ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 40-3 (2022), 87-107
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3402
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Analizando perfiles de reconocimiento en teoría de grafos

Analysing Profiles of Recognition in Graph Theory

Antonio González, Inés Gallego-Sánchez, José María Gavilán-Izquierdo
Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla, Sevilla, España
gonzalezh@us.es, inesgal@us.es, gavilan@us.es

María Luz Puertas
Departamento de Matemáticas, Universidad de Almería, La Cañada, Almería, España
mpuertas@ual.es

RESUMEN • En este trabajo exploramos las habilidades de reconocimiento en teoría de grafos que poseen estudiantes universitarios del grado en Ingeniería Informática-Tecnologías Informáticas de la Universidad de Sevilla. Para ello, diseñamos un cuestionario que empleamos como instrumento de recogida de datos, los cuales son posteriormente analizados mediante una adaptación de la metodología del cálculo de los grados de adquisición, lo que da lugar a distintos perfiles de reconocimiento en teoría de grafos. Las características de estos perfiles nos permiten dar soporte empírico a una propuesta teórica de niveles de reconocimiento en teoría de grafos realizada desde la óptica del modelo de Van Hiele, así como extraer algunas conclusiones sobre aspectos de la enseñanza y el aprendizaje de esta materia.

PALABRAS CLAVE: Reconocimiento; Teoría de grafos; Niveles de razonamiento; Modelo de Van Hiele.

ABSTRACT • In this work, we explore the recognition skills in graph theory of undergraduate students of the degree in Computer Science-Information Technology of the University of Seville. For this purpose, we design a questionnaire that we use as an instrument for data collection, which are subsequently analysed by means of an adaptation of the methodology of the calculation of the degrees of acquisition, giving rise to different profiles of recognition in graph theory. The characteristics of these profiles allow us to give empirical support to a theoretical proposal of recognition levels in graph theory from the perspective of the Van Hiele model, as well as to draw some conclusions about aspects of teaching and learning this field of mathematics.

KEYWORDS: Recognition; Graph theory; Levels of reasoning; Van Hiele model.

Recepción: julio 2020 • Aceptación: mayo 2022 • Publicación: noviembre 2022

González, A., Gallego-Sánchez, I., Gavilán-Izquierdo, J. M., y Puertas, M. L. (2022). Analizando perfiles de reconocimiento en teoría de grafos. *Enseñanza de las Ciencias, 40*(3), 87-107. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3402

INTRODUCCIÓN

La educación matemática en el ámbito universitario abarca múltiples áreas, entre las que destaca la matemática discreta (Ouvrier-Buffet, 2011). Dentro de las diferentes ramas que la componen, la teoría de grafos cuenta cada vez con mayor relevancia, como se ha plasmado en la gran cantidad de trabajos sobre esta temática expuestos en el 13th International Congress on Mathematical Education (Hart y Sandefur, 2018). Aunque existen diferentes tipos de trabajos al respecto, hay pocos estudios que indaguen en el razonamiento de los estudiantes de teoría de grafos, como hacen notar Hazzan y Hadar (2005), que analizan la comprensión de estudiantes universitarios sobre esta rama de la matemática desde la perspectiva de la reducción de la abstracción. Este enfoque explica que, cuando los estudiantes no son capaces de manipular mentalmente los conceptos que aparecen en un problema, entonces inconscientemente reducen la abstracción de diversas maneras, por ejemplo, considerando solo casos particulares en lugar de casos generales. Igualmente, Medová et al. (2019), que categorizan y analizan los errores cometidos por estudiantes al implementar algoritmos sobre grafos, señalan esta misma deficiencia en la literatura. Se hace, por tanto, necesario el desarrollo de marcos teóricos que sustenten este tipo de investigaciones (Ouvrier-Buffet et al., 2018).

Gavilán-Izquierdo y González (2016) proponen extender el modelo de Van Hiele al campo de la teoría de grafos. Aunque este modelo ha sido usualmente utilizado en investigaciones sobre enseñanza-aprendizaje de la geometría, autores como Gutiérrez y Jaime (1998) señalan la necesidad de extenderlo a otros campos de la matemática. De hecho, existen ampliaciones del modelo de Van Hiele a conceptos no necesariamente geométricos, como aproximación local (Llorens y Pérez-Carreras, 1997) o convergencia de sucesiones (Navarro y Pérez-Carreras, 2006). La idea de extender el modelo de Van Hiele a la teoría de grafos es, en principio, natural, dadas las similitudes entre grafos y figuras geométricas, pues ambos son representados habitualmente como puntos en el plano unidos por segmentos. Además, tratar con ambos objetos matemáticos implica el manejo de las transformaciones que los dejan invariantes: movimientos rígidos, en el caso geométrico, que son casos particulares de las transformaciones que dejan invariantes a las representaciones de los grafos, esto es, cualquier deformación que mantenga las conexiones originales entre vértices. No obstante, es necesario desarrollar investigaciones que garanticen la viabilidad de esta propuesta.

En el caso del reconocimiento de grafos, González y Gavilán-Izquierdo (2017) formulan una propuesta teórica con tres niveles de perfeccionamiento, basándose en descriptores de los niveles de Van Hiele para geometría, una revisión de investigaciones sobre aprendizaje de la teoría de grafos y su propia experiencia docente en la materia. Dicha propuesta teórica, que debe ser testada experimentalmente, se plantea como punto de partida de un proceso cíclico de investigación que permita obtener propuestas cada vez más refinadas sobre niveles de razonamiento en teoría de grafos.

El objetivo de este trabajo es la identificación empírica de perfiles de reconocimiento en teoría de grafos que nos permitan contrastar la validez de los indicadores de los niveles teóricos formulados por González y Gavilán-Izquierdo (2017) con una modificación que mencionamos en el siguiente apartado.

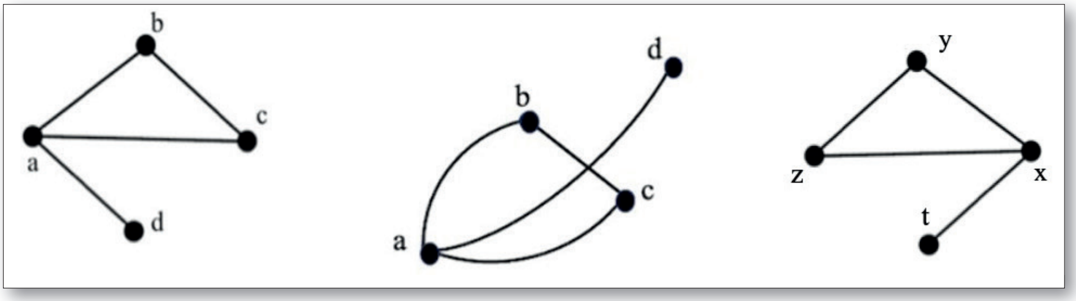
MARCO TEÓRICO

Fundamentos de la teoría de grafos

Presentamos, a continuación, los conceptos de la teoría de grafos (Biggs, 2003) que aparecerán en nuestro estudio. Un *grafo* G es un par (V, E) donde V (vértices) es un conjunto cualquiera y E (aristas) es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V. Un ejemplo de grafo es $G_1 = (\{a, b, c, d\}, \{ab,$

ac, *ad*, *bc*}), y para representarlo en el plano podemos trazar sus vértices como puntos y unir mediante líneas aquellos que estén relacionados por aristas (*representación pictórica*), como se muestra en la figura 1(a). Aunque este es el modo de representación más habitual, existen otros cuyos usos pueden convenir según el problema que se considere: matricial, intersección de objetos, listas de incidencia, etc.

La representación pictórica del grafo G_1 dada en la figura 1(a) no es única, como podemos comprobar en la figura 1(b). De hecho, cualquier deformación continua de este tipo de representaciones será también una representación del grafo G_1, siempre y cuando mantenga las conexiones originales entre vértices. Por otra parte, podemos observar que el grafo $G_2 = (\{x, y, z, t\}, \{xy, xz, xt, yz\})$, representado en la figura 1(c), transmite la misma información combinatoria que G_1. Formalmente, decimos que existe un *isomorfismo* entre G_1 y G_2, que es cualquier biyección entre sus vértices que preserve las aristas, por ejemplo: $a \leftrightarrow x$, $b \leftrightarrow y$, $c \leftrightarrow z$, $d \leftrightarrow t$.



(a) (b) (c)

Fig. 1. Representaciones pictóricas de los grafos (a) G_1, (b) G_1 y (c) G_2.

Decimos que dos vértices son *adyacentes* si están unidos por una arista, y que el *grado* de un vértice es el número de vértices adyacentes a él. Cuando todos los vértices de un grafo tienen el mismo grado *k* decimos que dicho grafo es *k-regular*. Por otra parte, decimos que un grafo *G'* es *subgrafo* de otro grafo *G* si los vértices y aristas de *G'* están contenidos en los vértices y aristas de *G*, respectivamente (véase figura 2).

