



Cambios en la comprensión de las relaciones entre polígonos en estudiantes de 8-9 años

Changes in the Understanding of Relationships between Polygons in 8 and 9-year-old Students

Melania Bernabeu, Mar Moreno, Salvador Llinares

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante, San Vicente del Raspeig, Alicante, España

melania.bernabeu@ua.es, mmoreno@ua.es, sllinares@ua.es

RESUMEN • El objetivo de este estudio es identificar cambios en la comprensión del concepto de polígono y la relación entre polígonos en estudiantes de tercero de educación primaria al participar en un experimento de enseñanza. Analizamos 59 respuestas de estudiantes a un cuestionario, antes y después de una secuencia de enseñanza considerando las nociones de deconstrucción dimensional y aprehensiones cognitivas mediante el uso del *software* CHIC. Los cambios muestran una mayor coordinación de las aprehensiones al razonar con los atributos no relevantes para la definición de polígono que apoya la generación de clases de polígonos. Estos cambios subrayan el carácter multifacético de la deconstrucción dimensional y la importancia de las aprehensiones cognitivas en el desarrollo del pensamiento geométrico y en particular en la comprensión de las relaciones entre polígonos en estudiantes de primaria.

PALABRAS CLAVE: Análisis implicativo; Concepto de polígono; Desconstrucción dimensional; Razonamiento geométrico; Clasificación de figuras geométricas.

ABSTRACT • This study aims to identify changes in the third-grade students' understanding of the polygon concept and the relationship between polygons when participating in a teaching experiment. We analysed 59 student answers to a test, before and after a teaching sequence, considering the notions of dimensional deconstruction and cognitive apprehensions. For the analysis, we used the CHIC software. The changes show increased coordination of apprehensions when students reason with no relevant attributes in the polygon definition that support the generation of polygon classes. These changes underline the multifaceted nature of dimensional deconstruction and the importance of cognitive apprehensions in the development of geometric thinking and particularly in the understanding of relationships between polygons in primary school students.

KEYWORDS: Implicative analysis; Polygon concept; Dimensional deconstruction; Geometric reasoning; Classification of geometric figures.

Recepción: diciembre 2019 • Aceptación: diciembre 2021

INTRODUCCIÓN

Pasar de reconocer atributos de las figuras geométricas a identificar cuándo dos figuras perceptualmente diferentes son ejemplos de una misma clase es fundamental en el desarrollo de la comprensión de las figuras geométricas (Battista, 2007; Clements, Swaminathan, Hannibal y Sarama, 1999; Elia y Gagatsis, 2003; Levenson, Tirosh y Tsamir, 2011). En particular, razonar con los atributos de las figuras para identificar una clase se apoya en la capacidad de dotar de significado matemático a partes de las figuras que muestra la relación entre lo perceptual y lo conceptual (Fischbein y Nachieli, 1998). Investigaciones previas enfatizan la importancia de la capacidad de identificar semejanzas y diferencias entre figuras geométricas y conectar las descripciones informales con el uso preciso del lenguaje en el desarrollo de la comprensión de las figuras geométricas (Hannibal y Clements, 2000; Hershkowitz, 1989; Tsamir, Tirosh y Levenson, 2008).

La comprensión de las relaciones entre las figuras implica el paso de reconocer un listado de atributos de las figuras a identificar semejanzas y diferencias entre estas (Battista, 2007; Battista, Clements, Arnoff, Battista y Borrow, 1998; Bernabeu y Llinares, 2017; Bernabeu, Moreno y Llinares, 2021; Clements et al., 1999). Por ejemplo, considerar que un conjunto de polígonos perceptualmente diferentes son paralelogramos porque tienen cuatro lados paralelos dos a dos (Fujita, 2012). En este sentido, la capacidad de identificar el atributo que caracteriza a una clase de polígonos se apoya en tener en cuenta la información procedente del análisis de cada una de las figuras.

Las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de los polígonos y clases de polígonos están relacionadas con una imagen del concepto vinculada a ejemplos prototípicos (de Villier, 1994; Kaur, 2015; Tall y Vinner, 1981). Estas dificultades han sido descritas en educación infantil (Sarama y Clements, 2009) y en educación secundaria (Fujita, 2012; Gogou, Gagatsis, Gridos, Elia y Deliyianni, 2020; Seah y Horne, 2019), pero menos en educación primaria (Moreno, Bernabeu, Gagatsis, Llinares y Panaoura, 2019; Sinclair et al., 2016). Estas dificultades generan limitaciones en la construcción de las estructuras conceptuales vinculadas a los polígonos y caracterizadas por las relaciones entre las ideas matemáticas y sus formas de representación. Así, comprender el concepto de polígono y clases de polígono se puede caracterizar por la manera en la que los estudiantes reconocen diferentes atributos de los polígonos, identifican significados matemáticos comunes en polígonos perceptualmente diferentes y explican sus procesos de construcción o justifican sus decisiones en diferentes modos de representación.

Desde esta perspectiva, es necesario generar información sobre cómo estudiantes de educación primaria comprenden el concepto de polígono y clases de polígonos a partir del razonamiento con los atributos de los polígonos relacionándolos, construyendo polígonos con condiciones o identificando atributos que definen clases de polígonos.

MARCO TEÓRICO

Reconocer atributos en un polígono conlleva pasar de mirar la figura como un todo a fijarse en sus partes dotándolas de significado matemático. Por ejemplo, para convertir un ejemplo de no polígono en polígono es necesario reconocer los atributos de la definición de polígono que no se cumplen para modificarlos. Desde esta perspectiva, comprender el concepto de polígono (y las relaciones entre polígonos) está vinculado a que los estudiantes puedan inferir o asociar significado matemático a sus partes. Por lo que es posible identificar rasgos de la comprensión a partir del reconocimiento y uso que los estudiantes hacen de las nociones geométricas expresados en diferentes modos de representación (verbal o no verbal).

De este modo, dotar de significado matemático a las partes de las figuras para resolver tareas geométricas implica una simbiosis entre conceptualización, visualización y lenguaje (Duval, 2005; Sinclair, Cirillo y De Villier, 2017). Duval (1995, 2017) indicó que esta simbiosis se apoya en diferentes procesos de generación y organización de la información sobre las figuras geométricas. Battista et al. (1998) denominaron *estructuración espacial* a este conjunto de procesos que implican razonar con la información generada subrayando el hecho de que evidencia un proceso de abstracción, tales como la deconstrucción dimensional de la figura (Duval, 2017), la coordinación de las aprehensiones cognitivas (Duval, 1995) y el desarrollo de un lenguaje propio de las matemáticas.

La *deconstrucción dimensional* de una figura geométrica permite fijarse en sus partes para dotarlas de significado matemático (Duval, 2017), lo que posibilita la identificación del atributo común de figuras perceptualmente diferentes al asociarle un mismo significado matemático. Por ejemplo, ante un triángulo isósceles obtusángulo y un triángulo escaleno obtusángulo, el estudiante puede identificar el ángulo obtuso como atributo común en ambas figuras, independientemente de la longitud de los lados. Así, consideramos que la deconstrucción dimensional se evidencia mediante la coordinación de diferentes *aprehensiones cognitivas*. La *aprehensión secuencial* permite construir una figura con ciertas condiciones o describir su construcción. La *aprehensión discursiva* permite relacionar partes de la figura con propiedades geométricas. Finalmente, la *aprehensión operativa* permite modificar una figura para resolver una tarea. Por ejemplo, la *aprehensión secuencial* permite dibujar un cuadrilátero que sea cóncavo o describir su construcción; la *aprehensión discursiva* permite explicar por qué el ejemplo dibujado cumple la condición de ser un cuadrilátero cóncavo; y la *aprehensión operativa* permite modificar un cuadrilátero que no es cóncavo en cóncavo. De esta manera, la *estructuración espacial* (Battista et al., 1998) se apoya en la deconstrucción dimensional (Duval, 2017) y se manifiesta cuando los estudiantes *identifican* el atributo común en un conjunto de polígonos perceptualmente diferentes, pudiendo *explicar* matemáticamente el atributo que define la clase (aprehensión discursiva) y *dibujar* ejemplos y no ejemplos de la clase (aprehensión secuencial) (Duval, 1995).

Teniendo en cuenta estos referentes teóricos, nuestra hipótesis es que la implementación de una secuencia de enseñanza diseñada para favorecer la capacidad de estructuración espacial por parte de los estudiantes debería desarrollar la deconstrucción dimensional de las figuras geométricas, ya que el reconocimiento de atributos dotándolos de significado matemático es un paso previo para identificar el atributo común en un conjunto de polígonos y construir la idea de clase. De este modo, nos planteamos identificar cambios en la comprensión del concepto de polígono y de la relación entre polígonos en estudiantes de tercero de educación primaria al participar en un experimento de enseñanza.

