



# Mecanismo mental de síntesis en el aprendizaje del triángulo de Sierpinski como totalidad

## Mental mechanism of synthesis in the learning of the Sierpinski triangle as a totality

Ximena Gutiérrez Figueroa

*Centro de Estudios y Desarrollo de Educación Continua para el Magisterio, Universidad de Chile. Santiago, Chile.*  
ximenagutierrez@u.uchile.cl

Marcela Parraguez González

*Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.*  
marcela.parraguez@pucv.cl

**RESUMEN** • La geometría fractal constituye un ámbito de estudio que integra varios conceptos de la matemática escolar, entre ellos, el perímetro, el área, la autosemejanza, la iteración, la sucesión, las funciones y el infinito. Así, se elige el fractal triángulo de Sierpinski con el objetivo de proponer un modelo cognitivo para su aprendizaje. Siguiendo la teoría APOE (*acción, proceso, objeto y esquema*), se describen estructuras y mecanismos mentales que pueden ser construidos por estudiantes de secundaria que desarrollan una secuencia de actividades escritas. Los resultados empíricos reportan que el fractal en estudio se construye como una *totalidad* a partir de un mecanismo mental que se ha denominado *síntesis*, mecanismo que podría abrir nuevas oportunidades de desarrollo para la teoría APOE.

**PALABRAS CLAVE:** Matemática escolar; Triángulo de Sierpinski; Teoría APOE; Totalidad; Mecanismo de síntesis.

**ABSTRACT** • Fractal geometry constitutes a field of study that integrates several concepts of school mathematics, among them, perimeter, area, self-similarity, iteration, succession, functions and infinity. Thus, the fractal Sierpinski triangle is chosen with the aim of proposing a cognitive model for its learning. Based on the APOS theory (*action, process, object and scheme*), mental structures and mechanisms that can be constructed by high school students who develop a sequence of written activities are described. The empirical results report that the fractal under study is built as a totality from a mental mechanism that has been called synthesis, a mechanism that could open new development opportunities for the APOS theory.

**KEYWORDS:** Educational Mathematics; Sierpinski triangle; APOS theory; Totality; Synthesis mechanism.

Recepción: febrero 2019 • Aceptación: marzo 2021

Gutiérrez Figueroa, X. y Parraguez González, M. (2021). Mecanismo mental de síntesis en el aprendizaje del triángulo de Sierpinski como totalidad. *Enseñanza de las Ciencias*, 39(3), 71-92.  
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2908>

## INTRODUCCIÓN

Hacia la mitad del siglo xx, Klein (1924) destaca la necesidad de equilibrar aspectos formales e intuitivos en la enseñanza de la matemática para evitar la atomización de los conocimientos y favorecer su articulación. Actualmente, estas ideas continúan vigentes en investigaciones de interés didáctico que refuerzan la necesidad de promover la conexión de conceptos matemáticos que beneficien el aprendizaje (Alsina, 2009; Arcavi, 2018; Garbin y Azcárate, 2002; Godino, Batanero y Font, 2008).

En este contexto, se proponen los fractales geométricos como objetos de estudio por dar cabida al enfoque anteriormente expuesto, ya que poseen la particularidad de ser articuladores de variados tópicos matemáticos del currículo escolar, como lo demuestran Apkarian, Tabach, Dreyfus y Rasmussen (2019).

La investigación sobre fractales a nivel escolar es exigua. Estudios específicos, como el de Adams y Russ (1992), reportan que las estructuras autosimilares (parte semejante al todo), propias de la geometría fractal, son más adecuadas para describir la realidad que los modelos de la geometría euclidiana. En Karakus (2015), estudiantes turcos que construyen fractales geométricos evidencian la importancia de relacionar la figura geométrica base para generar el fractal (iniciador), la regla que define su construcción (generador) y la acción de iterar o repetir dicha regla sobre cada nuevo elemento emergente.

Desde una perspectiva cognitiva, los estudios son aún más escasos; por ejemplo, a nivel universitario, Garbin (2007) destaca que la noción de fractal geométrico está estrechamente ligada a coordinar la autosimilitud con el proceso iterativo de su construcción; en ella también intervendrían aspectos como la intuición y la visualización.

Si bien los antecedentes coinciden en la importancia de la iteración y autosimilitud en la geometría fractal, no se han encontrado estudios empíricos que propongan cómo estas y otras nociones podrían ser consideradas para el aprendizaje de fractales geométricos en el contexto escolar.

Bajo estas condiciones, y con base en la teoría APOE, el objetivo de nuestra investigación es dual: por un lado, nos interesa identificar, describir y fundamentar, desde un punto de vista cognitivo, las estructuras y los mecanismos mentales necesarios para la construcción del triángulo de Sierpinski (TS) en el contexto escolar. Y, por otro lado, avanzar y contribuir en la reflexión teórica de la construcción de la totalidad a partir de un mecanismo de síntesis para la teoría APOE.

## TEORÍA APOE

La teoría APOE, desarrollada por Dubinsky (1991) y otros investigadores (Arnon et al., 2014), se fundamenta en la noción de abstracción reflexiva propuesta por Piaget (2000) para describir la construcción de estructuras lógico-matemáticas durante el desarrollo cognitivo de un individuo. *Acciones, procesos, objetos y esquemas* son estructuras mentales propiciadas por los mecanismos de *interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación y tematización*, los que a continuación pasaremos a revisar.

Según Arnon et al. (2014), para que emerja un *objeto* matemático nuevo es necesario realizar transformaciones sobre *objetos* previos. Así, un estudiante inicia la construcción de un nuevo *objeto* realizando *acciones* que se manifiestan como transformaciones de uno preexistente a partir de estímulos externos, de tal manera que cada paso de la transformación debe explicitarse sin omitir ninguno de ellos. Cuando en el estudiante se produce un dominio interno de las *acciones*, los pasos que antes eran explícitos son realizados mentalmente, por lo que se puede prescindir de alguno de ellos o revertirlos; entonces se dice que las *acciones* se han *interiorizado* en un *proceso* mental. La *coordinación* es otro mecanismo que puede conducir a la construcción de nuevos *procesos*. Para Arnon et al. (2014), la forma en la que se produce este mecanismo tiene que seguir estudiándose para describirlo a cabalidad. La *encapsulación* de un *proceso* en un *objeto* se produce cuando un individuo concibe el *proceso* como un

todo estático sobre el cual puede realizar *acciones* o nuevas transformaciones. Según la actividad matemática, un *objeto* podría *desencapsularse* en el *proceso* que lo originó para construir nuevas estructuras. A su vez, un *esquema* de cierto fragmento de la matemática es una colección de *acciones*, *procesos*, *objetos* y otros *esquemas* en una estructura mental que se activa para abordar un problema matemático. La *tematización* es un mecanismo que permite considerar el *esquema* como un *objeto* sobre el cual pueden realizarse nuevas *acciones*.

Las estructuras y mecanismos mentales son propuestos en un modelo cognitivo denominado descomposición genética (DG), que describe cómo se construye cierto fragmento del conocimiento matemático, y esta DG adquiere el carácter de hipótesis de investigación. Como señalan sus principales investigadores (Arnon et al., 2014; Brown, McDonald y Weller, 2008; Dubinsky, Arnon y Weller, 2013), la teoría APOE sigue en constante evolución, respondiendo principalmente a cuestiones sobre el aprendizaje de *objetos* matemáticos.

### La *totalidad* como estructura en la construcción de tópicos específicos

Arnon et al. (2014) presentan de manera provisional una estructura intermedia entre *proceso* y *objeto*: la *totalidad*. Este carácter temporal de la *totalidad*, como parte del *esquema*, se debe a la escasa investigación desarrollada específicamente sobre esta estructura. Quienes plantean por primera vez la *totalidad* como una posible estructura entre *proceso* y *objeto* (Dubinsky et al., 2013), lo hacen sobre el estudio de decimales periódicos y las dificultades de los individuos para construir este tipo de decimales como *objeto*. Dubinsky et al. (2013) consideran que imaginar todos los 9 de  $0,9$  presentes de una sola vez evidencia una transformación significativa sobre  $0,9$  lo que permite considerar esa percepción como un indicador de la *totalidad*. La relevancia de esta transformación radica en la complejidad que presentaron los estudiantes en el tránsito entre *proceso* y *objeto*, complejidad inherente a los *objetos* ligados a *procesos* infinitos. Para los autores, las dificultades se evidenciaron cuando solo 15 de los 47 participantes lograron la construcción del *objeto*, mientras que los otros 32 presentaron diferencias en esta transición. El análisis de este tránsito dio cabida a la propuesta de la *totalidad* como estructura por sí misma (Dubinsky et al., 2013). A partir de lo anterior, concebir todos los 9 de  $0,9$  al mismo tiempo es señal del proceso concebido como una estructura mental estática que contiene todos los 9 de la expansión decimal periódica.