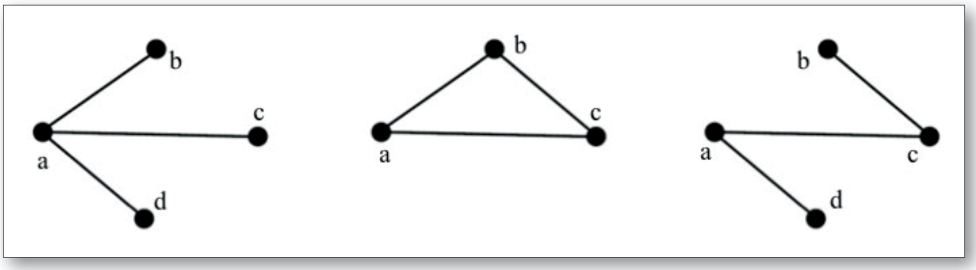


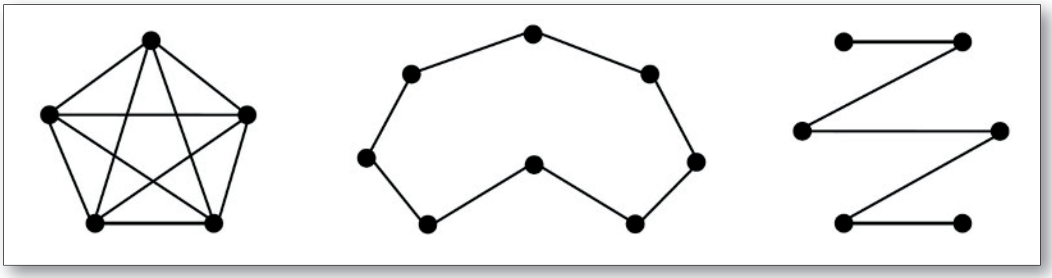
Fig. 2. Algunos subgrafos del grafo G_1

Un grafo es:

– *Bipartito* cuando sus vértices pueden dividirse en dos subconjuntos tales que todas las aristas del grafo tienen un vértice en cada uno de estos subconjuntos.
– *Conexo* si cada par de vértices puede unirse mediante una secuencia de vértices adyacentes.
– *Hamiltoniano* si posee una secuencia cerrada de vértices adyacentes que contiene a cada vértice del grafo una y solo una vez.

– *Euleriano* si admite una secuencia cerrada de vértices adyacentes que contiene a cada arista una y solo una vez. Se caracterizan por ser aquellos grafos con todos sus vértices de grado par.
– *Plano* si existe alguna representación pictórica de este sin cruces entre sus aristas.

Finalmente, existen familias clásicas, como los *grafos completos*, en los que cada par de vértices está unido por una arista; los *ciclos*, que son grafos conexos con todos sus vértices de grado 2; los *caminos*, que son grafos conexos con dos vértices de grado 1 y el resto de grado 2; y los árboles, que son aquellos grafos conexos que no contienen ciclos. En las figuras 3(a), 3(b) y 3(c) se puede ver un grafo completo de 5 vértices, un ciclo de 8 vértices y un camino de 6 vértices, respectivamente.



(a) (b) (c)

Fig. 3. Ejemplos de (a) grafo completo, (b) ciclo y (c) camino.

El modelo de Van Hiele

El modelo de Van Hiele (1986) se estructura en dos partes: los *niveles de razonamiento* y las *fases de aprendizaje*. Los primeros describen el grado de complejidad en el razonamiento de un estudiante con respecto a un determinado concepto matemático, mientras que las segundas hacen referencia a cómo puede un profesor ayudar a un estudiante a ir superando los distintos niveles (Jaime y Gutiérrez, 1990). Existen numerosos trabajos dedicados a ambas partes del modelo, tanto estudios que evalúan el razonamiento de los estudiantes para analizar características de los niveles (Gutiérrez y Jaime, 1995; Ma et al., 2015; Mayberry, 1983; Perdikaris, 1997), como artículos que proponen secuencias de enseñanza basadas en dichas fases (Abdullah y Zakaria, 2013; Abu y Abidin, 2013; Aravena et al., 2016). En este trabajo, nos centramos en los niveles de razonamiento, que para el caso geométrico son cinco:

– *Nivel 1* (*visualización*). Las figuras geométricas son percibidas de manera puramente visual y como un todo. Los estudiantes las describen sobre la base de atributos físicos o mediante comparación con objetos cotidianos, y con un lenguaje no matemático.
– *Nivel 2* (*análisis*). Viene determinado por el reconocimiento de las partes de las figuras y sus propiedades, lo cual permite describir las figuras en términos matemáticos.
– *Nivel 3* (*deducción informal*). Se reconocen relaciones entre las propiedades de las figuras, lo cual pone de manifiesto un cierto manejo de la lógica proposicional que permite hacer clasificaciones lógicas.
– *Nivel 4* (*deducción formal*). Se caracteriza por la capacidad para elaborar demostraciones matemáticas formales y el manejo de definiciones equivalentes para un mismo concepto geométrico.
– *Nivel 5* (*rigor*). Permite comprender, enunciar y comparar resultados en distintos sistemas axiomáticos, además del euclídeo, lo cual supone el máximo grado de razonamiento geométrico.

Los niveles de Van Hiele tienen una serie de características generales que los distinguen de niveles propuestos en otros marcos, por ejemplo, los niveles de algebrización que plantean Godino et al. (2014). Específicamente, estas propiedades son: 1) jerarquización y secuencialidad, de manera que cada nivel posee un mayor grado de sofisticación en el razonamiento que el anterior, por lo que un estudiante no puede haber adquirido completamente un nivel sin haber previamente completado la adquisición de los anteriores; 2) especificidad del lenguaje, pues existe una estrecha relación entre los niveles y la forma de expresarse y dar significado a determinado vocabulario; 3) continuidad, de modo que se produce el paso de un nivel a otro de manera gradual, por lo que durante algún tiempo el estudiante se encontrará en un período de transición en el que combinará razonamientos de dos niveles consecutivos (Jaime y Gutiérrez, 1990). Estos niveles, ya sean en geometría o en otros campos de la matemática (Llorens y Pérez-Carreras, 1997; Navarro y Pérez-Carreras, 2006), se describen habitualmente mediante indicadores generales para cada uno de ellos. Sin embargo, Gutiérrez y Jaime (1998) proponen una manera diferente de describirlos en el caso geométrico, a partir de los denominados *procesos de razonamiento*: *reconocimiento*, *uso de definiciones*, *formulación de definiciones*, *clasificación* y *demostración*. Según esta perspectiva, cada nivel se caracteriza por presentar indicadores del grado de habilidad que debe alcanzarse en cada uno de estos procesos. Concretamente, el proceso de reconocimiento en geometría comprende las habilidades de los estudiantes para identificar tipos y familias de figuras geométricas, así como sus partes y propiedades. En el nivel 1, este proceso se manifiesta de un modo puramente visual, de manera que los estudiantes identifican las figuras geométricas por sus características físicas globales; en el nivel 2, el reconocimiento se basa en el análisis de las partes y propiedades matemáticas de las figuras, por lo que se alcanza, así, el máximo grado de habilidad en este proceso.

Niveles de reconocimiento en teoría de grafos

El reconocimiento en teoría de grafos abarca las habilidades que los estudiantes necesitan para identificar grafos (familias, grafos concretos, subgrafos, etc.), sus propiedades y las relaciones entre estos (González y Gavilán-Izquierdo, 2017). Cabe señalar que estos autores introducen una interpretación de la habilidad matemática de reconocimiento diferente a la habitual en el modelo de Van Hiele para geometría (Gutiérrez y Jaime, 1998; Van Hiele, 1986), que consiste en ampliarla a la identificación de relaciones entre propiedades, pues usualmente este proceso solo se refiere a figuras y sus propiedades. Esta ampliación es necesaria porque en teoría de grafos aparecen muchas situaciones en las que los estudiantes no pueden reconocer una propiedad directamente (ni de forma visual ni a partir de su definición), por lo que tienen que identificarla a partir de otra propiedad con la que esté relacionada. Así, esta interpretación aporta la posibilidad de evaluar una habilidad fundamental en la resolución de numerosos problemas sobre grafos, la cual, de no ser contemplada dentro del proceso de reconocimiento, sería obviada dado que los procesos restantes son difícilmente extensibles a esta. Por tanto, González y Gavilán-Izquierdo (2017), además de proponer un primer nivel de reconocimiento de tipo visual y un segundo nivel de carácter analítico, plantean un tercer nivel de reconocimiento en el que los estudiantes son capaces de reconocer relaciones entre propiedades. Detallamos, a continuación, los indicadores de estos niveles, a los cuales hemos añadido una modificación sobre la capacidad de los estudiantes para realizar traslaciones entre modos de representación, pues hemos detectado durante el pilotaje de este trabajo que esta capacidad se desarrolla parcialmente ya desde el nivel inicial.

