizar una experiencia didáctica de geometría con actividades de RV que podrían ayudar a desarrollar las habilidades espaciales en el alumnado. Como objetivos secundarios derivados del propio diseño didáctico y del contexto de la experiencia concreta que aquí se expone, se realiza una comparativa, en dos de las actividades llevadas a cabo, entre la herramienta de RV y los materiales manipulativos convencionales utilizados. Además, se analizan estas y otras dos actividades finales, una con material manipulativo y otra con RV, para observar las habilidades espaciales finales desarrolladas y los errores respecto a la evaluación inicial.

Las habilidades de visualización espacial y los errores en geometría conformarán el marco teórico de este artículo para, a continuación, exponer el marco metodológico de la experiencia, atendiendo a los contenidos curriculares, a los materiales y a las herramientas utilizados en las actividades, así como a los instrumentos de análisis. Tras la exposición del diseño de la secuencia didáctica, se mostrarán y analizarán las resoluciones del alumnado, para así finalizar con las conclusiones.

MARCO TEÓRICO

La geometría puede ser considerada como el origen de la visualización en matemáticas y un ámbito idóneo para el pretendido enriquecimiento de contenidos y habilidades espaciales (Gutiérrez, 1998a;

Ramírez-Uclés et al., 2013). Gutiérrez (2006) entiende la visualización como el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos. Las habilidades espaciales de visualización no son solo una capacidad innata que se debe dejar que evolucione de manera espontánea, sino que se pueden entrenar. Para ello, se hace necesario incorporar este tipo de actividades de visualización en la educación matemática (Cunningham, 1991; Gutiérrez y Jaime, 2015). Del Grande (1990) define las habilidades espaciales tal y como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1.
Habilidades espaciales

<i>Habilidad</i>	<i>Descripción</i>
H1. Coordinación motriz de los ojos	Habilidad para coordinar la visión con el movimiento del cuerpo.
H2. Identificación visual	Habilidad de reconocer una figura determinada aislándola de su contexto.
H3. Conservación de la percepción	Habilidad de reconocer que un objeto mantiene su forma, aunque deje de verse parcialmente.
H4. Percepción de la posición en el espacio	Habilidad de relacionar la posición de un objeto con un punto de referencia.
H5. Percepción de las relaciones espaciales	Habilidad que permite identificar las características de las relaciones entre diversos objetos situados en el espacio.
H6. Discriminación visual	Habilidad de distinguir similitudes y diferencias entre objetos, dibujos o imágenes mentales entre sí.
H7. Memoria visual	Habilidad de recordar características visuales de un objeto que no está a la vista.

Investigaciones como la de Sinclair et al. (2016) y Gutiérrez et al. (2018) concluyen que, en los últimos años, en el proceso de enseñanza-aprendizaje en geometría, se ha prestado mayor atención a las destrezas del razonamiento visioespacial, haciendo énfasis en el uso de gestos y diagramas y en las herramientas digitales que pueden permitir el aprendizaje y evaluación de este. Numerosas investigaciones avalan que el uso de nuevas tecnologías y la búsqueda de entornos de aprendizaje innovadores que conecten con los intereses actuales del alumnado conlleva el empleo de programas de geometría dinámica, dirigidos al desarrollo de habilidades espaciogeométricas como componentes necesarias en las tareas de matematización y en la subsanación de errores (Guillén, 2010; Ibili, 2019; Poonpaiboonpipat, 2021).

Socas (1997) puso de manifiesto que la presencia del error en geometría está evidenciando, en la mayoría de las ocasiones, la existencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumnado, no solamente una falta de conocimiento o un despiste. De igual modo, la investigación didáctico-matemática sobre el proceso de aprendizaje de cuerpos geométricos debe partir del objetivo del conocimiento de los errores para poder trabajar sobre ellos. Así, Guillén (2010), recordando a Bishop (1992), destaca los obstáculos que aparecen para representar las ideas geométricas, dado que existe un vocabulario visual muy complejo, con muchas convenciones y símbolos que deben comprender quienes aprenden estos conceptos, si se espera que den sentido a las figuras geométricas (Jaime y Gutiérrez, 2017). Las imágenes conceptuales suelen ser muy pobres, lo que genera una problemática, ya que estas son particularmente importantes en la geometría espacial (Gutiérrez y Jaime, 2015).

En la tabla 2, se muestra una tabla resumen con los principales errores referentes a las habilidades de visualización que recoge la literatura (Moral-Sánchez et al., 2021).

Tabla 2.
Principales errores referentes a las habilidades de visualización espacial

<i>Tipo de error</i>	<i>Referencias</i>
E1. No tener la habilidad de dibujar representaciones en el espacio y/o de manipular física o mentalmente los cuerpos geométricos.	Gutiérrez (1998a) Ramírez-Uclés et al. (2018)
E2. No tener la habilidad de visualización espacial; es decir, no relacionar representaciones en el plano con cuerpos espaciales (en los dos sentidos 2D ⇒ 3D y 3D ⇒ 2D).	Gutiérrez (1998b)
E3. Confundir términos al referir los elementos de los poliedros (vértices, aristas, caras)	Astolfi (1999) Barrantes y Zapata (2015) Espinoza et al. (2021)

MARCO METODOLÓGICO Y SECUENCIA DIDÁCTICA

En el marco metodológico se presentan el currículum con el que se justifican los contenidos tratados y los materiales utilizados, además de los instrumentos de recogida y análisis de las resoluciones del alumnado.

Currículum

Para justificar los contenidos tratados, la NCTM recoge que los programas de enseñanza deberían capacitar a los estudiantes para:

Analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas; Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas; Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas. (NCTM, 2000, p. 43)

Por otro lado, el currículum español, dentro del bloque de geometría, formula los siguientes contenidos y estándares de aprendizaje:

Visualizar, crear e identificar planos de simetría y ejes de rotación en los poliedros regulares. Obtención de poliedros duales. Recrear entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas para mostrar, analizar y comprender propiedades y figuras geométricas. (MEC, 2015, pp. 392-397)

Se evidencia así que tanto los currículos internacionales como los nacionales defienden el desarrollo de las habilidades espaciales en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Indicadores de aprendizaje específicos

En la tabla 3 se especifican los estándares de aprendizaje anteriormente expuestos, y se desgranar en indicadores de aprendizaje específicos de acuerdo con los contenidos tratados en las sesiones propuestas.

Tabla 3.
Indicadores de aprendizaje específicos

<i>Indicadores de aprendizaje específicos</i>
I1. Ser capaz de identificar y construir el punto medio de un segmento.
I2. Ser capaz de construir e identificar los planos de simetría verticales y horizontales en un poliedro.
I3. Ser capaz de construir e identificar los planos de simetría diagonales en un poliedro.
I4. Ser capaz de verificar que se trata de un plano de simetría.
I5. Ser capaz de identificar y construir el punto central de un polígono.
I6. Ser capaz de construir poliedros regulares con estructuras de vértices y aristas sin usar estructura de caras.
I7. Ser capaz de construir el poliedro dual de un tetraedro.
I8. Ser capaz de construir el poliedro dual de un hexaedro (octaedro).
I9. Ser capaz de construir el poliedro dual de un dodecaedro (icosaedro).
I10. Ser capaz de construir e identificar los ejes de giro de un hexaedro.
I11. Ser capaz de contar el orden de las simetrías rotacionales de un hexaedro.
I12. Ser capaz de construir e identificar los ejes de giro de un tetraedro.
I13. Ser capaz de contar el orden de las simetrías rotacionales en un tetraedro.
I14. Ser capaz de construir e identificar los ejes de giro de un octaedro.
I15. Ser capaz de construir e identificar los ejes de giro de un dodecaedro.
I16. Ser capaz de construir e identificar los ejes de giro de un icosaedro.

Materiales

La enseñanza heurística proporciona al alumnado diferentes materiales didácticos manipulativos, gracias a los cuales podrán estudiar, por ejemplo, los sólidos platónicos desde diversos puntos de vista dinámicos (Guillén, 2000). Concretamente, en la experiencia didáctica de este artículo, los materiales manipulativos utilizados fueron: poliedros regulares de metacrilato transparente y una cartulina para simular los planos de simetría y los juegos Zome y Polydron, de los que se muestran algunos ejemplos en la figura 1.

