ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 37-3 (2019), 169-187
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2602
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Estrategias y errores de conversión entre representaciones de intervalos de la recta real

Conversion strategies and errors among representations of intervals of the real line

Cristina Pecharromán Gómez
Departamento de Didáctica de las CC. EE., CC. SS. y de la Matemática. Universidad de Valladolid. Valladolid, España
cristina.pecharroman@uva.es

Matías Arce Sánchez
Departamento de Didáctica de las CC. EE., CC. SS. y de la Matemática. Universidad de Valladolid. Segovia, España
matias.arce@uva.es

Laura Conejo Garrote
Departamento de Didáctica de las CC. EE., CC.SS. y de la Matemática. Universidad de Valladolid. Soria, España
laura.conejo@uva.es

RESUMEN • En este artículo se presentan los resultados de un estudio empírico llevado a cabo a través de diferentes ciclos de investigación con alumnos de 4.º de la ESO y 1.º de Bachillerato, centrado en el concepto de intervalo de la recta real. Los objetivos son identificar las estrategias que utilizan los alumnos para realizar conversiones entre diferentes representaciones de intervalos no acotados e interpretar los posibles errores y dificultades derivados de aplicar estas estrategias. Se han detectado diferentes estrategias focalizadas en aspectos particulares, lo que ha corroborado que muchas dificultades están asociadas a la utilización de conversiones por congruencia. A partir de los resultados, se proponen varias orientaciones didácticas para facilitar el aprendizaje de este concepto a través de sus representaciones.

PALABRAS CLAVE: Intervalos no acotados de la recta real; Congruencia entre representaciones; Estrategias de conversión; Errores y dificultades; Educación secundaria.

ABSTRACT • In this article, we present the results of an empirical study based on the concept of interval of the real line in which students of Grades 10 and 11 took part. Its objectives are to identify the strategies used by students to accomplish conversions among different representations of unbounded intervals, and to interpret possible mistakes and difficulties as derived from these strategies. Different strategies that focused on particular aspects are detected. Most of these difficulties are linked to the use of conversions as based on congruence. Finally, some didactical orientations to facilitate the learning of the interval concept via their representations are proposed.

KEYWORDS: Unbounded intervals of the real line; Congruence between representations; Conversion strategies; Errors and difficulties; Secondary education.

Recepción: febrero 2018 • Aceptación: agosto 2019 • Publicación: noviembre 2019

Pecharromán Gómez, C., Arce Sánchez, M. y Conejo Garrote, L. (2019). Estrategias y errores de conversión entre representaciones de intervalos de la recta real, *Enseñanza de las ciencias, 37*(3), 169-187
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2602

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

La recta real es un objeto matemático clave para comprender la estructura del conjunto de los números reales. Uno de sus subconjuntos más importantes son los intervalos. El currículo español de Matemáticas en Educación Secundaria reconoce esa importancia (MECD, 2015), indicándose la necesidad de conocer el significado del concepto de intervalo, conocer y reconocer (vía la identificación y la discriminación) diferentes tipos de intervalos y dominar sus formas de expresión y representación.

Los intervalos contribuyen a comprender y usar la recta real numérica, y son necesarios para el desarrollo de conceptos y procedimientos propios del álgebra y del análisis matemático. Así, es muy importante que los alumnos desarrollen un adecuado *esquema conceptual* de los intervalos, entendiendo esquema conceptual del modo propuesto por Azcárate y Camacho (2003), a partir del original *concept image* (Tall y Vinner, 1981), como «la estructura cognitiva de un individuo asociada a un concepto matemático y que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados al concepto» (p. 137). Las imágenes mentales son todas las imágenes asociadas al concepto en la mente de un individuo, lo que incluye las representaciones del concepto (Azcárate y Camacho, 2003).

Así, las representaciones de los objetos matemáticos tienen una gran importancia en el desarrollo de su comprensión y aprendizaje (Berciano, Ortega y Puerta, 2015; Castro y Castro, 1997; Goldin, 2002; Janvier, 1987). Incluso Duval (1999, 2006) formula una teoría cognitiva sobre el aprendizaje de los conceptos matemáticos a través de sus representaciones y de la coordinación de estas. El NCTM (2000) destaca el proceso de representación como uno de los cinco procesos matemáticos clave, así como el equipo de expertos de PISA (Turner, Blum y Niss, 2015), que lo subraya como una de las seis capacidades matemáticas fundamentales para resolver matemáticamente un problema.

Cada representación de un objeto matemático enfatiza ciertos aspectos o características de este y oscurece otras (Castro y Castro, 1997). Stylianou (2011) remarca que seleccionar un modo de representar un objeto matemático y ser capaz de hacer conversiones entre sistemas influye decisivamente en las posibilidades y la manera de resolver un problema. Diversos antecedentes indagan en la relación existente entre la comprensión de un concepto, sus diversas representaciones y su uso para resolver problemas. Adu-Gyamfi y Bossé (2014) o Elia, Panaoura, Eracleous y Gagatsis (2007) se centran en el concepto de función. Clement (1982) y González-Calero, Arnau y Laserna-Belenguer (2015) examinan la conversión de enunciados verbales a ecuaciones escritas en lenguaje algebraico.

La utilización de diferentes representaciones de un concepto y la realización de conversiones entre ellas pueden dar lugar a dificultades. Bossé, Adu-Gyamfi y Cheetham (2011) revisan estas dificultades, destacando las ligadas a factores centrados tanto en el estudiante como en las propias representaciones. Duval (1999, 2006) destaca la congruencia entre representaciones de un concepto como un factor relevante en la dificultad de las conversiones e inherente al propio concepto. Esa congruencia está relacionada con la correspondencia existente entre los elementos que configuran cada representación. Duval (1999) aporta tres criterios para su análisis, que se detallan en el marco teórico.