De acuerdo con la evolución de la teoría APOE, hasta el año 2013 la construcción de *objetos* se caracterizaba por dos aspectos esenciales: *a*) concebir un *proceso* como una *totalidad* y *b*) poder realizar *acciones* sobre esa *totalidad* (Arnon et al., 2014; Weller, Arnon y Dubinsky, 2011), donde la *totalidad* es parte del *objeto*. Con Dubinsky et al. (2013) se abre la posibilidad de que, en la construcción de ciertos *objetos* matemáticos, se requiera la *totalidad* como una estructura en sí misma, lo que permite interpretar con mayor detalle cómo se produce el aprendizaje de tópicos específicos de la matemática, especialmente los que involucran *procesos* infinitos, dejando abierto el mecanismo mental que permite el desarrollo de tal estructura.

### La síntesis: un mecanismo mental para construir el TS como una *totalidad*

Estudios realizados por investigadores contemporáneos a Dubinsky (1991) sobre el desarrollo de la abstracción en situaciones de enseñanza de la matemática (Dreyfus, 1991, 2015; Hershkowitz, Hadas, Dreyfus y Schwarz, 2007; Mason, 1989; Thurston, 1990; Tsamir y Dreyfus, 2002) establecieron las bases para proponer un mecanismo que responda a la construcción del TS como una *totalidad*. Entre estos estudios, el de Gray y Tall (2007) y el de Thurston (1990) aluden a las matemáticas comprensibles, como la capacidad de poder crear un dispositivo mental que recoge, en un todo, distintos enfoques con

los cuales se ha trabajado en una idea matemática, pasando desde objetos percibidos a manipulables hasta concebirlos como estructuras formales. También se halla lo propuesto por Dreyfus (1991), quien describe la capacidad de sintetizar como la de fusionar características, propiedades, procesos y objetos de conceptos subyacentes al mismo concepto en una sola imagen, donde todos ellos están comprendidos e interrelacionados. Si bien varios de los términos usados por estos investigadores son idénticos a los que conforman la teoría APOE, el sentido con que son empleados puede tener matices, ya que se proponen desde otros marcos conceptuales.

Otras investigaciones que se han desarrollado con base en APOE, como la de Dubinsky, Weller, Stenger y Vidakovic (2008), confirman la complejidad de construir una *totalidad* para los procesos involucrados en un *proceso iterativo bidimensional*. Además, proponen que posiblemente basta que solo uno de ellos sea concebido como una *totalidad* para imaginar el *proceso iterativo bidimensional* como un todo. Estudios similares desarrollados por Brown et al. (2008) proponen que un *proceso iterativo infinito* podría encapsularse en un *objeto* promoviendo una actividad de evaluación sobre dicho *proceso*. Recordemos que hasta ese entonces la *totalidad* era contemplada como parte del *objeto*. Stenger, Weller, Arnon, Dubinsky y Vidakovic (2008) van más allá, distinguen dos tipos de evaluación sobre este tipo de *procesos*: la dada por acumulación, al tratar de concebir qué se tiene al final del *proceso*, y la dada por extensión, al tratar de imaginar qué viene después de finalizado el *proceso*.

La construcción de la *totalidad* como una estructura mental debe relacionarse con un mecanismo que conduzca a su formación. Dubinsky et al. (2013), quienes presentan por primera vez la *totalidad* como una estructura en sí misma, denominan *destemporalización* al posible mecanismo que facilitaría la construcción de *objetos trascendentes*, pero no presentan una descripción sobre dicho constructo. En este punto podemos agregar que para Brown et al. (2008) un *objeto trascendente* no se genera de manera directa del *proceso iterativo infinito* que lo precede, sino que trasciende al *proceso*. La idea de desligarse de lo temporal fue desarrollada por Piaget (citado en Barrio, 1989) como caracterización de la transformación de procesos cognitivos en objetos mentales. Otros constructos que han aportado a nuestro estudio provienen de Garbin (2005a, 2005b), con las ideas «de totalidad, de completas [sic] y de unidad» (pp. 65 y 174), y de Villabona y Roa (2016) con el mecanismo de «completez» (p. 31), ligado a conceptos previos de la teoría de los cardinales. Si bien ambos constructos hacen alusión a la construcción del infinito actual, estos son propuestos desde distintos marcos teóricos. No ha de extrañar que emerjan distintas denominaciones en los estudios sobre el infinito a partir de APOE, ya que según Piaget (citado en Dubinsky et al., 2013) las estructuras son invariables en la teoría general y los niveles proporcionan mecanismos para la construcción de estas, además, los niveles dependen del concepto en estudio. Así, es posible proponer mecanismos distintos a los habituales que atiendan a la naturaleza y especificidad de un concepto y a los propósitos didácticos que se persiguen.

De esta forma, se propone un mecanismo mental que denominamos *síntesis* como el medio para considerar el *proceso iterativo infinito tridimensional* del TS (que hasta Dubinsky et al., 2008, era bidimensional para otro concepto) como una *totalidad*: estructura estática entre *proceso* y *objeto* que fusiona las características analíticas y geométricas del TS en una sola entidad. Esta *síntesis* puede ser generada por una acción de evaluación, en este caso de acumulación (Stenger et al., 2008), sobre uno de los *procesos* que componen el *proceso iterativo infinito tridimensional*, lo que permite que este último deje su dinamismo para ser concebido como una entidad estática.

## DISEÑO METODOLÓGICO

Para abordar en profundidad el conocimiento del TS, se optó por un enfoque cualitativo de corte interpretativo. Con base en Echeverría (1997), el escenario escolar donde se desarrolla la investigación es relevante en este diseño, porque las evidencias generadas tienen un sentido en el contexto del cual son parte.

Bajo este paradigma, se siguió el ciclo de investigación propio de APOE. Se comenzó con un análisis teórico de los fractales geométricos, lo que permitió proponer una DG para el TS que incorporara la *totalidad* como estructura, mediada por la *síntesis* como mecanismo. Los resultados del análisis teórico ponen de manifiesto la complementariedad de contextos analíticos, geométricos y experimentales implicados en la construcción de estos objetos (Chabert, 1990; Peitgen, Jürgen y Saupe, 2004) y coinciden en la relevancia de la iteración y la autosimilitud como conceptos intrínsecos de la construcción de fractales geométricos. En un segundo momento, se diseñó una secuencia de actividades escritas, con base en la DG, las que fueron desarrolladas por nueve estudiantes (mujeres y hombres) –etiquetados como E1, E2, ..., E9– que cursaban el último ciclo de educación secundaria (de 16 a 18 años) en un colegio chileno subvencionado por el Estado. En el tercer momento de análisis de datos se contrastaron las respuestas de los estudiantes con la DG.

Los criterios de selección obedecieron a consideraciones teóricas necesarias para desarrollar un estudio en profundidad (Stake, 2010): *a*) cursar los últimos dos años de educación secundaria; *b*) mostrar interés por la matemática; *c*) haber elegido el plan electivo de matemática, plan al que se opta voluntariamente, y *d*) accesibilidad de las investigadoras. Los resultados académicos no fueron considerados en función de recoger datos para comprender mejor la complejidad del fenómeno en estudio. Por otro lado, se consideró la posibilidad de que la secuencia de actividades fuese implementada por el docente a cargo del curso en un contexto habitual de enseñanza, para que no haya intervención de terceros en la toma de datos.