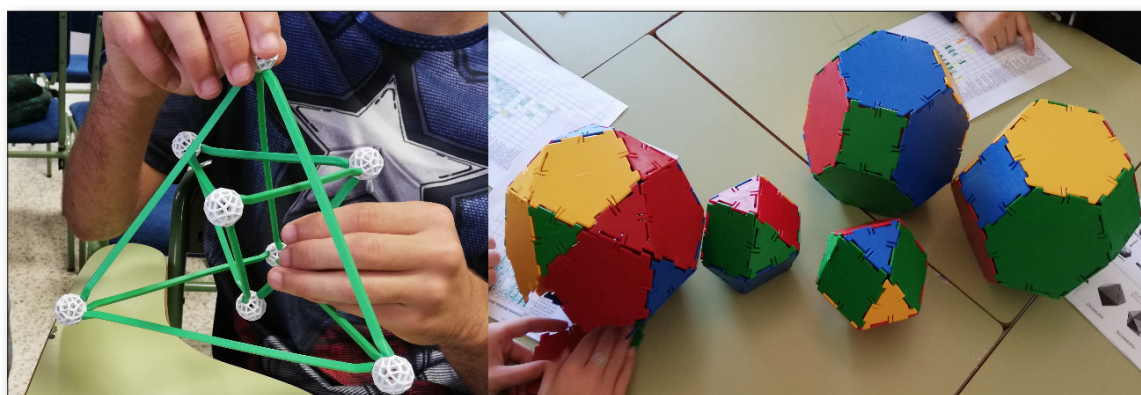


Fig. 1. Ejemplos con Zome, dual del tetraedro (izquierda) y con Polydron, sólidos arquimedianos (derecha).

El juego Zome consiste en «palos» rígidos que actúan a modo de aristas y «bolas con huecos» que actúan a modo de vértices, de manera que se pueden encajar para formar poliedros. El juego Polydron está compuesto por polígonos diferentes que se pueden encajar entre sí para construir poliedros. Todos estos materiales manipulativos se suelen utilizar en experiencias relacionadas con la visualización y el aprendizaje de la geometría.

El material digital utilizado es un *software* dinámico que permite al alumnado crear, manipular e interactuar con objetos geométricos tridimensionales en un entorno inmersivo a través de múltiples herramientas llamado Neotrie VR (por ejemplo, véase figura 2). Utiliza un *hardware* compuesto por unas gafas de RV y unos mandos con sensores para recrear un escenario tridimensional. Según Cangas et al. (2019), este tipo de herramientas podría ayudar a los estudiantes a resolver problemas geométricos con más rapidez, especialmente aquellos que requieren una mayor visión espacial.

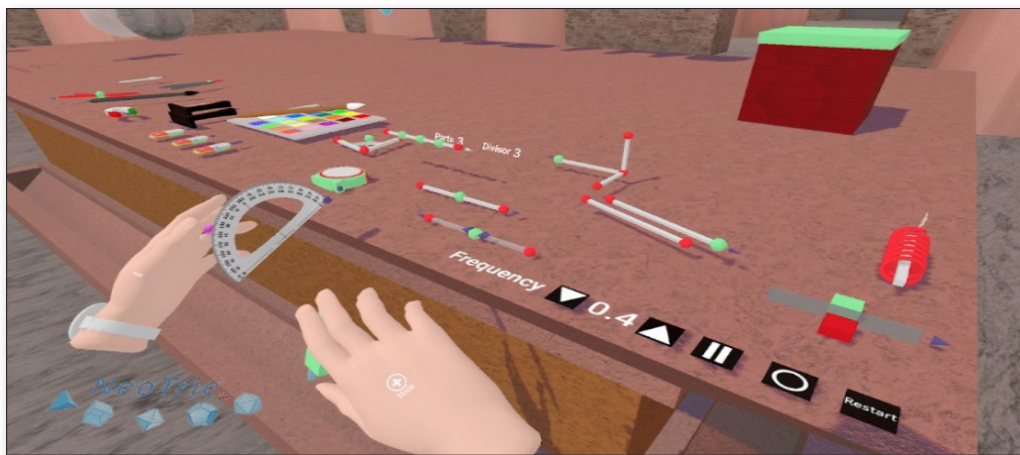


Fig. 2. Aspecto de la mesa de herramientas en Neotrie VR. Fuente: <http://www2.ual.es/neotrie/guide/>

Parte del éxito de los entornos virtuales se debe a las posibilidades que estos ofrecen a los estudiantes de aprender de sus errores en un entorno controlado, otorgándoles autonomía en la construcción de su aprendizaje y creando imágenes espaciales en la memoria (Farré-Riera, 2020). Para Chang et al. (2015) y Ferrer-Torregrosa et al. (2015), trabajar con tecnologías como la RV promueve el aprendizaje, al comprenderse mejor las ideas y los conceptos tratados en este tipo de entornos inmersivos, lo que hace que aumente la satisfacción personal del alumnado ante los logros conseguidos, fomentando la motivación y una actitud positiva.

Instrumentos de recogida y análisis de datos

Se utilizaron varios instrumentos para recoger la información: el diario de observación de la profesora-investigadora, los vídeos y fotos de las sesiones y una rúbrica de evaluación basada en los indicadores de aprendizaje específicos. En dicha rúbrica se reflejó para cada estudiante si había completado o no el indicador en la actividad realizada.

Se ha utilizado también un instrumento de análisis (véase tabla 4) validado previamente a través de una consulta a expertos, donde se establece qué tipo de habilidades (tabla 1) se pueden poner de manifiesto en cada uno de los indicadores (tabla 3) y cómo se relaciona cada habilidad con los tres tipos de errores (tabla 2).

Tabla 4.
Instrumento de análisis

<i>Habilidad espacial</i>	<i>Error</i>	<i>Indicadores específicos de aprendizaje</i>
H1. Coordinación motriz de los ojos	E1 y E3	I1, I2, I3, I5, I6, I7, I8, I9, I10, I11, I12, I13, I14, I15, I16
H2. Identificación visual	E2 y E3	I2, I3, I6, I7, I8, I9, I10, I11, I12, I13, I14, I15, I16
H3. Conservación de la percepción	E1 y E2	I4, I11, I13
H4. Percepción de la posición en el espacio	E1 y E2	I1, I2, I3, I4, I6, I7, I8, I9, I10, I11, I12, I13, I14, I15, I16
H5. Percepción de las relaciones espaciales	E1 y E2	I1, I2, I3, I5, I6, I7, I8, I9, I10, I11, I12, I13, I14, I15, I16
H6. Discriminación visual	E1, E2 y E3	I1, I2, I3, I4, I5, I6, I7, I8, I9, I10, I11, I12, I13, I14, I15, I16
H7. Memoria visual	E1 y E3	I1, I2, I3, I4, I5, I6, I7, I8, I9, I10, I12, I14, I15, I16

En la tabla 4, se puede observar cómo, por ejemplo, el I2 que señala la capacidad de construir e identificar los planos de simetría verticales y horizontales en un poliedro está relacionado con seis de las siete habilidades espaciales, ya que, según la consulta a expertos, se vincula con todas ellas. De esta manera, queda conformada la relación entre habilidades, indicadores y errores.

EXPERIENCIA DIDÁCTICA

En este artículo se muestran cuatro sesiones, que forman parte de una experiencia más amplia (Moral-Sánchez et al., 2022a; Moral-Sánchez et al., 2022b), cuyo contexto y desarrollo se explican a continuación. Todo el alumnado realizó previamente una evaluación inicial (Moral-Sánchez et al., 2021) y mostró errores de manera unificada que sirvieron como parte de la justificación de las actividades propuestas para intentar subsanarlos.

Contexto

Esta experiencia se ha llevado a cabo con 30 estudiantes de 3.º de la ESO, con edades comprendidas entre los 14 y 16 años, organizados en 6 equipos de 5 personas cada uno, y pertenecientes a uno de los institutos de educación secundaria de Vélez-Málaga (Málaga). Entre el alumnado hay una diversidad importante en cuanto a ritmos de aprendizaje y casuística, ya que hay estudiantes repetidores, absentistas y con trastornos de hiperactividad y actitudinales.

