

ENSEÑANZA POR DIAGNOSTICO. ALGUNOS PROBLEMAS SOBRE NUMEROS ENTEROS

BELL, A.

Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham

(Traducción de Francisco Hernán)

SUMMARY

The method of diagnostic teaching involves in the first place studying the pupils' understanding of the topic in question, identifying errors and the misconceptions underlying them; then designing teaching in which the misconceptions are exposed and resolved through conflict-discussion. This article will report experiments covering both the testing and the teaching phases on the topic of directed quantities.

INTRODUCCION

El método de enseñanza por diagnóstico implica en primer lugar el estudio de la comprensión que los alumnos tienen del tema o situación en cuestión, la identificación de los fallos y de los errores conceptuales que están tras esos fallos y después el diseño de la enseñanza en la que los errores conceptuales sean expuestos y resueltos a través de una discusión-conflicto. Este artículo informará de algunas experiencias que cubren tanto la fase de estudio de la comprensión como la fase de enseñanza en el tema de los números enteros.

Antes de nada, nos parece que lo que importa en la introducción de los números enteros es el armazón que ayude a desarrollar los procedimientos correctos días, semanas y años más tarde de que se haya hecho la primera introducción, cuando el alumno afronte cálculos con números enteros y haya olvidado los detalles de aquel primer contacto. Lo importante, es, pues, que las conceptualizaciones correctas estén ligadas a una dilatada situación familiar en la que las operaciones tengan una interpretación bien comprendida y en la que las reglas que hayan de memorizarse sean pocas y sólidas. «Restar un negativo es equivalente a sumar un positivo» es una de esas reglas; adquiere significación en situaciones habituales de temperatura y dinero y hace referencia a números efectivos, y no meramente a símbolos; en ambos aspectos es mejor que «dos menos hacen un más». Estas consideraciones han estado presentes en las situaciones de enseñanza que hemos elegido. Pero describamos primeramente las entrevistas y análisis que mostraron el grado de comprensión que los alumnos tienen de este terreno.

La necesidad principal es que los números negativos y sus operaciones tengan los mismos fuertes lazos con

la realidad que las que los números positivos y sus operaciones tienen. 8-5 puede representarse fácilmente, si es necesario, levantando 8 dedos y retirando 5, o pensando cuánto más larga es una longitud de 8 metros que una de 5. De manera semejante $(+8) + (-5)$ puede representarse fácilmente como «Empieza con cualquier número, añade 8, quita 5, ¿Cuál es el efecto resultante sobre el número inicial?» Pero $8 - (-5)$ es mucho más difícil de representar intuitivamente. «Lo que hay que subir desde -5 hasta 8» y «Tengo 8 pesetas y me cancelan una deuda de 5 pesetas» pueden servir, pero es necesario seguir trabajando para dotarles de significado y para hacer que estén relacionados con la expresión simbólica.

Si los números negativos y las operaciones con ellos han de lograr el concreto status familiar que tienen los positivos, los alumnos necesitan mucha más experiencia en la exploración y manipulación de las situaciones familiares en las que esos números se encuentran. Y eso significa no sólo la recta numérica, sino dinero, temperatura y el plano de coordenadas. Pero hay otras estructuras —las listas o tablas— que incorporan algunas de esas mismas propiedades y que merecen atención por derecho propio. Las listas de «los cuarenta principales» y la tabla de la liga de fútbol proporcionan ejemplos familiares en los que son de interés los movimientos hacia arriba y hacia abajo. Estos contextos podrían servir de base para algunas lecciones exploratorias en las que se pueden considerar pautas y relaciones en las tablas, y en las que pueden proponerse preguntas acerca de cómo recuperar información perdida si una parte de la tabla es ilegible o ha sido borrada.

Resulta que en tales exploraciones hay ciertos tipos de preguntas que son mucho más difíciles que otras, debido a que requieren un mayor nivel de abstracción o tienen una irremediable mayor complejidad. En general, aunque no de un modo simple o directo, ambas cosas están ligadas a los cálculos con números negativos, que presentan exigencias similares. De todas maneras, está claro que es necesario que sean vencidos los obstáculos conceptuales que los problemas dentro de sus contextos presentan, y ello no sólo para la total comprensión de las situaciones mismas, sino como requisito previo para su utilización como ayuda para la comprensión de los cálculos con números enteros.

En este artículo expondremos los resultados de una colección de entrevistas y de una prueba escrita que cubre todos los tipos básicos de problemas con una operación que surgen en los contextos de las tablas de «los cuarenta principales» y de la liga de fútbol, temperatura y dinero, junto con un conjunto de preguntas relativas a comparación de edades. El conjunto de las estructuras de los problemas se reparte en dos clases, las que conllevan un estado inicial, un cambio y un estado final, y aquellas en las que dos cambios se combinan para formar un cambio «resultante». El grado de dificultad del problema depende de manera muy substancial de si lo desconocido es, en el primer caso, el estado final, el cambio o el estado inicial, y, en el segundo caso, el cambio resultante o uno de los componentes. Designaremos estos problemas con una notación del tipo [S]TS, donde los paréntesis indican qué es lo desconocido. Los primeros ejemplos que siguen dejarán esto claro.