### Descomposición genética del TS para el contexto escolar

La definición del TS que se elaboró no es neutra, fue influenciada por Sabogal y Arenas (2011) y Sierpinski (1915) y se propuso desde un ámbito geométrico, por la dificultad que impone el estudio de los fractales geométricos en un currículo escolar que no los contempla. Optamos por un triángulo como iniciador, por ser una figura ampliamente considerada en el currículo escolar. De esta forma, el TS se presenta como la figura a la que tiende la sucesión que se obtiene de repetir el siguiente algoritmo sobre un triángulo equilátero, incluidos sus puntos interiores: se unen los puntos medios de los lados obteniéndose cuatro triángulos, y se elimina el interior del triángulo central; en los tres triángulos restantes se opera nuevamente con la misma regla, y así sucesivamente con cada nuevo triángulo (figura 1).

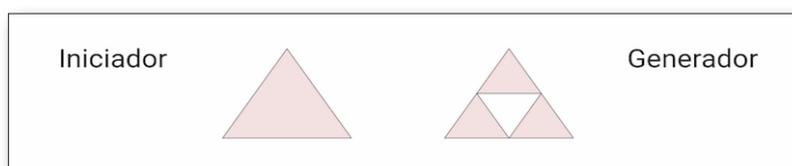


Fig. 1. Algoritmo fractal del TS.

En la tabla 1 se presenta la DG para promover el aprendizaje del TS como una *totalidad*.

Tabla 1.  
Descomposición genética del TS para el nivel escolar

<i>Acciones sobre objetos de esquemas previos</i>	C1. <i>Acciones</i> sobre el triángulo equilátero, sus medianas, perímetro y área con base en el <i>esquema</i> de triángulos
	C2. <i>Acciones</i> sobre patrones geométricos y numéricos con base en el <i>esquema</i> de patrones
	C3. <i>Acciones</i> sobre potencias de base y exponente natural, con base en el <i>esquema</i> de potencias
<i>Características intrínsecas del TS como procesos</i>	C4. La iteración como <i>proceso</i> : por medio de la <i>interiorización</i> de <i>acciones</i> sobre el triángulo equilátero promovidas por el algoritmo fractal y la actividad matemática que promueve la recurrencia de una <i>acción</i> que realizar
	C5. La autosimilitud como <i>proceso</i> : por medio de la <i>interiorización</i> de <i>acciones</i> sobre patrones geométricos y numéricos promovidas por el algoritmo fractal y la actividad matemática que promueve la construcción de imágenes y su caracterización
	C6. El patrón de conteo ( $N_i$ ) como <i>proceso</i> por medio de la <i>interiorización</i> de <i>acciones</i> sobre las potencias de base y exponente natural promovidas por la actividad matemática de contar los triángulos que componen una imagen
<i>Imágenes y medidas fractales como procesos</i>	C7. Las imágenes fractales ( $\Delta_i$ ) como <i>procesos</i> : por medio de la <i>coordinación</i> entre la autosimilitud y la iteración promovida por la actividad matemática centrada en las modificaciones geométricas que se producen en una etapa cualquiera
	C8. Las medidas fractales ( $M_i$ ) como <i>procesos</i> : por medio de la <i>coordinación</i> entre el patrón de conteo y la autosimilitud promovidas por la actividad matemática de calcular perímetros y área en una etapa cualquiera
<i>Sucesiones como procesos iterativos infinitos y proceso iterativo infinito tridimensional</i>	C9. El orden como <i>proceso infinito</i> : por medio de la <i>desencapsulación</i> del orden en $\mathbb{N}$ promovida por la actividad matemática que hace corresponder un número natural, $(1, 2, 3, \dots, i \dots n)$ , para identificar etapas, usarlos como exponentes de potencias, elementos de expresiones analíticas o identificar posiciones de imágenes fractales
	C10. Las sucesiones $N_n, M_n$ y $\Delta_n$ y como <i>procesos iterativos infinitos</i> : por medio de la <i>coordinación</i> de cada uno de los <i>procesos</i> $N_i, M_i$ y $\Delta_i$ con el orden como <i>proceso</i> (iteración a través de promovidas por actividades centradas en construir las siguientes correspondencias: $n \rightarrow N_n; n \rightarrow M_n$ y $n \rightarrow \Delta_n$ )
	C11. La sucesión de ternas fractales del TS como un solo <i>proceso iterativo infinito tridimensional</i> : por medio de la <i>coordinación</i> de la terna fractal $(N_n, M_n, \Delta_n)$ con el orden como <i>proceso</i> (iteración a través de $\mathbb{N}$ ) promovida por la actividad centrada en construir la correspondencia: $n \rightarrow (N_n, M_n, \Delta_n)$
<i>TS como totalidad</i>	C12. El TS como <i>totalidad</i> : por medio de la <i>síntesis</i> del <i>proceso iterativo infinito</i> tridimensional, ternas fractales, promovida por una actividad de evaluación sobre el <i>proceso iterativo infinito</i> ( $N_n$ ) que lo compone

Con base en la DG, se diseñaron indicadores empíricos para el análisis de los datos (tabla 2).

Tabla 2.  
Indicadores empíricos de las estructuras de la DG

C1	(i)	Dibuja triángulos equiláteros y traza sus medianas
	(ii)	Determina perímetros y áreas de triángulos
C2	(iii)	Sombrea triángulos siguiendo una regularidad geométrica
	(iv)	Produce figuras por triángulos semejantes
C3	(v)	Distingue una regularidad numérica como resultado del conteo de triángulos que componen las figuras, deduciendo que el resultado se puede expresar mediante una potencia
C4	(vi)	Representa pasos o etapas (i) que se repiten y son secuenciales y que puede imaginar omitiendo algunos de los pasos

C5	(vii)	Presenta explícita o implícitamente la razón de semejanza (2:1) como característica geométrica o analítica de las imágenes que construyen en un intervalo cualquiera de la secuencia
C6	(viii)	Produce el patrón de conteo $3^i$ para expresar la cantidad de triángulos que conforman la imagen fractal en una etapa $i$ cualquiera
C7	(ix)	Reconoce o produce imágenes fractales (características de ellas), sin tener que representar explícitamente toda la secuencia
C8	(x)	Determina perímetros y áreas fractales para una imagen fractal $i$ sin tener que calcular explícitamente toda la secuencia
C9	(xi)	Usa los números naturales (1, 2, 3, ... $n$ ) para identificar, ordenar o caracterizar geométrica o analíticamente una imagen fractal correspondiente a una etapa $n$ cualquiera
C10	(xii)	Expresa en función de $n$ la posición de imágenes, la cantidad de partes o una medida fractal de la imagen $n$ -ésima
C11	(xiii)	Relaciona posiciones, cantidad de partes, medidas fractales como expresiones de una única imagen fractal en función de una etapa cualquiera, entre ellas la $n$ -ésima
C12	(xiv)	Construye una representación geométrica o analítica producto de la actividad de evaluación sobre el proceso iterativo infinito $N_n$ , cuyo resultado puede ser expresado como: $3^n$ o $3^\infty$

A partir de la DG descrita se diseñó una secuencia de actividades escritas que pudiesen ser desarrolladas de manera individual y autónoma por parte de los estudiantes. Lo anterior se proyecta sin la intervención del profesor para facilitar la activación de *esquemas* previos y estrategias propias de los estudiantes que pudiesen reflejar con mayor claridad las estructuras cognitivas que pondrían en juego. La secuencia consta de 21 actividades, las que se dividieron en los formularios A y B (véase apéndice), considerando su extensión y los tiempos disponibles de la clase (90 min). Por otra parte, dicha secuencia incluyó más de una actividad destinada a recoger evidencia sobre la presencia de una misma estructura propuesta en la DG. Para validar las actividades se consultó a un grupo de expertos conformado por docentes universitarios con formación en matemática superior y profesores de matemática con experiencia en aula de secundaria, todos ellos con estudios en didáctica de la matemática. El enunciado principal que encabeza la secuencia (véase apéndice) contempló una explicación escrita que explicita el algoritmo fractal y dos láminas que representan el iniciador y el generador del TS.

## RESULTADOS

Los resultados proceden del análisis de los datos donde se identificaron las estructuras y los mecanismos mentales a través de los argumentos observables presentes en las estrategias empleadas por los estudiantes. En lo que sigue, se hará énfasis en los resultados de tres de ellos, E1, E7 y E8, quienes muestran construcciones que sustentan o bien que se alejan de la hipótesis teórica. Finalmente, se proporciona un resumen en cada sección con los resultados generales de los nueve estudiantes.