MÉTODO

Participantes y contexto curricular

Participaron 59 estudiantes de tercero de educación primaria (8-9 años), de dos clases de un colegio público español. Los estudiantes participaron en un experimento de enseñanza cuyo objetivo era favorecer la capacidad de estructuración espacial por parte de los estudiantes, centrando la atención en desarrollar la deconstrucción dimensional de las figuras geométricas, en particular, el concepto de polígono (figura plana cerrada con lados rectos y no cruzados) y algunas clases de polígonos (cóncavos/convexos; según el número de lados; simétricos; clases de triángulos; cuadriláteros) (tabla 1) (Bernabéu, Moreno y Llinares, 2019). El experimento de enseñanza se realizó en tercero de educación primaria ya que el currículo de geometría incluye reconocimiento de polígonos, clasificación y reproducción de clases de polígonos cóncavos/convexos, simétricos y según el número de lados. Para disponer de más variedad de ejemplos de clases de polígonos incluimos clases de triángulos y cuadriláteros propios del

currículo de cuarto de primaria. Los estudiantes no habían recibido instrucción específica sobre contenidos geométricos durante el curso académico en el que implementamos el experimento de enseñanza.

Experimento de enseñanza

El experimento de enseñanza permite obtener información sobre cómo la enseñanza puede ayudar a resolver problemas de aprendizaje de los estudiantes (Stylianides y Stylianides, 2013), en nuestro caso, razonar con los atributos de las figuras (Fischbein y Nachieli, 1998). Realizamos dos ciclos de diseño, implementación y análisis (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Los datos que presentamos proceden del análisis de los cuestionarios del segundo ciclo que los estudiantes contestaron antes y después de la enseñanza. Las tareas de la secuencia de enseñanza y los ítems del cuestionario se basaron en tres focos (Bernabeu et al., 2019):

- Foco 1. Reconocer atributos de las figuras; reconocer y justificar cuándo una figura es un polígono; transformar una figura que no es un polígono en polígono.
- Foco 2. Reconocer y representar polígonos con determinados atributos.
- Foco 3. Identificar el atributo común en un conjunto de polígonos y reconocer y representar ejemplos de la clase identificada.

Secuencia de enseñanza

La secuencia de enseñanza del segundo ciclo estaba formada por diez sesiones de cincuenta minutos cada una (dos sesiones por semana durante cinco semanas). Al finalizar cada sesión, miembros del grupo de investigación analizaban lo sucedido para rediseñar, si era pertinente, las sesiones siguientes (Collins, Joseph y Bielaczyc, 2004). Las sesiones fueron conducidas por la primera autora de este estudio, y seguían la misma estructura metodológica: se introducían ejemplos y no ejemplos del concepto como paso previo a la definición del concepto y se resolvían tareas en gran grupo en las que los estudiantes debían justificar sus razonamientos como una forma de superar su dependencia de las figuras prototípicas (Hershkowitz, 1990). Finalmente, los estudiantes resolvían tareas individualmente similares a las realizadas en gran grupo. Esta forma de proceder tenía como objetivo apoyar el desarrollo de la capacidad de reconocer y dotar de significado matemático a las partes de las figuras (deconstrucción dimensional) para explicar la pertenencia de una figura a una clase (aprehensión discursiva), dibujar polígonos con condiciones (aprehensión secuencial) o transformar figuras con condiciones (aprehensión operativa) (tabla 1).

En la secuencia de enseñanza usamos definiciones inclusivas de los polígonos para crear el contexto de clasificaciones inclusivas. Por ejemplo, un triángulo isósceles es un triángulo con, al menos, dos lados congruentes; por tanto, el triángulo equilátero es un tipo particular de triángulo isósceles. En algunas tareas los estudiantes podían usar materiales didácticos, como el mecano y el geoplano, para representar ejemplos de polígonos, ya que durante la construcción de una figura geométrica se afirman e interiorizan los significados de las figuras (Duval, 2005).

Tabla 1.
Contenidos de la secuencia de enseñanza

Secuencia de enseñanza	
Sesión 1	Concepto de polígono Clases de polígonos según el número de lados
Sesión 2	Concepto de diagonal Polígonos cóncavos y convexos Polígonos cóncavos y convexos atendiendo al número de lados
Sesión 3	Concepto de eje de simetría Polígonos simétricos
Sesión 4	Clases de ángulos: agudos, rectos y obtusos.
Sesión 5	Clases de triángulos según sus lados: equilátero, isósceles y escaleno
Sesión 6	Clases de triángulos según sus ángulos: acutángulo, rectángulo y obtusángulo
Sesión 7	Clases de triángulos según sus lados y ángulos
Sesión 8	Concepto de rectas paralelas Clases de cuadriláteros según el paralelismo de sus lados.
Sesión 9	Clases de paralelogramos
Sesión 10	Atributos de los paralelogramos: congruencia y posición de sus diagonales (congruentes/no congruentes; perpendiculares)

Questionario

Los datos de esta investigación son las respuestas al cuestionario antes y después de la secuencia de enseñanza del segundo ciclo del experimento. El cuestionario fue diseñado *ad hoc* para esta investigación y validado a través de la triangulación de los miembros del grupo de esta investigación. Estaba compuesto por doce ítems agrupados en los tres focos que han organizado la secuencia de enseñanza (tabla 2). En algunos ítems se adaptaron tareas de la máquina de dibujar de Battista (2012) para conocer cómo los estudiantes identificaban el atributo común de un conjunto de figuras perceptualmente diferentes.

Tabla 2.
Estructura y contenido del cuestionario

Cuestionario inicial (CI)	
Foco 1	Reconocer cuándo una figura es un polígono Dibujar y justificar la transformación de no polígonos en polígonos
Foco 2	Reconocer un cuadrado como cuadrilátero con dos lados paralelos Dibujar ejemplos y no ejemplos de cuadriláteros con dos lados paralelos
Foco 3	Identificar el atributo común en un conjunto de polígonos y dibujar ejemplos de polígonos que cumplan el atributo identificado: polígonos cóncavos/convexos; polígonos de seis lados y que no tengan seis lados; polígonos simétricos y no simétricos Reconocer ejemplos de la clase identificada: un rombo como polígono simétrico (clase identificada); un triángulo equilátero como triángulo isósceles (clase identificada)
Secuencia de enseñanza (5 semanas)	
Cuestionario final (CF) (idem CI)	

- Foco 1: Reconocer atributos de las figuras. Reconocer y justificar cuándo una figura es un polígono. Transformar una figura que no es un polígono en un polígono
 El ítem 1a pide *reconocer* polígonos entre un conjunto de 15 figuras geométricas planas (8 polígonos y 7 ejemplos de no polígonos). Los ítems 1b, 1c, 1d y 1e piden *transformar no polígonos en polígonos, explicar* el proceso de transformación y *dibujar* los polígonos resultantes. Los no polígonos son: una figura plana abierta con lados cruzados y un lado curvo (1b); una figura plana abierta con un lado curvo (1c); una figura plana con un lado curvo y lados cruzados (1d) (figura 1); y una figura plana abierta con lados cruzados (1e). Los cinco ítems de este foco pretendían obtener información sobre cómo los estudiantes reconocían y dotaban de significado matemático a partes de las figuras (deconstrucción dimensional) y explicar la transformación de los no polígonos en polígonos (aprehensión discursiva), modificar la figura (aprehensión operativa) y dibujar el polígono resultante (aprehensión secuencial).

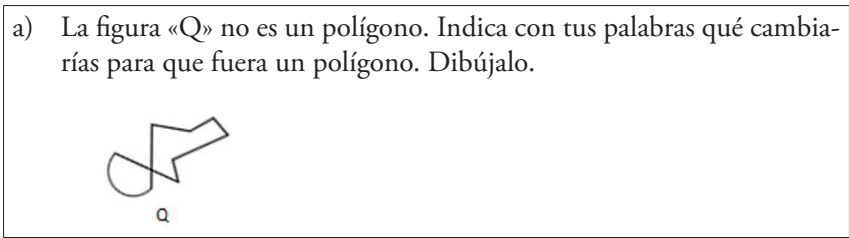


Fig. 1. Ítem 1d: Transformar un no polígono en polígono.

- Foco 2: Reconocer y dibujar polígonos con determinados atributos
 El ítem 6a consiste en *dibujar* tres cuadriláteros con dos lados paralelos y tres cuadriláteros que no cumplan estas condiciones (figura 2). Este ítem tiene como objetivo obtener información sobre cómo los estudiantes razonan con los atributos de los polígonos, para modificar una figura para que cumpla algunas condiciones. El ítem 6b consiste en determinar si un cuadrado –paralelogramo con cuatro lados y ángulos congruentes– (figura representada) es un ejemplo de cuadrilátero con dos lados paralelos (definición verbal). La respuesta a este ítem evidencia cómo los estudiantes reconocen y dotan de significado matemático a las partes del polígono (deconstrucción dimensional).

TAREA 6	
Tenemos una máquina de dibujar que puede hacer:	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">Cuadriláteros (polígonos de cuatro lados) con dos lados paralelos.</div>	
a) Dibuja tres cuadriláteros que sí pueda hacer y tres cuadriláteros que no pueda hacer.	
PUEDE HACER (Cuadriláteros con dos lados paralelos)	NO PUEDE HACER
1	1
2	2
3	3

Fig. 2. Ítem 6a: dibujar polígonos con determinadas condiciones.