ERRORES CONCEPTUALES EN SITUACIONES DE LISTAS Y ESCALAS

En estos problemas hemos observado cuatro clases de obstáculos conceptuales que afectan al tratamiento que los alumnos hacen de los problemas. Esos obstáculos son:

- (1) dificultades en la conceptualización de cantidades enteras o de los propios números negativos, en su ordenación y en su uso para representar posiciones o movimientos;
- (2) dificultades en problemas para cuya solución se requiere una inversión del pensamiento; estos problemas contienen una palabra clave «engañosa» como «más» o «sube»;
- (3) dificultades asociadas con cruzar el cero;
- (4) dificultades al manipular combinaciones de cambios (por ejemplo, movimientos o transacciones de dinero), en particular cuando los cambios se refieren a un estado de partida desconocido.

Los errores conceptuales incluidos en este apartado los hemos designado con los títulos «subir es aumentar»

(SA), incluyendo numeraciones erróneas de la recta numérica; «ignorar el signo» (IS), «signo denota región» (SR), «omitir el signo mientras se está operando» (OSO), y «confundir posición y movimiento» (PM).

«Subir es aumentar» consiste en la confusión de «ir hacia arriba» con aumentar el número, sin darse cuenta de que en las listas o en los números negativos un movimiento del, digamos, octavo al segundo es una subida, aunque numéricamente sea ir a un número más pequeño. De manera similar, del -8 al -2 hay una subida. Curiosamente, nosotros mismos a veces pedimos a los alumnos que digan que -2 «es mayor que -8, y a la vez les pedimos, al dibujar gráficas que tomen valores «negativos más grandes». Deberíamos ser más consecuentes acerca del conflicto esencial que aquí se plantea y decir simplemente que -2 es un número mayor que -8 en la recta numérica, y que representa una temperatura mayor).

En una muestra de 400 alumnos de 8-9 años, el 30% de ellos cometieron el error «subir es aumentar» en las cuatro preguntas relativas a tablas o listas. Un número muy pequeño, pero consistente, de alumnos contaron mal, esto es, contaron, por ejemplo el primer y último elemento de una secuencia, o ninguno de los dos, dando así respuestas que eran la respuesta correcta + 1 (en la tabla 1 aparecen como CE). La tabla 1 muestra los resultados obtenidos y también ilustra las distintas estructuras de las preguntas y la notación.

TEMPERATURAS NEGATIVAS

Preguntas similares a las anteriores, pero concernientes a temperaturas negativas revelaron que las respuestas correctas descendieron en un 25% aproximadamente. En este caso aparecieron también otros errores; en particular, ignorar el signo negativo (IS), o bien totalmente o bien solamente en la respuesta (ISR).

En el caso de las temperaturas negativas, la suposición de que «subir» significa aumentar el tamaño del número, y viceversa, es un aspecto del fracaso en entenderse con los números negativos y su ordenación. Un fracaso más completo en reconocer la importancia de la negatividad es el mostrado por los alumnos que en la pregunta 7 dan respuestas desprovistas de signo. Esos alumnos están incluidos en la alta proporción de errores de las otras dos preguntas, en las que las respuestas IS y SA no pueden separarse. Obsérvese también el pequeño pero persistente número de respuestas «signo denota región», p.e., «baja -7°».

NUMERANDO EL TERMOMETRO

La mayoría de los alumnos comprenden cómo funciona un termómetro, saben que cuando el mercurio no llega muy lejos de la ampolla, hace frío y cuando está cerca del extremo del termómetro hace calor. Sin em-

Tabla I

		+	SA	CE
Pregunta 8 Tipo SR (S)	En las listas de los 40 principales el disco favorito de Jane estaba tres lugares más abajo de lo que había estado la semana anterior. La antigua posición era la 13ª ¿cuál era la nueva posición?	16%	10%	16 ó 10 + 1
		55%	30%	2%
		+	SA	CE
Pregunta 22 Tipo SI (S)	En la tabla de la liga de futbol el Newcastle subió cuatro puestos una semana. Antes estaba en el 14º. ¿En cuál estaba después?	10%	18%	10 ó 18 + 1
		57%	25%	15%
		+	SA	CE
Pregunta 10 Tipo SI(T) S	En la lista de los Cuarenta Principales una semana el disco favorito de Susan pasó del 12º al 15º. ¿Subió o bajó? ¿Cuántos puestos?	Baja 3	Sube 3	Sube/baja 3 (+1)
		68%	27%	2%
		+	SA	CE
Pregunta 27 Tipo S (R) S	En la lista de los Cuarenta Principales de una semana el disco favorito de Peter estaba el 11º y el de John el 19º. ¿Estaba el disco favorito de John más arriba que el de Peter o más abajo que el de Peter? ¿Cuántos puestos?	8 más bajo	8 más alto	8 (+ 1)
		57%	35%	3%

