ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 39-1 (2021), 195-217
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3045
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Preconcepciones de pendiente en estudiantes de Educación Secundaria

Secondary Education students' preconceptions of slope

Martha Iris Rivera López, Crisólogo Dolores Flores
Centro de Investigación en Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Guerrero, México
irivera@uagro.mx, cdolores2@gmail.com

RESUMEN • En este artículo se reportan los resultados de una investigación cuyo objetivo fue identificar las preconcepciones de pendiente en estudiantes de Educación Secundaria. Se empleó una entrevista basada en tareas para la recolección de datos de 30 estudiantes de 10.º grado y el método de análisis temático para su respectivo análisis. Los resultados muestran que las preconcepciones de pendiente que manifiestan los estudiantes son la pendiente como: la longitud de un segmento de recta, un objeto, una propiedad física, el valor del ángulo, la intersección de la recta con los ejes, asociada a una expresión algebraica y el cociente de los valores de las intersecciones en el eje *x* e *y*. Aunque algunos estudiantes declararon una primera experiencia con el concepto, este conocimiento tuvo una mínima influencia en sus procedimientos y justificaciones.

PALABRAS CLAVE: Pendiente; Preconcepciones; Entrevista basada en tareas; Análisis temático, Educación Secundaria.

ABSTRACT • This article reports an investigation whose objective was to identify Secondary Education students' preconceptions of slope. A task-based interview was used to collect data from 30 10th grade students and the thematic analysis method for their respective analysis. The results indicate that the slope's preconceptions evidenced by the students were the slope as length of the straight segment, an object, a physical property, the value of the angle, the intersection of the straight line with the axes, associated with an algebraic expression and the quotient of the values of the *x* and *y* intercepts. Although some students reported a first experience with the concept, this knowledge had minimal influence on their procedures and justifications.

KEYWORDS: Slope; Preconceptions; Task-based interview; Thematic analysis; Secondary Education.

Recepción: julio 2019 • Aceptación: agosto 2020 • Publicación: marzo 2021

Rivera López, M. I. y Dolores Flores, C. (2021).Preconcepciones de pendiente en estudiantes de Educación Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(1), 195-217. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3045

INTRODUCCIÓN

La pendiente es un concepto importante en la educación matemática ya que su enseñanza es obligatoria y está previsto en el currículum de varios países (Nagle y Moore-Russo, 2014; Newton y Poon, 2015). Su estudio va más allá de usarla algebraicamente y como indicador de inclinación (Dündar, 2015), ya que contribuye al estudio de las funciones lineales y permite describir el comportamiento de funciones no lineales (Yerushalmy, 1997). Además, ayuda en la construcción de la línea del mejor ajuste en estadística (Casey y Nagle, 2016) y del concepto de derivada en cálculo (Stanton y Moore-Russo, 2012; Teuscher y Reys, 2012). Por ello, es necesario que los estudiantes desarrollen una buena comprensión sobre este concepto desde sus estudios primarios y así estar mejor preparados para sus estudios universitarios.

Parte importante de las investigaciones sobre el concepto de pendiente se ha centrado en identificar el conocimiento que tienen profesores y estudiantes que lo han trabajado de manera formal. Estas han destacado los errores que comúnmente cometen los estudiantes al trabajar con el concepto, tales como: usar $\frac{x_2 - x_1}{y_{2-y_1}}$ o $\frac{run}{rise}$, identificarla como el coeficiente de x sin importar la forma de la ecuación lineal, my–m indican rectas perpendiculares entre sí, entre otros (véase, por ejemplo, Birgin, 2012; Cho y Nagle, 2017). Asimismo, existen dificultades para interpretarla como razón de cambio en contextos como la economía, biología, física, etc. (Dolores, Rivera y García, 2019; Planinic et al., 2012; Stump, 2001; Wilhelm y Coxnfrey, 2003). Por otra parte, se han identificado once conceptualizaciones de pendiente: razón algebraica, razón geométrica, coeficiente paramétrico, concepción trigonométrica, concepción en cálculo, propiedad física, propiedad funcional, situación del mundo real, propiedad determinante, constante de linealidad e indicador de comportamiento (Stump, 1999, 2001; Moore-Russo, Conner y Rugg, 2011). Sobre la base de estas, varios investigadores se han interesado en investigar lo que pasa en diversas culturas, si estas se siguen conservando o si existen otras que aún no se han reportado (véase, por ejemplo, Hoffman, 2015; Mudaly y Moore-Russo, 2011; Newton y Poon, 2015; Rivera, Salgado y Dolores, 2019; Salgado, Rivera y Dolores, 2019). Sin embargo, aún no se han explorado las preconcepciones de los estudiantes que no la han trabajado o las que se forman cuando ya han tenido un primer acercamiento al concepto (Stanton y Moore-Russo, 2012). En este estudio, las preconcepciones son consideradas como ideas u opiniones desarrolladas por el sujeto antes del estudio formal de un concepto.

Las preconcepciones juegan un papel importante en la adquisición de conceptos matemáticos (Yanik, 2011) y son base indispensable para cualquier situación de enseñanza, ya que forman parte del conocimiento previo (Campanario y Otero, 2000). Su estudio es importante porque muestran los momentos significativos y aspectos de los procesos de construcción mental que son influenciados por las vivencias individuales y colectivas que afectan al significado. Los estudios indican que antes del estudio formal, las personas sostienen firmemente sistemas descriptivos y explicativos de los fenómenos científicos y lógico-matemáticos (Confrey, 1990). Por ello, dado que el factor que más influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe (Ausubel, 1978; Mahmud y Gutiérrez, 2010), es esencial saber qué preconcepciones tienen los estudiantes antes de pasar a los conceptos formales. Su omisión puede originar una serie de dificultades y errores, dado que las preconcepciones se arraigan fuertemente en la mente de los estudiantes y son difíciles de cambiar (Behar y Ojeda, 2000; Simons, 1999).

Los estudios de preconcepciones se han desarrollado principalmente en el campo de las ciencias naturales (véase, por ejemplo, Mahmud y Gutiérrez, 2010; Rodríguez, 2017; Yip, 1998). En educación matemática, se han identificado las preconcepciones sobre un curso de estadística (Tovar, Castillo y Marin, 2007); la asociación estadística en tablas de contingencia (Batanero, Estepa, Godino y Green, 1996); las translaciones geométricas (Yanik, 2011) y la simetría reflexiva (Mhlolo y Schafer, 2013). Una aproximación al estudio de las preconcepciones de pendiente es el de Thacker (2019), quien sobre la base de las percepciones de inclinación de estudiantes de 7.º grado intentó conectar con la definición formal de pendiente. Sin embargo, aún falta identificar las preconcepciones de pendiente, no solo para identificar las dificultades de los estudiantes, sino también para explorar la naturaleza de estas y para que mediante el proceso de enseñanza puedan ser trascendidas y así acercarlas al conocimiento aceptable (Dolores, García y Gálvez, 2017). Además, en México los estudios sobre esta cuestión son escasos, por lo que la presente investigación se planteó la pregunta: ¿qué preconcepciones de pendiente evidencian los estudiantes estudiantes de 10.° grado en la Educación Secundaria?

MARCO CONCEPTUAL

En la literatura existen muchos términos utilizados para describir «lo que el alumno sabe», entre estos: preconcepciones, concepciones previas, concepciones, creencias, etc. (Ausubel, 1978; Oyarbide, 2004; Tovar et al., 2007). El término mayormente empleado en educación matemática es el de «concepciones alternativas», sin embargo, teniendo en cuenta el propósito de este estudio consideramos que no es apropiado usarlo. Primero, porque estas devienen de ideas ya formales (Abouchedid y Nasser, 2000; Matz, 1980) y, en segundo lugar, en la mayoría de los casos, se utiliza para describir las nociones incorrectas de los niños mayores y el término connota una idea equivocada (Kambouri, 2016). Sin embargo, cada término se refiere a una etapa o estatus de formación del concepto (Kambouri, 2016; Korpershoek, Kuyper, Bosker y Van der Werf, 2013).

En este sentido, si los alumnos reciben una orientación adecuada, pueden reestructurar sus preconcepciones en nociones que sean más aceptadas por la comunidad científica (Kambouri, 2016). En cambio, si no reciben la orientación adecuada, existe un gran peligro de que sus preconcepciones no se reestructuren y pasen a desarrollarse en ideas alternativas, también conocidas como concepciones alternativas (Bush y Karp, 2013; Kambouri, Briggs y Cassidy 2011). Esto deja entrever que una preconcepción empleada durante el estudio formal de un concepto pasaría a un estatus de concepción o concepción alternativa, según sea el caso (Matz, 1980; Mhlolo y Schafer, 2013). Por ello, dado que el objetivo del estudio es explorar antes del estudio formal del concepto de pendiente, se denominaron preconcepciones.