El reconocimiento del nivel 1 propuesto se basa en el aspecto visual de los grafos, que son percibidos como un todo, siendo sus vértices y aristas los únicos elementos que pueden reconocerse. Los estudiantes que han adquirido este nivel pueden reconocer distintas representaciones para un mismo grafo sobre la base de criterios visuales, y pueden realizar traslaciones entre distintos modos de representación conocidos, siempre y cuando exista un parecido visual entre las representaciones dadas. Por ejemplo, un estudiante podrá reconocer como iguales los grafos representados en las figuras 1(a) y 1(b) porque puede visualizar una deformación continua entre ambas imágenes, pero no razonando sobre la base de propiedades que los caracterizan (lo cual ocurre en el nivel 2). Así, pueden reconocer familias que se distinguen fácilmente por su apariencia visual, como los caminos y los ciclos, aunque pueden experimentar dificultades a la hora de reconocer otras más complejas, como los árboles, que tienen mayor diversidad en los grados de sus vértices y una definición basada en propiedades locales (esto es, asociadas a partes del grafo).

En el nivel 1 también pueden reconocerse parcialmente algunas propiedades globales (es decir, asociadas al grafo en su totalidad), dependiendo de la representación concreta dada. En efecto, la conectividad o la planaridad pueden identificarse en muchos casos de manera visual. Por ejemplo, un estudiante puede detectar la conectividad de un grafo sobre la base de que este «sea (o no) de una sola pieza», o la planaridad según «pueda (o no) estirarlo hasta que no se crucen sus aristas». No obstante, la dependencia de las representaciones concretas dadas puede acarrear errores, por ejemplo, al decir que «el grafo de la figura 1(b) no es plano porque tiene cruces entre sus aristas».

Los estudiantes de nivel 2 reconocen subgrafos y propiedades locales, lo cual les permite identificar los grafos con independencia de la representación recibida. Por ejemplo, para justificar que el grafo de la figura 1(a) es el mismo que el de la figura 1(b) pueden apoyarse en los grados de sus vértices, en lugar de recurrir a argumentos visuales. El carácter analítico de este nivel posibilita la identificación de nuevas familias de grafos en cualquier modo de representación conocido, y pueden realizar traslaciones entre estos, incluso cuando no existe un parecido visual.

En este nivel se da una mejora en el reconocimiento de las propiedades globales, a menudo definidas en términos locales, como ocurre con la conectividad, que se entiende como la propiedad de que cada par de vértices esté conectado por algún subgrafo camino. Además, los estudiantes ya no asocian las propiedades globales a representaciones concretas, sino al propio grafo. Así, la planaridad ya no se decide sobre la base de alguna representación con cruces entre aristas, sino que se busca una representación adecuada o se argumenta por qué no existe. En algunos casos, sin embargo, el reconocimiento no es viable aplicando directamente la definición de una propiedad, sino que requiere la identificación previa de otras propiedades relacionadas, lo cual supone una dificultad en este nivel. Por ejemplo, cuando un estudiante recibe un grafo con un número elevado de vértices y aristas, el estudio del carácter euleriano podría no ser factible buscando una secuencia apropiada de aristas, sino que debería examinarse la paridad de los grados de sus vértices.

En el nivel 3 se superan dificultades como la anterior, pues los estudiantes reconocen relaciones entre propiedades, en concordancia con el manejo de la lógica proposicional que se da en este nivel, que permite comprender, además, las limitaciones de algunos modos de representación. Esto se traduce en un reconocimiento más eficiente de propiedades que requieren de la detección previa de otras, como ocurre no solo en el ejemplo del carácter euleriano antes mencionado, sino también con la planaridad. Para estudiar esta propiedad, el alumno puede recurrir a un resultado que afirma que los grafos planos no pueden contener ni al grafo completo de cinco vértices ni al grafo denotado como $K_{3,3}$ (véase figura 4). Así, los estudiantes pueden justificar que un grafo es plano si tiene menos de cinco vértices, o que no es plano localizando algún subgrafo completo de cinco vértices o un subgrafo isomorfo a $K_{3,3}$. Igualmente, pueden asimilar que los subgrafos heredan algunas propiedades de los grafos que los contienen, como ocurre con el carácter bipartito.

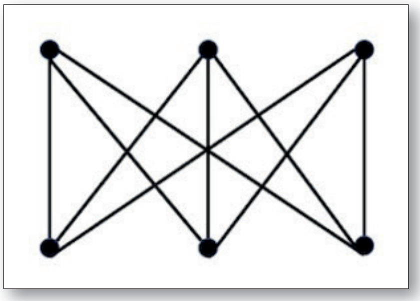


Fig. 4. Representación del grafo $K_{3,3}$.

Características de los niveles de reconocimiento en teoría de grafos

Los tres niveles de reconocimiento en teoría de grafos tienen el mismo carácter que los tres primeros niveles de Van Hiele de razonamiento geométrico: un primer nivel visual, seguido de un segundo de carácter analítico y un tercer nivel de tipo deductivo informal. De hecho, algunos de los descriptores de los niveles de reconocimiento para grafos son análogos a los descriptores para el reconocimiento de figuras geométricas, siempre que se refieran a aspectos que pueden traducirse de la geometría a la teoría de grafos, en coherencia con las similitudes señaladas sobre ambos objetos matemáticos. No obstante, las particularidades de los grafos que no pueden inferirse desde la geometría dan lugar a descriptores de los niveles de reconocimiento para grafos sin análogos en el caso geométrico: reconocimiento parcial de algunas propiedades globales de los grafos, reconocimiento de grafos con independencia de la representación dada, deducción de unas propiedades a partir de otras, etc.

Es importante destacar que los descriptores propuestos para estos niveles de reconocimiento en teoría de grafos cumplen las dos primeras características mencionadas anteriormente de los niveles de Van Hiele. Por una parte, presentan una estructura jerárquica y secuencial, pues el reconocimiento de relaciones entre propiedades (nivel 3) no puede concebirse sin un reconocimiento aislado de estas propiedades (nivel 2), que a su vez requieren del previo reconocimiento del grafo como un todo (nivel 1). Además, entre los indicadores del nivel 1 y 2 hay algunos que se refieren a destrezas que los estudiantes no poseen todavía explícitamente, pero que se desarrollarán en el nivel subsiguiente: identificación de propiedades (nivel 1) y detección de relaciones entre estas (nivel 2). Por otra parte, la percepción de los grafos que se describe en cada nivel implica necesariamente un lenguaje distinto: el vocabulario de los estudiantes del nivel 1 abarca términos que no necesariamente son propios de la teoría de grafos: «el grafo puede estirarse», «tiene una sola pieza», «tiene forma de», etc.; en el nivel 2, las palabras que se emplean sí son propias del vocabulario de los grafos: «los vértices tienen grado 2», «tiene tantos vértices como aristas», etc.; el lenguaje del nivel 3 enlaza los vocablos del nivel 2 mediante conectores lógicos: «implica», «entonces», «necesariamente», etc.

Además de esta comprobación a nivel teórico de ambas características, es necesario dar soporte empírico a estas, así como a la tercera característica, continuidad, la cual no puede deducirse de forma teórica a partir de los descriptores propuestos. Así, alcanzar el objetivo planteado en este trabajo implica necesariamente encontrar indicios empíricos de las tres características, de manera que los niveles que estamos estudiando puedan considerarse efectivamente desde la perspectiva del modelo de Van Hiele.

DESARROLLO METODOLÓGICO

Diseño del instrumento de recogida de datos

El instrumento que hemos diseñado para evaluar el proceso de reconocimiento en teoría de grafos es un cuestionario con seis tareas que permiten detectar indicadores de los niveles propuestos por González y Gavilán-Izquierdo (2017) con la modificación que hemos comentado anteriormente. Para ello, nos basamos en las tareas de reconocimiento de figuras geométricas del cuestionario que proponen Gutiérrez y Jaime (1998), compuesto por preguntas de respuesta libre, que permiten a los estudiantes una mayor oportunidad de mostrar su nivel de razonamiento que si fueran preguntas de opción múltiple.