Tabla II

		+	SA/IS	SA	ISR
Pregunta 7 SI(S)	Un día en Moscú la temperatura descendió 6º entre la salida del sol y el mediodía. A la salida del sol era de -7º. ¿Cuál era al mediodía?	-13	1	-1	13
		28%	16%	11%	10%
		+	SA/IS	SR+SA	SR
Pregunta 20 SI(S)	-7º en Moscú; -3º en Budapest. Si alguien hubiese viajado de Moscú a Budapest, ¿habría notado una subida o una bajada de temperatura?	sube 4	baja 4	baja -4	sube -4
		32%	41%	4%	2%
		+	SA/IS	SR+SA	SR
Pregunta 14 SI(S)	Un día en Aberdeen hacía -9º a mediodía pero -2º a la hora de arrendar. ¿Subió o bajó la temperatura durante esas horas? ¿Cuántos grados?	sube 7	baja 7	baja -7	sube -7
		49%	42%	5%	4%

bargo, eso no siempre forma parte de un cuerpo de conocimientos que incluya una comprensión de la posición que los números ocupan en un termómetro. En una de las entrevistas grabadas en vídeo, a una niña (Germaine) se le había dado un dibujo de un termómetro con el 0 marcado en el punto medio de su longitud, y se le pidió que escribiera en él las temperaturas desde 10 hasta -10. Lo hizo como indica la figura:

figura 1



Pero la conversación posterior acerca de dónde estarían las temperaturas «calientes» y «frías» le permitió ver y aceptar su error. Germaine y Kerry estaban mirando los dibujos que las dos habían hecho. El de Kerry era correcto y el de Germaine es el que hemos dicho. La conservación se desarrolló así:

Profesor: ¿Cómo podéis saber cuál de los dos está bien?

Ambas (con seguridad): No se puede.

Profesor: ¿Cuáles son las temperaturas calientes y cuáles son las frías?

Germaine: ¡Ah! Ese (refiriéndose al dibujo de Kerry) está bien, ¿no?

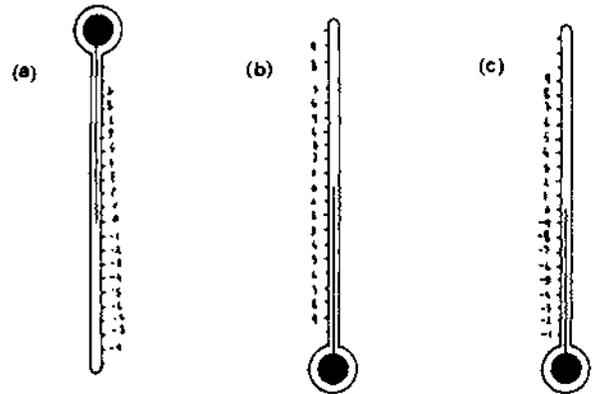
A doce alumnos se les encargó la tarea de anotar las temperaturas entre -10 y 10 en un dibujo de un termómetro que tenía todo en blanco menos el 0. Eran alumnos que en un test previo habían tenido dificultades con preguntas acerca de temperaturas. Casi inmediatamente empezaron poniendo los números positivos, y hubo dos que se equivocaron porque procedieron hacia abajo, comenzando en cero como si estuvieran numerando las preguntas de un examen. Uno de ellos fue Germaine; y hubo otros dos que volvieron su dibujo de arriba abajo antes de poner los números negativos en él, para poder escribir de nuevo los números de manera descendente. Su diagrama es como el (a) de la figura 2.

Incluso cuando los alumnos pusieron correctamente las temperaturas positivas aún quedaba lugar para cometer errores con las negativas. Dos tipos de error fueron observados. Dos alumnos omitieron los signos negativos y otros tres escribieron los números negativos

empezando con -1 desde la parte de abajo del termómetro. Estos errores se muestran en (b) y (c).

Unos cuantos alumnos tienen consolidado el error conceptual del tipo (c) porque lo usan para obtener respuestas a preguntas de temperaturas.

figura 2



DIFERENCIAS AL CRUZAR EL CERO

En las preguntas de temperatura y dinero puede haber movimientos entre estados positivos y negativos, o relaciones entre ellos. En la prueba escrita había cinco preguntas en las que se daba a los alumnos dos temperaturas, una por encima de cero y otra por debajo, y tenían que hallar la diferencia entre ellas e indicar en qué sentido tenía lugar el cambio o la relación. Aun cuando el modo de redactar estas preguntas variaba algo, y con ello los detalles de la tarea por cumplir, los alumnos fueron extraordinariamente consistentes en su modo de tratar las preguntas.