Las preconcepciones subyacen a todo tipo de conocimiento, tanto conceptual como procedimental, y orientan la interacción y la acción de un individuo (Bretones, 2003, Campanario y Otero, 2000); apoyan el aprendizaje, activando el conocimiento de una clase anterior o de un contexto familiar para formar una nueva idea (Yanik, 2011). Yip (1998) las entiende como construcciones personales basadas en ideas informales formadas en la vida cotidiana y/o dentro del aula. Tovar et al. (2007) las define como las ideas que desarrolla el estudiante a medida que ha tenido contacto con información relacionada con el concepto. Rodríguez (2017) considera que se elaboran para dar respuesta a su necesidad de interpretar conceptos científicos, y así brindar explicaciones o descripciones. Estas se componen de intuiciones, ideas y creencias de un sujeto sobre entidades matemáticas (Sirotic y Zaskis, 2007). Por ello, regularmente tienen un carácter inconexo e incluso a veces son contradictorias, ya que un mismo alumno puede explicar el mismo fenómeno desde varios puntos de vista inconsistentes entre sí (Pozo y Carretero, 1987).

De esta manera, con base en las ideas expuestas, consideramos como *preconcepciones a* las nociones que tiene el estudiante como resultado de sus experiencias (escolares y extraescolares) para dar explicaciones y respuesta a actividades relacionadas con un concepto, previamente a su estudio formal. Entendiendo por estudio formal el trabajo con la definición, propiedades y representaciones del concepto, en nuestro caso, el concepto de pendiente. Dado que los argumentos, los procedimientos (por ejemplo, usar una fórmula para calcular la pendiente, medir un segmento, usar una representación, entre otros) y movimientos corporales (como la simulación del grado de inclinación de una recta utilizando su brazo o un objeto material que haga referencia a la pendiente) están influenciados por esas nociones, para este estudio se consideran como representaciones o manifestaciones de las preconcepciones de pendiente.

MÉTODO

Participantes

En México, este concepto emerge en 9.º grado –en los últimos contenidos y destacándose la relación entre razón de cambio e inclinación (Dolores, Rivera y Moore-Russo, 2020)–, es tratado formalmente en 11.º grado y trasciende a los estudios universitarios. Por ello, basados en el propósito de la investigación, los participantes fueron 30 estudiantes voluntarios (entre 15 y 16 años) del 10.º grado de una escuela pública de la región centro del Estado de Guerrero, en México. Todos cursaron sus estudios anteriores en diversas instituciones educativas, algunas con un fuerte rezago educativo. Cabe mencionar que solo un 50 % de los participantes declaró haber escuchado el término en grados anteriores, pero en ese momento no recordaban qué era. Sin embargo, estas características están contempladas al usar el término de preconcepción, ya que su estudio no fue formal. Para proteger el anonimato de los estudiantes se utilizaron los acrónimos E1, E2, E3, …, E30 para identificarlos.

Entrevista basada en tareas

Los datos se recolectaron por medio de una entrevista basada en tareas. Esta permite observar cómo los participantes ponen en juego sus ideas matemáticas, posibilitando hacer inferencias sobre el posible significado matemático que les atribuyen (Goldin, 1997). Para esta, se requiere de una interacción mínima entre un sujeto (el que resuelve) y un entrevistador (el que plantea o pregunta), donde el sujeto habla durante o inmediatamente después de resolver una tarea (preguntas, problemas o actividades) evidenciando así su conocimiento y razonamiento en la resolución (Koichu y Harel, 2007).

La entrevista se basó en un protocolo que incluye trece tareas (ver anexo) y preguntas auxiliares básicas referentes a los procedimientos y al vocabulario empleado de cada participante (tales como: ¿por qué lo hiciste así?, ¿conoces otra vía de solución?, ¿a qué te refieres con este término (por ejemplo, *ángulo*, *inclinación*, *empinado*)?, ¿por qué utilizaste esa fórmula?), a fin de conocer en detalle su razonamiento y conocimiento sobre el concepto de pendiente. Se aplicó individualmente y tuvo una duración de 60 a 90 minutos, participaron 2 entrevistadores (los investigadores de este estudio).

Las tareas se diseñaron considerando aspectos del currículo de matemáticas de México (de 1.º al 10.º grado) y en los libros de texto, tales como el tipo de representaciones que se sugiere trabajar, según Dolores et al. (2020), y los aprendizajes esperados, cuidando que los planteamientos tuvieran similitud con el trabajo escolar. Todas las tareas están planteadas de manera abierta, se requiere analizar e interpretar situaciones específicas que involucran representaciones verbales, gráficas o algebraicas de la pendiente. Por ejemplo, la tarea 3 permite identificar qué elementos consideran para el cálculo de la pendiente de una recta, se les dio 4 segmentos de recta en un mismo plano cartesiano y graduado, con diferentes informaciones (el ángulo de inclinación, con (o sin) intersecciones en los ejes x e y). Las representaciones de la pendiente involucradas en esta tarea son: la trigonométrica, razón algebraica, razón geométrica y propiedad física. A pesar de que existía la posibilidad de no saber cómo calcular la pendiente, lo que importó más es qué hacían ante el requerimiento, qué nociones mencionaban y cuáles ponían en juego, de acuerdo con el conocimiento de cada uno.

La validación se realizó con 5 estudiantes de 9.º y 5 de 10.º, lo que permitió la reformulación de 2 tareas y así garantizar su asequibilidad. Esta fase permitió identificar que el hecho de no haber estudiado el concepto no fue obstáculo para realizar las tareas y poner en juego sus nociones sobre el concepto.

Análisis de datos

Las entrevistas fueron videograbadas (con autorización de los estudiantes), se realizaron en la oficina del profesor y en el auditorio de la escuela. Para su respectivo análisis, se transcribieron y escanearon las hojas de trabajo de los estudiantes, empleándose así el análisis temático sugerido por Braun y Clarke (2012) y la triangulación de investigadores para proporcionar confiabilidad, validez, credibilidad y rigor.

La triangulación es un procedimiento heurístico diseñado para documentar información de acuerdo con diferentes puntos de vista, lo que aumenta la calidad y la validez de los datos, ya que se elimina el sesgo de un solo investigador (Arias, 2000).

El objetivo del análisis temático es identificar, organizar y sistematizar patrones de significados (temas) utilizando un conjunto de datos para dar respuestas a la pregunta de investigación. De acuerdo con Braun y Clarke (2012), un tema capta algo importante de los datos en relación con la pregunta de investigación y representa algún nivel de respuesta o significado modelado dentro del grupo de datos. Estos patrones se identifican a través de un riguroso proceso de familiarización y codificación de datos, así como de desarrollo y revisión de temas. Este método se estructura en 5 fases, en las primeras 4, los investigadores (con diferente nivel de experiencia) analizaron los datos de forma independiente. Para concretar la fase 4, los investigadores se reunieron, compararon y discutieron sus resultados. En caso de desacuerdo, los datos se analizaron conjuntamente en sesiones de trabajo específicas; este proceso eventualmente condujo a un consenso de opinión y la formación de conclusiones para la fase 5 del análisis. A continuación, se describe cada fase.

Fase 1. *Familiarización con los datos*. Consiste en leer repetidamente las transcripciones de las entrevistas a fin de familiarizarse con los datos y el lenguaje de los participantes.

Fase 2. *Generación de códigos iniciales*. Se buscaron palabras o frases empleadas por los estudiantes para referirse a la pendiente en sus procedimientos y justificaciones. Por ejemplo, en el extracto de E9 se puede ver en letras cursivas las frases que permitieron establecer dos códigos iniciales: la pendiente como la inclinación y la pendiente como el valor de *m*.

I: La entrada a una cafetería tiene dos accesos: una escalera y una rampa. ¿Qué acceso tiene mayor pendiente?
E9: bueno, *la pendiente es la inclinación*, entonces aquí es la rampa.
I: ¿por qué?
E9: porque su inclinación es mayor
I: ¿A qué te refieres con inclinación?
E9: que está como más acostadita, para mí entre más horizontal más inclinación, o sea entre más vaya bajando más inclinación tiene [mueve el brazo simulando el movimiento], aunque bueno, también se podría hacer con el plano cartesiano sacando los valores de *m* y *b*, de ahí *sacas la pendiente que es m*, pero no tengo esos datos.

En esta fase se identificaron 70 códigos iniciales asociados a las ideas que mencionaron los estudiantes acerca de la pendiente al resolver las tareas. Cabe señalar que en algunas tareas hicieron referencia a más de dos ideas, las cuales orillaron a diferente codificación a pesar de que sólo utilizaran una de ellas para resolver la tarea, y eso es lo que importaba, conocer todas las ideas que ponían en juego en la resolución, tal como se aprecia en el extracto anterior. Entre los códigos iniciales se tiene: «La pendiente es una línea inclinada», «La pendiente es la distancia», «La pendiente es la inclinación», «La pendiente es la posición de la línea respecto de », «*m* es la pendiente» y otros.