En una primera versión, nuestro cuestionario fue validado por cuatro doctores en didáctica de las matemáticas y tres doctores en teoría de grafos (conocedores del modelo de Van Hiele), todos ajenos a la investigación, que tuvieron en cuenta que todos los niveles de reconocimiento fueran evaluados (suficiencia), que las tareas se comprendieran sintáctica y semánticamente (claridad), que estuvieran vinculados con las habilidades que evaluar, o sea, reconocimiento de grafos, de propiedades o de relaciones (coherencia), y que las tareas fueran todas necesarias y ninguna pudiera ser eliminada (relevancia). Así, los expertos fueron encuestados por cada uno de estos aspectos, y debían responder si el cuestionario los cubría o no, por lo que se daba como válido tras haber obtenido respuestas afirmativas en cada aspecto por parte de todos los expertos. Posteriormente, este fue pilotado con estudiantes de la asignatura Lógica y matemática discreta, del grado en Ingeniería del Software de la Universidad Politécnica de Madrid. Este pilotaje nos permitió modificar algunas tareas del cuestionario inicial para así obtener una versión definitiva del instrumento, que fue igualmente validado por los mismos expertos, que coincidían de nuevo en que cubría los aspectos mencionados. Además, hemos estudiado la escalabilidad del cuestionario, es decir, en qué medida las respuestas obtenidas poseen una estructura escalonada, lo que se traduce en nuestro contexto en analizar hasta qué punto los estudiantes poseen, para cada nivel, un grado de adquisición mayor o igual al de los niveles superiores. Para ello, hemos calculado el coeficiente de Guttman, que mide la escalabilidad del cuestionario considerando como errores los casos en que un estudiante presenta más adquisición de un cierto nivel que de alguno de los niveles inferiores, mostrando cuánto se adecuan las respuestas a la estructura jerárquica de los niveles de Van Hiele. Así, el valor de 0,96 obtenido para este coeficiente supone otro indicador de la fiabilidad del instrumento diseñado al ser superior a 0,6 (Menzel, 1953).

El cuestionario consta en su totalidad de seis tareas agrupadas en tres partes que evalúan respectivamente las tres habilidades que comprenden el proceso de reconocimiento en teoría de grafos: identificación de grafos (tareas 1 y 2), propiedades (tareas 3 y 4) y relaciones entre propiedades (tareas 5 y 6). Los conceptos involucrados en cada tarea, todos conocidos por los estudiantes, han sido seleccionados de modo que permitan la posibilidad de ser identificados de distintas formas, según los niveles que evaluar por la tarea en cuestión (véase tabla 1): visualmente (nivel 1), analíticamente (nivel 2) o mediante deducción de propiedades (nivel 3). Nótese que, aunque algún estudiante pudiera activar puntualmente otros procesos, además del de reconocimiento, a la hora de responder a las tareas, en nuestro análisis de las respuestas solo evaluamos los indicadores que se refieren al proceso de reconocimiento descritos en el marco teórico, tal y como explicamos a continuación.

Tabla 1.
Objetos de reconocimiento y niveles que evalúa cada tarea

Tarea	*Evalúa el reconocimiento sobre*	*Niveles que evalúa*
1	Grafos isomorfos	1 2
2	Familias de grafos (caminos y ciclos)	1 2
3	Propiedades (planaridad)	1 2
4	Propiedades (conectividad)	1 2
5	Relaciones entre propiedades	1 2 3
6	Relaciones entre propiedades	2 3

La primera parte del cuestionario (figura 5) atañe al reconocimiento de grafos. Concretamente, la tarea 1 consiste en reconocer parejas de representaciones de grafos isomorfos (con o sin parecido visual entre ellas), en algunos casos dados en distintos modos de representación; la tarea 2 requiere del reconocimiento de caminos y ciclos en distintos modos de representación. Así, la tarea 1 permite evaluar los niveles 1 y 2, dependiendo de si las justificaciones dadas o bien están basadas en el aspecto visual de las representaciones dadas (forma, modo de representación, etc.) o bien poseen un carácter analítico, que alude a la existencia de un isomorfismo o de propiedades comunes. Igualmente, la tarea 2 puede ser respondida por alumnos de estos dos niveles, y se espera que los de nivel 1 se fijen en aspectos visuales de las representaciones de caminos y ciclos que han visto anteriormente, y que los de nivel 2 sean capaces de distinguir estas familias mediante propiedades locales (como el grado) o globales (como la conectividad). Nótese que la variedad de modos de representación que intervienen en estas tareas ha sido seleccionada procurando que hubiera tanto de naturaleza gráfica como numérico-simbólica, así como que resultaran familiares a los estudiantes. De hecho, al tratarse de un cuestionario escrito en papel, hemos priorizado aquellos modos que más habitualmente han sido trabajados en las clases teóricas por los estudiantes, y hemos evitado modos que han sido empleados más frecuentemente en el laboratorio informático: matricial, listas de adyacencia, etc.

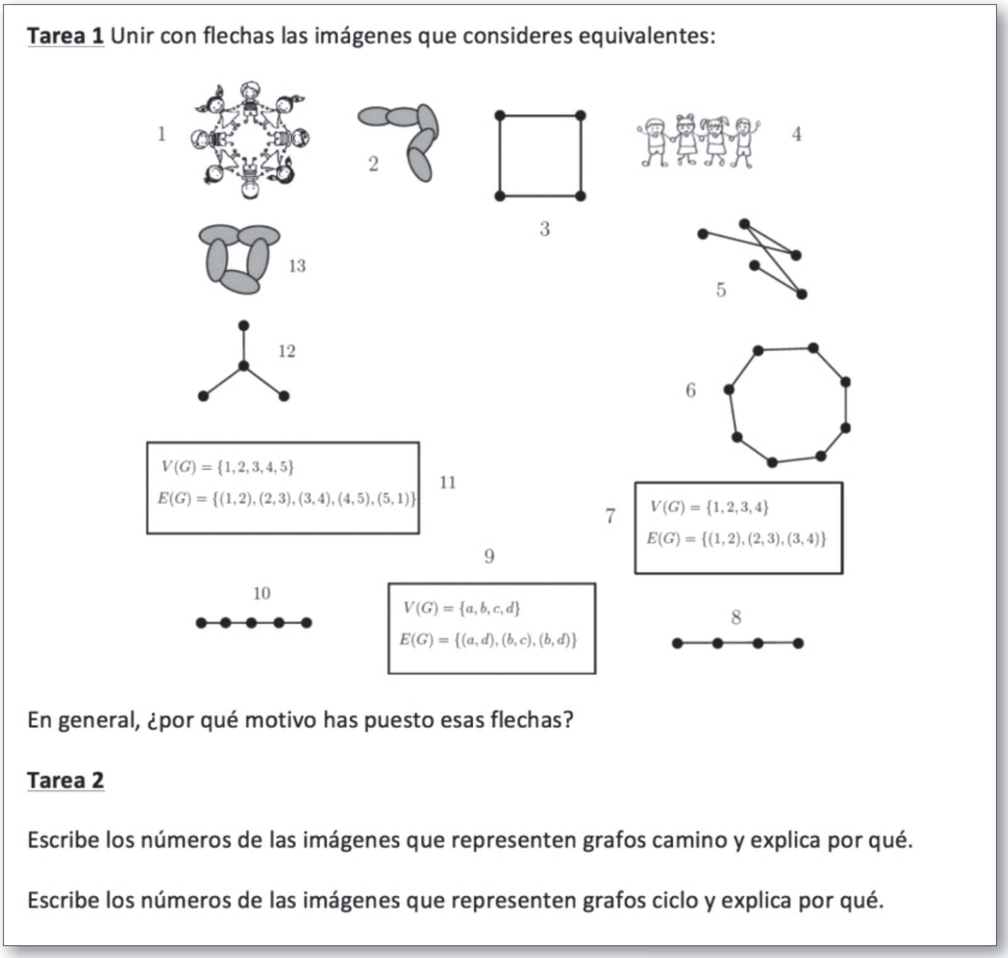
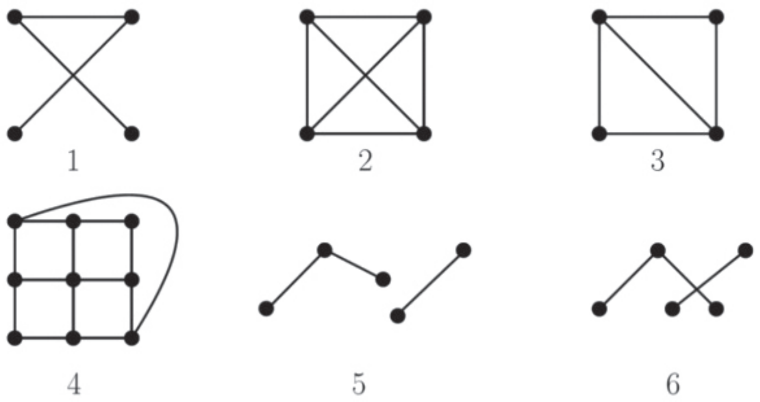


Fig. 5. Primera parte del cuestionario.