La metodología didáctica usada fue el aprendizaje basado en retos en el que los estudiantes colaboran para dar solución a un problema planteado. Este tipo de estrategias ayudan al desarrollo de habilidades cognitivas como el pensamiento crítico y el pensamiento creativo e innovador en la búsqueda de la solución (Jiménez et al., 2019).

Si bien el contexto ideal para el desarrollo de esta experiencia hubiese sido contar con al menos 6 dispositivos de RV, uno por cada equipo, en el momento de realizarla este *hardware* tenía un elevado presupuesto, cosa que no ocurre en el momento actual, por lo que solo se pudieron adquirir dos equipos completos. Además, el *software* Neotrie VR, utilizado para llevar a cabo las actividades con RV, estaba en su versión beta, en fase de pruebas, por lo que algunas funciones, como, por ejemplo, poder truncar las esquinas de los poliedros, no estaban aún disponibles; hoy en día este *software* se ha desarrollado y permite esta y muchas otras posibilidades.

Por lo tanto, disponer de solo dos equipos de RV condiciona el diseño didáctico de las actividades que se querían realizar. Por ello, en las dos primeras actividades que se proponen se divide el grupo

completo en dos grupos más pequeños, ambos heterogéneos en cuanto al contexto del alumnado que lo forman. El Grupo 1, formado por 10 personas, empezó directamente a trabajar rotando con los dos equipos y realizando las sesiones en el entorno inmersivo. El segundo grupo, Grupo 2, conformado por los 20 estudiantes restantes, empezó trabajando en paralelo las mismas actividades con materiales manipulativos.

Este contexto permite comparar, por tanto, en estas dos primeras actividades, al alumnado que utilizó la RV con el que utilizó únicamente el material manipulativo.

La tercera actividad, realizada por todo el grupo con material manipulativo dado el problema que se ha explicado con el *software*, que no permitía el truncamiento, y la cuarta actividad, que sí la pudo realizar todo el grupo con RV, al disponer de más sesiones de tiempo, lo que posibilitó que todos los equipos pudieran rotar los 2 dispositivos disponibles, se han diseñado sobre la base de poder observar si se han adquirido habilidades espaciales y se han subsanado los errores por parte de un grupo y otro.

Cabe señalar que, para adquirir la usabilidad de la herramienta de RV, se desarrollaron 10 sesiones previas a la experiencia en la hora de libre disposición del alumnado; los componentes del Grupo 1 realizaron estas 10 sesiones antes de comenzar la primera actividad (véase, por ejemplo, la figura 3), pero los componentes del Grupo 2 no las realizaron hasta terminar la tercera sesión, con lo que las tres primeras actividades las llevaron a cabo con materiales manipulativos, sin haber utilizado la herramienta de RV.



Fig. 3. Alumna aprendiendo la usabilidad en Neotrie VR.

Estas sesiones de usabilidad tuvieron como finalidad familiarizarse con el entorno virtual, aprender el manejo del menú principal de la interfaz (véase la figura 4), saber dibujar poliedros (vértices, aristas y caras), aprender a señalar el punto medio de un segmento y de una cara o el punto central de un polígono, saber utilizar la herramienta de reflexión y saber emplear la herramienta de rotación.

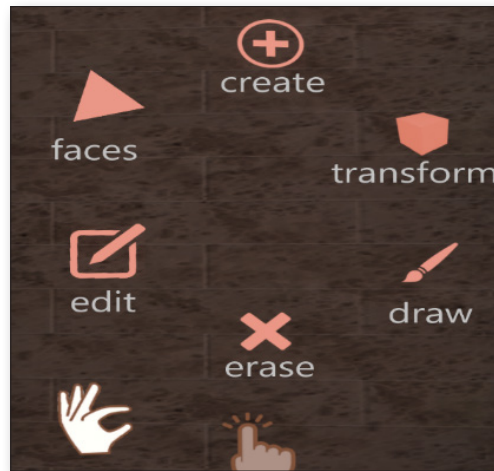


Fig. 4. Menú de opciones Neotrie VR.

Sesiones

El organigrama del diseño de las cuatro sesiones se muestra en la figura 5.

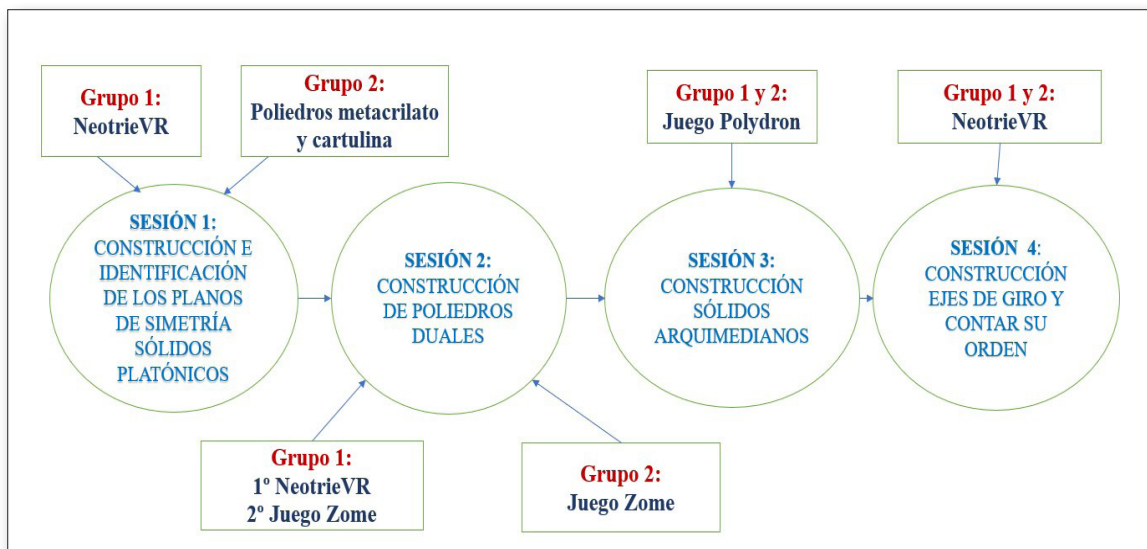


Fig. 5. Esquema de la secuencia didáctica realizada por ambos grupos.

A continuación, se detallan dichas sesiones. En la tabla 5, se muestran los indicadores específicos de la actividad, el reto planteado para el Grupo 1 y el Grupo 2 y la secuencia de pasos para su realización en ambos casos.

Tabla 5.
Sesión 1: Construcción e identificación de planos de simetría en poliedros regulares

<i>Sesión 1: Construcción e identificación de planos de simetría en poliedros regulares (indicadores de aprendizaje específicos: I1, I2, I3, I4).</i>
<i>Grupos 1, reto con RV:</i> «Dibuja e identifica todos los planos de simetría de cada poliedro regular y comprueba, cuando sea posible, que efectivamente se trata de un plano de simetría».
<i>Secuencia que el alumnado debería seguir para completar la actividad con éxito:</i> <ol style="list-style-type: none"> 1. Construir un poliedro regular mediante vértices y aristas o generar dicho poliedro por comando de voz. 2. Dibujar los planos de simetría en el poliedro regular elegido de manera que se dividía ese cuerpo en dos partes iguales. Con el ejemplo de un hexaedro regular, se deben dibujar los 9 planos; para ello se va creando cada plano en hexaedros diferentes, para que queden claramente identificados. Para los planos horizontales y verticales, hay que crear los puntos medios de las aristas paralelas de las caras opuestas dos a dos y unirlos. Los planos diagonales se pueden hacer directamente dibujando las diagonales de las caras opuestas del cubo también dos a dos. Por último, para la mejor comprensión e identificación de los planos de simetría, se pueden colorear dichos planos. 3. Realizar la comprobación, cuando sea posible, de si efectivamente se trata de un plano de simetría o no. Se debe aplicar la herramienta de reflexión sobre cada poliedro. Para ello, hay que seleccionar tres puntos del plano y un cuarto punto fuera del plano, de modo que, si la figura se queda igual es que efectivamente se trataba de un plano de simetría. 4. Estos pasos 1, 2 y 3 se repetirían para el resto de los poliedros regulares.
<i>Grupo 2, reto con material manipulativo, poliedros regulares de metacrilato y cartulinas:</i> «Determina con la cartulina cuántos planos de simetría tiene cada poliedro regular y comprueba, si es posible, que es un plano de simetría».
<i>Secuencia que el alumnado debería seguir para completar la actividad con éxito:</i> <ol style="list-style-type: none"> 1. Coger uno de los poliedros regulares de metacrilato. 2. En el caso de un hexaedro, encajar en todas las posiciones posibles el trozo de cartulina, previamente cortado del tamaño de una de las aristas, de modo que el cubo quede dividido en dos partes iguales de manera aproximada. 3. Estos pasos 1 y 2 se repetirían para el resto de los poliedros regulares.