Fase 3. *Búsqueda de temas*. Se compararon los códigos iniciales a fin de agrupar aquellos que tenían un patrón de respuesta, es decir, aquellos que compartían significado y así agruparlos en un tema. En términos de este estudio, *un tema es una preconcepción*. Por ejemplo, de los códigos: la pendiente es la medida de la altura, la pendiente es la medida de la hipotenusa, la pendiente es la medida de la diagonal; se construyó el tema «La pendiente como la longitud del segmento de recta» (véase en la sección de resultados).

Fase 4. *Revisión de temas*. Se realizó la correspondencia entre los temas identificados en la fase 3 y los datos, con el propósito de encontrar patrones y crear descripciones de las nociones o ideas sobre la pendiente. Como resultado, en esta fase se concretaron los temas (preconcepciones). Por ejemplo, se tenía el tema «la pendiente como la recta», en el que se encontraban los códigos «la pendiente es la línea diagonal» y «la pendiente es la hipotenusa»; y el tema «la pendiente como una subida o bajada» cuyos códigos hacen referencia a «la pendiente es una subida o una bajada» y «la pendiente es como un terreno que se ve como una bajada»; sin embargo, al analizarlos se identificó que hablaban de la pendiente como un ente o un objeto, lo cual permitió construir el tema «la pendiente como un objeto», desprendiendo dos subtemas. En esta fase se reunieron los investigadores hasta llegar a un consenso sobre los temas finales.

Fase 5. *Definiendo y nombrando los temas*. Los temas se definieron y son correspondientes con las preconcepciones identificadas (véase tabla 1).

RESULTADOS

Del análisis y triangulación, se identificaron 7 preconcepciones de pendiente en los estudiantes de 10.º grado de la Educación Secundaria. En la tabla 1 se describe cada una junto con los subtemas identificados y su respectiva frecuencia (representa el número de menciones que tuvieron en toda la entrevista). La entrevista reveló que la mayoría de los participantes tuvo dificultades para describir o hablar de la pendiente en términos matemáticos, ya que no encontraban los términos para comunicar sus ideas, llevándolos a emplear sus manos para comunicarse y representarlas. Los estudiantes que declararon haber tenido una experiencia escolar con el concepto mostraron tener varias ideas asociadas a la pendiente, algunas difusas y otras cercanas al concepto matemático. Por ejemplo, para ellos, el ángulo es el espacio que hay de la recta con respecto de la horizontal o el número con grados; inclinación, es la posición de la recta con respecto de la horizontal o vertical o el ángulo; la diagonal es una línea inclinada.

Tabla 1.
Preconcepciones de pendiente

Preconcepciones La pendiente…	*Descripción*	*Subtemas*	*Frecuencia*
Como longitud de un segmento de recta	Se refiere a la distancia entre dos puntos.	La pendiente es la medida de la recta.	89
		La pendiente es el valor de la altura.	7
		La pendiente es el valor de la base.	6
Como objeto	En el contexto matemático se refiere a la recta, en situaciones cotidianas a la parte inclinada de una superficie o de un objeto en la que pueda visualizarse una elevación.	La pendiente es la recta.	43
		La pendiente es una subida o bajada.	10

Preconcepciones La pendiente…	*Descripción*	*Subtemas*	*Frecuencia*
Como propiedad física	Se refiere a una característica de una recta o a un atributo de un objeto que da lugar a una variación inversa.	La pendiente es la inclinación o posición de la recta con respecto a la horizontal o vertical.	35
		La pendiente como la inclinación atribuida al valor de la intersección en *y*.	7
		La pendiente como atributo de la rampa (o escalera) que da lugar a una relación de a menor esfuerzo mayor tiempo (o viceversa).	3
Como valor del ángulo	Se refiere al valor del ángulo de inclinación de la recta dada, de la escalera o de la rampa.		25
Como intersección de la recta con los ejes.	Se refiere al valor de la abscisa u ordenada al origen por donde pasa el segmento de recta.		22
Asociada a una expresión algebraica	Se refiere a una ecuación o al valor de algún elemento que pertenece a la ecuación de la recta.	La pendiente es el valor de m en $y=mx+b$.	7
		La pendiente es la ecuación.	6
		La pendiente es el valor de b en $y=mx+b$.	2
		La pendiente es la incógnita	2
Como el cociente de los valores de las intersecciones en el eje x e y.	Se refiere a calcular la pendiente como el cociente de la abscisa al origen y ordenada al origen de manera indistinta.		4

La pendiente como longitud de un segmento de recta

Esta preconcepción se refiere a considerar la pendiente como la distancia entre dos puntos extremos, es decir, la longitud de la recta o segmento de recta. Es utilizada por el 93 % de los estudiantes; cada uno la mencionó con diferente frecuencia. Esta se manifestó en las tareas que requerían el cálculo de la pendiente de una recta dada en el plano cartesiano (tareas 3, 4, 7 y 9) y el cálculo y/o comparación de la pendiente de una rampa y de una escalera (tareas 1 y 5). Los participantes que tienen esta preconcepción consideraron diferentes longitudes asociadas a la pendiente, las cuales se describen a continuación.

La pendiente es la medida de la recta

Esta idea fue la de mayor frecuencia (89 veces) y se caracterizó como aquella en la que los estudiantes manifestaron que la pendiente es la medida de la recta dada en el plano cartesiano, mientras que cuando se dio una rampa o una escalera es la longitud de la rampa o la zanca. Para obtener la longitud utilizan el teorema de Pitágoras, ya que visualizando un triángulo rectángulo la equiparán con la hipotenusa; miden la recta con una regla omitiendo el plano cartesiano (véase figura 1) y/o consideran que la medida de la recta es la proyección de la recta en el eje x o el eje y, tal cómo se muestra en el extracto de estudiante E14.

I: ¿Cuál es la pendiente de la recta ?
E14: Bueno, aquí es uno, dos, tres y aquí uno [cuenta las particiones en el eje *y* positivo y negativo], entonces sería nueve lo que mediría toda la recta, porque ocho más uno, son nueve.
I: ok, pero ahí me estás dando lo que mediría esto [señala el eje *y*] y nos están pidiendo la pendiente de la recta .
E14: sí, pero eso es lo mismo que mediría la recta.
I: ¿por qué consideras eso?
E14: porque si movemos la recta de manera que coincida con el eje *y*, entonces este punto [señala el extremo derecho] cae en ocho si tomamos que cada rayita vale uno [señala las particiones que se dan], y el otro punto llega a menos uno [señala el extremo izquierdo] pero como son distancias entonces es uno. Entonces, si sumamos las distancias nos da nueve, y como ya lo dije anteriormente que la pendiente es la distancia de un punto a otro, entonces nueve es la pendiente.

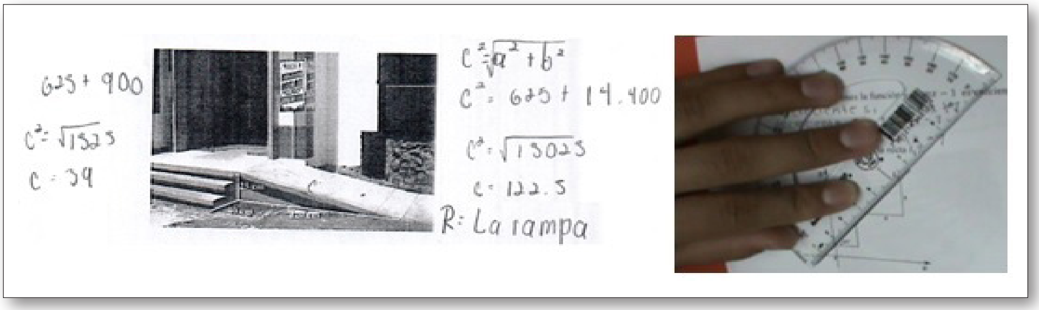


Fig. 1. Procedimientos para obtener la longitud del segmento de recta.

El 20 % de los estudiantes consideran solo el segmento que se encuentra por encima del eje *x*, porque el segmento que se ubica por debajo del eje *x* daría distancias negativas, y esto para ellos no existe o no tiene sentido.

La pendiente es el valor de la altura

Se mencionó principalmente en las tareas que pedían el cálculo de la pendiente de una recta dada en el plano cartesiano (7 veces). Esta se refiere a considerar la longitud del segmento que baja desde su extremo derecho y es perpendicular al eje *x*. De este modo, atribuyen a la pendiente el valor de la máxima ordenada, tal como se aprecia en el extracto de la entrevista y en la producción de E7 (véase figura 2).