- Foco 3: Identificar el atributo común en un conjunto de polígonos y reconocer y representar ejemplos de la clase

Los ítems 2, 3, 4a, 4b y 5 tienen como objetivo determinar cómo los estudiantes identifican atributos comunes en figuras perceptualmente diferentes que les permitan considerar una clase. En estos ítems se emplea la metáfora de la máquina de dibujar (Battista, 2012) que puede hacer polígonos con determinados atributos (ejemplos) y no puede hacer polígonos sin estos atributos (no ejemplos). Los ítems 2, 3 y 4a presentan dos grupos de polígonos, los que la máquina puede hacer y los que no. Cada ítem consideraba un atributo distinto. El ítem 2, la concavidad, polígonos con al menos un ángulo interno mayor de 180°; el ítem 3, tener 6 lados; y el ítem 4a, figuras simétricas (figura 3). Las respuestas de estos ítems muestran cómo los estudiantes *identifican* cuál es el atributo común en cada grupo (deconstrucción dimensional), lo explican (aprehensión discursiva) y dibujan un ejemplo y un no ejemplo de la clase (aprehensión secuencial).

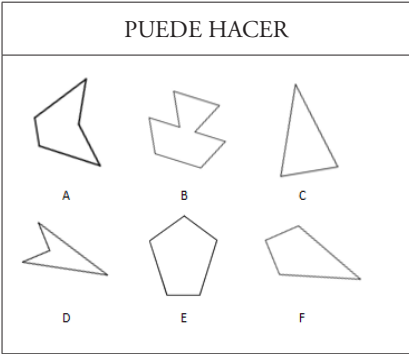
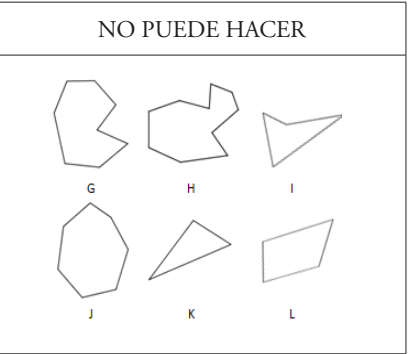
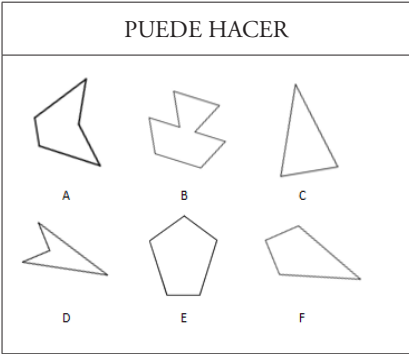
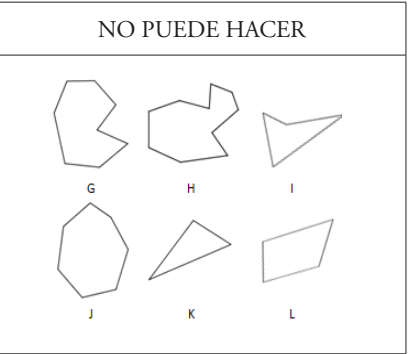
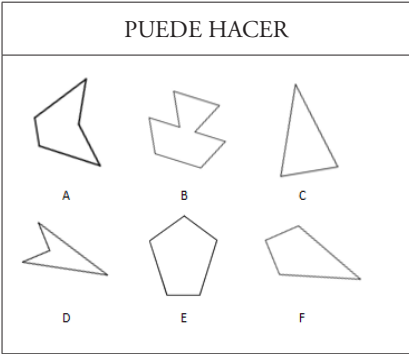
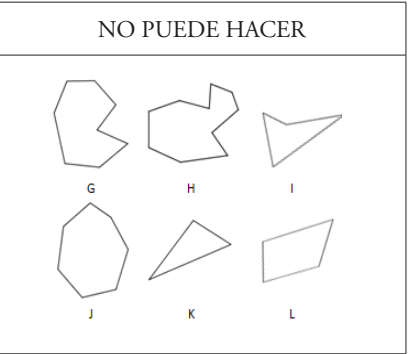
TAREA 4					
Tenemos una máquina de dibujar que puede hacer estos polígonos. Todos los polígonos que puede hacer tienen algo en común.					
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%; text-align: center;">PUEDE HACER</th> <th style="width: 50%; text-align: center;">NO PUEDE HACER</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center; padding: 10px;">  </td> <td style="text-align: center; padding: 10px;">  </td> </tr> </tbody> </table>	PUEDE HACER	NO PUEDE HACER			
PUEDE HACER	NO PUEDE HACER				
					
Dibuja otro polígono diferente que la máquina de dibujar sí pueda hacer y di por qué, y otro polígono diferente que no pueda hacer y di por qué.					
PUEDE HACER	NO PUEDE HACER				
Dibuja:	Dibuja:				
Explica:	Explica:				

Fig. 3. Ítem 4: polígonos simétricos/no simétricos (tarea adaptada de Battista, 2012).

Los ítems 4b y 5 consisten en reconocer ejemplos de figuras de la clase identificada. El ítem 4b considera el rombo como un ejemplo de polígono simétrico (polígono con al menos un eje de simetría) (clase identificada) (figura 4). El ítem 5 determina la pertenencia del triángulo equilátero –triángulo con tres lados congruentes– como ejemplo de triángulos isósceles –triángulo con al menos dos lados congruentes– (clase identificada). Las respuestas de los estudiantes muestran cómo *identifican* el atributo común de un conjunto de polígonos, reconocen las partes del polígono representado dotándolo de significado matemático (deconstrucción dimensional) y *explican* si el polígono representado pertenece o no a la clase identificada (aprehensión discursiva).

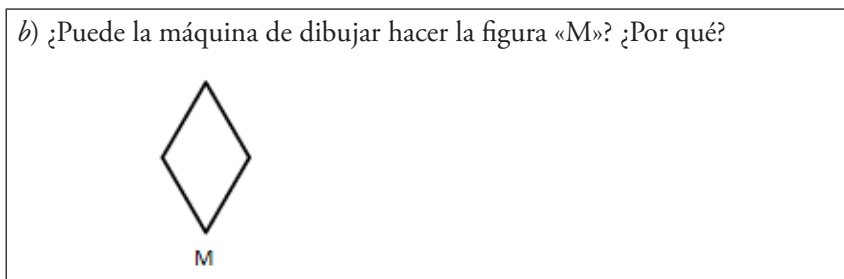


Fig. 4. Ítem 4b: reconocer un rombo como ejemplo de la clase de polígonos simétricos.

Análisis

Realizamos un *análisis implicativo* de las respuestas del cuestionario antes y después de la instrucción (Gras, Suzuki, Guillet y Spagnolo, 2008) usando el *software* CHIC (Classification Hierarchique, Implicative et Cohésitive) versión 6.0. (Couturier, 2008). Este *software* genera gráficos que permiten identificar y organizar implicaciones cuasilógicas entre los significados matemáticos asociados a las figuras geométricas (relaciones cuasiimplicativas entre las variables con cierta probabilidad). El análisis implicativo se basa en la idea de que el conocimiento se forma inductivamente, a partir de los conceptos introducidos durante la instrucción (Trigueros y Escandón, 2008). Las relaciones cuasiimplicativas entre las variables dan un significado estadístico a expresiones como $Z \rightarrow V$: si un estudiante contesta afirmativamente a Z, entonces es probable que conteste V (indicando que existe un número relativamente pequeño de respuestas Z que no lo cumplen (la parte no sombreada del círculo Z en la figura 5). De esta manera, la cuasiimplicación $Z \rightarrow V$ se puede entender como equivalente a que el conjunto $Z \wedge \neg V$ es casi nulo. Es decir, que las observaciones de Z que no están en V son estadísticamente no relevantes.

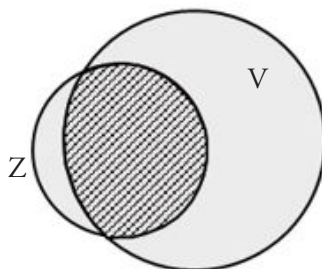


Fig. 5. Gráfico de la relación cuasiimplicativa de $Z \rightarrow V$.

Este análisis se llevó a cabo en dos fases.

Fase 1. Configuración de las variables

Generamos 48 variables para codificar las respuestas a los 12 ítems considerando las diferentes figuras, y si se pedía dibujar o explicar. Para diferenciar las variables de ambos cuestionarios, se añadió el prefijo *Pr* a las variables del cuestionario inicial y *Po* a las del cuestionario final. Cada variable implicaba la deconstrucción dimensional de las figuras y la coordinación o la falta de coordinación de las aprehensiones. Las tablas 1, 2 y 4 caracterizan las variables mediante las aprehensiones que evidencian. Para las aprehensiones, utilizamos las abreviaturas de: AD (aprehensión discursiva); AO (aprehensión operativa); y AS (aprehensión secuencial).

La tabla 3 recoge las variables vinculadas al foco 1: reconocer polígonos y transformar no polígonos en polígonos. En el ítem 1a, reconocer polígonos entre 15 figuras, se consideró cada figura como una variable ($n = 15$, desde 1a.1 hasta 1a.15). Para los ítems 1b, 1c, 1d y 1e, transformar no polígonos en polígonos, generamos 3 variables por ítem: *explicar* (*e*), *dibujar* (*d*) y *explicar y dibujar* (*e&d*) (12 variables). A cada atributo relevante del concepto de polígono le asignamos una abreviatura: figura abierta (*ab*); lados curvos (*cu*); y cruzados (*cz*).