En la secuencia de la sesión 2, que se describe en la tabla 6, el Grupo 1 también realizó la actividad con Neotrie VR, pero luego se les pidió comprobar que podían hacerlo con el material manipulativo del juego Zome, y así ver si se habían adquirido habilidades espaciales. Mientras, el Grupo 2 solo usó el material manipulativo del juego Zome.

Tabla 6.
Sesión 2: Construcción de duales de poliedros regulares

<i>Sesión 2: Construcción de duales de poliedros regulares (indicadores de aprendizaje específicos: I5, I6, I7, I8, I9).</i>
<i>Grupo 1, reto con RV:</i> «Dibuja los poliedros duales de cada poliedro regular».
<i>Secuencia que debe llevar a cabo el alumnado:</i> <ol style="list-style-type: none"> 1. Construir un poliedro regular mediante vértices y aristas o generación de este por comando de voz (no es necesaria la creación de las caras del poliedro). 2. Obtener el punto central de la cara de cada polígono con la herramienta correspondiente que ofrece el <i>software</i>. 3. Unir mediante aristas esos puntos centrales de las caras hasta formar el poliedro dual correspondiente de cada poliedro regular. 4. Repetir los pasos 1, 2 y 3 para el resto de los poliedros regulares.
<i>Grupo 2, reto con material manipulativo, juego Zome:</i> «Construye los poliedros duales de cada poliedro regular».
<i>Secuencia que debe llevar a cabo el alumnado:</i> <ol style="list-style-type: none"> 1. Ir encajando los palos y las bolas hasta formar un poliedro regular. 2. Imaginar que una bola se sitúa en el centro de cada cara del poliedro formado, e intentar formar otro poliedro uniendo esas bolas con los palos. 3. Repetir los pasos 1 y 2 para el resto de los poliedros regulares.

Como ya se ha comentado en el contexto, la sesión 3, que se muestra en la tabla 7, está diseñada para que se desarrolle solo con material manipulativo a través del juego Polydron, ya que la herramienta de RV no estaba aún optimizada en la versión que se utilizó para poder dibujar el truncamiento de los poliedros. En esta actividad no se especifican los indicadores de aprendizaje específicos; solo se analizan la estrategia de cada componente y equipo de 5 estudiantes para construir los poliedros truncados.

Tabla 7.
Sesión 3: Construcción de poliedros truncados

<i>Sesión 3: Construcción de los sólidos arquimedianos.</i>
<i>Grupo de clase completo, reto para ambos grupos con material manipulativo, juego Polydron:</i> «Construye los poliedros truncados a partir de las imágenes de estos que aparecen en la hoja de papel entregada en dos dimensiones».

La sesión 4, que se muestra en la tabla 8, fue diseñada para realizarla solo en el entorno inmersivo, ya que las actividades consultadas previamente al diseño para poder llevarla a cabo con material manipulativo requerían una logística en la búsqueda de mucho material y, según las fuentes consultadas de expertos, esto no suele dar buenos resultados de aprendizaje. Al disponer solo de dos equipos de RV, para poder rotarlos, esta actividad se realizó en tres horas de clase; el resto de los equipos realizó simultáneamente otras actividades de clase.

Tabla 8.
Sesión 4: Construcción e identificación de los ejes de giro de los sólidos platónicos y conteo del orden de giro de algunos de ellos

<i>Sesión 4: Construcción e identificación de los ejes de giro de los sólidos platónicos y conteo del orden de giro de algunos de ellos (indicadores de aprendizaje específicos: I5, I6, I10, I11, I12, I13, I14, I15, I16).</i>
<i>Grupo de clase completo, reto para ambos grupos con RV:</i> «Identifica y construye los ejes de giro de todos los poliedros regulares». «Cuenta el orden de giro en un tetraedro y un hexaedro para cada uno de sus ejes de giro».
<i>Secuencia que debería seguir el alumnado:</i> <ol style="list-style-type: none"> 1. Construir el poliedro regular correspondiente mediante vértices y aristas o generar dicho poliedro por comando de voz. 2. Trazar los ejes de rotación del poliedro regular. Para ello, hay que señalar con la herramienta correspondiente del <i>software</i> los centros de las caras de los polígonos y unirlos entre sí o con el vértice correspondiente, de manera que quede constituido el eje. En el ejemplo de un hexaedro se dibujaron 3 ejes de giro de orden 4, que pasaban por los centros de las caras paralelas, 4 ejes de giro de orden 3, que pasaban por los vértices opuestos, y 6 ejes de giro de orden 2, que pasaban por los puntos medios de las aristas opuestas. 3. Para determinar el orden de giro, la estrategia que se debe seguir es colorear una de las caras que no contenga al eje de giro (estableciendo así una referencia visual si se necesita para poder contar el orden). Con la herramienta de rotación del <i>software</i> seleccionaron 2 puntos del eje de giro y un tercero de un vértice del poliedro que no forme parte de eje de giro, y contaron al rotar la figura, cada vez que el poliedro adoptara una posición similar a la inicial hasta que la cara coloreada, usada de referencia, volviera a su posición de partida. 4. Repetir los pasos 1 y 2 para el octaedro, dodecaedro e icosaedro y 1, 2 y 3 para el tetraedro y el hexaedro.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

En este apartado se pueden ver fotografías que muestran algunas de las resoluciones del alumnado para cada uno de los retos propuestos. Asimismo, se presentan unas tablas donde se cuantifica el número de estudiantes que cumplieron o no cada uno de los indicadores específicos una vez realizadas las actividades. Por otro lado, se presentan los resultados globales obtenidos en cuanto al análisis de habilidades y errores según la relación establecida en la tabla 4.

Resoluciones del alumnado en cada sesión

Sesión 1

Con el material manipulativo, el alumnado, dentro de cada equipo de 5 componentes, cada uno con una figura, fue probando a colocar la cartulina de la manera que ellos consideraban conveniente para que el objeto quedase dividido en dos mitades (véase, por ejemplo, figura 6).



Fig. 6. Ejemplo de plano de simetría de un hexaedro con materiales manipulativos.

Con la herramienta de RV la actividad es llevada a cabo por el alumnado también de manera grupal; aunque cada alumno realizaba la actividad individualmente, el resto podía verla a través de la pantalla, como se puede observar en la figura 7.

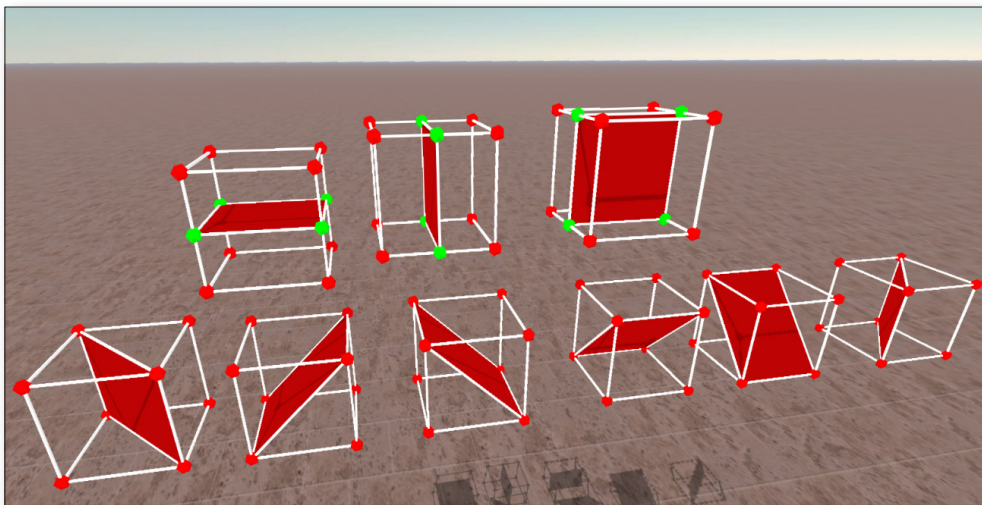


Fig. 7. Identificación y construcción de los planos de simetría de un hexaedro regular.