### Características intrínsecas del TS, como *procesos*

En las actividades 1a) y 1b), que consisten en dibujar las imágenes  $\Delta_2$  y  $\Delta_3$  tras aplicar el algoritmo fractal (véase apéndice), los tres estudiantes muestran evidencias de los indicadores (i), (iii) y (iv). Además, E7 relaciona las primeras *acciones* con potencias de base tres, evidenciando el indicador (v). Ejemplo de esta construcción se muestra en la figura 2. Por otra parte, los tres estudiantes presentan (figura 2) el indicador (vii) en sus respuestas a las actividades 2d) y 2e), ya que se muestra implícitamente la razón de semejanza al trazar las medianas de los triángulos, como se observa en lo desarrollado por E7 y E1, o completar la imagen con tres triángulos aparentemente congruentes, como lo hizo E8.

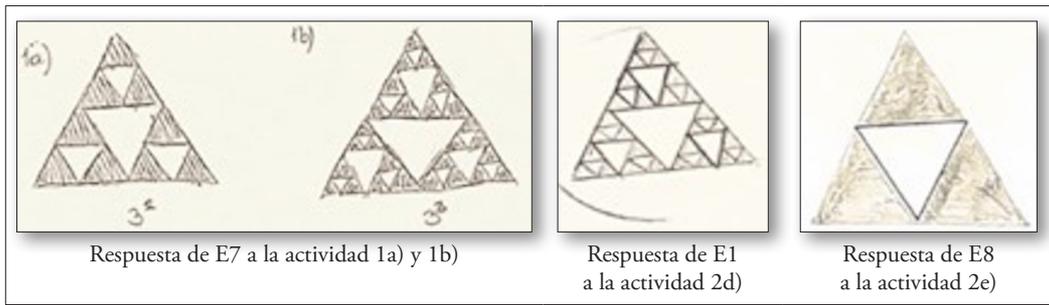


Fig. 2. Construcción geométrica de la iteración y la autosimilitud.

La actividad matemática propuesta en la actividad 3a) contempla determinar la cantidad de triángulos que forman parte de la imagen fractal para la cuarta y la décima iteración. Al analizar las respuestas (tabla 3) y estrategias (figura 3) de E1, se verifica un cálculo recursivo que da cuenta del conteo de los triángulos extraídos en cada figura y no del conteo de los sombreados, que son los que forman parte de la imagen fractal. Hasta aquí, E1 no ha construido el patrón de conteo.

Tabla 3.  
Construcción del patrón de conteo

Cantidad de procesos aplicados	Cantidad de triángulos que componen la imagen				
	Respuesta de E1	Respuesta de E7	Respuesta de E8		
4 veces	121 triángulos	81	161 en total	40 blancos	81 negros
10 veces	88.573 triángulos	59.049	118.097 en total	29.524 blancos	59.049 negros

En la figura 3 se observa que E1 elabora un algoritmo para calcular una cantidad que incluye todas las superficies triangulares, sombreadas y no sombreadas. Por su parte, E7 comienza a consolidar el patrón de conteo, indicador (viii), que ya aparecía en respuestas anteriores. En cambio, E8 suma las regiones triangulares sombreadas, las no sombreadas y aquellas que contienen combinaciones de ambos tipos en su interior.

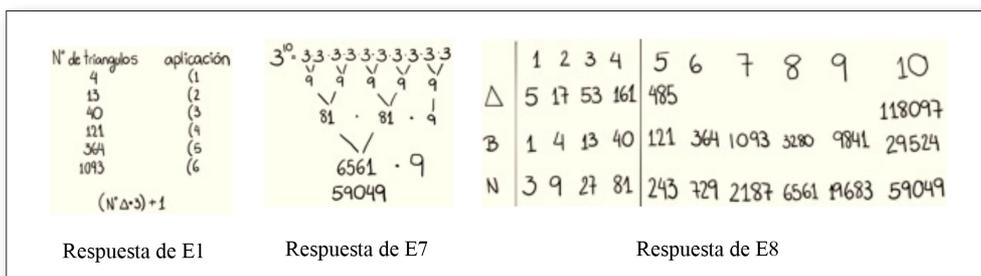


Fig. 3. Estrategias de conteo en la actividad 3a).

Por otra parte, de forma incipiente, tanto E1 como E8 están recurriendo a los números naturales para identificar las primeras etapas de la secuencia y organizar sus cálculos; estos son indicios del indicador (xi). En la tabla 4 se presentan los indicadores empíricos que se observaron en las respuestas a las demás actividades del formulario A.

Tabla 4.  
Construcción de la iteración y la autosimilitud

<i>Estudiante</i>	<i>Respuestas literales de los estudiantes</i>	<i>Indicadores (tabla 2)</i>
E1	1c) Comprender el ejercicio y saber qué se debe dibujar 1d) Dibujar los triángulos de la actividad 1b) sobre la base de la actividad 1a) 2a) Se va repitiendo el mismo patrón de dividir el triángulo en cuatro triángulos más pequeños 2b) Los espacios en blanco van aumentando y los triángulos son cada vez más pequeños 2c) La imagen tendría mayormente triángulos blancos y los triángulos pintados serían casi invisibles 3b) El lado del triángulo queda dividido en 32 partes iguales 3c) Ya que al sacar los triángulos da un número impar	(nd) (vi) (iii), (vi) (iii) (iii) (iii) (nd)
E7	1c) El que no hay que hacer cálculos complejos, ni es necesario pensar demasiado. Es fácil llegar a la respuesta correcta 1d) El hecho de posicionar correctamente los agujeros y las partes restantes de la lámina y el que cada vez hay que hacer triángulos más pequeños 2a) Tendría el mismo patrón y la misma forma 2b) La quinta vez que se aplica el <i>proceso</i> causa que la lámina, en comparación con la lámina B, tenga cada vez más agujeros 2c) Un triángulo grande compuesto de triángulos cada vez más pequeños con la punta hacia arriba y agujeros con forma de triángulos con la punta hacia abajo 3b) $3^5 = 81 \cdot 3 = 243$ $243 : 2 = 121,5$ 3c) La cantidad de triángulos es muy grande y la de agujeros también, por lo cual la superficie restante de la lámina se acerca casi a 0, o sea, en ese momento no quedaría papel para representar la figura, esto se representa como la fracción $\frac{1}{3^{1024}}$	(nd) (vi) (iii) (iii) (iii) (viii) (nd)
E8	1c) Entender y llevar a cabo el procedimiento según las instrucciones 1d) Dibujar y pintar los pequeños triángulos que se forman 2a) Un triángulo en común que es el grande, que abarca toda la figura. También se aprecia que la lámina B se repite $3^5$ , es decir, 243 veces en la 5. <sup>a</sup> vez 2b) Tiene o triángulos blancos o negros. También está fraccionado en más partes. La lámina B es $3^1$ y la quinta vez es $3^5$ 2c) La imagen estaría dividida en muchas partes pequeñas, pero siempre siguiendo el mismo patrón, es decir, habría $3^{100}$ triángulos negros y $3^{100}$ láminas B 3b) Queda dividido en $2^5$ partes iguales, es decir, 32 partes iguales 3c) Porque 1024 no es una potencia de 3	(nd) (iii) (iii) (viii) (viii) (viii) (viii)

Nota: *nd* = respuestas que no reflejaron de forma evidente alguno de los indicadores de la tabla 2 o preguntas que no fueron respondidas por los estudiantes.

Las respuestas de los nueve estudiantes a las actividades del formulario A reflejan en su gran mayoría la construcción de las características intrínsecas del TS: iteración, autosimilitud y patrón de conteo como *procesos*. E2 es el único estudiante cuyo dato diverge del resto del grupo (figura 4).

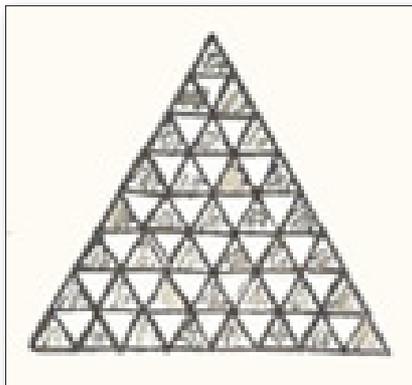


Fig.4. Respuesta de E2 a la actividad 1b).