Tabla 3.
Variables generadas a partir de los ítems 1a, 1b, 1c, 1d y 1e

Foco 1	Ítem	Figuras geométricas			
Reconocer polígonos	1a	1a.1 ... 1a.15 (8 polígonos y 7 no polígonos) (AD)			
		Atributos	Explicar	Dibujar	Explicar y dibujar
Transformar un no polígono en polígono	1b	Figura plana abierta + lado curvo + cruzados	1b.abcz-e (AO+AD)	1b.abcz-d (AO+AS)	1b.abcz-e&d (AO+AD+AS)
	1c	Figura plana abierta + lado curvo	1c.abcu-e (AO+AD)	1c.abcu-d (AO+AD)	1c.abcu-e&d (AO+AD+AS)
	1d	Figura plana con lado curvo + cruzados	1d.cucz-e (AO+AD)	1d.cucz-d (AO+AD)	1d.cucz-e&d (AO+AD+AS)
	1e	Figura plana abierta + lados cruzados	1e.abcz-e (AO+AD)	1e.abcz-d (AO+AD)	1e.abcz-e&d (AO+AD+AS)

La tabla 4 recoge las variables vinculadas al foco 2: representar y reconocer polígonos con determinados atributos.

Tabla 4.
Variables generadas a partir de los ítems 6a y 6b del cuestionario

Foco 2	Ítem	Descripción
Representar polígonos con determinados atributos	6a	6a.tci&ntci-d (AD+AS): <i>dibujar</i> al menos dos cuadriláteros con dos lados paralelos (trapecio) y al menos dos cuadriláteros sin lados paralelos (trapezoide, llamado no trapecio)
	6a-1	6a.tci-d (falta de coordinación AD+AS): <i>dibujar</i> al menos dos cuadriláteros con dos lados paralelos desde la descripción verbal (trapecio)
	6a-2	6a.ntci-d (falta de coordinación AD+AS): <i>dibujar</i> al menos dos cuadriláteros sin lados paralelos desde la descripción verbal (no trapecio)
Reconocer polígonos con determinados atributos	6b	6b.tci-per (AD): <i>explicar</i> la pertenencia de un cuadrado a la clase de cuadriláteros con dos lados paralelos (trapecio)

Las tablas 5 y 6 recogen las variables vinculadas al foco 3: identificar el atributo común en un grupo de polígonos y reconocer y representar ejemplos de la clase. Para cada uno de los atributos considerados (ítem 2- concavidad; ítem 3- seis lados, e ítem 4a- simetría) generamos 5 variables (total: 15 variables) (tabla 6). La tabla 5 muestra estas cinco variables para el atributo *tener seis lados*. Se generó una variable para cada uno de los ítems de reconocer ejemplos de la clase, ítems 4b y 5. El ítem 4b (4b. sim-per) para explicar la pertenencia de un rombo a la clase de polígonos con un eje de simetría; y el ítem 5 (5.tri-bel) para explicar la pertenencia del triángulo equilátero a la clase de triángulos isósceles.

Tabla 5.
Variables generadas para el atributo tener seis lados

3.6/n6-e&d: <i>explicar y dibujar un ejemplo y un no ejemplo que pertenezca al conjunto de polígonos de seis lados/polígonos que no tengan seis lados</i>	Explicar (e)	Dibujar (d)
Seis lados (6)	3.6-e: <i>explicar</i> el atributo común del conjunto de polígonos de seis lados	3.6-d: <i>dibujar</i> un ejemplo de polígono con seis lados (ejemplo de la clase)
Que no tenga seis lados (n6)	3.n6-e: <i>explicar</i> el atributo común del conjunto de polígonos que no tienen seis lados	6.n6-d: <i>dibujar</i> un ejemplo de polígono que no tenga seis lados (no ejemplo de la clase)

Tabla 6.
Variables generadas a partir de los ítems 2, 3, 4a, 4b y 5 del cuestionario

Foco 3	Ítem	Atributo	Explicar (e)	Dibujar (d)	Explicar y dibujar (e&d)
Identificar el atributo común de un conjunto de polígonos	2	Cóncavo (cv)	2.cv-e (AD)	2.cv-d (AS)	2.cv/cx-e&d (AD+AS)
		Convexo (cx)	2.cx-e (AD)	2.cx-d (AS)	
	3	Tener 6 lados (6)	3.6-e (AD)	3.6-d (AS)	3.6/n6-e&d (AD+AS)
		No tener 6 lados (n6)	3.n6-e (AD)	3.n6-d (AS)	
	4a	Simetría (s)	4a.s-e (AD)	4a.s-d (AS)	4a.s/ns-e&d (AD+AS)
Sin simetría (ns)		4a.ns-e (AD)	4a.ns-d (AS)		
Descripción Reconocer ejemplos de la clase identificada	4b	4b.sim-per (AD): <i>explicar</i> la pertenencia de un rombo a la clase de polígonos con un eje de simetría			
	5	5.tri-per (AD): <i>explicar</i> la pertenencia de un triángulo equilátero a la clase de triángulos con dos lados congruentes			

A cada una de las variables se le asignó un valor de 1 si la respuesta era correcta y 0 si la respuesta era incorrecta. Para evitar el sesgo en el análisis de las respuestas, los investigadores que no impartían la instrucción analizaron cada una de las respuestas a los cuestionarios y, posteriormente, cotejaron su análisis con el de la investigadora (maestra), resolviendo posibles discrepancias.

Fase 2. Obtención de los gráficos cuasiimplicativos a través del programa CHIC

Los gráficos cuasiimplicativos permiten ilustrar cuándo los estudiantes reconocen que un polígono tiene un determinado atributo o cuándo son capaces de dibujar un polígono con condiciones, es decir, cuándo son capaces de realizar la deconstrucción dimensional de las figuras geométricas coordinando las aprehensiones.

Por ejemplo, la cuasiimplicación $Po.4b.sim-per \rightarrow Po.5.tri-per$ (figura 6), generada después de la secuencia de enseñanza (Po), indica que si un estudiante considera que un rombo pertenece a la clase de los polígonos con un eje de simetría (Po.4b.sim-per), entonces es probable que indique que un triángulo equilátero pertenece a la clase de los triángulos isósceles porque tiene dos lados congruentes (Po.5.tri-per). En esta cuasiimplicación nosotros podemos entender que los estudiantes usan la deconstrucción dimensional de las figuras dadas para reconocer y dotar de significado matemático a sus partes, relacionándolas con las definiciones de las clases de polígonos y, así, explicar mediante la aprehensión discursiva la pertenencia de los polígonos dados a la clase. Esta implicación cuasilógica se entiende en el sentido de que el número de casos en los que no se da esta implicación es estadísticamente no significativo. Aunque las relaciones cuasiimplicativas no son transitivas, es posible interpretar cuasiimplicaciones del tipo $[(V \rightarrow Z) \rightarrow N]$ que describen una conducta que determina el comportamiento de los estudiantes, en un determinado momento, al establecer relaciones entre lo que se conoce y que son consideradas formas de conocer (Gras y Kuntz, 2008). Estas cuasiimplicaciones son interpretadas como $[(V \wedge Z) \rightarrow N]$.

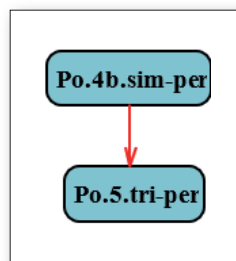


Fig. 6. Relación cuasiimplicativa entre las variables Po.4b.sim-per y Po.5.tri-per.

La comparación de los gráficos implicativos, antes y después de la secuencia de enseñanza, permite identificar cambios en lo que los estudiantes comprenden de los polígonos y sus relaciones (las variables que se relacionan en los gráficos) y cambios en cómo comprenden los polígonos y sus relaciones (evidenciado por cambios en las relaciones cuasiimplicativas entre las variables).

RESULTADOS

Los gráficos al 98 % de significación (figuras 7a y 7b) muestran las relaciones cuasiimplicativas entre 9 variables antes de la enseñanza (CI) y entre 17 variables después de la enseñanza (CF). Para diferenciar las variables las hemos coloreado según el foco al que pertenecen: verde foco 1 (reconocer polígonos y transformar ejemplos de no polígonos en polígonos); naranja foco 2 (reconocer y dibujar polígonos con determinados atributos); y azul foco 3 (identificar atributos que definen una clase y reconocer y representar ejemplos de la clase).

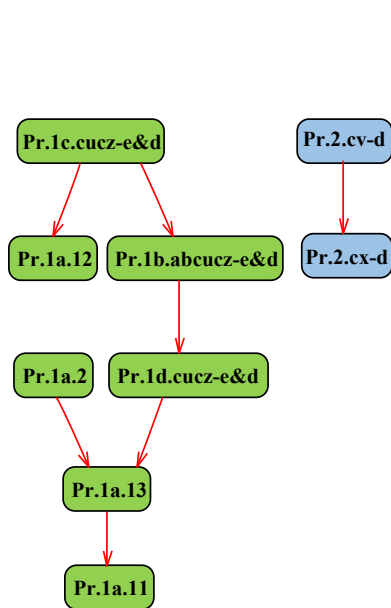


Fig. 7a. Gráfico implicativo al 98 % de significación antes de la enseñanza.