Ellos mismos han ido realizando los pasos y eligiendo las herramientas que han considerado necesarias. Esas herramientas fueron: goma, generador del punto medio, paleta de colores, para colorear los polígonos y visualizar mejor la simetría, y herramienta de reflexión (esta herramienta se usará para la comprobación de que se trata realmente de un plano de simetría en los casos en los que sea posible).

La profesora solo intervino cuando se solicitó ayuda por parte del alumnado y principalmente para recordar cuáles eran concretamente las herramientas disponibles dentro del entorno inmersivo. Trabajar de forma colaborativa podría ayudar a la resolución de los ejercicios, dado que los compañeros se ayudan entre ellos al ver lo que va realizando el resto por la pantalla grande.

En los siguientes vídeos, a modo de ejemplo de la resolución del alumnado, se puede observar el proceso: los estudiantes van dibujando algunos de los planos de simetría en los diferentes sólidos platónicos. El primer vídeo fue grabado directamente en la pantalla con el ordenador utilizado en las sesiones de clase (<https://bit.ly/3T66JY7>) y el segundo, con una cámara para ver el ejercicio desde fuera (<https://bit.ly/3CSvCBz>).

A continuación, en la tabla 9, se muestran los resultados de la rúbrica de indicadores específicos en los que se refleja la actividad realizada de planos de simetría de un hexaedro.

Tabla 9.
Rúbrica de indicadores, sesión 1

Indicador	Grupo 1: RV		Grupo 2: Manipulativos	
	Superado	No superado	Superado	No superado
I1	10	0	19	1
I2	10	0	14	6
I3	9	1	4	16
I4	10	0	0	20

Como se observa en la tabla 9, todos los componentes del Grupo 1 y la mayoría del Grupo 2 (aunque estos no con una medida exacta del punto medio, sino aproximada) consiguieron identificar los puntos medios de las aristas. Los estudiantes del Grupo 1 habían probado a dibujar el punto medio, en las 10 sesiones previas, en un segmento, pero no en un poliedro. Al colocar o dibujar los planos horizontales y verticales, mientras que el Grupo 1 no tuvo mayor problema, algunos estudiantes del Grupo 2 no hicieron todos los planos posibles, y solo situaron algunos de ellos. Con los planos diagonales, todos menos un estudiante del Grupo 1 dibujaron todos los posibles; por el contrario, la gran mayoría del Grupo 2 no colocó ninguno de ellos. En cuanto a la comprobación de si se trataba o no de un plano de simetría, mientras que todos los componentes del Grupo 1 lo hicieron con la herramienta de reflexión del *software*, el Grupo 2 no dispuso ni se le ocurrió ninguna forma de comprobación. Estos mismos resultados se pueden extrapolar al resto de poliedros regulares.

Respecto a los errores, en el Grupo 1, la dificultad del alumno que no superó el I3 fue debida al error E1, ya que no fue capaz de dibujar algunos de los planos diagonales. En el Grupo 2, también apareció el error E1, al no ser capaces de representar algunos de los planos de simetría, así como el error E2, ya que no relacionaron el plano con su posición en el poliedro de metacrilato en 3D.

Sesión 2

La figura 8 muestra la realización de la actividad de construcción de poliedros duales con la herramienta de RV.

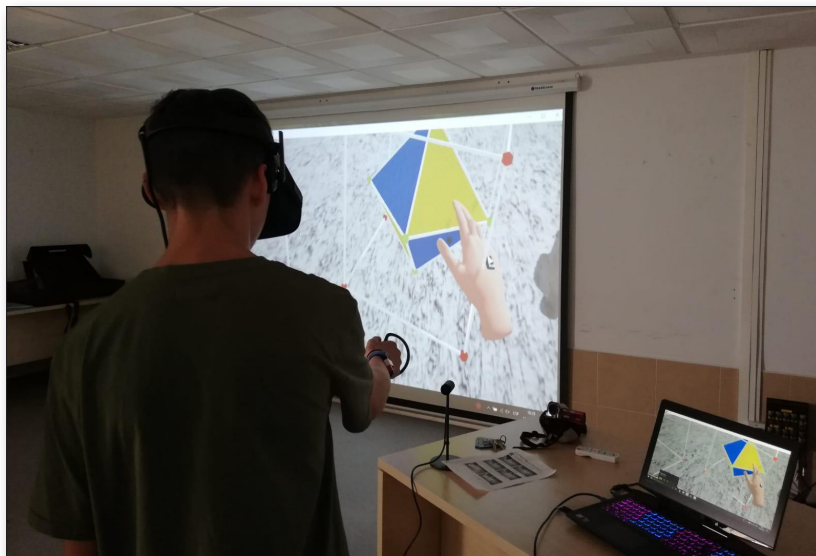


Fig. 8. Estudiante realizando poliedros duales, en este caso hexaedro-octaedro.

Las herramientas que el alumnado eligió utilizar en Neotrie VR fueron: herramienta del punto medio, goma, generador de vértices, generador de aristas, opción de colorear un polígono.

En la tabla 10, se muestran los resultados de la rúbrica de indicadores específicos para la actividad de los poliedros duales.

Tabla 10.
Rúbrica de indicadores, sesión 2

Indicador	<i>Grupo 1: RV</i>		<i>Grupo 2: Manipulativos</i>	
	Superado	No superado	Superado	No superado
15	9	1	0	20
16	10	0	3	17
17	10	0	3	17
18	10	0	1	19
19	7	3	0	20

Como se observa en la tabla 10, la mayoría del alumnado del Grupo 1 que trabajó con el entorno inmersivo no tuvo dificultad, ni para construir cada uno de los poliedros duales sin basarse en la estructura de caras o en los desarrollos planos, ni para señalar los puntos centrales de los polígonos que formaban dichas caras de manera exacta con la herramienta del programa. En el Grupo 2, solo 3 estudiantes construyeron correctamente los poliedros regulares sin utilizar estructuras de caras, únicamente con aristas y vértices, y esos mismos estudiantes construyeron el dual del tetraedro, pero solo uno de ellos hizo un hexaedro/octaedro. En el Grupo 1, además del dual del tetraedro, todos hicieron el dual hexaedro/octaedro y la mayoría, el del dodecaedro/icosaedro. Se debe considerar también que la herramienta de RV permite que el proceso sea más ágil y rápido que trabajando con el material manipulativo.

Respecto a los errores detectados en el Grupo 2, se observó que todos los estudiantes presentaron la dificultad E3 a la hora de cumplir el I5 y de localizar el centro de la cara, ya que Zome solo tiene

aristas y vértices; también el error E1 en I6-I9, al no ser capaces de construir algunos de los poliedros regulares ni sus duales, ya que hubo una gran confusión para localizar el centro de la cara con la estructura de vértices y aristas. En el Grupo 1 solo un estudiante mostró el error E3 al no ser capaz de localizar el centro del polígono con la herramienta, y el error E1 se presentó realizando el dual del icosaedro-dodecaedro.

En la tabla 11 se muestra una comparativa de la actividad realizada con el juego Zome entre el Grupo 1, que lo intentó tras acabar de hacerlo con la RV, y el Grupo 2, que solo usó el material manipulativo. Cabe recordar que este juego no tiene estructura de caras, solo de aristas y vértices.

Tabla 11.
Comparativa de duales con Zome, sesión 2

	<i>Grupo 1</i>		<i>Grupo 2</i>	
	Superado	No superado	Superado	No superado
Dual tetraedro	10	0	3	17
Dual hexaedro/octaedro	10	0	1	19
Dual dodecaedro/icosaedro	6	4	0	20

Se observa cómo en el Grupo 1 todo el alumnado hizo los duales del tetraedro y del hexaedro/octaedro y cómo la mayoría también construyó los de dodecaedro/icosaedro. Esto puede ser debido a que ya lo había construido antes con la RV. Sin embargo, en el Grupo 2, solo unos pocos hicieron el dual del tetraedro y solo uno de los veinte alumnos logró hacer el del hexaedro/octaedro.