La segunda parte (figura 6) evalúa el reconocimiento de propiedades, en este caso la planaridad (tarea 3) y la conectividad (tarea 4). Ya que estas tareas no requieren del reconocimiento de relaciones entre propiedades, solo evalúan los niveles 1 y 2. Así, en la tarea 3, las respuestas de nivel 1 deben mostrar dependencia de la representación dada, justificando, por ejemplo, que un grafo «no es plano porque tiene cruces entre sus aristas». Sin embargo, cuando los alumnos se apoyan en la definición de planaridad, aludiendo a la existencia (o no) de una representación apropiada, encontramos evidencias de nivel 2. Igualmente, en la tarea 4, las respuestas de nivel 1 muestran una comprensión visual de la conectividad, como, por ejemplo, sería decir que «un grafo es conexo porque se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel». En contraste, la respuesta «un grafo no es conexo porque existen dos vértices que no están conectados por ningún camino» muestra la visión local característica del nivel 2. Cabe señalar que, en ambas tareas, hemos incluido una variedad de representaciones pictóricas suficiente para abarcar las distintas casuísticas que los estudiantes pueden encontrar al tratar de reconocer estas propiedades: representación no plana de un grafo plano, representación plana de un grafo plano, representación de un grafo no conexo en el que las componentes conexas no aparecen visualmente separadas, etc.

Tareas 3 y 4

En los siguientes grafos, escribe la letra **P** junto a los que sean planos, **NoP** junto a los que no sean planos, **C** junto a los que sean conexos y **NoC** junto a los que no sean conexos. Si es necesario, puedes poner varias letras en cada figura.



Explica para cada uno de los grafos con números 2, 4 y 6 por qué has puesto esas letras (o por qué no has puesto ninguna).

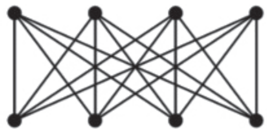
Fig. 6. Segunda parte del cuestionario.

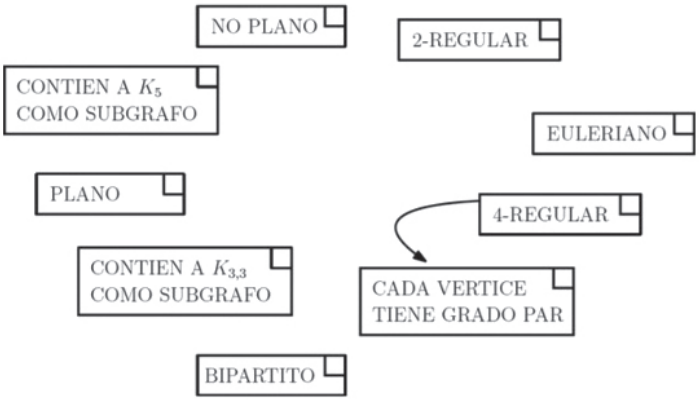
En la tercera parte (figura 7), analizamos el reconocimiento de relaciones entre propiedades. La tarea 5 permite evaluar los niveles 1, 2 y 3, pues, aunque aborda de forma explícita la detección de propiedades (niveles 1 y 2), el grafo que hemos escogido posee algunas propiedades que requieren el reconocimiento previo de otras (nivel 3). Así, las respuestas de nivel 1 muestran dependencia de la representación, argumentando la no planaridad partiendo de que la representación dada tiene cruces entre aristas. Las de nivel 2 son aquellas que solo aplican la definición de planaridad en sus argumentos, lo cual es insuficiente para completar la tarea, que requiere la relación de propiedades (nivel 3), por ejemplo, afirmando que «el grafo no puede ser plano por contener al subgrafo $K_{3,3}$». En efecto, el estudiante debería no solo darse cuenta de que el grafo contiene al subgrafo $K_{3,3}$ (lo cual se percibe de inmediato teniendo en cuenta la forma en que aparece representado), sino que tendría que relacionar esta propiedad con la no planaridad para llegar a la afirmación anterior.

La tarea 6 evalúa solo los niveles 2 y 3, pues aborda directamente el reconocimiento de relaciones entre propiedades, muy lejano al mero reconocimiento parcial de propiedades globales que se da en el nivel 1. Los estudiantes que razonan en el nivel 2 son aquellos que se restringen a propiedades del grafo dado, sin generalizar las relaciones entre ellas a grafos cualesquiera, como demanda la tarea. En cambio, los de nivel 3 razonan con argumentos generales, mostrando que las flechas entre dos propiedades indican la necesidad de que al darse la primera propiedad en un grafo cualquiera se dé la segunda: «si un grafo es 4-regular, entonces todos sus vértices tienen grado par y, por tanto, este debe ser euleriano».

Tarea 5

Dado el siguiente grafo, marca las propiedades que posee poniendo una X en la casilla que tiene cada una en su esquina superior derecha.





¿Has marcado la propiedad *NO PLANO*? Justifica por qué.

Tarea 6

Relaciona las propiedades uniéndolas con flechas como la que aparece dibujada en el ejemplo, *4-REGULAR* → *CADA VÉRTICE TIENE GRADO PAR*, que significa que si un grafo es 4-regular entonces cada uno de sus vértices tiene grado par. Puedes relacionar incluso las propiedades que no marcaste con una X.

¿Has colocado la flecha *4-REGULAR*→*EULERIANO*? Justifica por qué.

Fig. 7. Tercera parte del cuestionario.

Participantes en el estudio

El cuestionario fue realizado por 59 estudiantes, identificados como S1 hasta S59, de la asignatura Matemática Discreta, de segundo curso del grado en Ingeniería Informática-Tecnologías Informáticas de la Universidad de Sevilla. Los contenidos de esta asignatura cuatrimestral de carácter obligatorio son suficientes para responder al cuestionario, que fue administrado a los estudiantes el último día de clase del primer cuatrimestre del curso 2019-2020. Estos respondieron de forma individual y sin contar con ningún tipo de soporte bibliográfico, para lo cual dispusieron de 45 minutos. Las respuestas al cuestionario fueron calificadas por los profesores de la asignatura para que formaran parte de las tareas de evaluación de esta.

Evaluación de los niveles de reconocimiento en teoría de grafos

Los datos obtenidos fueron analizados mediante una adaptación de la metodología del cálculo de los grados de adquisición de niveles de Van Hiele en geometría propuesta por Gutiérrez et al. (1991). Esta metodología, empleada en numerosos trabajos (Abdullah y Zakaria, 2013; Aravena et al., 2016; Gutiérrez y Jaime, 1995; Gutiérrez y Jaime, 1998), permite cuantificar la adquisición que posee un estudiante de cada nivel representándola en un segmento graduado de 0 a 100 sobre el que se distinguen cinco periodos (véase tabla 2). Estos periodos, tal y como afirman los autores de la metodología, han sido definidos mediante unos límites que, aunque propuestos de manera hasta cierto punto subjetiva, caracterizan cinco formas de pensamiento cualitativamente diferentes. Para obtener los porcentajes de adquisición de cada nivel que posee un estudiante, se categorizan, en primer lugar, sus respuestas, considerando su completitud y corrección matemática; posteriormente, se cuantifican y, por último, se ponderan. Como veremos a continuación, esta metodología es igualmente factible en nuestro estudio, pues muchos de los indicadores de niveles de reconocimiento en teoría de grafos (González y Gavilán-Izquierdo, 2017) han sido obtenidos precisamente por analogía con los niveles de Van Hiele en geometría, lo cual va a facilitar que podamos categorizar las respuestas de los estudiantes de teoría de grafos de la misma manera que en el caso geométrico. Detallamos, a continuación, el funcionamiento de esta metodología ya adaptada a nuestro campo.

Tabla 2.
División cualitativa de los porcentajes de adquisición de los niveles

Grado de adquisición	nula	baja	intermedia	alta	completa
Porcentaje de adquisición	[0 ,15]	]15, 40[	[40, 60]	]60, 85[	[85, 100]

Primeramente, asignamos a las respuestas de los estudiantes a cada tarea un nivel (del 1 al 3), según los criterios que hemos desarrollado en el subapartado 3.1, y un *tipo* (del 1 al 7) según los descriptores que aparecen en la segunda columna de la tabla 3. Estos tipos de respuestas vienen graduados primeramente según su completitud, es decir, en qué medida se hace uso de los rasgos del nivel en cuestión, según sea nula (tipo 1), baja (tipos 2 y 3), intermedia (tipo 4), alta (tipos 5 y 6) o completa (tipo 7), en consonancia con la división cualitativa propuesta en la tabla 2. En segundo lugar, se distinguen algunos casos mediante la corrección matemática, valorada desde el punto de vista del nivel en cuestión, según las respuestas sean incorrectas (tipos 2 y 5) o correctas (tipos 3 y 6).