I: ¿Cómo son entre sí las pendientes de la recta l_1 y l_2?
E7: son diferentes, porque sus distancias son diferentes.
I: ¿a qué distancias te refieres?
E7: esta [señala el extremo derecho de l_2] está más alta que la de l_1, tiene una altura más alta.
I: y ¿cuál es su pendiente?
E7: está [traza líneas punteadas, véase figura 2], el número que este aquí [traza líneas punteadas hacia el eje *y* y señala la ordenada al origen]. […][1]

1. Denota la existencia de más discurso en la entrevista.

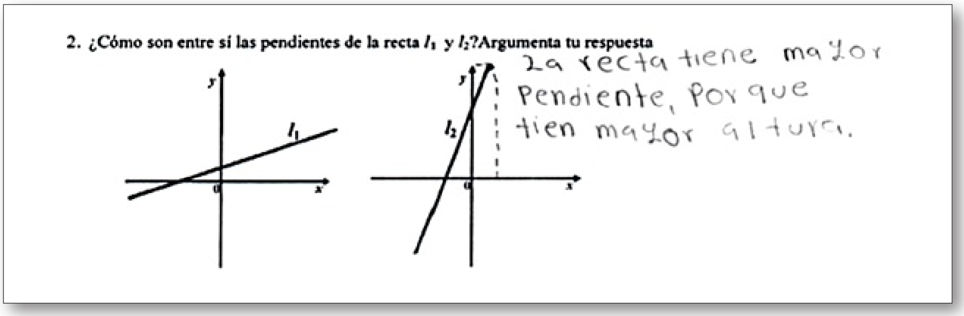


Fig. 2. Producción de E7 en la tarea 2.

La pendiente es el valor de la base

En este subtema, los estudiantes parten de visualizar un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el segmento de recta dado (véase figura 3) y la medida de la base es la pendiente. Por tanto, fue natural para ellos asociar a la pendiente el valor de la abscisa del extremo derecho del segmento. Para la escalera, la pendiente fue asociada a la longitud horizontal que se forma al unir las huellas de todos los escalones omitiendo así la medida de la contrahuella.

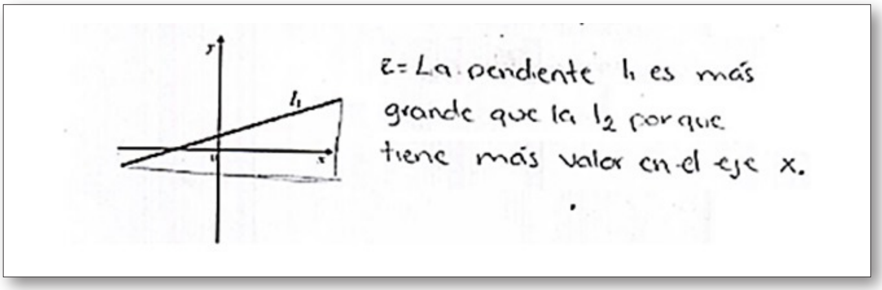


Fig. 3. Justificación escrita de E30 para la tarea 2.

La pendiente como un objeto

Esta preconcepción se refiere a considerar la pendiente como la recta o segmento de recta, así como la parte inclinada de una superficie o de un objeto en el que se visualice una elevación. Se manifestó en el 66 % de los estudiantes y se identificó en dos contextos, en matemáticas y en la vida cotidiana, pero en ambas hacen referencia en sí al ente, ya que entre sus justificaciones figuró el de «las pendientes son de esta forma», tal como se describe a continuación.

La pendiente es la recta

Esta idea se manifestó 43 veces y se identificó cuando se hizo referencia a la pendiente como la recta que se da en el plano cartesiano, en términos de «es la línea inclinada», «es una diagonal» y «es la recta», principalmente al preguntar sobre qué es la pendiente (44 % de los estudiantes). En las tareas, omitieron la información que se dio en estas y solo señalaron el objeto, tal como se observa en la figura 4. Asimismo, el 33 % de los estudiantes que declararon no haber trabajado el tema expresaron que lo que se le venía a la mente cuando escuchaban la palabra «pendiente» es una línea inclinada (véase figura 4). Para corroborar la idea, se les preguntó si se referían a la recta o la forma en que estaba inclinada la recta u otros rasgos característicos y estos afirmaron que la pendiente es la recta, que lo otro es su inclinación.

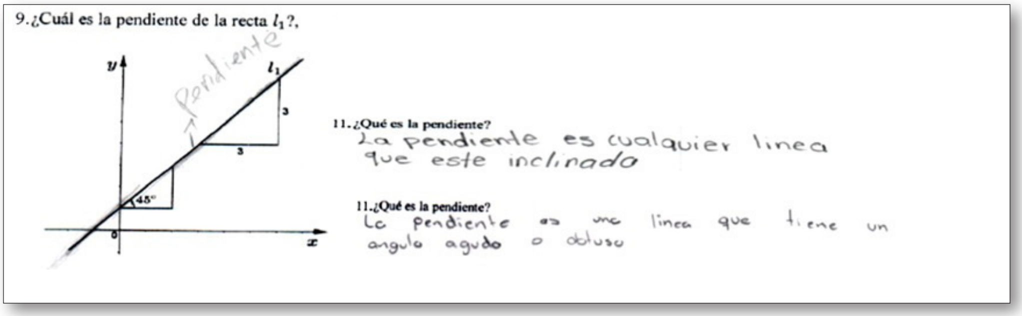


Fig. 4. Ejemplos de la pendiente como la recta.

La pendiente es una subida o una bajada

Esta idea es cercana a experiencias de su vida cotidiana, como es su interacción con el recorrido de calles y carreteras. Se caracteriza por considerar la pendiente como una subida o una bajada, es decir, un sendero o lugar con declive, por lo que dieron el argumento de que la calle que sirve para subir o bajar se le llama pendiente. También, identifican a la pendiente como la rampa para las sillas de ruedas, tal como se muestra en la figura 5.

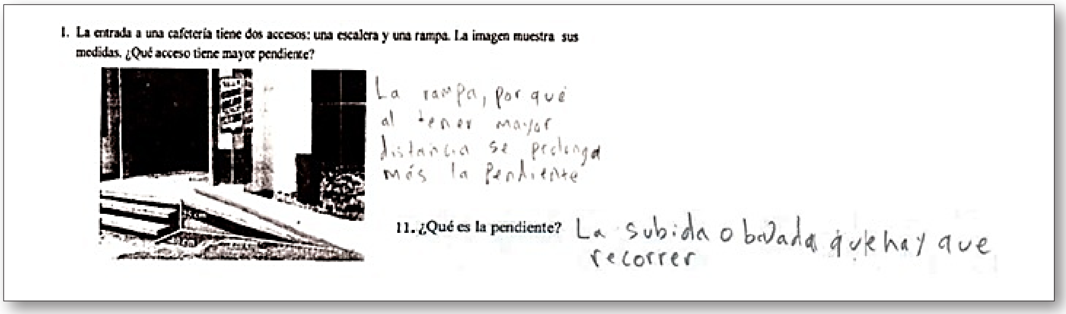


Fig. 5. Ejemplos de la pendiente como la subida o bajada.

La pendiente como propiedad física

Esta preconcepción se caracteriza al referirla como una característica de la recta o un atributo que ofrece a los objetos dando lugar a una variación inversa. En la primera, se refieren a la inclinación y la determinan a partir de la posición de la recta con respecto de la horizontal o vertical; y del valor de la intersección que tiene la recta con el eje *y* en el plano cartesiano. Mientras que, en la segunda, se refieren a que la pendiente ayuda a que, en un objeto, en este caso la rampa (o escalera), se pueda recorrer empleando un menor (o mayor) esfuerzo, pero con un mayor (o menor) tiempo. A continuación, se describen los subtemas.

La pendiente es la posición de la recta con respecto a la horizontal o vertical

En esta se hace referencia a la pendiente en términos de la posición que tiene la recta respecto de la horizontal (30 veces) o de la vertical (5 veces). El 23 % de los estudiantes definen la pendiente como la inclinación de la recta, entendiéndola como la posición. Cabe mencionar que el 20 % considera que una recta tiene más pendiente si se encuentra más cerca de la horizontal, tal como se muestra en el extracto de E6.

I: ¿Cómo son entre sí las pendientes de la recta l_1 y l_2?
E6: pues tendría mayor pendiente esta [señala la recta l_1], porque entre más acostada esté, va a ser más grande su pendiente.
I: entonces, ¿cuál sería la pendiente?
E6: la inclinación
I: ¿y qué es la inclinación?
E6: la pendiente
I: entonces ¿pendiente e inclinación es lo mismo?
E6: sí, algunos le llaman pendiente y otros le llaman inclinación, pero en sí se refiere a qué tan cerca o lejos está del eje *x*, o sea como su posición. […]

La pendiente como la inclinación atribuida a la intersección con el eje y

Se manifestó al comparar las pendientes de dos rectas (7 veces) y se entiende como la inclinación, pero atribuida a la intersección que tienen las rectas con el eje *y*, tal como se muestra en parte del extracto de la entrevista de E15.

[…]
E15: la recta l_2 tiene mayor pendiente, porque está más inclinada.
I: ¿cómo sabes que está más inclinada?
E15: porque, por ejemplo, suponiendo que aquí tenemos uno, dos, tres [Da graduación a los ejes de ambos planos cartesianos, véase figura 6], entonces como podemos ver, la recta l_1 pasaría por el punto uno, y de la recta l_2 su inclinación está hasta el número cuatro, entonces eso también me demuestra que la pendiente es mayor.
I: ¿por el corte con el eje *y*?
E15: sí, eso nos demuestra cual tiene mayor pendiente en el plano cartesiano.