A continuación, se presentan los resultados de las actividades del formulario B.

### Imágenes y medidas fractales como *procesos*

En la actividad 4a), E1, E7 y E8 construyen la imagen esperada  $\Delta_4$  (figura 5) sin registro de haber dibujado las imágenes previas. A este tipo de respuesta se le asignó el indicador (ix). La actividad 4b) complementa lo anterior a través de las justificaciones que expresan la construcción mental que hacen estos estudiantes sobre las características de las figuras fractales (tabla 5).

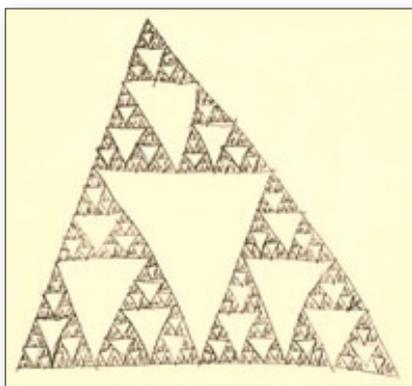


Fig. 5. Respuesta de E7 a la actividad 4a).

Tabla 5.  
Construcción mental de imágenes fractales

<i>Estudiante</i>	<i>Respuestas literales de los estudiantes</i>	<i>Indicadores (tabla 2)</i>
E1	4b) Porque no es una figura a la que se le aplica el <i>proceso</i> varias veces sino una figura a la que se le aplicó una vez y se puso junto a otras figuras iguales.	(iii), (vi), (ix)
E7	4b) Está mal aplicado el método, de haberlo aplicado bien poseería un agujero del porte de $\frac{1}{4}$ de la lámina inicial en el centro del triángulo grande	(vii), (ix)
E8	4b) Porque de la figura grande no está extraído el triángulo del medio	(iii), (ix)

La construcción de medidas fractales es promovida por la actividad 5a), donde podemos observar que E1 no evidencia dichas estructuras como *procesos*. El perímetro que presenta considera que el lado de cada triángulo sombreado mide 1 (tabla 6). Esto se contrapone a lo expuesto por E1 en la actividad 2c) del formulario A, siendo indicio del tránsito hacia la iteración como *proceso*. La construcción de estas medidas fue lograda por E7 y E8. Cabe señalar que un error en el uso de la coma decimal en el paso final del cálculo desarrollado por E8 fue desestimado por no tener incidencia en el objetivo teórico de la actividad.

Tabla 6.  
Construcción de medidas fractales

Actividad 5a)	Respuesta de E1		Respuesta de E7		Respuesta de E8	
	Perímetro de la imagen	Área de la imagen	Perímetro de la imagen	Área de la imagen	Perímetro de la imagen	Área de la imagen
Imagen conformada por 9 triángulos	6,561	$\frac{27\sqrt{3}}{2^{20}}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{16}$	6,75	$1,40625\sqrt{3}$
Imagen obtenida al aplicar 4 veces el proceso	81	$\frac{12\sqrt{3}}{2^{10}}$	$\frac{243}{16}$	$\frac{81\sqrt{3}}{1.024}$	15,1875	$81\left(\frac{0,00625\sqrt{3}}{4}\right)$
	27	$\frac{6\sqrt{3}}{2^8}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{16}$	6,75	$1,4065\sqrt{3}$

Las imágenes fractales fueron construidas como *proceso* por los nueve estudiantes y seis de ellos evidenciaron las medidas fractales como *proceso*. Aquellos que no logran esta transformación –de acción a proceso– en las medidas fractales, muestran distintas dificultades, por ejemplo, E1 no ha construido la autosimilitud, mientras que E2 y E5 no muestran evidencias suficientes que permitan interpretar sus datos.

**Sucesiones  $N_n$ ,  $M_n$  y  $\Delta_n$  como procesos iterativos infinitos y proceso iterativo infinito tridimensional**

Por medio de la actividad 6a), E7 y E8 transforman los *procesos* de la tabla 8 en sucesiones como *procesos iterativos infinitos*. Estas sucesiones se evidencian por la construcción de expresiones analíticas que iteran a través del  $\mathbb{N}$  (tabla 7). En cambio, E1 parece haber construido el conteo, pero no así la razón de semejanza, lo que se observa en el perímetro asignado a la imagen correspondiente a  $n=3$ . Las respuestas de E7 y E8 son consistentes con los indicadores (xi) y (xii), reflejo de la construcción de las sucesiones  $N_i$  y  $M_i$  como *procesos iterativos infinitos*.

Tabla 7.  
Construcción de las sucesiones  $N_i$  y  $M_i$  como *procesos iterativos infinitos*

Número de veces que se aplicó el proceso			Número de triángulos que componen la imagen			Perímetro			Área		
E1	E7	E8	E1	E7	E8	E1	E7	E8	E1	E7	E8
3	3	2	27	$3^3$	$3^2$	81	$\frac{3^4}{2^3}$	$\frac{1}{2^2} \cdot (3^2 \cdot 3)$	$\frac{9\sqrt{3}}{2^8}$	$\frac{3^2\sqrt{3}}{2^6 \cdot 4}$	$3^2 \left( \frac{1}{2^2} \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$
5	4	10	243	$3^4$	$3^{10}$	729	$\frac{3^5}{2^4}$	$\frac{1}{2^{10}} \cdot (3^{10} \cdot 3)$	$\frac{15\sqrt{3}}{2^{12}}$	$\frac{3^4\sqrt{3}}{2^8 \cdot 4}$	$3^{10} \left( \frac{1}{2^{10}} \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$
4	5	4	81	$3^5$	$3^4$	243	$\frac{3^6}{2^5}$	$\frac{1}{2^4} \cdot (3^4 \cdot 3)$	$\frac{12\sqrt{2}}{2^{10}}$	$\frac{3^5\sqrt{3}}{2^{10} \cdot 4}$	$3^4 \left( \frac{1}{2^4} \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$

A partir de la actividad 7 se muestra la construcción de la sucesión como *proceso iterativo infinito* (tabla 8). Si bien E1 en la actividad 7a), destinada a determinar cuántas imágenes faltan por ubicar entre otras dos que son dadas, no expresa claramente dicha construcción, en 7b) explicita mejor su idea.

Tabla 8.  
Construcción de la sucesión  $\Delta_i$  como *proceso iterativo infinito*

Estudiante	Respuestas literales de los estudiantes	Indicadores (tabla 2)
E1	7a) Faltan dos imágenes más 7b) Ya que la primera imagen se le debe aplicar el <i>proceso</i> dos veces más para que dé la segunda	(nd) (vi), (xii)
E7	7a) Falta una imagen 7b) Triángulos en un lado = $2^x$ , $x = N.º$ de <i>procesos</i> $\Delta_1 \Rightarrow 2^x = 4$ , $x = 2$ , $\Delta_2 \Rightarrow 2^x = 16$ , $x = 4$	(xii) (xii)
E8	7a) Falta una imagen para llegar a la segunda imagen 7b) Se encuentra la tercera imagen $3^3$ triángulos	(xii) (xii)

Nota: *nd* = respuestas que no reflejaron de forma evidente alguno de los indicadores de la tabla 2 o preguntas que no fueron respondidas por los estudiantes.

En este momento de la secuencia de actividades se observa que, entre los nueve estudiantes, E3, E4, E7 y E8 construyen los *procesos iterativos infinitos*  $N_n$ ,  $M_n$ , , y todos construyen el proceso iterativo infinito  $\Delta_n$ .

A partir de los datos que nos entrega la actividad 8a), cuyo objetivo es propiciar la construcción de ternas fractales como un *proceso iterativo infinito tridimensional*, se muestra (tabla 9) que E1 presenta el patrón de conteo , pero no logra determinar las expresiones que definen a las medidas fractales. Si bien E1 ha hecho el intento de usar  $n$  como parte de dichas expresiones, no ha logrado construir las expresiones adecuadas para el área, el perímetro y la longitud del lado de cada triángulo que compone la imagen. En cambio, E7 y E8 reflejan lo que se ha definido en el indicador (*xiii*) por medio de

expresiones analíticas que generalizan las fórmulas para el perímetro y áreas fractales a través del uso de  $n$ , lo que evidencia su correspondencia con la etapa  $n$ -ésima y conforma lo que hemos denominado ternas fractales.