Si tenían correcta una de las respuestas, era muy probable que tuviesen correctas todas las demás. Además, estas preguntas produjeron una información interesante sobre la prueba escrita en su conjunto: los alumnos que respondieron correctamente a ellas, casi sin excepción hicieron bien el resto de las preguntas.

El error más común que provocaron estas preguntas fue el de restar. El hecho de que se requiera una diferencia sugiere la resta; había además, siempre, como mínimo un signo menos en la pregunta, cosa que reforzaba este sesgo cognoscitivo. En muchísimos casos, el lugar cuya temperatura estaba representada por el número con mayor valor absoluto era considerado como el lugar más cálido, y, tras ignorar el signo negativo, la diferencia se hallaba restando del número mayor el menor.

La tabla 3 muestra una pregunta típica y las respuestas obtenidas. Otras tres preguntas similares dieron re-

Tabla III

		*	IS	DC
		11°	5° Londres	5° Oslo
Pregunta 9 S (R) S	Un día la temperatura era -8° en Oslo y 3° en Londres. ¿En qué lugar hacía más frío? ¿cuántos grados?	40%	29%	10%

sultados muy parecidos. Aparece otra vez con claridad que un gran número de alumnos están efectivamente ignorando el signo menos, y que un número menor de alumnos tienen en mente el signo, pero restan en lugar de sumar (error DC). El tratamiento correcto aquí es probable que sea el de llamar su atención específicamente al conflicto entre la idea de diferencia y la necesidad de sumar.

**INVERSION Y PALABRAS CLAVE
«ENGAÑOSAS»**

Estas dificultades se presentan en preguntas cuya solución requiere una inversión del sentido del cambio o relación dados en la pregunta; esto es, en preguntas en las que el estado inicial o, en el caso de relaciones, el estado referente, es desconocido (tabla 4). Llamaremos a este error «fracaso en la inversión» (FI).

En las entrevistas solíamos pedir a los alumnos que repitiesen las preguntas utilizando sus propias palabras, lo cual mostró a menudo las dificultades que la pregunta presentaba. Por ejemplo, cuando a Andrea se le hizo esta pregunta similar a la P25: «Una niña gastó en dulces la semana pasada 8 p. más que esta semana. ¿Cuánto ha gastado esta semana?» La respuesta de Andrea fue 73 p., y cuando se le pidió que repitiese la pregunta dijo:

«Una niña fue a la tienda y gasto 8 p. más esta semana que lo que había gastado la semana pasada, y gastó 65 p.»

Dos alteraciones hay aquí. El sentido de la relación se ha cambiado de «... La semana pasada... que... esta semana...» a «... esta semana... que... la semana pasada», y la cantidad de dinero gastado ha perdido su punto de referencia: ¿fue la cantidad gastada esta semana o la semana pasada?.

COMBINACION DE MOVIMIENTOS

Hemos considerado hasta aquí la primera de las dos clases de problemas a los que nos hemos referido, la de aquellos problemas que conllevan un estado inicial, un cambio y un estado final. Trataremos ahora la segunda clase, aquella en que se combinan cambios. Preguntas de este tipo, en las que lo desconocido es el movimiento resultante, no son conceptualmente muy diferentes de los problemas STS; uno supone implícitamente un punto de partida cero y lee el estado final para dar el resultante. Nuestras preguntas fueron todas del tipo más difícil, las que requieren encontrar uno de los movimientos componentes. Las dos preguntas que siguen muestran ejemplos típicos de esta estructura (tabla 5).

Tabla IV

		*	FI
Pregunta 11	Un día en Madrid hacía 10° más frío que en El Cairo. En Madrid hacía 14° ¿Cuál era la temperatura en El Cairo?	24%	4%
		51%	28%
Pregunta 13	El computador de Linda costó £ 12 más que el de Jill. El de Linda costó £ 84 . ¿Cuánto costó el de Jill?	£72	£96
		68%	22%
Pregunta 25	Sharon gastó ayer en dulces 8 p. más que hoy. Ayer gastó 45 p. ¿Cuánto ha gastado hoy?	37	53
		44%	39%

Tabla V

		Bajó 4	Subió 4	Subió 6
Pregunta 36 T [7] R	El disco favorito de Sheila está 6 lugares más arriba de lo que estaba hace dos semanas. Durante la primera de esas semanas subió 10 lugares. ¿Subió o bajó en la segunda semana? ¿Cuántos lugares?	31%	19%	10%
		FI		
		Bajó 8	Bajó 2	Subió 2
Pregunta 29 T [7] R	El disco favorito de Sandra está 5 lugares más abajo de lo que estaba hace dos semanas. Durante la primera de esas dos semanas subió 3 lugares. ¿Subió o bajó en la segunda semana? ¿Cuántos lugares?	17%	36%	14%