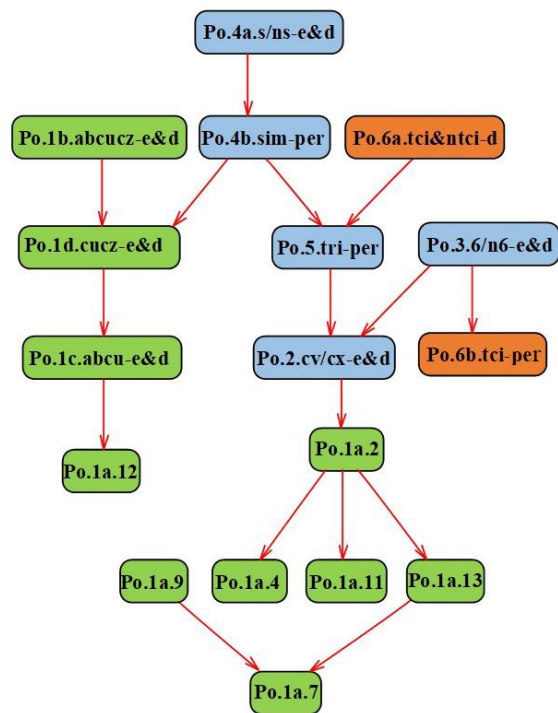


Fig. 7b. Gráfico implicativo al 98 % de significación después de la enseñanza.

Cambios en lo que se conoce de los polígonos

Antes del experimento de enseñanza, las nueve variables que aparecen en el gráfico implicativo ponen de manifiesto cómo los estudiantes comprenden la necesidad de la conjunción lógica de las condiciones que se deben cumplir para que una figura sea un polígono (figura plana cerrada, lados rectos y no cruzados). Esto se evidencia por la aparición de las variables relativas a reconocer ejemplos (Pr.1a.2, Pr.1a.13, Pr.1a.11) y no ejemplos de polígonos (Pr.1a.12), pero también con la capacidad de transformar no polígonos en polígonos indicando los cambios necesarios (Pr.1c.cucz-e&d, Pr.1b.abcucz-e&d y Pr.1d.cucz-e&d). Sin embargo, solo aparecen dos variables relativas a identificar el atributo concavidad/convexidad que define una clase, limitándose a la capacidad de dibujar un ejemplo (Pr.2.cv-d y Pr.2.cx-d) (figura 10), lo que pone de manifiesto el razonamiento basado en lo perceptual cuando piensan en las relaciones entre los polígonos. Este hecho evidencia que los estudiantes saben reconocer y dotar de significado matemático (deconstrucción dimensional) algunas figuras geométricas, pero todavía no pueden explicar (aprehensión discursiva) los atributos de las representaciones realizadas (Pr.2.cv-d) (aprehensión secuencial).

Después del experimento de enseñanza, el gráfico implicativo está formado por 17 variables que muestran una mayor variedad en los puntos de referencia conceptuales de lo que los estudiantes comprenden. Se afianza la capacidad de reconocer ejemplos y no ejemplos de polígonos (variables 1a.i, i=2, 4, 7, 9, 11, 12 y 13) y de transformar no polígonos en polígonos (Po.1b.abcucz-e&d, Po.1d.cucz-e&d y Po.1c.abcu-e&d). Sin embargo, el cambio más relevante se da con la aparición de las variables relativas a identificar y *explicar* el atributo que define alguna clase de polígonos y *dibujar* ejemplos de dicha clase (Po.2.cv/cx-e&d, Po.3.6/n6-e&d, Po.4a.s/ns-e&d), *dibujar* polígonos con condiciones (Po.6a.tci&ntci-d) y la emergencia de *relaciones inclusivas* entre polígonos (Po.4b.sim-per, Po.5.tri-per

y 6b.tci-per). La aparición de nuevas variables (e&d) puede ser entendida en el sentido de que los estudiantes han desarrollado una mayor capacidad de reconocer y dotar de significado matemático a las partes de las figuras (deconstrucción dimensional) para explicar los atributos de las figuras o la abstracción del atributo común del conjunto de polígonos (aprehensión discursiva); dibujar ejemplos y no ejemplos de polígonos a partir de la clase identificada o a partir de unos atributos dados (aprehensión secuencial); y transformar unas figuras en otras para que cumplan con los atributos de un concepto determinado (aprehensión operativa).

Por tanto, podemos identificar dos cambios en relación con lo que se comprende del concepto de polígono y la relación entre polígonos antes y después de la secuencia de enseñanza. En primer lugar, una mayor capacidad de reconocer atributos no relevantes para el concepto de polígono, lo que favorecería identificar el atributo común de una clase de polígonos, y dibujar ejemplos de la clase. Por ejemplo, polígonos simétricos (Po.4a.s/ns-e&d), polígonos con 6 lados (Po.3.6/n6-e&d) y concavidad (Po.2.cv/cz-e&d). En segundo lugar, la capacidad de identificar relaciones de inclusión: el rombo como ejemplo de polígono simétrico (Po.4b.sim-per), el triángulo equilátero como ejemplo de triángulo isósceles (Po.5tri-per) y el cuadrado como ejemplo de cuadrilátero con dos lados paralelos (6b-tci-per).

Cambios en cómo se comprenden los polígonos y la relación entre los polígonos

Los cambios en cómo se comprenden los polígonos y la relación entre los polígonos se evidencian por las variaciones en las relaciones cuasiimplicativas entre las variables.

Tras la secuencia de enseñanza aparecen más relaciones entre las variables relativas a *reconocer los atributos relevantes del concepto de polígono*, lo que indica una mayor capacidad para reconocer ejemplos de figuras que no son polígonos. Antes de la enseñanza (figura 8a) solo aparecían dos relaciones entre tres variables de este foco [(Pr.1a.2 → Pr.1a.13) → Pr.1a.11], lo que indica que cuando el estudiante reconoce como polígono el polígono cóncavo de ocho lados (Pr.1a.2) y el polígono cóncavo de seis lados (Pr.1a.13), entonces tiene la posibilidad de reconocer el polígono cóncavo de cuatro lados como un ejemplo de polígono (Pr.1a.11).

Sin embargo, después de la enseñanza aparecen cinco relaciones entre seis variables relativas a reconocer ejemplos de polígonos, que incorporan relaciones entre atributos no relevantes para el concepto de polígono (regular/irregular, cóncavo/convexo; y el número de lados) (figura 8b). En particular, la variable «reconocer un polígono cóncavo de ocho lados como un ejemplo de polígono» (Po.1a.2) se relaciona con reconocer un polígono convexo de seis lados (Po.1a.4), un polígono cóncavo de cuatro lados (Po.1a.11) y un polígono cóncavo de seis lados (Po.1a.13) como ejemplos de polígonos.

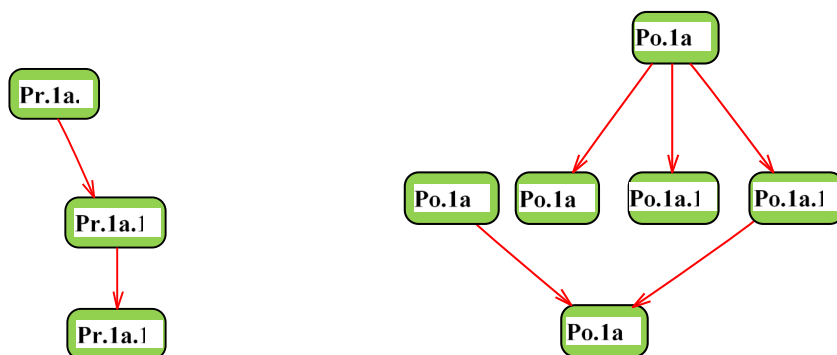


Fig. 8a. Reconocer polígonos en el CI.

Fig. 8b. Reconocer polígonos en el CF.

Las relaciones cuasiimplicativas generadas después de la enseñanza $[(Po.1a.2 \wedge Po.1a.13) \rightarrow Po.1a.7]$ muestran que los estudiantes que reconocen polígonos cóncavos con diferente número de lados (Po.1a.2 y Po.1a.13) tienen una alta probabilidad de reconocer polígonos convexos como polígonos (Po.1a.7). Asimismo, la implicación $(Po.1a.9 \rightarrow Po.1a.7)$ indica que los estudiantes que son capaces de reconocer los polígonos irregulares convexos (Po.1a.9) tienen una alta probabilidad de reconocer polígonos regulares de siete lados (Po.1a.7) como ejemplos de polígonos. Esto parece indicar que los estudiantes son capaces de reconocer y dotar de significado matemático a más partes de las figuras (deconstrucción dimensional), para determinar qué figuras son polígonos de los que no lo son (aprehensión discursiva). Esto puede ser entendido como una mayor capacidad de razonamiento analítico, es decir, la secuencia de enseñanza ha favorecido una mayor capacidad para reconocer y razonar con atributos no relevantes para la definición de polígono.