Seguidamente, asociamos a cada tipo de respuesta un valor numérico que representa el porcentaje de adquisición del nivel considerado (véase la tercera columna de la tabla 3) de acuerdo con las descripciones anteriores y los intervalos porcentuales de la tabla 2. Después, calificamos al estudiante en esa tarea con hasta tres números (puesto que evaluamos hasta tres niveles por tarea), que reflejan su grado de adquisición para cada uno de los niveles que evalúa la tarea. Para ello, adjudicamos un porcentaje nulo de adquisición en los niveles posteriores al nivel asignado, siempre que estos sean evaluados por la tarea, y completo en los niveles anteriores que evalúa dicha tarea, de acuerdo con la estructura jerárquica que presentan los indicadores de los niveles de reconocimiento descritos en el marco teórico.

Tabla 3.
Descripción de los tipos de respuesta y pesos correspondientes

Tipo	*Descripción*	*Peso (%)*
1	Respuestas que no dan información sobre el nivel adquirido por el estudiante, por estar vacías o por no ser codificables.	0
2	Respuestas que reflejan rasgos de un cierto nivel, pero que son muy incompletas y matemáticamente incorrectas.	20
3	Respuestas matemáticamente correctas, pero realizadas por medio de razonamientos de un cierto nivel que son incompletos y poco elaborados.	25
4	Respuestas que reflejan claramente rasgos de dos niveles de razonamiento consecutivos, que pueden ser tanto matemáticamente correctas como incorrectas, pero que están suficientemente justificadas.	50
5	Respuestas que reflejan claramente un nivel de razonamiento y presentan una argumentación completa, pero son matemáticamente incorrectas.	75
6	Respuestas matemáticamente correctas que reflejan un nivel dado, pero no están completamente justificadas.	80
7	Respuestas correctas desde el punto de vista matemático y que contienen una argumentación completa y correcta para un nivel de razonamiento dado.	100

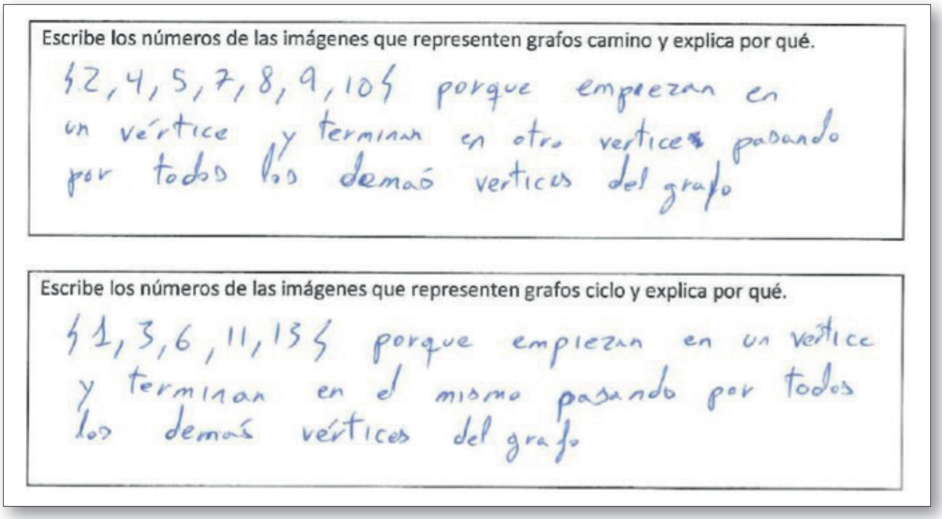
A modo de ejemplo, si una respuesta a la tarea 5, que permite distinguir entre los niveles 1, 2 y 3, es categorizada con nivel 2 y tipo 5, la calificación de esta tarea es (100, 75, 0). En cambio, una respuesta a la tarea 1, que solamente abarca los niveles 1 y 2, que sea de nivel 1 y tipo 3, tendrá una calificación (25, 0, --).

Una vez calificadas las seis tareas, la media aritmética de cada componente proporciona un vector numérico con el grado de adquisición de cada nivel, teniendo en cuenta que las componentes sin valor asignado no se incluyen en el cálculo de la media. Por ejemplo, un estudiante que en las seis tareas obtiene respectivamente las calificaciones (100, 80, --), (75, 0, --), (100, 75, --), (100, 80, --), (100, 100, 75), (--, 0, 0), tendría asociado el vector (95, 56, 38). Nótese el redondeo a un entero en las componentes del vector, tal y como se realiza en el trabajo de Gutiérrez et al. (1991), suficiente para orientarnos sobre la adquisición de cada nivel por parte del estudiante. De hecho, este vector numérico tiene una lectura en términos cualitativos mediante la escala de la tabla 2 para cada una de las componentes (en lo sucesivo, nos referimos a ambos vectores respectivamente como *vector cuantitativo* y *vector cualitativo* de los grados de adquisición de los niveles de reconocimiento en teoría de grafos). Así, el vector cualitativo correspondiente al estudiante anterior es (completa, intermedia, baja), es decir, presenta una adquisición completa del nivel 1, intermedia del nivel 2 y baja del nivel 3.

Categorización de las respuestas

Mostramos, a continuación, distintas respuestas de estudiantes con la asignación correspondiente de nivel y tipo de respuesta. Estas asignaciones fueron realizadas individualmente por cada uno de los autores de este trabajo y posteriormente discutidas por el equipo al completo, aceptándose directamente las que habían sido categorizadas de la misma forma por todos los investigadores y discutiéndose aquellas en las que había alguna discrepancia, para llegar finalmente a un consenso.

Un ejemplo de respuesta de un estudiante a la tarea 2 aparece en la figura 8, que muestra una fuerte componente visual y ausencia de terminología matemática, más allá de la mención de las palabras *grafo* y *vértice*. Su descripción tanto de camino como de ciclo se basa en la idea de recorrer físicamente el grafo, y emplea términos como «empiezan en», «terminan en», «pasando por». Se trata, por tanto, de una respuesta de nivel 1. La respuesta es bastante completa, ya que identifica todos los caminos y ciclos propuestos e incluye la idea de conectividad cuando se refiere a «pasando por todos los demás vértices». Sin embargo, no es correcta ni siquiera desde un punto de vista visual, ya que, al no incluir ninguna referencia a las aristas, su explicación se corresponde con la idea de grafo hamiltoniano en general y no particularmente con la de camino o la de ciclo. Se trata, por lo tanto, de una respuesta de tipo 5.



Escribe los números de las imágenes que representen grafos camino y explica por qué.

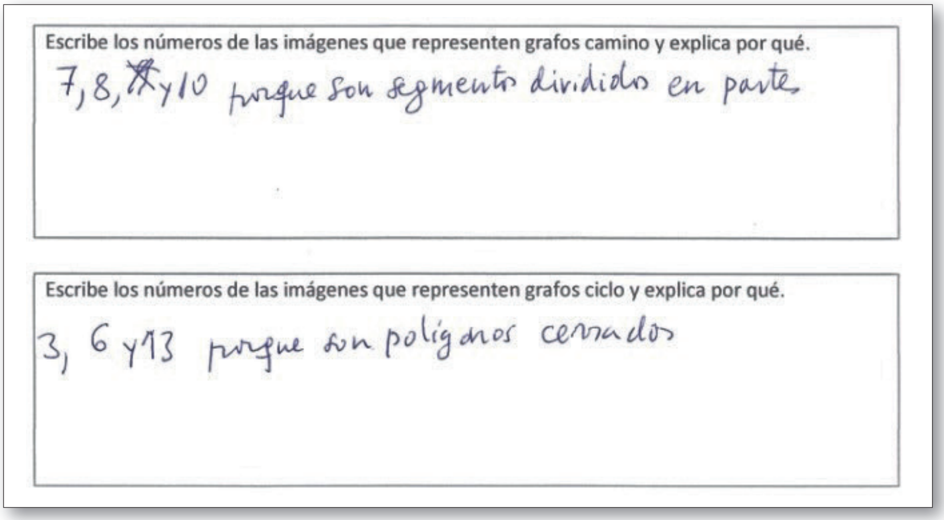
{2, 4, 5, 7, 8, 9, 10} porque empiezan en un vértice y terminan en otro vertices pasando por todos los demás vertices del grafo

Escribe los números de las imágenes que representen grafos ciclo y explica por qué.

{1, 3, 6, 11, 13} porque empiezan en un vértice y terminan en el mismo pasando por todos los demás vértices del grafo

Fig. 8. Ejemplo de respuesta de nivel 1 y tipo 5 a la tarea 2.

En contraste, la figura 9 muestra la respuesta de un estudiante a la misma tarea también con rasgos de nivel 1, pero mucho más incompleta que la anterior. Sin embargo, las ideas que aparecen son correctas dentro de la manera de razonar del nivel 1 (aunque no lo sean en los términos que acepta la comunidad matemática), pues son coherentes con las representaciones prototípicas del camino y el ciclo, que son, de hecho, las únicas que ha anotado. El uso limitado del nivel 1 que se muestra y el carácter correcto de la respuesta hacen que sea categorizada con el tipo 3.