El error principal reside en no reconocer las relaciones de tiempo y en combinar los dos datos como si fuesen componentes. Así, «subió 3, acabó 5 lugares más abajo de lo que estaba al principio» se interpreta como «arriba 3, abajo 5». Esto no ocurre, sin embargo, en el primer problema, posiblemente porque en «sube 10 y acaba 6 más arriba» los cuatro lugares se pierden partiendo del 10 dado, mientras que en el otro problema la subida de 3 no puede tomarse simplemente a partir de los 5 «lugares hacia abajo».

Preguntas similares en un contexto de dinero fueron algo más fáciles, pero produjeron esquemas semejantes de respuesta. Estas preguntas se propusieron de un modo ligeramente diferente, como en el ejemplo siguiente (figura 3):

Se grabó la conversación que dos alumnos tuvieron sobre la pregunta 34. Primero se dieron cuenta de que «no puedes quitar 5 de 3 ¿no?», y se percataron de que no se les decía con cuánto dinero empezaba Kathy por la mañana. Finalmente, uno de ellos dijo:

«Todo lo que se me ocurre es 5 de 3..... 2»

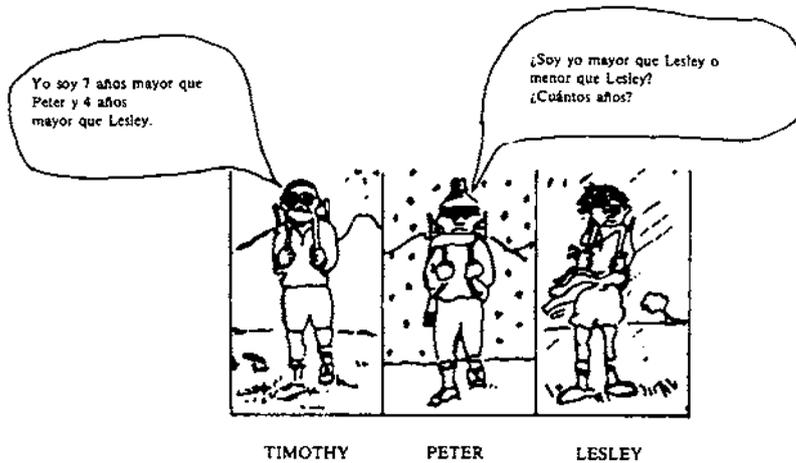
Otro grupo de alumnos dio una interpretación de la pregunta que le pareció aceptable. Sostenían que Kathy fue de tiendas y gastó £5, pero les pareció que tenía sentido decir que sólo gastó £2, porque £3 procedían de su abuelo, así que sólo £2 eran de su propio dinero.

Las preguntas de comparación de edades fueron de la forma RRR, (ver figura 4). La referencia temporal no era necesaria, pero sí que lo era la referencia personal,

figura 3



figura 4



Peter es... años mayor/menor que Lesley.

y, en todos los casos, para encontrar la solución era necesaria alguna inversión de las relaciones dadas. Las tasas de éxitos fueron considerablemente más altas, pero los errores principales estuvieron también en combinar los datos directamente, sin tener esto en cuenta.

DISCUSION

Está claro que muchos alumnos tratan estos problemas con un marco de ideas muy inadecuado y que se limita con frecuencia a la simple noción de que hay que combinar los dos números sumándolos o restándolos, eligiendo la operación de acuerdo con la presencia de un signo menos o de una palabra clave que indica la operación. En nuestra opinión debería presentárseles una gama de problemas similar a la que aquí hemos expuesto, extraer los conflictos que provengan de las diferentes respuestas dadas por diferentes alumnos, y anotar los distintos tipos de problemas y las clases de errores que son comunes. En particular, los alumnos necesitan darse cuenta de la necesidad, en ciertos casos, de invertir relaciones o cambios. Muchos alumnos necesitan también mucha más experiencia en la exploración de situaciones que contengan cantidades positivas y negativas, para sensibilizarse a la importancia y el significado del sentido y del signo negativo. No merece la pena intentar enseñar reglas para manipular números negativos hasta que los alumnos comprendan aquellas situaciones que los contienen. Además, cuando estas situaciones contextuales son comprendidas se las puede utilizar como situaciones de referencia para dotar de significado a las manipulaciones con números enteros, de modo que todos los significados que surjan posteriormente con los números puedan ser tratados poniéndolos en un contexto. Por esta razón los contextos que se empleen deben ser contextos familiares y que

sigan siendo de uso por derecho propio, condición esta que muchos métodos no cumplen.