Además, el alumnado del Grupo 1, cuando utilizó Zome tras la RV, fue capaz de construir poliedros duales recurrentes (véase, por ejemplo, figura 9).

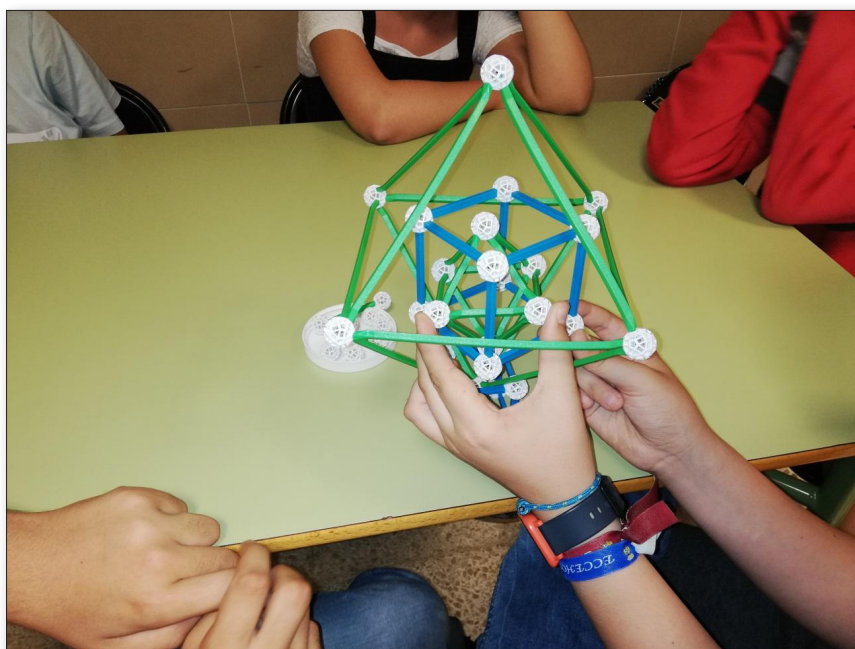


Fig. 9. Creación de poliedros duales con Zome por parte del Grupo 1.

Sesión 3

En esta sesión, toda la clase construye poliedros truncados con el juego Polydron. Como se observa en la figura 10 (derecha), el alumnado del Grupo 1, que ya había usado la RV, procedió a la construcción de poliedros en tres dimensiones de forma manipulativa directamente en el espacio, sin necesidad de establecer previamente el desarrollo plano de la figura que querían hacer. Por su parte, el alumnado del Grupo 2, figura 10 (izquierda), que aún no había utilizado la herramienta de RV, sí que necesitó seguir las instrucciones que les ofrecía el manual del juego con el desarrollo plano.



Fig. 10. Construcción de sólidos arquimedianos con Polydron.

Sesión 4

Por último, se realizó una actividad con RV en la que participaron todos los alumnos de la clase, como se ve en la figura 11, que muestra a un estudiante dibujando los ejes de giro de un icosaedro.



Fig. 11. Construcción ejes de giro de un icosaedro.

Las herramientas que el alumnado utilizó en Neotrie VR fueron: herramienta de rotación, herramienta del punto medio, goma, generador de vértices, generador de aristas, opción de colorear un polígono.

En la tabla 12 se muestra el resultado de lo que completó cada grupo.

Tabla 12.
Rúbrica de indicadores, sesión 4

Indicador	<i>Grupo 1</i>		<i>Grupo 2</i>	
	Superado	No superado	Superado	No superado
I10	10	0	18	2
I11	10	0	16	4
I12	10	0	15	5
I13	10	0	15	5
I14	10	0	10	10
I15	7	3	0	20
I16	7	3	0	20

El Grupo 1 realizó la actividad con más rapidez, seguramente debido a que ya había llevado a cabo otras dos actividades anteriores. En el caso del Grupo 2, aunque sí había realizado las 10 sesiones de usabilidad, era la primera vez que cada estudiante llevaba a cabo una actividad completa. Los estudiantes del Grupo 1, en su mayoría, realizaron todos los ejes de giro de los poliedros regulares y contaron el orden de giro del tetraedro y del hexaedro. Por otro lado, los del Grupo 2, en su mayoría, lograron desarrollar los ejes de giro del tetraedro y el hexaedro; pero, para contar su orden, la mayoría recurrió a colorear una cara para establecer, así, el punto de referencia. Los del Grupo 1, sin embargo, no lo necesitaron.

Respecto a los errores observados, el alumnado del Grupo 1 manifestó la dificultad E1 al no ser capaces de dibujar algunos de los ejes de rotación en el dodecaedro y en el icosaedro. Por otro lado, algunos estudiantes del Grupo 2 incurrieron en el error E1, también con el hexaedro y el tetraedro, aunque, como se observa en la tabla, fueron menos estudiantes. Además, también manifestaron el error E2 al no ser capaz de localizar la cara de referencia del poliedro para poder contar el orden de giro.

Al resolver las actividades 1, 2 y 4 con la RV, se ha detectado y recogido en las observaciones del diario la manifestación por parte de los estudiantes de las habilidades espaciales en los ejemplos que se describen en la tabla 13.

Tabla 13.
Habilidades espaciales mostradas en las sesiones 1, 2 y 4

<p>Sesión 1:</p> <p>H1. Dibujo de los poliedros regulares y de los planos de simetría utilizando la coordinación mano-ojo y el movimiento del cuerpo.</p> <p>H2. Identificación de cada uno de los planos de simetría independientemente del poliedro que se trate.</p> <p>H4. Comprobación de que efectivamente se trata de los planos de simetría del poliedro (reflexión).</p> <p>H5. Unión de las aristas y vértices al dibujar poliedros o para hacer los planos de simetría.</p> <p>H6. Diferenciación entre planos horizontales, verticales y diagonales en un hexaedro.</p> <p>H7. Dibujo de los planos de simetría y poliedros sin referencias visuales de imagen presentes.</p>
<p>Sesión 2:</p> <p>H1. Dibujo de los poliedros duales.</p> <p>H2. Identificación de que se trata del poliedro dual del poliedro regular dibujado.</p> <p>H4. Colocación del dibujo del poliedro dual en la posición exacta que le corresponde respecto al poliedro regular.</p> <p>H5. Identificación de la relación espacial entre el poliedro regular y su dual para poder dibujarlo.</p> <p>H6. Distinción de un poliedro dual de otro que no lo sea.</p> <p>H7. Dibujo de los poliedros regulares y sus duales sin ninguna referencia visual de imágenes presente.</p>
<p>Sesión 4:</p> <p>H1. Dibujo de los ejes de giro del poliedro regular.</p> <p>H2. Reconocimiento de cada giro completo del poliedro y capacidad de contar el orden de giro.</p> <p>H3. Identificación de dónde está la cara coloreada que se usa como referencia en el giro.</p> <p>H4. Identificación de la relación del poliedro al girar respecto a su posición o referencia de partida.</p> <p>H5. Identificación del cambio de posición del cubo al no mantenerse la relación entre la cara coloreada (referencia) y la que no lo está.</p> <p>H6. Identificación de las caras coloreadas al realizar el giro para contar su orden de giro.</p> <p>H7. Recordar el orden de giro sin tener el poliedro regular delante.</p>

Análisis y resultados de habilidades espaciales

Por último, en la tabla 14, se realiza un análisis basado en la relación entre habilidades e indicadores de la tabla 4, calculando el porcentaje de los indicadores específicos superados frente al total de los mismos puestos en juego. Se realiza el cálculo al finalizar las dos primeras actividades en las que el Grupo 1 solo usó RV y el Grupo 2 solo manipulativo (teniendo en cuenta del I1 al I9), y otro al finalizar las cuatro sesiones, cuando ya todos los grupos habían utilizado la RV.