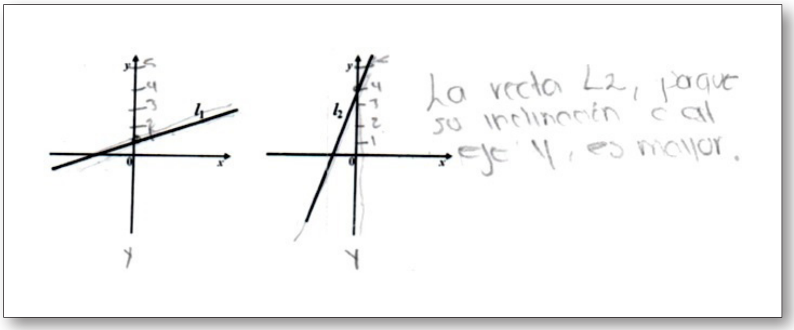


Fig. 6. Producción de E15 en la tarea 2

La pendiente como atributo de la rampa (o escalera) que da lugar a una relación de a menor esfuerzo mayor tiempo (o viceversa)

Esta idea se evidenció en la tarea 1. El 10 % de los estudiantes identifica la pendiente como un atributo necesario para las rampas, de manera que esta se recorre con un menor esfuerzo, pero con mayor tiempo, al contrario que usar las escaleras. Por ello, se considera que esta idea genera una variación inversa entre fuerza y tiempo, tal como se muestra en el extracto de E1.

[…]
E1: la rampa tiene mayor pendiente, porque puedes recorrerla más fácil, pero es más tardado, en las escaleras subes rápido, pero haces más esfuerzo.
I: cuando escuchaste la pendiente, ¿qué vino a tu mente?
E1: su forma, o sea como lo que le da facilidad… tiene que ver como el esfuerzo que haces y el tiempo que te lleva.
I: ¿y eso tendrá que ver con la pendiente?
E1: sí, es importante que la tengan para que se haga menos esfuerzo, de hecho, por eso se inventaron las rampas, porque las escaleras siempre están más paraditas y hace uno más esfuerzo, menos tiempo, pero más esfuerzo.

La pendiente como valor del ángulo

La pendiente se considera como el valor del ángulo de inclinación de la recta, de la rampa o las escaleras. El 40 % de los estudiantes mencionó más esta preconcepción en las tareas 3 y 9, seguida de la 5 y en el resto más esporádicamente (véase figura 7). El 20 % del 40 % dice explícitamente que la pendiente es el ángulo, mientras que el otro 20 % argumenta que el valor de la pendiente es el valor del ángulo porque esa es su inclinación, tal como se muestra en el extracto de la entrevista a E12 al realizar la tarea 3.

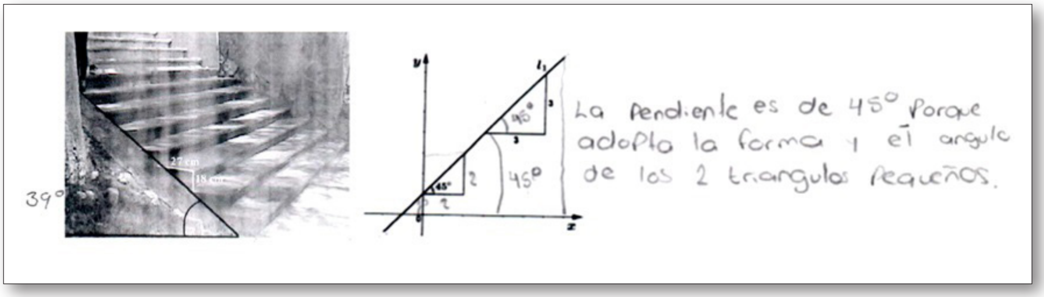


Fig. 7. Ejemplo de la pendiente como el ángulo.

I: Dadas las rectas , , y , ¿en cuál o cuáles es posible calcular la pendiente?
E12: en la tres y cuatro, porque la pendiente es el ángulo que es lo mismo de su inclinación. Y en estas [señala la recta l_1 y l_2] no, porque no tienen una base.
I: […] ¿De qué te ayudaría la base para poder calcularla?
E12: porque con esa se puede medir el ángulo, que es lo que te piden.
I: Pero te piden la pendiente.
E12: si, pero es lo mismo que su ángulo, porque su inclinación es el ángulo.

La pendiente como intersección en los ejes

Esta preconcepción se refiere a considerarla como el punto de corte entre la recta dada y alguno de los ejes (*x* o *y*). El 33 % de los estudiantes la mencionó en al menos una tarea, asignando la ordenada al origen o la abscisa al origen como el valor de la pendiente. Cabe mencionar que el 27 % manifestó que la recta debe intersecarse con el eje *x* o el eje *y* para obtener la pendiente, en caso contrario no es posible calcularla. Como ejemplo se muestran las producciones del estudiante E2 al resolver la tarea 7 y 9 (véase figura 8) y en la entrevista declaró que la pendiente es «el punto donde se cruza la recta con el eje *y* o *x*».

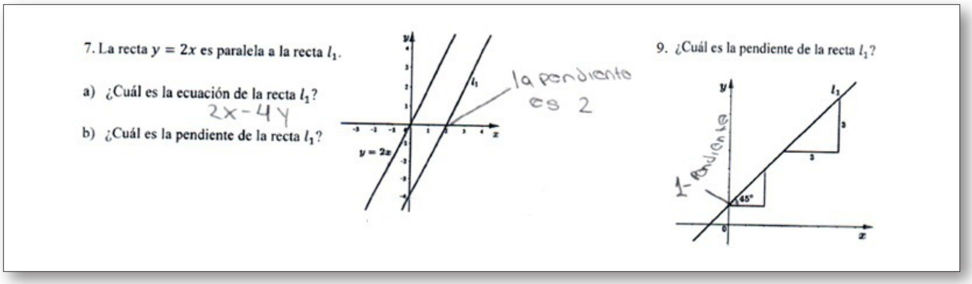


Fig. 8. Producciones de E2 en la tarea 7 y tarea 9.

La pendiente asociada a una expresión algebraica

Esta preconcepción incluye ideas de la pendiente como la ecuación o el valor de algún elemento de la ecuación de la recta $y = mx+b$, como son *m, x* o *b*. Esta se manifestó en algunos estudiantes que declararon un trabajo preliminar del concepto en sus estudios previos.

La pendiente es el valor de m en la ecuación $y = mx+b$

El 7 % de los estudiantes reconoce el valor de *m* como la pendiente en la ecuación de la recta $y = mx+b$, tal como se aprecia en el extracto de E9.

I: La entrada a una cafetería tiene dos accesos: una escalera y una rampa. La imagen muestra sus medidas. ¿Qué acceso tiene mayor pendiente?

[…]

I: ¿conoces otra forma para conocer cuál tiene mayor pendiente?

E9: bueno, también se podría hacer con el plano cartesiano sacando lo de m y b, de ahí sacas la pendiente.

I: ¿Me podrías mostrar cómo se hace eso?

E9: haces un plano cartesiano, sacas m y b, pero aquí no tengo esos datos. Sólo sé que *m* es la pendiente.

I: ¿y no los podrías obtener de los datos que te dan ahí?

E9: es que no sé cómo se hace, no me lo han enseñado… me acuerdo que nos daban lo de m y b en una ecuación así [escribe y de ahí sacábamos la pendiente.

E13 plantea la expresión y a partir de esta deduce el valor de la pendiente, tal como se observa en sus producciones (figura 9).

Fig. 9. Producciones de E13 en la tarea 5.

La pendiente es la ecuación

En este subtema los estudiantes asocian la ecuación de la recta con la pendiente. Esta se usó por el 17 % de los estudiantes principalmente en las tareas 4, 7 y 11. E1 declaró que, en matemáticas la pendiente es la ecuación, tal como se muestra en el extracto.

I: Con tus palabras, me puedes decir qué es la pendiente
E1: si, [Escribe en la hoja, la pendiente en la matemática es cuando tenemos que buscar una fórmula de una línea recta] eso es, en mi opinión.
I: ¿qué quieres decir con eso?
E1: que la pendiente es buscar una fórmula para que nos dé una línea.
I: ¿has escuchado hablar de la ecuación de la recta?
E1: si, pues es la fórmula que buscamos.
I: entonces ¿la pendiente es la ecuación de la recta?
E1: en matemáticas sí.
I: ¿y cuando no es en matemáticas?
E1: es que depende, puede ser un ángulo o una subida o bajada. […]

Otros argumentos que hacen referencia a esta idea son: «la pendiente es una medida expresada en una ecuación, por eso la ecuación es la pendiente», «la pendiente es esta ecuación». Por tanto, en sus respuestas dan expresiones como $y = 2x$, $y = x–2$, entre otras.