No querría, sin embargo, excluir todos ellos por inútiles. Todos tienen un lugar como situaciones por explorar, no como modelos definitorios de los enteros, sino como sistemas en los que se puede descubrir que comparten propiedades similares a las del sistema del número con su signo y sus ya familiares concreciones. En particular, el modelo positrón/negatrón (cubos negros y rojos) es interesante e instructivo.

No hemos discutido aquí la representación de situaciones adecuadas mediante cálculos con números enteros; es decir, hemos podido hallar el cambio de temperatura desde -3 a 31 , pero no hemos pedido que eso se escriba, ni como $31 - (-3)$ ni de ninguna otra forma. Solamente hemos considerado el establecimiento de unas bases suficientemente firmes sobre las que esas cosas puedan construirse.

ENSEÑANZA MEDIANTE CONFLICTO DISCUSION: UN EXPERIMENTO COMPARADO

Nuestro primer experimento de enseñanza sobre los números enteros tenía dos objetivos principales. Uno era someter a prueba la efectividad de un método de enseñanza basado en el conflicto, reflexión y discusión para eliminar los errores conceptuales que habían aparecido en la prueba realizada con anterioridad. El segundo era ver en qué medida la superación de los errores conceptuales en un contexto se transfería a otros contextos. Así que un grupo de clases trabajó con tablas de la liga de fútbol y listas de los cuarenta principales, y el otro con dinero y temperatura; pero las pruebas pre y post enseñanza contuvieron preguntas de todos

estos contextos, y observamos en qué medida había un efecto de difusión.

El aspecto de mayor interés del método de enseñanza fue la cantidad e intensidad de conflicto-discusión.

La enseñanza en el contexto de liga de fútbol y tabla de los cuarenta fue enfocada hacia los errores conceptuales siguientes: 1) considerar que ir hacia arriba implica números crecientes, 2) contar tanto el número del comienzo como el del final de una lista al hallar una diferencia, 3) fracasar al invertir en preguntas en las que lo desconocido es el estado inicial, es decir, suponer que los enunciados en los que hay «subir» o «más» implican necesariamente sumar. En dinero y temperatura se trataron los mismos errores conceptuales, y además los relativos a cantidades negativas, esto es, (4) ignorar el signo, (5) considerar el signo como denotador de región, (e.g. de -6 a -2 hay una subida de -4), y (6) tratar las diferencias que cruzan el cero mediante sustracción en lugar de adición de las magnitudes.

Las lecciones de conflicto-discusión tuvieron tres partes. En la primera, para explorar el tema, se hacen algunas preguntas cuyas respuestas se espera que muestren explícitamente las equivocaciones conceptuales. Por ejemplo, una lección sobre el clima mundial empieza con una página de «titulares de periódicos» y pide, primeramente las temperaturas en Reykyavik y Lisboa, y el cambio de temperatura al ir de Budapest a Moscú (-7° en Moscú, y -3° en Budapest). Una vez que los alumnos ya han tenido tiempo de escribir sus respuestas, empieza la discusión. El profesor dice, por ejemplo, «De Budapest a Moscú podéis haber escrito que hay una subida o bajada de 3° ó 4° ó 5° ó -4°, ¿Alguno tiene otra respuesta?». Luego, pregunta cuántos alumnos tienen cada una de esas respuestas, y les pide que expliquen cómo han obtenido cada respuesta y pregunta a los demás si están de acuerdo. El profesor pretende con ello que surja y quede expuesto tanto conflicto como sea posible en ese punto, y, si es necesario, el mismo profesor expresa argumentos mal hechos para suscitar discusión. El profesor intenta que los alumnos expresen en términos generales las generalizaciones equivocadas y las acertadas. Después de esta discusión los alumnos continuarán respondiendo por escrito a más preguntas, cuyas respuestas proporcionarán indicios de si hay un avance en la comprensión.

La figura 5 es un ejemplo de la información sobre la liga de fútbol y la tabla de los cuarenta principales.

Preguntas como la de la asistencia de público al campo de fútbol del Forest fueron importantes.

«1.800 personas menos esta semana que la semana pasada;

1.200 esta semana...»

Esta produjo un fuerte conflicto y en varias clases fue la pregunta clave que hizo a los alumnos darse cuenta

figura 5

INFORMACION

- ¡Aston Villa con problemas! Ha bajado de 3° a 6°.
- Stoke marcó 6 goles más el mes pasado que este mes. Este mes ha marcado 13 goles.
- Los partidarios del Tottenham están felices. Ha subido 4 lugares, hasta el 12°.
- Asistencia al campo de Forest. Esta semana han ido 1800 personas menos que el pasado. Esta semana han ido 12.00 personas.
- ¡La directiva del Birmingham reunida! El equipo ha bajado 7 lugares. Ahora está el 19°.
- Q.P.R. mejora. Ha subido 4 lugares y está el 5°.
- Duran Duran ha subido 4 lugares y ahora está el 16°.
- El disco de Billy Joel ha vendido esta semana 5.665 copias más que la pasada. Esta semana ha vendido 19.556.