Tabla 14.
Adquisición de habilidades espaciales

<i>Habilidad espacial</i>	<i>Grupo 1 Final de sesión 2</i>	<i>Grupo 2 Final de sesión 2</i>	<i>Grupo 1 Final de sesión 4</i>	<i>Grupo 2 Final de sesión 4</i>
H1	94 %	27 %	93 %	39 %
H2	93 %	21 %	92 %	38 %
H3	100 %	0 %	100 %	52 %
H4	95 %	27 %	93 %	39 %
H5	94 %	27 %	93 %	39 %
H6	94 %	24 %	99 %	37 %
H7	94 %	24 %	99 %	37 %

Como se observa en la tabla 14, el porcentaje de adquisición de habilidades espaciales es mucho mayor en el Grupo 1 que en el Grupo 2, aunque el Grupo 2 mejora sus porcentajes al finalizar las cua-

tro sesiones, por lo que se constata, así, la influencia positiva del uso de la RV. En cuanto al porcentaje de error total (E1, E2 y E3) del grupo clase, y basándonos en la tabla anterior, está en torno al 7 % de media en el Grupo 1 y entre el 48 % y 63 % en el Grupo 2.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

A principio del siglo XXI, Presmeg (2006) apuntaba a la necesidad de disponer de una herramienta para aumentar el uso y poder de la visualización espacial en la educación matemática. Quizás se haya encontrado una de esas herramientas en el potencial que para la geometría ofrecen los entornos inmersivos de RV. Este artículo comparte y analiza una experiencia didáctica de geometría con actividades de RV, mostrando cómo es posible la integración de dichos entornos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, favoreciendo la aparición de habilidades espaciales y pudiendo corregir algunos de los errores en geometría (Hernández, 2019; Roura y Ramírez, 2021; Sua et al., 2021). A su vez, se ha constatado la usabilidad, versatilidad y ubicuidad de la RV en la realización de las actividades llevadas a cabo en el aula, coincidiendo con las conclusiones de Santos et al. (2014) y Carrillo y Cortés (2016).

Respecto al objetivo secundario derivado del propio diseño didáctico y del contexto de la experiencia, se ha hecho una comparativa de dos actividades en las que los integrantes del Grupo 1 solo utilizaron RV y los del Grupo 2 solo usaron material manipulativo. Los resultados muestran que el número de estudiantes que cumplieron los indicadores específicos de aprendizaje en el Grupo 1 fue mayor en proporción a quienes lo hicieron en el Grupo 2, como muestran las tablas 9 y 10. Como ya indicaron Sinclair et al. (2016), gracias a este tipo de herramientas se abre la posibilidad de realizar un estudio más exhaustivo de las habilidades de visualización espacial en geometría. De esta manera, las cualidades visuales que aportan las tecnologías inmersivas hacen que se propongan como un elemento integrador y formativo en matemáticas, habilitando al alumnado para la construcción de su autoaprendizaje (Poonpaiboonpipat, 2021). La RV, con un diseño didáctico fundamentado, y con el apoyo y complemento de los materiales manipulativos, puede ser una herramienta útil para el desarrollo de las habilidades de visualización espacial en geometría (Sinclair et al., 2016).

Respecto a la adquisición de habilidades espaciales, tanto al finalizar estas dos actividades como al finalizar las cuatro sesiones, y que se refleja en la tabla 14, el alumnado del Grupo 1 ha manifestado dichas habilidades en un mayor porcentaje que el alumnado del Grupo 2. De la misma manera, el alumnado del Grupo 2 mejoró sus habilidades espaciales tras finalizar las cuatro sesiones, según se muestra en dicha tabla, por lo que pudo influir, aparte de la práctica con el resto de los materiales manipulativos, el haber usado la RV; esto coincide con lo que apuntaban Escrivá et al. (2018) e Ibili (2019), que concluían en sus estudios que la RV ejerce un papel fundamental en el desarrollo del sentido espacial del alumnado.

Respecto a los errores y las dificultades que presentó el alumnado en la evaluación inicial, la mayoría de los estudiantes del Grupo 1, de acuerdo con las tablas de indicadores no superados y las observaciones de los errores manifestados en las sesiones propuestas, no ha vuelto a cometer la práctica totalidad de errores manifestados en la evaluación inicial, mientras que, en el Grupo 2, los estudiantes han seguido mostrando muchos de ellos durante las actividades, aunque también se observa una mejoría al finalizar las cuatro sesiones.

Las limitaciones que implican en este estudio de innovación las características particulares del alumnado con un único grupo-clase y el contexto determinado en el que se ha desarrollado la experiencia pueden suponer una pérdida de objetividad, ya que la figura docente es también parte investigadora, por lo que no se podrían generalizar los resultados. En una línea futura intentaremos subsanar esto con nuevos experimentos con estudiantes de otros cursos de educación secundaria y universitaria.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación FEDER Junta de Andalucía UAL2020-SEJ-B2086.

REFERENCIAS

- Astolfi, J. (1999). *El error, un medio para enseñar*. Díada Editora.
- Ayala, R., Laurente, C., Escuza, C., Núñez, L. y Díaz, J. (2020). Mundos virtuales y el aprendizaje inmersivo en educación superior. *Propósitos y Representaciones*, 8(1), e430.
<http://dx.doi.org/10.20511/pyr2020.v8n1.430>
- Barrantes López, M. y Zapata Esteves, M. A. (2015). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto. Revista de Educación*, 27(1), 55-71.
- Bishop, A. J. (1992). Implicaciones didácticas de la investigación sobre la visualización. En R. C. Núñez, E. A. Sánchez y G. Z. Badillo (Eds.), *Antología en Educación Matemática* (pp. 29-42). CINVESTAV.
- Cajaraville, J. A., Fernández Blanco, T. y Godino, J. D. (2007). Configuraciones epistémicas y cognitivas en tareas de visualización y razonamiento espacial. En P. Bolea, M. Camacho, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y M. T. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X* (pp. 7-26). SEIEM.
- Cangas, D., Morga, G. y Rodríguez, J. L. (2019). Geometry teaching experience in virtual reality with Neotrie VR. *Psychology, Society, & Education*, 11(3), 355-366.
<https://doi.org/10.25115/psye.v11i3.2270>
- Carrillo, J. L. y Cortés, J. A. (2016). Secuencias didácticas con en el área de geometría en Educación básica. *Faro: Revista Teórica del Departamento de Ciencias de la Comunicación*, 23(1), 279-304.
- Chang, Y. L., Hou, H. T., Pan, C. Y., Sung, Y. T. y Chang, K. E. (2015). Apply an augmented reality in a mobile guidance to increase sense of place for heritage places. *Journal of Educational Technology & Society*, 18(2), 166-178.
- Cunningham, S. (1991). The visualization environment for mathematics Education. En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 67-76). Mathematical Association of America.
- De Freitas, E. y Sinclair, N. (2012). Diagram, gesture, agency: theorizing embodiment in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 80(1), 133-152.
<http://dx.doi.org/10.1007/s10649-011-9364-8>
- Del Grande, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37(6), 14-20.
- Escrivá, M. T., Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2018). Uso de software 3D para el desarrollo de habilidades de visualización en Educación Primaria. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 7(1), 42-62.
<https://doi.org/10.24197/edmain.1.2018.42-62>
- Espinoza, E. L., Carballo, A. M., Cruz, H. M. y Vega, E. M. (2021). Situación de contraejemplo y su utilidad en la actividad de enseñanza de la matemática. *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 17(61), e004.
- Farré-Riera, L. (2020). Contextos de aprendizaje participativos en secundaria. *Obra Digital*, 19, 133-148.
<https://doi.org/10.25029/od.2020.284.19>