Tabla 9.  
Construcción de ternas fractales como un *proceso iterativo infinito tridimensional*

<i>Estudiante</i>	<i>Número de veces que se aplicó el proceso</i>	<i>Lugar que ocupa la imagen entre las imágenes que se van construyendo</i>	<i>Número de triángulos que componen la imagen</i>	<i>Longitud del lado de cada triángulo que compone la imagen</i>	<i>Perímetro de la imagen</i>	<i>Área de la imagen</i>
E1	$n$	$n+1$	$3^n$	$2^n$	$9^n$	$3 \frac{n\sqrt{2}}{2^{2n+2}}$
E7	$n$	$n+1$	$3^n$	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{3^{n+1}}{2^n}$	$\frac{3^n \sqrt{3}}{2^{2n} \cdot 4}$
E8	$n$	$n+1$	$3^n$	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2^n}(3^n \cdot 3)$	$3^n \left( \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{4} \right)$

### Construcción de la *totalidad*

Las producciones de los tres estudiantes relativas a la actividad 8b) reflejan dos tipos de respuesta de evaluación acumulativa: E1 responde que el número de triángulos es  $3^n$ , mientras que para E7 y E8 este resultado es  $3^\infty$  (tabla 10).

Tabla 10.  
Construcción del TS como *totalidad*

<i>Estudiante</i>	<i>Respuestas literales de los estudiantes</i>	<i>Indicadores (tabla 2)</i>
E1	8b) El número de triángulos será el número de triángulos al aplicar el <i>proceso</i> una vez (3) elevado al número de veces que se aplique el <i>proceso</i> : $3^n$	(xiv)
E7	8b) La imagen se compondría de $3^\infty$ número de triángulos, lo cual sería un número infinito	(xiv)
E8	8b) $3^\infty$ porque en $3^\infty$ , $n$ es el número de <i>procesos</i> aplicados	(xiv)

Hacia el final de las actividades se observa que en el grupo de nueve estudiantes E1, E3, E4, E6, E7, E8, E9 se logró la construcción de  $N_n$ , cuatro de ellos construyen  $M_n$  y todos ellos construyen  $\Delta_n$ . El *proceso iterativo infinito tridimensional*, es decir, las ternas fractales, son evidenciadas en los trabajos de E3, E4, E7 y E8. Como respuesta a la evaluación promovida en la actividad 8b), se observa la respuesta  $3^n$  en los trabajos de E1 y E2, mientras que para E3, E4, E6, E7, E8 y E9 esa cantidad es  $3^\infty$  y E5 no responde.

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados de esta investigación avalan la *totalidad* como una estructura para APOE. En el contexto del TS la *totalidad* consiste en concebir el TS como un todo a través de tres procesos iterativos infinitos,  $N_n$ ,  $M_n$  y  $\Delta_n$  (en el caso de  $\Delta_n$  como una imagen mental), que se coordinan para construir un solo *proceso iterativo infinito tridimensional* que, producto de la actividad de una evaluación acumulativa, sobre uno de sus *procesos* subyacentes, es concebido como una estructura que ha dejado de ser dinámica. A diferencia de Dubinsky et al. (2013), nuestro estudio incluyó una actividad de evaluación que propició que estudiantes de educación secundaria, sin conocimientos sobre límites, construyeran respuestas como:  $3^n$  o  $3^\infty$ , lo que los condujo a imaginar que la cantidad de triángulos, en el caso de que el proceso continuase indefinidamente, había finalizado. La actividad de evaluación sobre  $N_n$  propicia dos tipos de resultados:  $3^n$  y  $3^\infty$ , y ambos han sido considerados en nuestro estudio como «dispositivos» (Thurston, 1990, p. 5) que reflejan la estabilidad de un *proceso iterativo tridimensional* que hemos denominado ternas fractales  $n \rightarrow (N_n, M_n, \Delta_n)$ , y así fusionan las características analíticas y geométricas del TS. Esta forma de concebir dicha estructura mental se relaciona en parte con lo propuesto por Dubinsky et al. (2013), que consiste en la capacidad de imaginar todos los 9 a la vez (en  $0, \bar{9}$ ). En efecto, los estudiantes que presentan  $3^n$  y  $3^\infty$  pueden imaginar tener todos los triángulos que componen la imagen del fractal TS, independientemente de si usan  $n$  o  $\infty$ . El hecho de que los estados construidos en el infinito  $3^n$  y  $3^\infty$  hereden propiedades de los estados previamente construidos en el proceso que lo origina, podría significar la imposibilidad de construir un objeto trascendente (Dubinsky et al., 2008); sin embargo, la DG del TS fue diseñada considerando el contexto escolar en el que se inscribe esta investigación y con otros objetivos teóricos y didácticos.

Brown et al. (2008) definieron en su DG del Conjunto Potencia de  $\mathbb{N}$  la *totalidad* como una sola operación mental que asocia un objeto con cada número natural basado en un *proceso iterativo infinito* que itera a través de  $\mathbb{N}$ . A diferencia de lo anterior, nuestro *proceso iterativo infinito* para el TS es tridimensional y produce ternas fractales como elementos de la sucesión:  $n \rightarrow (N_n, M_n, \Delta_n)$ , y no como los *objetos* que se habían declarado en Brown et al. (2008). Coincidimos con Dubinsky et al. (2008) en que el intento de evaluación propiciado sobre solo uno de los *procesos iterativos* que componen la terna fractal, en este caso sobre  $n \rightarrow (N_n)$ , simplificó el tránsito hacia la *totalidad* y hacia la imaginación del *proceso iterativo tridimensional* como estático.

El mecanismo de *síntesis* definido en esta investigación es un medio por el cual se construye el TS como una estructura mental estática, comprendida entre *proceso* y *objeto*, que fusiona las diversas características del fractal consideradas en este estudio.

La *totalidad* es especialmente necesaria en el contexto escolar y proyecta un currículo que favorezca la integración o conexión de los temas (Alsina, 2009; Arcavi, 2018; Garbin y Azcárate, 2002; Godino et al., 2008), considerando que varios de ellos no se pueden etiquetar como *objetos* propiamente debido al nivel de abstracción o complejidad estructural que estos comportan.

A modo de conclusión, podemos señalar que las evidencias indican que la hipótesis teórica DG propuesta podría ser refinada en algunos de sus componentes. Como la teoría APOE lo ha planteado, las estructuras pueden avanzar en más de una dimensión de la DG. Lo anterior fue evidente en algunas de las primeras producciones de los estudiantes (figura 2), que reflejaban la construcción del patrón de conteo y la necesidad de recurrir al orden de  $\mathbb{N}$  para organizar y apoyar las *acciones* sobre *esquemas* analíticos y geométricos previos. Esto nos lleva a replantear la posibilidad de ajustar la DG, modificando el orden en que se evidencian algunas de dichas estructuras. Otros elementos teóricos que deben profundizarse son los *procesos* intrínsecos del TS, ya que los resultados desvelan que no basta con construir la iteración y la autosimilitud. La comprensión de la estructura fractal requiere focalizar la atención en aquellos elementos que forman parte de cada estructura individual, y en esto es clave el

conteo de los triángulos sombreados. Un aspecto ligado a lo anterior y abordado someramente en la DG de este estudio fue la longitud de los lados de cada triángulo que forman la imagen fractal. Esta característica debe ser estudiada más en profundidad para evaluar implicancias en un modelo teórico refinado. Las adecuaciones a la DG son una proyección de nuestro trabajo de investigación hacia otros fractales geométricos.

En el contexto de la educación escolar, aún es necesario seguir investigando sobre los conocimientos implicados en la construcción del TS, así como de otros fractales geométricos. En este sentido, consideramos que los resultados son auspiciosos, pues estudiantes sin conocer el tema y sin la intervención docente fueron capaces de mostrar que la secuencia de actividades contribuye a la construcción de estructuras relevantes del fractal geométrico.