Escribe los números de las imágenes que representen grafos camino y explica por qué.

7, 8, ~~11~~ y 10 porque son segmentos divididos en parte

Escribe los números de las imágenes que representen grafos ciclo y explica por qué.

3, 6 y 13 porque son polígonos cerrados

Fig. 9. Ejemplo de respuesta de nivel 1 y tipo 3 a la tarea 2.

RESULTADOS

Todos los participantes en el estudio presentan una adquisición al menos intermedia (considerando el orden nula ≤ baja ≤ intermedia ≤ alta ≤ completa) del nivel 1 (véase tabla 4) suficiente para poder reconocer grafos en distintos modos de representación por su apariencia visual, así como algunas propiedades globales, aunque condicionados por las representaciones concretas dadas. Respecto al nivel 2, más del 30 % de los estudiantes manifiestan adquisición nula o baja del nivel, lo que denota la ausencia de destrezas propias de este nivel, como son el uso adecuado de propiedades locales y la independencia de la representación dada, ambas necesarias para distinguir grafos en cualquier modo de representación y para detectar correctamente propiedades globales. En cuanto al nivel 3, más del 60 % de los estudiantes muestra adquisición nula o baja, lo cual supone un impedimento a la hora de reconocer propiedades de manera indirecta, es decir, detectando previamente otras que le habrían proporcionado un reconocimiento más eficiente.

Tabla 4.
Número de estudiantes que alcanza cada grado de adquisición para cada nivel

Adquisición Nivel	*Nula*	*Baja*	*Intermedia*	*Alta*	*Completa*
1	0	0	7	19	33
2	6	16	15	18	4
3	26	10	15	6	2

El 90 % de los estudiantes posee vectores cuantitativos de los grados de adquisición con las componentes en orden decreciente para los tres niveles, mientras que el 10 % restante muestra más adquisición de un determinado nivel que de alguno de los niveles inferiores (véase tabla 5). Concretamente, todos estos estudiantes tienen más adquisición del nivel 3 que del nivel 2 en términos cuantitativos, aunque los vectores cualitativos de dos de ellos, S36 y S38, muestran adquisiciones similares de ambos niveles. El caso de los estudiantes S52 y S55 es parecido, pues si solo hubieran obtenido una unidad menos en sus vectores cuantitativos, los vectores cualitativos correspondientes también mostrarían adquisiciones similares de los niveles 2 y 3, de acuerdo con la elección de los límites de los intervalos de la tabla 2 propuestos por Gutiérrez et al. (1991).

Tabla 5.
Estudiantes cuyos vectores cuantitativos
de los grados de adquisición no tienen sus componentes en orden decreciente

Grados de adquisición Estudiante	*Vector cuantitativo*	*Vector cualitativo*
S36	(100, 73, 78)	(completa, alta, alta)
S38	(95, 67, 80)	(completa, alta, alta)
S39	(100, 67, 88)	(completa, alta, completa)
S40	(85, 50, 90)	(completa, intermedia, completa)
S52	(91, 38, 40)	(completa, baja, intermedia)
S55	(43, 20, 40)	(intermedia, baja, intermedia)

Los estudiantes que participaron en el estudio han sido agrupados en ocho perfiles según los grados de adquisición de los tres niveles evaluados. De este modo, aparecen ordenados en la tabla 6, desde el perfil P1, con una adquisición completa de los dos primeros niveles y al menos intermedia del tercero, hasta el perfil P8, con una adquisición incompleta incluso del primer nivel. Cabe señalar que solo cuatro de los estudiantes, S39, S40, S52 y S55, no encajan exactamente en el perfil asignado, en todos los casos por tener más adquisición del nivel 3 que el resto de los estudiantes de su perfil.

Tabla 6.
Perfiles de reconocimiento obtenidos en el estudio

Adquisición Perfil	*Nivel 1*	*Nivel 2*	*Nivel 3*	*Número de estudiantes*
P1	Completa	Completa	Alta o intermedia	4
P2	Completa	Alta	Alta	4*
P3	Completa	Alta	≤ Intermedia	10
P4	Completa	Intermedia	≤ Baja	12*
P5	Completa	≤ Baja	Nula	3*
P6	Alta	Alta	Intermedia	4
P7	Alta	Intermedia	≤ Baja	3
P8	Alta o intermedia	≤ Baja	Nula	19*

*Uno de los estudiantes no verifica la condición de nivel 3

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos dan soporte a la validez de la propuesta de niveles de reconocimiento en teoría de grafos desde la perspectiva del modelo de Van Hiele (González y Gavilán-Izquierdo, 2017), con la modificación mencionada en el marco teórico de este trabajo. En efecto, la variedad de perfiles obtenidos, desde los puramente visuales (P5 y P8) hasta aquellos con capacidad de deducción de propiedades (P1 y P2), proviene de una diversidad en las respuestas de los estudiantes que nos ha permitido detectar indicadores de los tres niveles propuestos. De hecho, esta diversidad de respuestas nos ha llevado también a poder comprobar empíricamente que los niveles de reconocimiento propuestos cumplen una de las características esenciales de los niveles de Van Hiele: la especificidad del lenguaje. Concretamente, es destacable que hayamos obtenido respuestas de tipo visual (nivel 1), con un vocabulario no necesariamente propio de la teoría de grafos (ni tan siquiera de la matemática), en contraste con las respuestas que muestran un reconocimiento de tipo analítico (nivel 2) o deductivo informal (nivel 3), que sí son esperables en tanto que vienen dadas por el lenguaje matemático que requiere la asignatura que cursaban los estudiantes.

Respecto a la característica de jerarquía y secuencialidad, los resultados generales obtenidos por el conjunto de estudiantes revelan que cuanto mayor es el nivel, menor es el grado de adquisición, lo cual supone un factor de validación global para esta característica (Gutiérrez et al., 1991). Asimismo, el elevado porcentaje de estudiantes que tienen asignados vectores cuantitativos con las componentes en orden decreciente supone un factor de validación local. Más aún, los vectores cualitativos de los perfiles P1, P4, P5 y P8 se adecuan estrictamente al carácter jerárquico de los niveles de Van Hiele, en el sentido de que aquellos que tienen una adquisición al menos intermedia de un nivel tienen adquisición completa de los niveles anteriores (salvo que se trate del nivel 1, que no tiene niveles precedentes). Sin embargo, los estudiantes de los perfiles restantes, P2, P3, P6 y P7, poseen al menos dos niveles consecutivos con adquisición intermedia o alta, lo cual podría hacernos pensar que contradicen el carácter jerárquico de los niveles. Sin embargo, existen otros estudios (Gutiérrez y Jaime, 1995; Gutiérrez et al., 1991) con resultados similares a los nuestros, pero para el caso geométrico, en los que se interpretan precisamente como indicio de que los estudiantes pueden desarrollar dos niveles consecutivos de razonamiento al mismo tiempo, aunque generalmente poseen más adquisición del nivel inferior. Así, este hecho da apoyo empírico a la tercera característica de los niveles de Van Hiele, continuidad, que viene también respaldada globalmente por la variedad de grados de adquisición obtenidos en los resultados generales para cada nivel.

Los únicos casos detectados de estudiantes que no se adaptan a la característica jerárquica, con más adquisición de un determinado nivel que de alguno de los niveles inferiores, presentan una frecuencia similar a la que han registrado otros estudios (Abu y Abidin, 2013; Gutiérrez et al., 1991; Ma et al., 2015; Mayberry, 1983). En nuestro caso, estos estudiantes poseen más adquisición del nivel 3 que del nivel 2, fenómeno que también ha aparecido en otros trabajos que han abordado el caso geométrico (Perdikaris, 1997). No obstante, es necesario explorar en futuros trabajos si estos resultados anómalos podrían estar motivados por el hecho de que el nivel 3 haya sido evaluado por menos tareas del cuestionario que los otros dos niveles. Igualmente, podríamos indagar en otras posibles fuentes de distorsión, como la variabilidad del nivel de razonamiento del estudiante en función del concepto tratado (Ma et al., 2015; Mayberry, 1983), el estilo cognitivo particular de cada estudiante (Perdikaris, 1997), el aprendizaje memorístico (Mayberry, 1983) o el tipo de enseñanza recibida (Gutiérrez et al., 1991; Gutiérrez y Jaime, 1995).

Los resultados de este trabajo, además de permitirnos cumplir con nuestro objetivo, revelan que la mayoría de los estudiantes no poseen las habilidades de reconocimiento suficientes para realizar las tareas que requiere una asignatura sobre grafos de nivel universitario destinada a ingenieros informáticos. Dichas tareas demandan la comprensión y realización de demostraciones de enunciados matemáticos, que necesitan del reconocimiento de propiedades (nivel 2) y de las relaciones entre estas (nivel 3). Por tanto, estamos ante un caso de estudiantes que razonan en un determinado nivel pero que reciben una enseñanza que demanda un nivel superior, lo cual señala la importancia de dar más protagonismo al proceso de reconocimiento en la enseñanza de la teoría de grafos, así como la utilidad de instruir a los docentes de esta materia en el modelo de Van Hiele, de manera que puedan tener conocimiento del nivel de razonamiento de sus estudiantes y así poder impartir una docencia acorde con sus capacidades.