En relación con las variables relativas a identificar clases de polígonos y ejemplos de estas clases (relaciones inclusivas), antes de la enseñanza solo aparecía la relación $(Pr.2.cv-d \rightarrow Pr.2.cx-d)$ (figura 9a), pero no aparecían variables relativas a las relaciones inclusivas. Esta implicación indica que si el estudiante dibuja un polígono cóncavo como ejemplo de las clases de polígonos cóncavos (Pr.2.cv-d), entonces es probable que pueda dibujar un ejemplo de polígono convexo (Pr.2.cx-d) como ejemplo de la clase de los convexos.

Después de la enseñanza hay un aumento de las relaciones implicativas entre las variables relativas a identificar clases de figuras (figura 9b), que evidencian una mayor capacidad para identificar y explicar el atributo común que define una clase (simetría, número de lados, concavidad/convexidad) y dibujar ejemplos de la clase. La generación de este mayor número de relaciones cuasiimplicativas puede ser interpretada como evidencia de una mayor capacidad de abstracción para identificar atributos de las figuras y relacionarlos.

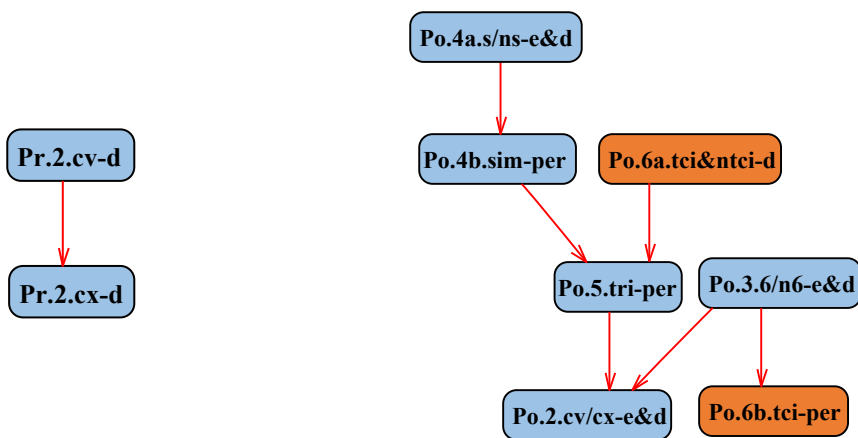


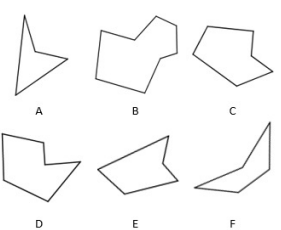
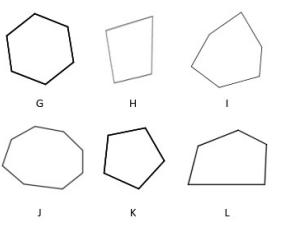

Fig. 9a. Identificar el atributo común de un conjunto de polígonos en el CI.

Fig. 9b. Identificar el atributo común de un conjunto de polígonos en el CF.

Tras la enseñanza, la implicación $\{(Po.4a.s/ns-e\&d \wedge Po.4b.sim-per) \wedge Po.5.tri-per\} \rightarrow Po.2.cv/cx-e\&d\}$ indica que los estudiantes que son capaces de identificar la simetría como atributo común de un conjunto de polígonos (Po.4a.s/ns-e&d), de considerar el rombo como ejemplo de polígono con un eje de simetría (Po.4b.sim-per) y de considerar el triángulo equilátero como un ejemplo de triángulo isósceles (Po.5.tri-per), entonces es probable que identifiquen la concavidad (Po.2.cv/cx-e&d) como el atributo que define una clase de polígonos. Además, la implicación $(Po.6a.tci\&ntci-d \rightarrow Po.5.tri-per)$

indica que, si un estudiante puede dibujar cuadriláteros con y sin lados paralelos (Po.6a.tci&ntci-d), entonces es probable que identifique el triángulo equilátero como un ejemplo de triángulo isósceles (Po.5.tri-per). Mientras que las implicaciones (Po.3.6/n6-e&d → Po.2.cv/cx-e&d) y (Po.3.6/n6-e&d → Po.6b.tci-per) indican que si un estudiante identifica tener seis lados como un atributo que define una clase de polígonos (Po.3.6/n6-e&d), entonces es probable que también pueda identificar la concavidad como un atributo que define una clase (Po.2.cv/cx-e&d) o considere el cuadrado como un ejemplo de cuadrilátero con dos lados paralelos cuando se proporciona la descripción de la clase mediante un enunciado (Po.6b.tci-per). Estas relaciones cuasiimplicativas muestran una mayor estructuración de la comprensión de los estudiantes de la identificación de clases de polígonos y de las relaciones inclusivas entre polígonos. De este modo, tras la enseñanza, los estudiantes tienen más capacidad de reconocer las partes de los polígonos dotándolas de significado matemático (deconstrucción dimensional) con un mayor número de clases de polígonos para explicar la pertenencia a una clase (aprehensión discursiva) y dibujar ejemplos y no ejemplos de la clase identificada (aprehensión secuencial).

Podemos ejemplificar estos cambios relativos a la forma de comprender el concepto de polígono y de clases de polígonos con las respuestas del estudiante G2E18 (estudiante 18 del grupo 2). Antes de la enseñanza, este estudiante razonaba perceptualmente sobre los polígonos, dibujaba un polígono cóncavo y uno convexo (Pr.2.cv-d → Pr.2.cx-d) e indicaba *que tiene picos largos* para la clase de los polígonos cóncavos, pero dejaba en blanco el apartado correspondiente a los polígonos convexos (figura 10).

ÍTEM 2	
PUEDE HACER	NO PUEDE HACER
	
a) Dibuja otro polígono diferente que la máquina de dibujar sí pueda hacer y di por qué, y otro polígono diferente que no pueda hacer y di por qué.	
PUEDE HACER	NO PUEDE HACER
Dibuja: 	Dibuja:
Explica: <i>Que tiene picos largos</i>	Explica:
Explica: Que tiene picos largos	Explica:

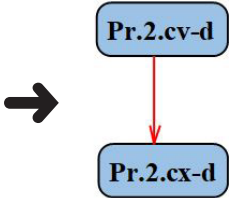


Fig. 10. Respuesta de G2E18 al ítem 2 del CI que interviene en la cuasiimplicación Pr.2.cv-d → Pr.2.cx-d.

Después de la enseñanza, este mismo estudiante identifica las clases de polígonos cóncavos/convexos y las clases de triángulos o polígonos simétricos (figura 11). En el caso de la simetría, identifica y explica la clase de los polígonos simétricos y no simétricos, dibuja un ejemplo de cada clase (4a.s/ns-e&d) y reconoce el rombo como ejemplo de polígono simétrico (4b.sim-per). Para la clase de triángulos isósceles y escalenos, explica que el triángulo equilátero pertenece a la clase de los isósceles (Po.5.tri-per). Asimismo, con la concavidad, identifica y explica que un conjunto se caracteriza por ser polígonos cóncavos y el otro por ser convexos, y dibuja un ejemplo de cada clase de polígono (2.cv/cx-e&d).

DISCUSIÓN

El objetivo de este estudio es identificar cambios en la comprensión del concepto de polígono y de la relación entre polígonos en estudiantes de tercero de educación primaria al participar en un experimento de enseñanza. La comprensión se entiende como establecer relaciones entre significados matemáticos usando diferentes modos de representación consecuencia del proceso de estructuración espacial (Battista et al., 1998) que permite a los estudiantes generar y organizar información sobre las figuras geométricas. Para dar cuenta de estos procesos usamos la idea de la deconstrucción dimensional, mediante la cual los estudiantes dotan de significado matemático a partes de las figuras geométricas que se evidencian a través de las diferentes aprehensiones cognitivas (Duval, 1995, 2017). El análisis de las respuestas de los estudiantes a un mismo cuestionario, antes y después de una secuencia de enseñanza, permitió identificar cambios en qué comprenden (puntos de referencia conceptual) y cómo comprenden las relaciones entre los polígonos (estructura conceptual), a partir de las relaciones cuasiimplicativas establecidas entre los significados matemáticos. Los cambios en la forma de comprender las relaciones entre polígonos vienen dados por una mayor coordinación de las aprehensiones discursiva (explicar), operativa (modificar figuras) y secuencial (dibujar figuras con condiciones) al razonar con atributos no relevantes para la definición de polígono. Estos cambios subrayan el carácter multifacético de la deconstrucción dimensional y la importancia de la coordinación de las aprehensiones cognitivas en el desarrollo del pensamiento geométrico. Desarrollamos estas ideas a continuación.

Cambios en la comprensión del concepto de polígono

La comprensión del concepto de polígono se evidencia al reconocer una figura como un polígono entre otras que no lo son y transformar no polígonos en polígonos. Esta comprensión está vinculada al desarrollo del razonamiento analítico que se apoya en el reconocimiento de los atributos relevantes en la definición de polígono y el desarrollo de la conjunción lógica «y» que permite considerarlos simultáneamente, dotando de significado matemático a partes de la figura (deconstrucción dimensional, en Duval, 2017).