De forma más general, podemos decir que la *síntesis* se propone como un mecanismo mental que propicia la integración de varios *procesos*, los que comportan diversas características, propiedades y relaciones de una porción del conocimiento matemático, en una estructura mental estática. Los atributos de dichos procesos se fusionan y generan un dispositivo que facilita su comprensión o uso del conocimiento en un contexto matemático dado. Este mecanismo podría proyectarse como un aporte a la teoría (figura 6) en el contexto de los fractales geométricos.

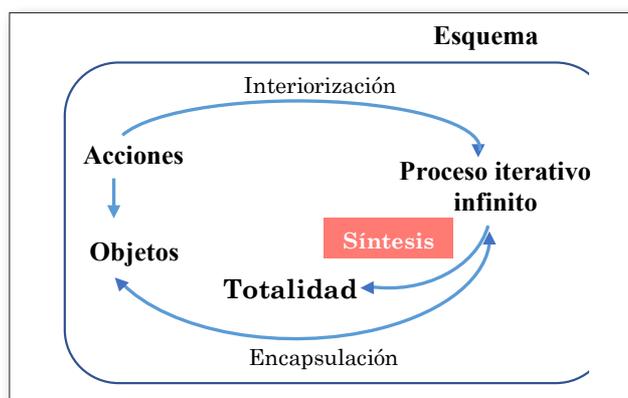


Fig. 6. La síntesis como mecanismo mental en el contexto del TS.

Cabe señalar que la evidencia mostrada para el TS es un primer paso para llegar a sustentar la *síntesis* como un mecanismo mental para APTOE (*acción, proceso, totalidad, objeto y esquema*). Resulta imperativo investigar con otros tópicos matemáticos y con un número mayor de datos, con la finalidad de tener evidencia que respalde la *síntesis* como un nuevo mecanismo mental en el contexto de una familia de fractales geométricos y otros fragmentos de las matemáticas.

## AGRADECIMIENTOS

A la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile, mediante el Programa de Capital Humano Avanzado N.º 21161593/2016 y el proyecto FONDECYT N.º 1180468. Agradecemos a los participantes por la buena disposición en la investigación.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adams, H. y Russ, J. (1992). Chaos in the classroom: Exposing gifted elementary school children to chaos and fractals. *Journal of Science Education and Technology*, 1(3), 191-209.  
<https://doi.org/10.1007/BF00701363>

- Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 119-127). Santander: SEIEM.
- Apkarian, N., Tabach, M., Dreyfus, T. y Rasmussen, C. (2019). The Sierpinski smoothie: blending area and perimeter. *Educational Studies in Mathematics*, 101, 19-34.  
<https://doi.org/10.1007/s10649-019-09889-4>
- Arcavi, A. (2018). Hacia una visión integradora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. *Educación Matemática*, 30(2), 33-48.  
<https://doi.org/10.24844/EM3002.02>
- Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Okaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Nueva York: Springer-Verlag.  
<https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6>
- Barrio, J. (1989). El grupo de las transformaciones de Piaget. *Revista Española de Pedagogía*, 47(183), 205-243. <https://www.jstor.org/stable/23763768>
- Brown, A., McDonald, M. y Weller, K. (2008). Step by step: Infinite iterative processes and actual infinity. En F. Hitt, D. Holton y P. Thompson (Eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education: Vol. 16. Research in Collegiate Mathematics Education VII* (pp. 115-142). Washington, DC: The American Mathematical Society.  
<https://doi.org/10.1090/cbmath/016>
- Chabert, J.-L. (1990). Un demi-siècle de fractales: 1870-1920. *Historia Mathematica*, 17(4), 339-365.  
[https://doi.org/10.1016/0315-0860\(90\)90026-A](https://doi.org/10.1016/0315-0860(90)90026-A)
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41).  
<https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1>
- Dreyfus, T. (2015). Constructing abstract mathematical knowledge in context. En S. J. Cho (Ed.), *Selected Regular lectures from the 12<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education* (pp. 115-133).  
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6>
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.  
[https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1\\_7](https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_7)
- Dubinsky, E., Arnon, I. y Weller, K. (2013). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: The case of 0.999 and 1. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, 13(3), 232-258.  
<https://doi.org/10.1080/14926156.2013.816389>
- Dubinsky, E., Weller, K., Stenger, C. y Vidakovic, D. (2008). Infinite iterative processes: The tennis ball problem. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1(1), 99-121. <https://www.ejpam.com/index.php/ejpam/article/view/48/17>
- Echeverría, R. (1997). *El búho de Minerva*. Santiago, Chile: Dolmen Ediciones.
- Garbin, S. (2005a). Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: El caso de estudiantes con conocimientos previos de cálculo. *Enseñanza de las Ciencias*, 23(1), 61-80. <https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/22005>
- Garbin, S. (2005b). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(2), 169-193. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33580205>
- Garbin, S. (2007). La problemática fractal: un punto de vista cognitivo con interés didáctico. *Paradigma*, 2, 79-80. [http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1011-22512007000200004&lng=es&tlng=pt](http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512007000200004&lng=es&tlng=pt)

- Garbin, S. y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: Acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las Ciencias*, 20(1), 87-113. <https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21786>
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10, 7-37. [http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis\\_eos\\_10marzo08.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf)
- Gray, E. y Tall, D. (2007). Abstraction as a natural process of mental compression. *Mathematics Education Research Journal*, 19(2), 23-40. <https://doi.org/10.1007/BF03217454>
- Hershkowitz, R., Hadas, N., Dreyfus, T. y Schwarz, B. (2007). Abstracting processes, from individual's construction of knowledge to a group's «shared knowledge». *Mathematics Education Research Journal*, 19(2), 41-68. <https://doi.org/10.1007/BF03217455>
- Karakus, F. (2015). Investigation into how 8th grade students define fractals. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 15(3), 825-836. <https://doi.org/10.12738/estp.2015.3.2429>
- Klein, F. (1924). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: arithmetic, algebra, analysis*. Nueva York: Dover.
- Mason, J. (1989). Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 2-9. <https://www.jstor.org/stable/40247947>
- Peitgen, H., Jürgen, H. y Saupe, D. (2004). *Chaos and Fractals*. Nueva York: Springer. <https://doi.org/10.1007/b97624>
- Piaget, J. (2000). *El nacimiento de la inteligencia en el niño*. Barcelona: Crítica.
- Sabogal, S. y Arenas, G. (2011). *Una introducción a la geometría fractal*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.
- Sierpinski, W. (1915). Sur une courbe dont tout point est un point de ramification. En *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* (pp. 302-305). París: Gauthier Villars et compagnie, Imprimeurs Libraires.
- Stake, R. E. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Barcelona: Labor.
- Stenger, C., Weller, K., Arnon, I., Dubinsky, E. y Vidakovic, D. (2008). A Search for a Constructivist Approach for Understanding the Uncountable Set. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(1), 93-125. [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1665-24362008000100004&lng=es&tlng=](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000100004&lng=es&tlng=)
- Thurston, W. (1990). Mathematical education. *Notices of the AMS*, 37, 844-850. <https://arxiv.org/pdf/math/0503081v1.pdf>
- Tsamir, P. y Dreyfus, T. (2002). Comparing infinite sets – a process of abstraction. The case of Ben. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 1-23. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(02\)00100-1](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00100-1)
- Villabona, D. y Roa, S. (2016). Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE. *Educación Matemática*, 28(2), 119-150. <https://doi.org/10.24844/EM2802.05>
- Weller, K., Arnon, I. y Dubinsky, E. (2011). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: Strength and stability of belief. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, 11, 129-159. <https://doi.org/10.1080/14926156.2011.570612>

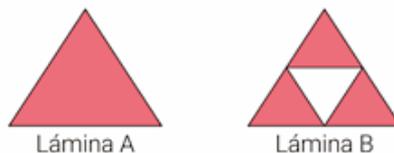
## APÉNDICE

### Secuencia completa de actividades

#### Formulario A

Existe una figura especial que se va construyendo de la siguiente manera:

- Se inicia con un triángulo equilátero (lámina A).
- Luego se va aplicando el proceso que se indica a continuación: Dibujamos los segmentos que unen los puntos medios de los lados obteniendo cuatro triángulos y quitamos el triángulo central (lámina B).
- A cada uno de los tres triángulos de la imagen construida se le aplica el mismo proceso anterior, y así sucesivamente.