La pendiente es el valor de b en la ecuación $y = mx+b$

Esta idea se evidenció en el 7 % de los estudiantes y se identificó en los argumentos «la pendiente es el valor de b en la ecuación $y = mx+b$» y «*la pendiente es el término independiente de la ecuación de la recta*». Esta idea se diferenció de la preconcepción de la pendiente como la intersección de los ejes porque en aquella los estudiantes hablaban específicamente del punto de corte, mientras que aquí se refieren específicamente al valor de *b* en la expresión algebraica sin relacionar el papel de *b* con el corte en la gráfica en el eje *y*. Esto se puede apreciar en el extracto de la entrevista de E11 en la tarea 4.

I: […] ¿qué pendiente tiene l_1?
E11: según la ecuación es cuatro, porque este número siempre va a ser la pendiente [señala el término independiente], ahora en el problema se transforma en ele dos entonces va a cambiar la pendiente.
I: ¿cuál es la pendiente de l_2?
E11: necesito una ecuación como esta [señala la ecuación dada], y ahí ver el valor va a tener este número [señala el término independiente de la ecuación] pero no sé cómo se saca.

La pendiente como incógnita

Esta idea se manifestó al definir el concepto. Para E5 es «una medida que está representada por una ecuación y que al resolverse se obtiene la pendiente, en otras palabras, es un valor desconocido» y para E27 «como el valor que falta en una ecuación y que será la solución de un problema». En ambas ideas se puede apreciar que para calcular la pendiente consideran necesario partir de una ecuación, dónde el valor de la incógnita es la pendiente.

La pendiente como el cociente de los valores de las intersecciones en el eje *x* e *y*

Esta preconcepción sobre el cálculo de la pendiente se empleó en 3 tareas por E13. Por ejemplo, en la tarea 3 usa el cociente de las intersecciones en los ejes a partir de una gráfica de manera indistinta, es decir sin importar el orden, tal como se observa en la figura 10.

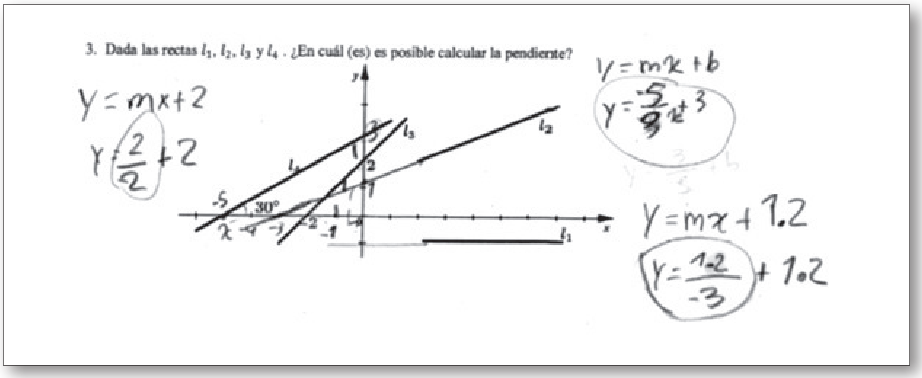


Fig. 10. La pendiente como el cociente de las intersecciones.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El análisis de los datos revela que los estudiantes que aún no han trabajado el concepto de pendiente en la educación secundaria tienen diversas ideas sobre el concepto de pendiente, las cuales parecen ser más provenientes de su experiencia con el término en la vida cotidiana que con su experiencia escolar. Este resultado era el esperado, ya que los participantes no lo han trabajado formalmente. De ahí que las preconcepciones que manifiestan son la pendiente como la longitud de un segmento, un objeto, una propiedad física, el valor del ángulo, la intersección de la recta con los ejes, asociada a una expresión algebraica, y como el cociente de los valores de las intersecciones en el eje *x* e *y*; todas con diferente frecuencia, tal como se muestra en la figura 11.

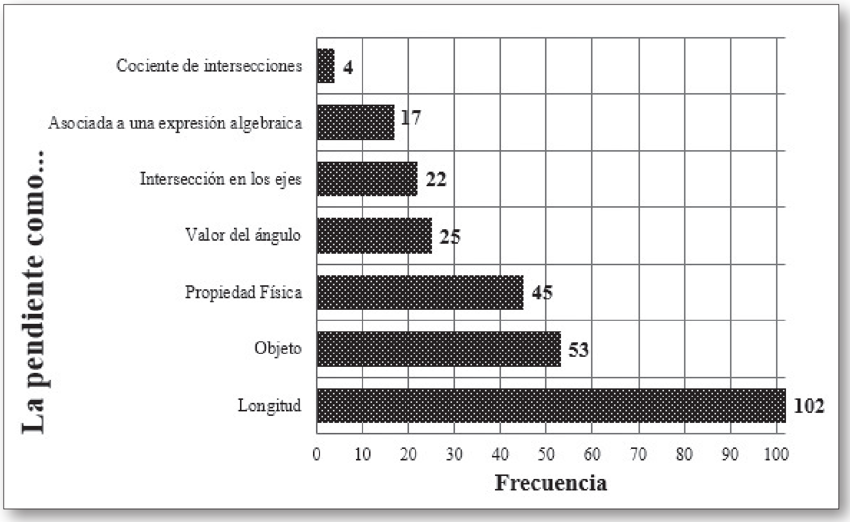


Fig. 11. Frecuencia de cada preconcepción de pendiente

La preconcepción *la pendiente asociada a una expresión algebraica* con sus respectivos subtemas es producto de al menos el 10 % de los estudiantes que al ir resolviendo las tareas comenzaron a poner en juego las nociones sobre el concepto que posiblemente trabajaron en su educación previa. El subtema «la pendiente es el valor de m en la ecuación $y=mx+b$» de esta preconcepción y «la pendiente es la inclinación de la recta» de la preconcepción *la pendiente como una propiedad física*, son correspondientes a dos formas de conceptualizarla (coeficiente paramétrico y propiedad física, respectivamente) que Stump (1999) y Moore-Russo et al. (2011) identificaron en profesores de educación media y universitaria. El resto de los subtemas de la preconcepción *la pendiente asociada a una expresión algebraica* parecen ser ideas difusas como consecuencia de una memorización, ya que toman el valor de x, b o toda la ecuación como la pendiente, inferencia también deducida por Birgin (2012) en estudiantes de 8.º grado al tomar diferentes elementos de la ecuación de la recta como la pendiente.

La preconcepción *la pendiente como la longitud del segmento de recta* se destacó en los procedimientos y argumentos del 97 % de los estudiantes. Sin embargo, esta idea también se encuentra como concepción alternativa en profesores de educación secundaria, tal como lo reporta Byerley y Thompson (2017), quienes definían la pendiente como la distancia entre dos puntos. En el contexto mexicano, el término «pendiente» en la vida cotidiana es utilizado para hacer referencia a declives, cuestas, calles o carreteras empinadas, entre otros. Por ello, es entendible que los estudiantes manifestaran la preconcepción de *la pendiente como objeto*, considerando a la recta como la pendiente. Cabe mencionar que el 40 % del 97 % de los estudiantes que consideran la pendiente como la longitud partieron de la idea de la pendiente como la recta y por tanto al pedir su valor fue natural dar su longitud.

En el subtema «la pendiente como el valor de la altura» se identificó que asignan como pendiente el valor de la máxima ordenada. Este resultado ha sido reportado como concepción alternativa en estudiantes que han trabajado el concepto formalmente por Dolores, Alarcón y Albarrán (2002), Beichner (1994) y McDermott, Rosenquist y Van Zee (1987) al trabajar con la pendiente y la velocidad, e incluso por Billings y Klanderman (2000) en futuros profesores. Cabe mencionar que el 23 % de los estudiantes relaciona la pendiente y la velocidad solo porque los datos de las distancias y el tiempo permiten graficar la recta (para ellos, la pendiente), lo cual evidencia escaso conocimiento de la velocidad como una razón de cambio. El resto mencionó que son cosas diferentes porque son de diferentes áreas, resultado similar a lo reportado por Dolores et al. (2019) en estudiantes preuniversitarios que ya han cursado cálculo. De manera análoga, en la tarea que involucró un acercamiento a la razón de cambio constante a través de la constante de proporcionalidad, el estudiante relacionó con la pendiente solo si se le pide graficar.

La idea de «la pendiente como la inclinación de la recta» se refiere más a la posición que tiene una recta respecto a la horizontal en lugar de mirar la pendiente como la medida de esa inclinación de la recta (Lobato y Thanheiser, 2002); más aún es nula una percepción de una relación entre dos cambios, es decir de la manipulación de una distancia horizontal y una distancia vertical. En este estudio, atribuyen la posición solo a la distancia vertical. Asimismo, se hace referencia a la pendiente como el ángulo de inclinación, definición que de acuerdo con Agudelo-Valderrama y Martínez (2016) es un uso coloquial que se le da a este término.