Las relaciones cuasiimplicativas entre las variables muestran cambios en cómo los estudiantes comprenden las relaciones entre los polígonos. En particular, la capacidad de abstraer el atributo común de un conjunto de figuras perceptualmente diferentes, evidenciando una *estructuración espacial* de las clases de polígonos tratados en el experimento de enseñanza (Battista et al., 1998). Los estudiantes pasaron de identificar únicamente los polígonos cóncavos y convexos –generándose la implicación entre las variables de dibujar– a desarrollar una mayor capacidad de análisis de las figuras para identificar, en más casos, las clases de polígonos (simétricos y tener 6 lados), explicando y dibujando ejemplos de estas clases, y reconociendo y explicando las relaciones inclusivas. Esto supone un cambio en la manera de ver y usar los atributos de las figuras como evidencia de la manera en la que los estudiantes generaban información sobre las figuras geométricas y empezaban a organizarla, ya que, tras la secuencia de enseñanza, el mayor número de variables y de relaciones relativas a identificar el atributo común evidencian

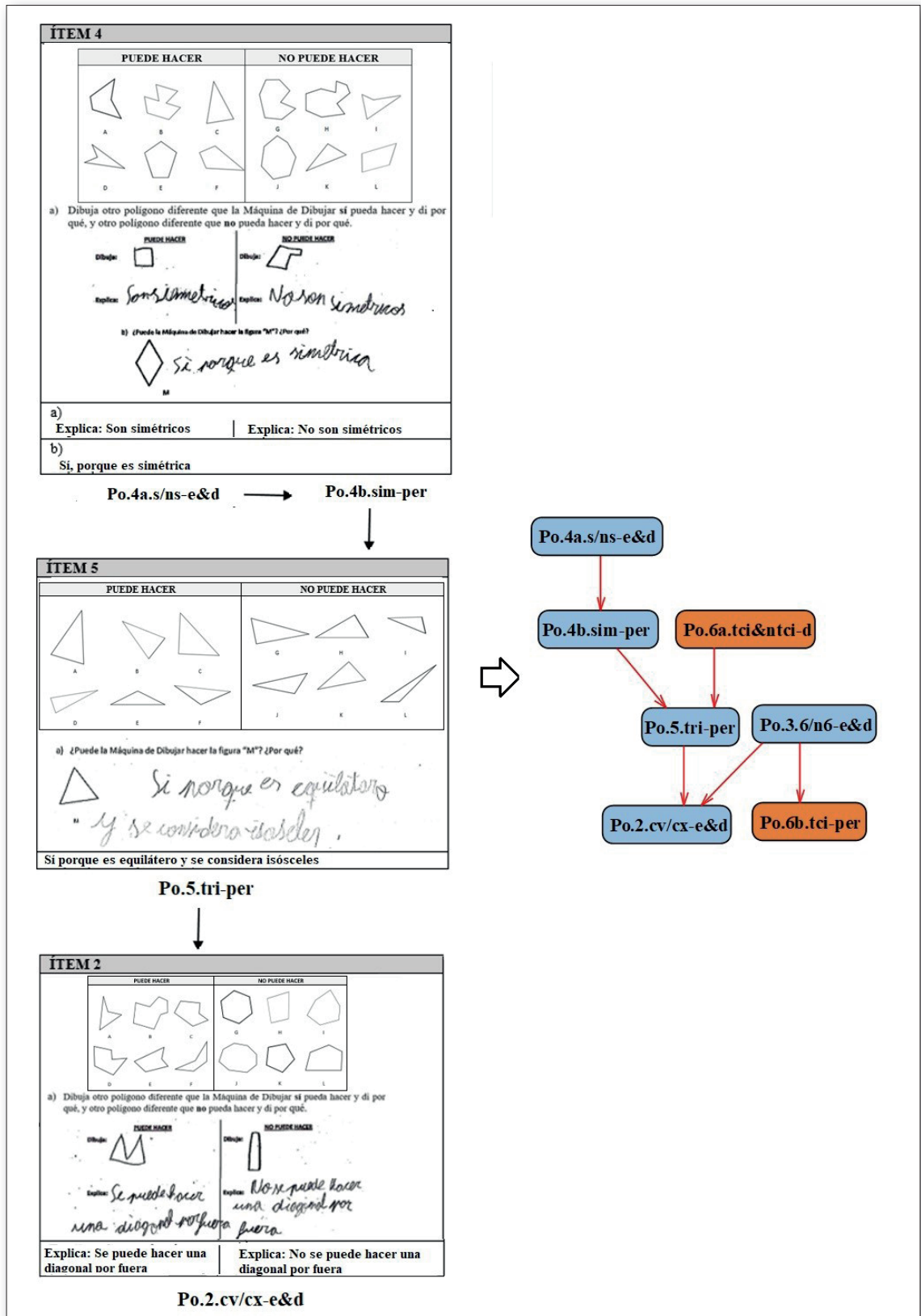


Fig. 11. Respuesta G2E18 a los ítems 4a, 4b, 5 y 2 del CF que permiten ejemplificar la implicación $\{(Po.4a.s/ns-e\&d \wedge 4b.sim-per) \wedge Po.5.tri.per\} \rightarrow Po.2.cv/cx-e\&d\}$.

el cambio en la forma de reconocer y en cómo dotan de significado matemático a las partes de las figuras. Es decir, un progreso en la estructura cognitiva asociada a un concepto (imagen del concepto) (Tall y Vinner, 1981).

El cambio en la forma de comprender las relaciones entre polígonos estuvo vinculado a la identificación de clases de polígonos y a explicar y dibujar ejemplos de las clases identificadas. En este sentido, el desarrollo de una mayor capacidad para abstraer el atributo común que define una clase de polígonos parece apoyarse en la deconstrucción dimensional a través de la coordinación de las aprehensiones discursiva y secuencial. Por ejemplo, la variable *identificar la simetría como atributo común en un conjunto de polígonos, explicando y dibujando ejemplos* (4a.s/ns-e&d) generó cuasiimplicaciones con otras variables (figura 9b). Estas cuasiimplicaciones indican formas de razonar de los estudiantes vinculadas a identificar semejanzas y diferencias entre los dos grupos de polígonos, dotando de significado matemático a sus partes. Además, ser capaz de dibujar ejemplos y no ejemplos de la clase puede ser entendido como una manifestación de la aprehensión secuencial, estableciendo relaciones con otras clases de polígonos (los vinculados por las relaciones cuasilógicas). Creemos que este cambio se deriva de la enseñanza, focalizada en desarrollar el razonamiento analítico de los estudiantes, lo que permite visibilizar su capacidad de abstraer el atributo común de un grupo de polígonos, superando la dependencia del reconocimiento basado en las figuras prototípicas (Hershkowitz, 1990).

Además, el aumento de las variables y relaciones cuasiimplicativas relativas a la idea de pertenencia a una clase muestra el cambio de la comprensión de las relaciones inclusivas entre polígonos. Por ejemplo, considerar un triángulo equilátero como ejemplo de triángulo isósceles o un cuadrado como ejemplo de cuadrilátero con dos lados paralelos. Este aumento en las variables y relaciones puede ser una evidencia de que el razonamiento de los estudiantes se basa en mayor medida en una aproximación analítica de las figuras (Clements et al., 1999).

El mayor número de relaciones entre las variables relativas a identificar el atributo común en un conjunto de polígonos ejemplifica la manera en la que los estudiantes amplían la red conceptual vinculada al concepto de polígono y las clases de polígonos y, por tanto, a la comprensión del concepto. A partir de los gráficos cuasiimplicativos generados podemos inferir que los estudiantes identifican primero la concavidad/convexidad (parte de abajo del gráfico); después, el número de lados; luego, las clases de triángulos; y, por último, la simetría (parte de arriba del gráfico). El establecimiento de relaciones entre polígonos que conectan diferentes conceptos geométricos, llevado a cabo por los alumnos de primaria en este estudio, apoya las evidencias en estudios realizados con alumnos más jóvenes (Clements et al., 1999).