Nuestro estudio constituye, así, un aporte a las investigaciones educativas en matemática discreta, concretamente sobre el aprendizaje de la teoría de grafos, cuya ausencia en la literatura ya ha sido señalada al inicio del trabajo (Hazzan y Hadar, 2005; Medová et al., 2019). Específicamente, no solo hemos aportado indicadores de niveles de reconocimiento validados empíricamente, sino también el diseño de un instrumento de evaluación para un proceso que es esencial en la resolución de problemas sobre grafos. Asimismo, hemos extendido el uso del método de cálculo de los grados de adquisición (Gutiérrez et al., 1991), empleado solo en el campo de la geometría, al ámbito de la teoría de grafos.

Finalmente, las evidencias obtenidas en el trabajo sobre el proceso de reconocimiento en teoría de grafos en particular son indicios de la viabilidad de ampliar el alcance del modelo de Van Hiele al ámbito de la teoría de grafos en general. Así, el siguiente paso natural es explorar los restantes procesos de razonamiento extrapolados a este campo de la matemática. De hecho, el proyecto que hemos planteado a largo plazo incluye este objetivo, así como abordar aspectos de enseñanza para comprobar si, como muestran numerosos trabajos (Abdullah y Zakaria, 2013; Abu y Abidin, 2013; Aravena et al., 2016), la secuenciación de tareas según las fases del modelo de Van Hiele propicia una mejor adquisición de los niveles con respecto a la enseñanza tradicional. El uso del modelo de Van Hiele en teoría de grafos respondería, así, a la demanda de desarrollar marcos teóricos para investigaciones en matemática discreta, como señalan Ouvrier-Buffet et al. (2018), lo que abre la puerta a numerosas vías de exploración, dado que es un modelo consolidado sobre el que se ha investigado intensamente en las últimas décadas.

REFERENCIAS

Abdullah, A. H. y Zakaria, E. (2013). The effects of Van Hiele's phases of learning geometry on students' degree of acquisition of Van Hiele levels. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *102*, 251-266. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2013.10.740

Abu, M. S. y Abidin, Z. Z. (2013). Improving the levels of geometric thinking of secondary school students using geometry learning video based on Van Hiele theory. *International Journal of Evaluation and Research in Education*, *2*(1), 16-22. https://doi.org/10.11591/ijere.v2i2.1935

Aravena, M., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2016). Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en estudiantes de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. *Enseñanza de las Ciencias*, *34*(1), 107-128. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1664

Biggs, N. L. (2003). *Discrete mathematics* (2.ª ed.). Oxford University Press.

Gavilán-Izquierdo, J. M. y González, A. (2016). Investigación sobre el concepto de grafo a través del modelo de Van Hiele. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 597). SEIEM.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

González, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2017). Analizando el reconocimiento de grafos a través del modelo de Van Hiele. En Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Libro de actas* (pp. 286-293). FESPM.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1995). Towards the design of a standard test for the assessment of the student's reasoning in geometry. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th PME Conference* (vol. 3, pp. 11-18). PME.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning problems in Mathematics*, *20*(2-3), 27-46. https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/GutJai98.pdf

Gutiérrez, A., Jaime, A. y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 237-251. https://doi.org/10.2307/749076

Hart, E. W. y Sandefur, J. (Eds.) (2018). *Teaching and learning discrete mathematics worldwide: Curriculum and research*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70308-4

Hazzan, O. y Hadar, I. (2005). Reducing abstraction when learning graph theory. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *24*(3), 255-272.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Alfar.

Llorens, J. L. y Pérez-Carreras, P. (1997). An extension of van Hiele's model to the study of local approximation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *28*(5), 713-726. https://doi.org/10.1080/0020739970280508

Ma, H., Lee, D., Lin, S. y Wu, D. (2015). A study of Van Hiele geometric thinking among 1st through 6th graders. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *11*(5), 1181-1196. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1412a

Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(1), 58-69. https://doi.org/10.2307/748797

Medová, J., Páleníková, K., Rybanský, L. y Naštická, Z. (2019). Undergraduate students' solutions of modeling problems in algorithmic graph theory. *Mathematics*, *7*, 572-587. https://doi.org/10.3390/math7070572

Menzel, H. (1953). A new coefficient for scalogram analysis. *The Public Opinion Quarterly*, *17*(2), 268-280. https://doi.org/10.1086/266460

Navarro, M. y Pérez-Carreras, P. (2006). Constructing a concept image of convergence of sequences in the van Hiele framework. En A. Selden, F. Hitt y G. Harel (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education VI* (pp. 61-98). AMS. https://doi.org/10.1090/cbmath/013

Ouvrier-Buffet, C. (2011). A mathematical experience involving defining processes: In-action definitions and zero-definitions. *Educational Studies in Mathematics, 76*(2), 165-182. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9272-3

Ouvrier-Buffet, C., Meyer, A. y Modeste, S. (2018). Discrete mathematics at university level. Interfacing mathematics, computer science and arithmetic. En V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild y N. M. Hogstad (Eds.), *Proceedings of INDRUM 2018* (pp. 255-264). University of Agder.

Perdikaris, S. C. (1997). Using the cognitive styles to explain an anomaly in the hierarchy of the Van Hiele levels. *Journal of Mathematics Sciences & Mathematics Education*, *6*(2), 35-43.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Academic Press.

Analysing Profiles of Recognition in Graph Theory

Antonio González, Inés Gallego-Sánchez, José María Gavilán-Izquierdo
Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla, Sevilla, España
gonzalezh@us.es, inesgal@us.es, gavilan@us.es

María Luz Puertas
Departamento de Matemáticas, Universidad de Almería, La Cañada, Almería, España
mpuertas@ual.es

This work focuses on identifying profiles of recognition in graph theory to give empirical support to a theoretical proposal of Van Hiele's levels of reasoning for the recognition process in graph theory. This proposal, introduced by González and Gavilán-Izquierdo (2017), is based on the descriptors of Van Hiele's levels in geometry, the analogy between graphs and geometric figures, a review of research on teaching and learning graph theory, and the teaching experience of the authors in this subject. Specifically, three levels of development for the recognition process in graph theory are proposed. These levels have the same nature as the first three Van Hiele's levels of geometric reasoning: a first level of visual character, followed by an analytic one, and a third level with an informal deductive character.

The descriptors proposed for these three levels of recognition in graph theory fulfil two of the characteristics of Van Hiele's levels: hierarchy and sequence and language specificity. It should be noted that the descriptors referring to aspects that can be extrapolated from geometry to graph theory are analogous to the descriptors for the recognition levels of geometric figures, in coherence with the similarities between both mathematical objects. However, the particularities of graphs that cannot be inferred from geometry give rise to descriptors without analogues in the geometric case, such as partial recognition of some global properties of graphs, recognition of graphs independently of the given representation, deduction of some properties from others, etc. Thus, the recognition process in graph theory consists of three levels, as opposed to the geometric case, with two levels of recognition.

To empirically test this proposal of recognition levels for graphs, a questionnaire with six tasks is designed. This questionnaire makes it possible to detect all indicators of the recognition levels theoretically proposed. The participants in our study are 59 students in their second year of the degree in Computer Science-Information Technology of the University of Seville. The data obtained are analyzed by means of an adaptation of the calculation method of the degrees of acquisition in Van Hiele's levels in geometry (Gutiérrez et al., 1991). This method generates, for each student, the percentages of acquisition of each level, which are distributed in five qualitatively different intervals.

The results show that all participants had at least an intermediate acquisition of the first level. Regarding level 2, more than 30 % of the students show low or no acquisition, denoting the absence of the main skills of this level. As for level 3, more than 60 % of the students show low or no acquisition. Additionally, eight different profiles of recognition according to the degrees of acquisition of the levels evaluated are identified. Thisvariety of profiles provides empirical evidence on the three levels of recognition proposed for graphs, specifically, on the three essential characteristics of Van Hiele's levels: hierarchy and sequence, language specificity, and continuity.

Among the general conclusions that can be drawn from our study, the viability of the extension of Van Hiele's model in graph theory stands out, thus suggesting further research on the rest of the reasoning processes: use and formulation of definitions, classification, and proof. Also, this paper shows the potential to extrapolate the computation method of the degrees of acquisition, used only in the field of geometry so far, to the field of graph theory. Finally, our study constitutes a contribution to educational research on discrete mathematics, specifically, on the learning of graph theory, whose absence in the literature has already been pointed out by several authors.