El uso de la pendiente para hablar de función creciente o decreciente es nulo, ya que los términos tienen un significado coloquial, entre estos: creciente cuando algo sube y decreciente cuando algo baja, lo cual identifican fácilmente en una gráfica. Mientras que, dada su expresión algebraica, el 60 % lo atribuye al término independiente de la expresión , es decir b indica el comportamiento de la función. De manera similar Moschkovich (1990) y Birgin (2012) lo encuentran en estudiantes de 8.º grado, ya que confunden el papel que juega m y b en la ecuación de la recta de la forma y lo que representan en el plano cartesiano.

Algunos resultados de este estudio que coinciden con las concepciones alternativas reportadas nos hacen suponer que probablemente son preconcepciones arraigadas que han adquirido un cierto grado de coherencia por las experiencias que han tenido con el concepto en su vida cotidiana. Por ello, es importante que estas nociones sean conocidas por los profesores de los diversos niveles educativos, así como los de capacitación a profesores, ya que estas podrían afectar al aprendizaje matemático posterior de los estudiantes (Birgin, 2012). Según Biemans y Simons (1995) el ser consciente de estas y abordarlas en la instrucción puede ayudarlos a reorganizar su estructura de conocimiento y posiblemente corregirlas, evitando así la formación de concepciones alternativas. Por esta razón, futuras investigaciones deben centrarse en desarrollar estrategias de enseñanza que posibiliten a los estudiantes trascender estas preconcepciones hacia un conocimiento aceptable.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abouchedid, K. y Nasser, R. (2000). *The role of presentation and response format in understanding, preconceptions and alternative concepts in algebra problems*. Obtenido de https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED438174.pdf>

Agudelo-Valderrama, C. y Martínez, D. (2016). In pursuit of a connected way of knowing: The case of one mathematics teacher. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(4), 719-737.

Arias, M. (2000). Triangulación metodológica: sus principios, alcances y limitaciones. *Investigación y Educación en Enfermería*, *18*(1), 13-26.

Ausubel, D. (1978). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognitivo*. México: Trillas.

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. y Green, D. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 151-169.

Behar, R. y Ojeda, M. (2000). El proceso de aprendizaje de la estadística: ¿Qué puede estar fallando? *Heurística*, *10*(1), 26-43.

Beichner, R. J. (1994). Testing student interpretation of kinematics graphs. *American Journal of Physics*, *62*(8), 750-762.

Biemans, H. y Simons, P. (1995). How to use preconceptions? The contact strategy dismantled. *European Journal of Psychology of Education*, *10*(3), 243-259.

Billings, E. y Klanderman, D. (2000). Graphical representations of speed: obstacles preservice K-8 teachers experience. *School Science and Mathematics*, *100*(8), 440-450.

Birgin, O. (2012). Investigation of eighth-grade students' understanding of the slope of the linear function. *Bolema*, *26*(42a), 139-162. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000100008

Braun, V. y Clarke, V. (2012). Thematic analysis. En H. Cooper (Ed.), *Handbook of research methods in psychology* (pp. 57-71). Washington (DC): American Psychological Association.

Bretones, A. (2003). Las preconcepciones del estudiante de profesorado: de la construcción y transmisión del conocimiento a la participación en el aula. *Educar*, *32*(1), 25-54.

Bush, S. y Karp, K. (2013). Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: A review. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 613-632. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.07.002

Byerley, C. y Thompson, P. (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior*, *48*(1), 168-193. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.003

Campanario, J. y Otero, J. (2000). Más allá de las ideas previas como dificultades de aprendizaje: las pautas de pensamiento, las concepciones epistemológicas y las estrategias metacognitivas de los alumnos de Ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, *18*(2), 155-169.

Casey, S. y Nagle, C. (2016). Students' use of slope conceptualizations when reasoning about the line of best fit. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(2), 163-177. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9679-y

Cho, P. y Nagle, C. (2017). Procedural and conceptual difficulties with slope: An analysis of students' mistakes on routine tasks. *International Journal of Research in Education and Science*, *3*(1), 135-150.

Confrey, J. (1990). Chapter 1: A review of the research on student conceptions in mathematics, science and programming. *Review of Research in Education*, *16*(1), 3-56.

Dolores, C., Alarcón, G. y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *RELIME*, *5*(3), 225-250.

Dolores, C., García, J. y Gálvez, A. (2017). Estabilidad y cambio conceptual acerca de las razones de cambio en situación escolar. *Educación Matemática*, *29*(2), 125-158. https://doi.org/10.24844/em2902.05

Dolores, C., Rivera, M. I. y García, J. (2019). Exploring mathematical connections of pre-university students through tasks involving rates of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(3), 369-389. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1507050

Dolores, C., Rivera, M. I. y Moore-Russo, D. (2020). Conceptualizations of slope in Mexican intended curriculum. *School Science and Mathematics*, *120*(2), 104-115. https://doi.org/10.1111/ssm.12389

Dündar, S. (2015). Knowledge of mathematics teacher-candidates about the concept of slope. *Journal of Theory and Practice in Education*, *11*(2), 673-693.

Goldin, G. (1997). Chapter 4: Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *9*, 40-177.

Hoffman, W. (2015). *Concept image of slope: Understanding middle school mathematics teachers' perspective through task-based interviews* (tesis doctoral). The University Of North Carolina At Charlotte.

Kambouri, M. (2016). Investigating early years teachers' understanding and response to children's preconceptions. *European Early Childhood Education Research Journal*, *24*(6), 907-927. https://doi.org/10.1080/1350293X.2014.970857

Kambouri, M., Briggs, M. y Cassidy, M. (2011). Children's misconceptions and the teaching of early years science: A case study. *Journal of Emergent Science*, *2*(2), 7-16.

Koichu, B. y Harel, G. (2007). Triadic interaction in clinical task-based interviews with mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(3), 349-365.

Korpershoek, H., Kuyper, H., Bosker, R. y Van der Werf, G. (2013). Students' preconceptions and perceptions of science-oriented studies. *International Journal of Science Education*, *35*(14), 2356-2375. https://doi.org/10.1080/09500693.2012.679324

Lobato, J. y Thanheiser, E. (2002). Developing understanding of ratio-as-measure as a foundation for slope. En B. Litwiller y G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 162-175). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mahmud, M. y Gutiérrez, O. (2010). Estrategia de enseñanza basada en el cambio conceptual para la transformación de ideas previas en el aprendizaje de las ciencias. *Formación Universitaria*, *3*(1), 11-20. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062010000100003

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *The Journal of Mathematical Behavior*, *3*, 93-166.

McDermott, L., Rosenquist, M. y Van Zee, E. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. *American Journal of Physics*, *55*(6), 503-513.

Mhlolo, M. y Schafer, M. (2013). Consistencies far beyond chance: an analysis of learner preconceptions of reflective symmetry. *South African Journal of Education*, *33*(2), 1-17. http://dx.doi.org/10.15700/saje.v33n2a686

Moore-Russo, D., Conner, A. y Rugg, K. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(1), 3-21. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9277-y

Moschkovich, J. (1990). Students' interpretations of linear equations and their graphs. En G. Booker, P. Cobb y T. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 109-116). México: PME-NA.

Mudaly, V. y Moore-Russo, D. (2011). South African teachers' conceptualisations of gradient: A study of historically disadvantaged teachers in an Advanced Certificate in Education programmed. *Pythagoras*, *32*(1), 27-33.

Nagle, C. y Moore-Russo, D. (2014). Slope across the curriculum: Principles and standards for school mathematics and common core state standards. *Mathematics Educator*, *23*(2), 40-59.

Newton, X. y Poon, R. (2015). Pre-service STEM majors understanding of slope according to common core mathematics standards: An exploratory study. *Global Journal of Human-Social Science Research*, *15*(7), 1-17.

Oyarbide, M. (2004). Estilos cognitivos, desarrollo operatorio y preconcepciones. *Revista Internacional de Psicología*, *5*(1), 1-23.

Planinic, M., Milin-Sipus, Z., Katic, H., Susac, A. y Ivanjek, L. (2012). Comparison of student understanding of line graph slope in physics and mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(6), 1393-1414. https://doi.org/10.1007/s10763-012-9344-1

Pozo, J. y Carretero, M. (1987). Del pensamiento formal a las concepciones espontáneas: ¿Qué cambia en la enseñanza de la ciencia? *Infancia y Aprendizaje*, *38*, 35-52.

Rivera, M. I., Salgado, G. y Dolores, C. (2019). Explorando las Conceptualizaciones de la Pendiente en Estudiantes Universitarios. *Bolema*, *33*(65), 1027-1046. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a03

Rodríguez, P. (2017). Ideas previas de estudiantes de décimo grado respecto al concepto de ecosistemas. *Enseñanza de las Ciencias*, (Extra), 4157-4162.

Salgado, G., Rivera, M. I. y Dolores, C. (2019). Conceptualizaciones de pendiente: Contenido que enseñan los profesores del Bachillerato. *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *15*(57), 41-56.

Simons, P. (1999). Transfer of learning: Paradoxes for learners. *International Journal of Educational Research*, *31*(7), 577-589.