CONCLUSIÓN

Podemos considerar que los cambios descritos están vinculados a las tareas realizadas durante la secuencia de enseñanza, las cuales exigían la deconstrucción dimensional de las figuras geométricas y de la coordinación de las aprehensiones para ser resueltas. Sin embargo, esta investigación muestra que los cambios identificados en cómo los estudiantes reconocen los atributos que definen una clase de polígonos no es un proceso directo. Reconocer clases de polígonos es un proceso complejo para los estudiantes que se apoya en el análisis de las partes de los polígonos para ver semejanzas y diferencias desde un punto de vista matemático. Este resultado sobre los cambios relativos a cómo los estudiantes de tercero de educación primaria razonaban con los diferentes atributos de las figuras para construir la idea de clase de polígono parecen indicar que la comprensión de esta idea depende del atributo que define la clase y del papel que desempeñan las aprehensiones, considerando los modos de representación verbal o ejemplificando a través de dibujos de figuras. Los cambios identificados en las relaciones cuasiimplicativas mostraron la dependencia del atributo en las tareas en las que se tenía que abstraer el

atributo común de un conjunto de polígonos (estructuración espacial, Battista et al., 1998), pues no en todos los casos se usan los significados matemáticos de los diferentes conceptos geométricos de la misma manera. En este sentido, coordinar el reconocimiento de atributos, la explicación y el dibujo es una forma de aproximarse a la comprensión de una clase de polígonos, lo cual implica una correcta deconstrucción dimensional de las figuras geométricas y coordinación de las aprehensiones cognitivas (Duval, 1995, 2017). Los cambios identificados en este estudio pueden ser considerados fruto de la secuencia de enseñanza (el diseño y secuenciación de las tareas, los materiales empleados, el papel de la investigadora-maestra) durante la instrucción y de la gestión de la discusión con los estudiantes, entre otros. Estos resultados apoyan las aproximaciones teóricas que inciden en la importancia de las características del contexto en determinar el desarrollo del pensamiento categorial de los estudiantes (Satlow y Newcombe, 1998).

RECONOCIMIENTO

Esta investigación ha sido apoyada en parte por el proyecto Prometeo/2017/135 de la Generalitat Valenciana (España) y con el apoyo de la Universidad de Alicante (FPU2017-014).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Reston, VA: NCTM-IAP.
- Battista, M. (2012). *Cognition-based assessment & teaching of geometric shapes: Building on students' reasoning*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Battista, M., Clements, D., Arnoff, J., Battista, K. y Borrow C. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(5), 503-532.
<https://doi.org/10.2307/749731>
- Bernabeu, M. y Llinares, S. (2017). Comprensión de las figuras geométricas en niños de 6-9 años. *Educación Matemática*, 29(2), 9-35.
<https://doi.org/10.24844/em2902.01>
- Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2019). Experimento de enseñanza como una aproximación metodológica a la investigación en Educación Matemática. *Uni-pluri/versidad*, 19(2), 103-123.
<https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.07>
- Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2021). Primary school students' understanding of polygons and the relationships between polygons. *Educational Studies in Mathematics*, 106(2), 251-270.
<https://doi.org/10.1007/s10649-020-10012-1>
- Clements, D., Swaminathan, S., Hannibal, M. y Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192-212.
<https://doi.org/10.2307/749610>
- Collins, A., Joseph, D. y Bielaczyc, K. (2004). Design research: theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 15-42.
https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2
- Couturier, R. (2008). CHIC: Cohesive hierarchical implicative classification. En R. Gras, E. Suzuki, F. Guillet y F. Spagnolo (Eds.), *Statistical implicative analysis* (vol. 127, pp. 41-53). Berlín: Springer-Verlag.
- De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.

- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. En R. Sutherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlín: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0_10
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, 10, 5-53.
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking – The registers of semiotic representations*. Cham: Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9>
- Elia, I. y Gagatsis, A. (2003). Young children's understanding of geometric shapes: The role of geometric models. *European Early Childhood Education Research Journal*, 11(2), 43-61.
<https://doi.org/10.1080/13502930385209161>
- Fischbein, E. y Nachieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, 20, 1193-1211.
<https://doi.org/10.1080/0950069980201003>
- Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 60-72.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.003>
- Gogou, V., Gagatsis, A., Gridos, P., Elia, I. y Deliyianni, E. (2020). The double nature of the geometrical figure: Insights from empirical data. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 17, 7-23.
- Gras, R. y Kuntz, P. (2008). An overview of the Statistical Implicative Analysis (SIA) development. En R. Gras, E. Suzuki, F. Guillet. y F. Spagnolo (Eds.), *Statistical implicative analysis* (pp. 11-40). Berlín/Heidelberg: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-540-78983-3_1
- Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F. y Spagnolo, F. (Eds.) (2008). *Statistical implicative analysis. Theory and applications*. Londres: Springer.
- Hannibal, M. y Clements D. (2000). *Young children's understanding of basic geometric shapes*. National Science Foundation, Grant Number: ESI-8954644.
- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry – two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61-76.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition. A research synthesis by international group for the psychology of mathematics education* (pp. 70-95). Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.
- Kaur, H. (2015). Two aspects of young children's thinking about different types of dynamic triangles: prototypicality and inclusion. *ZDM*, 47, 407-420.
<https://doi.org/10.1007/s11858-014-0658-z>
- Levenson, S., Tirosh, D. y Tsamir, P. (2011). *Preschool geometry. Theory, research and practical perspectives*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 29(1), 75-88.

- Moreno, M., Bernabeu, M., Gagatsis, A., Llinares, S. y Panaoura, R. (2019). Changes in third-grade students' understanding of polygons. En M. Graven, H. Venkat, A. Essien y P. Vale (Eds.), *Proceedings of the 43rd conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 97-104). Pretoria: PME.
- Sarama, J. y Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Taylor Francis.
<https://doi.org/10.4324/9780203883785>
- Satlow, E. y Newcombe, N. (1998). When is a triangle not a triangle? Young children's developing concepts of geometric shape. *Cognitive Development*, 13(4), 547-559.
[https://doi.org/10.1016/S0885-2014\(98\)90006-5](https://doi.org/10.1016/S0885-2014(98)90006-5)
- Seah, R. y Horne, M. (2019). The construction and validation of a geometric reasoning test item to support the development of learning progression. *Mathematics Education Research Journal*, 1-22.
<https://doi.org/10.1007/s13394-019-00273-2>
- Sinclair, N., Bussi, M. G. B., De Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM*, 48(5), 691-719.
<https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6>
- Sinclair, N., Cirillo, M. y de Villiers, M. (2017). The learning and teaching of geometry. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 457-489). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Stylianides, A. y Stylianides, G. (2013). Seeking research-grounded solutions to problems of practice: classroom-based interventions in mathematics education. *ZDM*, 45(3), 333-341.
<https://doi.org/10.1007/s11858-013-0501-y>
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.
<https://doi.org/10.1007/BF00305619>
- Trigueros, M. y Escandón, C. (2008). Los conceptos relevantes en el aprendizaje de la graficación: un análisis a través de la estadística implicativa. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 13(36), 59-85.
- Tsamir, P., Tirosh, D. y Levenson, E. (2008) Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 81-95.
<https://doi.org/10.1007/s10649-008-9133-5>

Changes in the Understanding of Relationships between Polygons in 8 and 9-year-old Students

Melania Bernabeu, Mar Moreno, Salvador Llinares

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante, San Vicente del Raspeig, Alicante, España
melania.bernabeu@ua.es, mmoreno@ua.es, sllinares@ua.es

The shifts from recognising the attributes of geometric figures to identifying two perceptually different shapes, as examples of the same class, are key in the development of students' understanding of geometric figures. Furthermore, understanding the relationships between figures involves the transition from recognising a list of attributes to identifying similarities and differences between figures. These shifts in the way of understanding are supported by the processes of generating and organising information about geometric figures, called *spatial structuring*. Spatial structuring involves reasoning with the generated information and evidencing a process of abstraction.

This study aims to identify changes in the 8 and 9-year-old students' understanding of the polygon concept and the polygon classes when participating in an innovative teaching experiment as evidence of the development of spatial structuring.

The teaching experiment aimed to favour students' spatial structuring skills by focusing on developing the dimensional deconstruction of geometric figures. In this teaching experiment, we considered the polygon concept as a closed plane figure with straight and uncrossed sides and some classes of polygons whether concave or convex, according to the number of sides, symmetrical, different classes of triangles and quadrilaterals, and the inclusive relationships between some polygon classes.

Students answered the same questionnaire before and after the teaching experiment. We analysed the students' answers by conducting an implicative analysis using the CHIC software. The analysis consisted of two phases: first, we configured 48 variables to code the students' answers considering the notions of dimensional deconstruction and cognitive apprehensions; and next, we obtained the quasi-implicative graphs.

This software generates graphs that allow us to identify and organize quasi-logical implications between the mathematical meanings associated with geometric figures (quasi-implicative relationships between variables with a certain probability). The implicative analysis is based on the idea that knowledge is formed inductively, from the concepts introduced during instruction.

The results display two graphs at the 98 % significance of the quasi-implicative relationships between the variables in the initial and the final questionnaire. The comparison of the graphs shows an increase in the number of variables and relationships between them in the final questionnaire.

The increase in the number of variables and the quasi-implicative relationships among them can be understood as evidence of greater coordination of apprehensions when students reason with attributes.

The change in understanding the relationships between polygons was linked to identifying classes of polygons and explaining and drawing examples of the identified classes. In this sense, the development of a greater ability to abstract the common attribute defining a class of polygons seems to rely on dimensional deconstruction through the coordination of discursive and sequential apprehensions.

The increased number of relationships between the variables related to identifying the common attribute in a set of polygons exemplifies the way students extend the conceptual network as linked to the concept of polygon and polygon classes.

These changes underline the multifaceted nature of dimensional deconstruction and the importance of the coordination of cognitive apprehensions in the development of geometric thinking and, particularly, in the understanding of relationships between polygons in primary school students (spatial structuring). Moreover, these changes show that the construction of the idea of a class depends on the attribute and the role played by the apprehensions considering the modes of representation.