- Ferrer-Torregrosa, J., Torralba, J., Jiménez, M., García, S. y Barcia, J. (2015). Development and assessment of a tool based on augmented reality for anatomy. *Journal of Science Education and Technology*, 24(1), 119-124.
- Geefrath, G. y Siller, H. S. (2018). GeoGebra as a Tool in Modelling. En L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H. S. Siller, M. Tabach y C. Vale, *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education Processes* (pp. 363-374). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4_21
- González-Parra, D. C. (2018). *Uso de material manipulativo y tecnológico para fortalecer habilidades de visualización espacial en niños de quinto grado* [Tesis doctoral]. Universidad Autónoma de Bucaramanga. <https://repository.unab.edu.co/handle/20.500.12749/2553>
- Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos: Ideas erróneas. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(1), 35-53.
- Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21-68). SEIEM.
- Gutiérrez, Á. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. En Á. Gutiérrez (Ed.), *Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación Matemática: Geometría* (pp. 44-59). CINVESTAV.
- Gutiérrez, Á. (1998a). Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización (ponencia). *Encuentro de Investigación en Educación Matemática*, TIEM98. Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans. <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Gut98b.pdf>
- Gutiérrez, Á. (1998b). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Ema*, 3(3), 193-220.
- Gutiérrez, Á. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, F. Ruíz, y M. De la Fuente (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). SAEM Thales.
- Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA*, 9(2), 53-83.
- Gutiérrez, Á., Ramírez, R., Benedicto, C., Beltrán-Meneu, M. J. y Jaime, A. (2018). Visualization Abilities and Complexity of Reasoning in Mathematically Gifted Students' Collaborative Solutions to a Visualization Task. A Networked Analysis. En K. S. S. Mix y M. T. Battista (Eds.), *Visualizing Mathematics* (pp. 309-337). Springer.
- Hernández, U., Anaya, S. L., Lara, E. A. y Carrascal, M. C. (2019). Las Innovaciones Educativas con TIC como generadoras de cambio en las prácticas pedagógicas de aula. *Revista Ingeniería e Innovación*, 7(1), 14-18.
<https://doi.org/10.21897/23460466.1709>
- Ibili, E. (2019). The use of dynamic geometry software from a pedagogical perspective: current status and future prospects. *Journal of Computer and Education Research*, 7(14), 337-355.
<https://doi.org/10.18009/jcer.579517>
- Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2017). Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp.71-89). SEIEM.
- Jiménez, A. B., Hinojosa, V. C., Ramos, J. C., Sánchez, R. M., Blasco, V. J. Q. y Mendoza, C. A. (2019). El aprendizaje basado en retos como propuesta para el desarrollo de las competencias clave. *Journal of Parents and Teachers*, 380, 50-55.
<https://doi.org/10.14422/pym.i380.y2019.008>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). Real decreto 1105/2014 por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín oficial del Estado*, 3, 169-546.

- Moral-Sánchez, S. N., Sánchez-Compañía, T. y Romero-Albaladejo, I. M. (2021). Evaluación inicial como catalizador para el diseño de unidades de aprendizaje de Geometría en Educación Secundaria. *Revista Épsilon*, 107, 47-57.
- Moral-Sánchez, S. N., Sánchez-Compañía, M. T. y Sánchez-Cruzado, C. (2022a). El modelo Flipped Learning enriquecido con plataformas educativas gamificadas para el aprendizaje de la geometría. *Revista Pixel-Bit*, 65, 149-182.
<http://dx.doi.org/10.12795/pixelbit.93538>
- Moral-Sánchez, S. N., Sánchez-Compañía, T. y Romero-Albaladejo, I. M. (2022b). Geometry with a STEM and Gamification Approach: A Didactic Experience in Secondary Education. *Mathematics*, 10(18), 3252.
<https://doi.org/10.3390/math10183252>
- NCTM (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. NCTM.
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 205-235). Sense Publishers.
- Poonpaiboonpipat, W. (2021). Pre-service mathematics teachers' perspectives on STEM-based learning activities. *Journal of Physics: Conference Series*, 1835(1), 12081-12083.
- Ramírez-Uclés, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* [Tesis doctoral no publicada]. Universidad de Granada. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/23889>
- Ramírez-Uclés, R., Ramírez-Uclés, I., Flores Martínez, P. y Castro Martínez, E. (2013). Análisis de las capacidades de visualización espacial e intelectual en los alumnos con talento matemático. *Revista Mexicana de Psicología*, 30(1), 24-31.
- Ramírez-Uclés, R., Flores Martínez, P. y Ramírez-Uclés, I. (2018). Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con talento matemático. *Relime*, 21(1), 29-56.
<https://doi.org/10.12802/relime.18.2112>
- Roura, R. y Ramírez, R. (2021). Sentido espacial en futuros maestros. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 537-544). SEIEM.
- Santos, M. E. C., Chen, A., Taketomi, T., Yamamoto, G., Miyazaki, J. y Kato, H. (2014). Augmented reality learning experiences: Survey of prototype design and evaluation. *IEEE Transactions on Learning*, 7(1), 38-56.
<https://doi.org/10.1109/TLT.2013.37>
- Sinclair, N. y Bruce, C. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM Mathematics Education*, 51(3), 319-329.
<https://doi.org/10.1007/s11858-015-0693-4>
- Sinclair, N., Bartolini Bussi, M., De Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME13 survey team report. *ZDM Mathematics Education*, 48(5), 691-719.
<https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6>
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Universidad de Barcelona.
- Sua, C., Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2021). Análisis de una actividad de visualización en un entorno de geometría dinámica 3d y realidad aumentada. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 579-586). SEIEM.

Using Virtual Reality in Geometry for the development of spatial skills

Silvia Natividad Moral-Sánchez

Departamento de Didáctica de la Matemática, de las CC. SS. y de las CC. EE. Universidad de Málaga (Málaga), España.
silviamorales@uma.es • <https://orcid.org/0000-0002-0200-3569>

María Teresa Sánchez-Compañá

Departamento de Didáctica de la Matemática, de las CC. SS. y de las CC. EE. Universidad de Málaga (Málaga), España.
teresasanchez@uma.es • <https://orcid.org/0000-0001-7474-5038>

Isabel Romero Albaladejo

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Almería (Almería), España.
imromero@ual.es • <https://orcid.org/0000-0002-4557-5284>

In the 21st century, there is a need for a change in the educational paradigm, and the use of ICT can help us achieve this. The main aim of this article is to share and analyse a geometry teaching experience on polyhedra in 3rd of ESO (students aged between 14 and 16). The activities with virtual reality are designed with the purposes of helping students overcome the geometric errors detected in the initial assessment and develop spatial skills. This experience was carried out with 30 secondary school students, organised into 6 teams of 5 people each. The whole group was divided into two smaller, heterogeneous groups. Group 1, made up of 10 students, started working directly with virtual reality, while Group 2, made up of the remaining 20 students, began to work in parallel on the same activities with manipulative materials. As secondary objectives, derived from the didactic design itself as well as from the context of the specific experience, a comparison is made, in two of the activities, between the immersive virtual reality tool Neotrie VR and the conventional manipulative materials used.

Several instruments were employed to collect information, including an assessment rubric based on specific learning indicators. An analysis instrument was also used to establish which spatial skills can be highlighted in each of the learning indicators and how each spatial skill is related to geometric errors.

The results of the first session, where the symmetry planes of Platonic solids were identified and constructed with Neotrie VR by Group 1, and with methacrylate polyhedra and a cardboard by Group 2, show that the number of learning indicators achieved by Group 1 is significantly higher than that of Group 2. Furthermore, while Group 1 had a reflection tool in the software to check whether the plane constructed was actually a plane of symmetry, Group 2 did not have this option. The results of the second session, in which dual polyhedra were constructed using NeotrieVR (Group 1) and Zome game (Group 2), show that the number of learning indicators achieved by Group 1 is, once again, higher than that obtained by the members of Group 2. Most students in Group 1 constructed each of the dual polyhedra without relying on the structure of faces or flat developments, while in Group 2, only 3 students constructed the dual tetrahedron and only one the hexahedron/octahedron. In the third session, where Archimedean solids were built with the Polydrón game, Group 1 built them in 3D directly and Group 2 needed to use the flat developments to assemble figures. In the last session, where both groups used Neotrie VR to make the axes of rotation and count their order, students in Group 2 mostly resorted to colouring a face to establish a reference point and count the order, while students in Group 1 did not need to do so. According to the analysis instrument, at the end of the first two sessions, Group 1 students showed a higher percentage of spatial skills than Group 2. At the end of the four sessions, Group 2 improved this percentage, not only from the practice with the rest of the manipulative materials, but also due to the positive influence of the use of the virtual reality tool. Regarding errors and difficulties found among students in the initial assessment, most of the students in Group 1 did not make practically any of the errors again, while in Group 2, they continued to fail during the activities, although an improvement was also observed at the end of the four sessions.

Virtual reality with a well-founded didactic design, supported and complemented by manipulative materials, can be a useful tool for the development of spatial visualisation skills in geometry, as well as for overcoming errors.