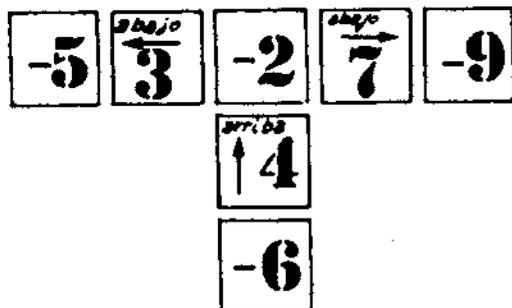
de la posible necesidad de invertir el procedimiento para resistirse a la palabra clave y tener en cuenta cuidadosamente la dirección de la relación.

Cuatro clases utilizaron el material de Liga y Principales (LP) y tres clases el de Dinero y Temperatura (DT), durante unas tres lecciones. Los propios profesores de los alumnos tuvieron a su cargo las clases, y estuvo presente un observador del equipo de experimentación. Se registraron los detalles de las lecciones y se prestó atención a la calidad e intensidad de la discusión. Aspectos particulares anotados fueron la proporción de las contribuciones de profesor y alumno, la amplitud de la participación en clase, si hubo conflicto evidente (a) entre alumnos, o (b) en el interior de un individuo (expresión de incertidumbre o tensión), hasta dónde fue evidente la resolución del conflicto, y si los equívocos conceptuales eran expresados en términos específicos o en términos generales, si eran explicados o meramente notados, y si lo eran por un alumno o por el profesor. Por ejemplo, «subir del 12° significa que tiene que estar el 5°» es específico, mientras que «en este diagrama los números más altos van con los lugares más bajos» es general.

La discusión fue calificada por el observador como buena, aceptable, pobre, muy pobre o ninguna, en relación con el nivel general a lo largo de todas las lecciones. Entre los cuatro grupos LP se tomó la decisión deliberada de conducir una clase sin ninguna discusión. Esta clase trabajó el material como una clase «normal», y en ésta el profesor introducía brevemente el material, proponiendo después preguntas para que fuesen res-

pondidas por escrito por los alumnos y ayudando individualmente cuando era necesario. En una de las otras clases se puso particular énfasis en un juego en el que las tarjetas llevaban números enteros o instrucciones numéricas y en el que las tarjetas habían de colocarse de manera que compusieran cadenas correctas. El diagrama siguiente (figura 6) muestra un estado típico del juego.

figura 6



El jugador se anotaba puntos por el número de tarjetas jugadas, y podían jugarse partidas con otros jugadores. En otra clase se puso el énfasis en la actividad de proponer preguntas al jugador oponente, preguntas del mismo tipo que las que ya se han mencionado. Hay que señalar que esto no condujo a diferencias muy significativas entre las clases, comparadas con la cantidad de las discusiones generadas.

Ambas actividades se desarrollaron de manera más bien lenta, debido a su poca familiaridad y que el breve periodo de tres o cuatro lecciones no fue suficiente tiempo para que alcanzasen todo su potencial. (Desde entonces hemos observado que ambas actividades son buenas y efectivas tras la lenta puesta en marcha inicial). En las clases de DT se buscó que hubiese una discusión que fuese lo mejor posible, pero no se tuvo mucho éxito. A los observadores les pareció que las razones de ello estuvieron en la combinación de material, profesores y clases. El material DT contenía demasiadas preguntas fáciles y muy pocas difíciles para las edades de los alumnos a los que se propusieron estas preguntas; y los profesores, en particular uno de los dos que participaron, estaban poco familiarizados con la enseñanza por conflicto-discusión.

EXPECTATIVAS

El test contenía 20 preguntas que incluían cuatro contextos y que cubrían todas las equivocaciones conceptuales notadas con anterioridad.

Para su análisis se dividió en tres secciones. Una primera contenía 6 preguntas de Liga y Principales y otras 2 preguntas de estructura similar a la de «asistencia al campo del Forest», y requería el más bien difícil tipo

de inversión esta semana/la semana pasada, en el que había que resistirse a una palabra clave «engañosa» como «más». La segunda sección contenía las cuatro preguntas que implicaban cruzar el cero, en las que el signo debe ser tratado con cuidado y la «diferencia» requiere sumar. La tercera sección contenía 6 preguntas de dinero y 2 de temperatura, que no contenían números negativos. Todas estas requerían que se tratase atención a antes/después y a la posible necesidad de invertir. El punto de interés aquí era la transferencia. De las cuatro preguntas de temperatura cruzando el cero se esperaba que derivaría el mayor provecho debido a la atención que se había prestado al signo en el material DT y que no serían afectadas por el material usado en la enseñanza de LP, mientras que se esperaba que las preguntas de la tercera sección ganarían por el énfasis que en las clases de LP se había puesto en la referencia temporal y la inversión. Se hicieron tres tests: uno previo, otro inmediatamente posterior al final de la serie de clases, y otro posterior, realizado a las seis semanas. Para simplificar sólo discutiremos aquí el previo y el realizado a las seis semanas. Las dos tablas 6 y 7 muestran los resultados.