Sirotic, N. y Zaskis, R. (2007). Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(1), 49-76. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9041-5

Stanton, M. y Moore-Russo, D. (2012). Conceptualizations of slope: A review of state standards. *School Science and Mathematics*, *112*(5), 270-277. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00135.x

Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, *11*(2), 124-144. https://doi.org/10.1007/BF03217065

Stump, S. (2001). High school precalculus students' understanding of slope as measure. *School Science and Mathematics*, *101*(2), 81-89.
https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2001.tb18009.x

Teuscher, D. y Reys, R. (2012). Rate of change: AP calculus students' understandings and misconceptions after completing different curricular paths. *School Science and Mathematics*, *112*(6), 359-376.
https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00150.x

Thacker, I. (2019). An embodied design for grounding the mathematics of slope in middle school students' perceptions of steepness. *Research in Mathematics Education*, 1-25.
https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1692061

Tovar, J., Castillo, H. y Marín, M. (2007). Preconcepciones de estudiantes de la Pontificia Universidad Javeriana Cali sobre el curso de Estadística. *Pensamiento Psicológico*, *3*(9), 61-78.

Wilhelm, J. y Confrey, J. (2003). Projecting rate of change in the context of motion onto the context of money. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *34*(6), 887-904.
https://doi.org/10.1080/00207390310001606660

Yanik, H. B. (2011). Prospective middle school mathematics teachers' preconceptions of geometric translations. *Educational Studies in Mathematics*, *78*(2), 231-260.
https://doi.org/10.1007/s10649-011-9324-3

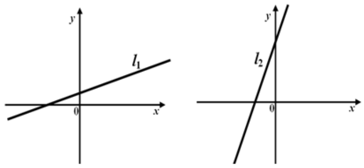
Yerushalmy, M. (1997). Designing representations: Reasoning about functions of two variables. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(4), 431-466.

Yip, D. (1998). Identification of misconceptions in novice biology teachers and remedial strategies for improving biology learning. *International Journal of Science Education*, *20*(4), 461-477.
https://doi.org/10.1080/0950069980200406

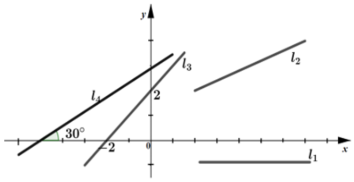
ANEXO
TAREAS PLANTEADAS EN LA ENTREVISTA

1. La entrada a una cafetería tiene dos accesos: una escalera y una rampa. La imagen muestra sus medidas. ¿Qué acceso tiene mayor pendiente?

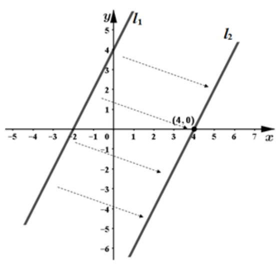
2. ¿Cómo son entre sí las pendientes de la recta l_1 y l_2?



3. Dada las rectas l_1, l_2, l_3 y l_4. ¿En cuál(es) es posible calcular la pendiente?



4. La gráfica de la recta l_1 tiene por ecuación a $y = 2x + 4$, es trasladada de modo que ahora está sobre el punto (4,0) y se transforma en l_2. ¿Qué pendiente tiene l_2?



5. En la escalera, los escalones tienen una medida de 27 cm de huella y 18 cm de contrahuella, tal como se muestra en la fotografía. ¿Qué pendiente tiene la escalera?

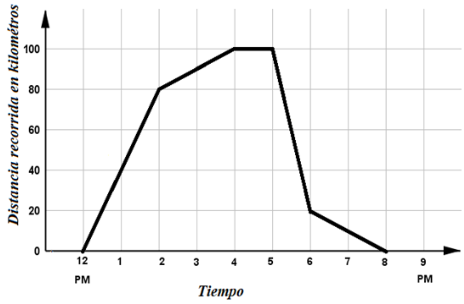
6. Ana salió de su casa a las 12.00 pm y regresó a las 8:00 pm. La siguiente gráfica muestra el comportamiento de la distancia que recorrió en su automóvil respecto del tiempo. Escribe los intervalos que correspondan a cada situación.

   a) Ana conduce su auto a una velocidad de 40 km/h. _______

   b) En su regreso a casa, se encontró con mucho tráfico. _________

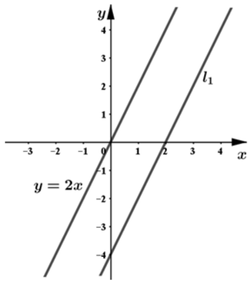
   c) Se detuvo a comer. _________

   d) Ana conduce su auto a una velocidad de 10 km/h. ________



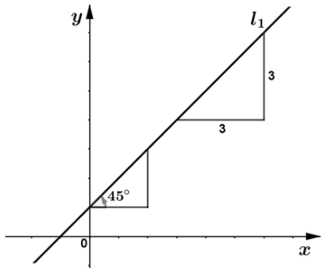
7. La recta $y = 2x$ es paralela a la recta l_1.

a) ¿Cuál es la ecuación de la recta l_1?
b) ¿Cuál es la pendiente de la recta l_1?



8. ¿Bajo qué condiciones la función $y = mx - 1$ es creciente, decreciente o constante?

9. ¿Cuál es la pendiente de la recta l_1?



10. Miguel vende cloro a domicilio, puede vender por litro o por la cantidad de dinero que le pidan. Una señora le pidió cuatro litros y medio y pagó \$27, mientras que otra clienta le pidió \$18 y don Miguel le dio tres litros. Analiza la situación y contesta lo siguiente:
   a) Si Ana le compra \$15 pesos, ¿cuántos litros de cloro le darán? ______________
   b) Don Miguel desea conocer una regla general que relacione el costo a pagar y el número de litros de cloro. Supongamos que la regla tiene la forma $y = kx$. ¿Cuál es esa expresión algebraica? _______________
   c) ¿Qué significa el valor de k? _________________________

11. ¿Qué es la pendiente?

12. ¿Cómo se representa?

13. Escribe al menos un ejemplo de la pendiente.

Secondary Education students' preconceptions of slope

Martha Iris Rivera López, Crisólogo Dolores Flores
Centro de Investigación en Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Guerrero, México
irivera@uagro.mx, cdolores2@gmail.com

The study of preconceptions is not new in research, since the 80's and 90's, they experienced a boom as an object of research together with conceptions, beliefs, and alternative conceptions. The interest of researchers in this type of knowledge is so because studies have indicated that human beings cannot be considered as tabula rasa, i. e., every individual before the formal study strongly supports descriptive and explanatory systems of the scientific and logical-mathematical phenomena. Preconceptions play an important role in the acquisition of mathematical concepts and they are essential for any teaching situation since they are part of prior knowledge. Their study is important because they show us the significant moments and aspects of the processes of mental construction that are influenced by individual and collective experiences affecting meaning. Therefore, the most important factor that influences learning is what the student already knows, so to contribute to the improvement of learning, the series of experiences and knowledge that affect students' learning must be used for their benefit. Hence, the present research examines secondary education students' preconceptions of slope.

In this study, preconceptions are understood as the students' notions resulting of their experiences (school and extracurricular) to give explanations and response to activities related to a concept, prior to its formal study. Formal study is understood as working with the definition, properties, and representations of the concept, in our case, the concept of slope. Given that the arguments, procedures (e. g. using a formula to calculate the slope, measuring a segment, using a representation, etc.) and body movements (e. g. simulating the degree of inclination of a line using your arm or a material object that refer to the slope) are influenced by these notions, in this study they are considered as representations or manifestations of the slope preconceptions.

The data were collected through a task-based interview. This was applied individually to 30 students in 10th grade from a public school in Guerrero, Mexico. The interview was based on a protocol that includes thirteen tasks and basic auxiliary questions referring to the procedures and vocabulary used by each participant, to know in detail their reasoning and knowledge about the concept of slope. For data analysis, students' worksheets were transcribed and scanned, and thematic analysis and investigator triangulation were used to provide reliability, validity, credibility, and rigor. The thematic analysis allows identifying, organizing, and systematizing patterns of meanings (themes). These patterns are identified through a rigorous process of data familiarization and coding, as well as topic development and review. In terms of this study, a theme is a preconception.

Data analysis and triangulation reveals that students who have not yet worked on the concept of slope in secondary education have diverse ideas about the concept of slope, which seems to come more from their experience with the term in everyday life rather than from their school experience. The preconceptions they manifest consider the slope as length of the straight segment, an object, a physical property, the value of the angle, the intersection of the straight line with the axes, associated with an algebraic expression and the quotient of the values of the x and y intercepts. Some results coincide with the alternative conceptions reported by other studies, we suppose that they are probably ingrained preconceptions that have acquired a certain degree of coherence due to the experiences they have had with the concept in their daily lives. For this reason, it is important that these notions are known by teachers at different educational levels, as well as those of teacher training, since these could affect the subsequent mathematical learning of students.