#### Actividad 1

- 1a) Dibuja la imagen que se observaría al aplicar nuevamente el proceso a la imagen de la lámina B.
- 1b) Dibuja la imagen que se observaría si se aplica nuevamente el proceso a la imagen obtenida en 1a).
- 1c) ¿Qué es lo más fácil de esta actividad?
- 1d) ¿Qué es lo más difícil de esta actividad?

#### Actividad 2

- 2a) ¿Qué semejanzas con la imagen de la lámina B tiene la imagen obtenida al aplicar el procedimiento por quinta vez?
- 2b) ¿Qué diferencias con la imagen de la lámina B tiene la imagen obtenida al aplicar el procedimiento por quinta vez?
- 2c) ¿Cómo te imaginas la imagen al aplicar 10 veces el proceso? Explícalo en palabras.
- 2d) Al acercar una lupa a uno de los vértices de la imagen obtenida al aplicar 100 veces el proceso, ¿qué se observa a través de la lupa?



- 2e) En la lámina C se ha dibujado el espacio en blanco que queda más cerca del vértice superior de la imagen construida al aplicar 200 veces el proceso. Dibuja solo las figuras que comparten un lado con este espacio.



Actividad 3

3a) Completa la tabla A1 (puedes desarrollar la actividad en las hojas de atrás, indicando el número de la pregunta, y luego traspasar los resultados a la tabla).

Tabla A1

<i>Cantidad de procesos aplicados</i>	<i>Cantidad de triángulos que componen la imagen</i>
4 veces	
10 veces	

3b) Al aplicar una vez el proceso, cada lado de la imagen queda dividido en dos partes iguales (lámina D). ¿En cuántas partes queda dividido cada lado de la imagen obtenida al aplicar 5 veces el proceso?



3c) ¿Por qué no existe una imagen compuesta por 1024 triángulos al construir esta figura especial?

Formulario B

Existe una figura especial que se va construyendo de la siguiente manera:

- Se inicia con un triángulo equilátero (lámina A).
- Luego se va aplicando el proceso que se indica a continuación: dibujamos los segmentos que unen los puntos medios de los lados obteniendo cuatro triángulos y quitamos el triángulo central (lámina B).
- A cada uno de los 3 triángulos de la imagen construida se le aplica el mismo proceso anterior, y así sucesivamente.

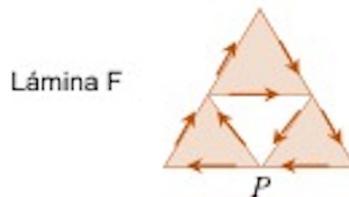
Actividad 4

- 4a) Dibuja la imagen que se obtendría al aplicar el proceso cinco veces.
- 4b) Explica por qué lo que se muestra en la lámina E no puede ser una imagen de la figura especial. Escribe tu respuesta.



Actividad 5

Cada imagen que se forma al aplicar el proceso posee un perímetro y un área según se indica a continuación. **Perímetro:** En la lámina F, las flechas señalan un camino que parte en P (punto medio de uno de los lados del triángulo inicial), y que se puede seguir para pasar una sola vez por cada segmento. A la longitud de todo el camino lo denominaremos Perímetro de la imagen. **Área:** El área es la suma de las áreas solo de los triángulos que componen la imagen.



5a) Completa la tabla A2. Considera que el proceso se inició con un triángulo equilátero de lado 1. (Puedes desarrollar la actividad en las hojas de atrás, colocando el número de la actividad y luego traspasar los resultados a la tabla).

Tabla A2

<i>Tipo de imagen</i>	<i>Perímetro de la imagen</i>	<i>Área de la imagen</i>
Imagen conformada por 9 triángulos		
Imagen obtenida al aplicar 4 veces el proceso		

Actividad 6

6a) Completa la tabla A3 considerando que el proceso se inició con un triángulo equilátero de lado 1. En la columna 1 puedes elegir el número de veces que se aplicó el proceso (elige tres casos distintos). Puedes realizar los cálculos en las hojas de atrás colocando el número de la actividad y luego traspasar los resultados a la tabla.

Tabla A3

<i>Número de veces que se aplicó el proceso</i>	<i>Número de triángulos que componen la imagen</i>	<i>Perímetro</i>	<i>Área</i>

Actividad 7

Al aplicar el proceso una y otra vez aparecen distintas imágenes de la figura especial.

7a) ¿Cuántas imágenes faltan por ubicar entre las dos que se muestran a continuación cuando el proceso se aplica una y otra vez en forma consecutiva?



7b) Justifica la respuesta anterior.

7c) Une con una flecha lo que corresponda:

Actividad 8

8a) Completa la tabla A4 considerando que se comienza de un triángulo equilátero de lado 1.

Tabla A4

<i>Número de veces que se aplicó el proceso</i>	<i>Lugar que ocupa la imagen entre las imágenes que se van construyendo</i>	<i>Número de triángulos que componen la imagen</i>	<i>Longitud del lado de cada triángulo que compone la imagen</i>	<i>Perímetro de la imagen</i>	<i>Área de la imagen</i>

8b) Considera que este proceso de construcción continúa indefinidamente, ¿cuántos triángulos componen la imagen en ese estado?

---

# Mental mechanism of synthesis in the learning of the Sierpinski triangle as a totality

Ximena Gutiérrez Figueroa

Centro de Estudios y Desarrollo de Educación Continua para el Magisterio, Universidad de Chile. Santiago, Chile.

ximenagutierrez@u.uchile.cl

Marcela Parraguez González

Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.

marcela.parraguez@pucv.cl

Various research studies of didactic interest consider the importance of promoting the integration of concepts in the teaching of mathematics. Part of the theoretical inquiry developed in the context of this research reveals that the concept integration approach has been considered by different researchers under different names. Hence concepts such as organic bonding, compressible mathematics, principle of interconnection and fusion of knowledge propose a certain common episteme, in response to the complexity of the teaching of mathematics, which in this study we have called «knowledge integration approach». The geometric fractals favour the approach indicated, and among their exponents the Sierpinski triangle was chosen as the object of study. Geometric fractals are not part of the compulsory Chilean school curriculum, so we place ourselves in the qualitative paradigm to understand in depth how such knowledge can be learned at the secondary level. Under these conditions, and under the wing of the APOS theory, we set out to identify, describe and base, from this cognitive framework, how the Sierpinski triangle is constructed and also contribute to the theoretical reflection on the construction of the totality as a mental structure facilitated by the mechanism of synthesis.

Considering the methodological framework of APOS, three moments were selected to carry out the experiment. The first moment, of theoretical analysis, gave rise to a cognitive model for learning the Sierpinski triangle, where iteration and self-similarity were identified as intrinsic mental structures for its construction. This model recognizes the recurrence of constructed concepts as analytical and geometric processes that are coordinated to give rise to a three-dimensional infinite iterative process. Based on the scientific literature on the totality in the field of APOS and in specialized studies that address the concept integration approach, the construction of the fractal under study was established as a totality facilitated by the synthesis mechanism. In a second phase, a sequence of activities was designed to promote the mental constructions described in the model, which were developed by nine secondary school students individually and without the intervention of the teacher in charge of the class. Finally, the data were analyzed using the cognitive model generated by the theoretical analysis.

The results have a double dimension: on the one hand, in the construction of the Sierpinski triangle, analytic and geometric characteristics are identified, represented by various themes included in the school curriculum. As an example, at least: arithmetic and geometric patterns emerge; polygons, medians, perimeters and areas; similarity; powers, natural numbers and their order; and successions, which were described as distinct mental structures based on the theoretical analysis developed. On the other hand, the theoretical analysis also allowed to delve into the importance of the «totality» structure in the learning of the Sierpinski triangle facilitated by the proposed synthesis mechanism, by which the fractal is placed between process and object when conceived as a static whole that integrates the geometric and analytical characteristics described in the cognitive model.

By way of discussion and considering that there are concepts in the school curriculum that require knowledge which is treated at higher levels of education to be constructed as objects, we believe that the whole structure can be propitiated for several of these concepts. This requires further progress in the study of new mechanisms specific to these concepts, so that school knowledge schemes continue to be reconstructed and to mobilize increasing levels of abstraction without neglecting contexts and functionalities in the real world.