Hay una clara relación entre la calidad de la discusión y los avances en los resultados, tanto en los grupos LP y DT como en conjunto. Además, este aspecto es el único significativo.

La transferencia es amplia: en general, las clases respondieron igualmente bien o mal en los contextos que no habían sido objeto de enseñanza que en los que sí lo habían sido. Los resultados son aún más destacables si se tiene en cuenta que la clase LP2 estaba formada por alumnos de rendimiento bajo y que las clases LP eran generalmente de menor rendimiento que las DT. En la clase LP2 hubo una discusión particularmente vigorosa sobre la pregunta «asistencia de público al campo del Forest»; casi llegaron a las manos. Tanto en esta ocasión como en las otras quedó claro que la habilidad para conducir una discusión-conflicto consiste en desarrollar el conflicto hasta un alto nivel y en dirigirlo hacia una resolución que los alumnos puedan apreciar y valorar. Además, un buen conflicto necesita de una pregunta suficientemente difícil a la que hincarle el diente; los problemas fácilmente resueltos no son de ninguna utilidad.

El alto grado de transferencia nos lleva a concluir que con estos problemas, todos ellos en contextos familiares, lo que se necesita para lograr éxito es tratar los rasgos estructurales, prestar atención al carácter direccional y recapacitar sobre la necesidad de invertir y cuándo hay que hacerlo. Los conocimientos particulares acerca de balances de cuentas monetarias y temperaturas negativas son relativamente menos importantes. Esto que decimos está en algún desacuerdo con otras investigaciones que sugieren que la transferencia entre contextos es mucho más difícil de lo que generalmente se supone. Puede que sea importante el hecho de que

Tabla VI

Clase	Discusión	Preguntas LP	Preguntas de temperatura cruzando el cero.	Preguntas DT con inversión
LP1	Buena	62 +37 99	63 +35 98	66 +31 97
LP2	Aceptable	46 +50 96	54 +27 81	53 +40 93
LP3	Pobre	67 +23 90	33 +34 67	67 +21 88
LP4	Ninguna	65 +18 83	61 +15 76	63 + 7 70
DT1	Muy pobre	71 +13 84	79 + 3 82	76 + 6 82
DT2	Pobre	67 +16 78	65 +19 83	74 +14 88
DT3	Muy pobre	67 + 9 76	73 +16 89	72 +12 84

(En las primeras columnas figuran los resultados del test previo a la enseñanza; en las terceras columnas, los resultados del test realizado seis semanas más tarde; en la segunda los avances conseguidos.)

todos estos contextos son muy familiares; pero aún quedan algunas preguntas sin responder en este punto.

Una explicación alternativa o adicional del alto grado de transferencia puede estar en los efectos beneficiosos en general de buenas discusiones-conflicto; por ejemplo, el valor que se concede al hecho de sondear una situación y buscar explicaciones puede haber animado a tratar los problemas de forma más decidida y confiada. En las propias palabras de un alumno en otra ocasión similar: «Antes nunca me había dado cuenta de que podía pensar en un problema y arreglármelas para hacerlo; siempre había pensado que si cuando lo miras ves que no lo sabes hacer inmediatamente, entonces ya no había nada que hacer».

Tabla VII

AVANCES MEDIOS GLOBALES

	Preguntas LP	Preguntas temperatura cruzando el cero	Preguntas DT con inversión
Clases LP	+32	+37	+33
Clases DT	+13	+12	+11

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

ARCAVI A. & BRUCKHEIMER M., 1981. How shall we teach the multiplication of negative numbers?, *Mathematics in School*, Vol. 10, pp. 31-33.

BELL A., 1982. Looking at children and directed numbers, *Mathematics Teaching*, Num. 100, pp. 66-72.

BELL A., 1986. *Diagnostic teaching: Report of an ESRC project*. (University of Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education).

EASTWOOD M., 1983. More models for directed numbers, *Mathematical in School*, Vol. 12, pp. 34-35.

KÜCHEMAN D., 1980. Children understanding of integers, *Mathematics in School*, Vol. 9, pp. 31-32.

ROWLAND T., 1982. Teaching directed numbers. An experiment, *Mathematics in School*, Vol. 11, pp. 24-27.