Hay bastante literatura sobre el aprendizaje de las funciones y sus representaciones (De Bock, Van Dooren y Verschaffel, 2015; Elia et al., 2007; Janvier, 1987; Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990). Sin embargo, no hemos encontrado antecedentes sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje de los intervalos de la recta real, a pesar de ser un elemento clave y de haber detectado, en nuestra experiencia docente, dificultades y errores en los alumnos al trabajar con intervalos. Pecharromán, Arce, Conejo y Ortega (2018) desarrollaron un análisis teórico de la congruencia entre diferentes representaciones de los intervalos no acotados de la recta real a partir de los criterios de Duval (1999). Este análisis les permitió formular una serie de reflexiones teóricas sobre el aprendizaje bajo la hipótesis de que las conversiones en las que se cumplen más criterios de congruencia podrían favorecer el desarrollo del significado del concepto de intervalo en las primeras etapas del aprendizaje.

Se presentan aquí los resultados de una investigación empírica sobre las estrategias de conversión entre representaciones de intervalos no acotados de la recta real a partir de preguntas como: ¿Utilizan los alumnos estrategias de conversión basadas en la congruencia? ¿Qué otras estrategias usan? ¿Existe mayor incidencia de errores cuando se solicitan conversiones entre sistemas donde se cumplen menos criterios de congruencia? La investigación se basa en varios ciclos de investigación, en los que se propuso a alumnos de 4.º de la ESO y 1.º de Bachillerato realizar conversiones entre diferentes registros de representación de intervalos no acotados de la recta real. Sus objetivos son:

- Detectar e interpretar diferentes estrategias utilizadas por los estudiantes para realizar las conversiones de intervalos no acotados de la recta real entre distintos sistemas de representación.
- Estudiar la posible existencia de relaciones entre el porcentaje de error al realizar una conversión y la congruencia entre las representaciones involucradas.

MARCO TEÓRICO

La idea de partida es que los objetos matemáticos, a diferencia de los de otras disciplinas, no tienen existencia material. Los objetos matemáticos son propios de un dominio conceptual (Duval, 1999, 2006; Rico, 2009) y son producidos y percibidos a través de la razón, por lo que sí que tienen una existencia real (Pecharromán, 2013). Para poder hacer físicamente presentes los objetos matemáticos y comunicar ideas sobre ellos, es necesario utilizar signos, denotados mayoritariamente como *representaciones*. Estas representaciones forman parte de sistemas semióticos donde se dotan de sentido, en sistemas de significados y relaciones que son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento (Duval, 1999). En un sistema, Goldin (2002) distingue entre una noción sintáctica del significado, que hace referencia únicamente a los signos y elementos propios del sistema semiótico, y una noción semántica, en la que el significado es inherente a los objetos matemáticos que están siendo representados.

Castro y Castro (1997) distinguen dos grupos de sistemas de representación. Uno es el sistema gráfico, en el que se usan representaciones continuas de tipo figurativo. El otro son los sistemas simbólicos, que hacen uso de representaciones discretas de caracteres alfanuméricos. Según sean esos caracteres, aquí distinguiremos entre representaciones verbales (con caracteres propios del lenguaje natural), algebraicas (contienen caracteres que representan una variable que se mueve en un conjunto, aquí los números reales) y numéricas.

El aprendizaje de un concepto matemático está muy ligado al dominio de sus representaciones. Siguiendo a Duval (1999), un estudio sobre el aprendizaje debe tener presente la diversidad de registros de representación asociados a un concepto, la coordinación entre ellos y la diferenciación entre representante y representado como fundamento de la comprensión. Duval (1999, 2006) plantea el acceso a los conceptos matemáticos a través de acciones sobre sus representaciones: reconocimiento de elementos de un sistema de representación, transformaciones dentro de este, conversiones de un sistema a otro y coordinaciones (conversión en ambos sentidos) entre representaciones en distintos sistemas. El umbral del aprendizaje de un concepto matemático se sitúa en la coordinación de forma espontánea de al menos dos de sus representaciones.

Las conversiones llevan aparejadas una distancia cognitiva mayor o menor según cuáles sean los elementos (unidades significantes, que no pueden descomponerse en otras más simples) y las características relevantes del concepto que se hacen explícitas en cada representación (Duval, 2006). Duval (1999, pp. 50-51) define la congruencia entre dos representaciones a partir del grado de correspondencia que puede establecerse entre las unidades significantes constituyentes de una y otra, grado determinado por tres criterios. Dos de ellos son la *correspondencia semántica entre unidades significantes* y la *univocidad semántica terminal*, que se cumplen cuando cada una de las unidades significantes de una representación se asocia con una, y solo una, unidad significante de la otra. El tercer criterio es el *orden de aprehensión entre las unidades significantes*, que se cumple si las unidades significantes en correspondencia semántica son presentadas (y posiblemente aprehendidas) en un mismo orden en ambas representaciones.

Pecharromán et al. (2018) añaden un criterio más general, la *univocidad representacional*, que se cumple cuando a la representación en el registro inicial le corresponde una única representación en el registro final, más allá de que pueda modificarse una unidad significante por otra del mismo significado manteniendo todo lo demás. Por ejemplo, el intervalo $(2, +\infty)$ puede representarse como una semirrecta en la recta real donde la no inclusión del 2 puede marcarse con dos posibles unidades significantes del mismo significado, una circunferencia o un paréntesis en la posición del 2, que consideraremos como válidas al observarse y aceptarse en diversos manuales matemáticos universitarios. Así, en esa conversión con llegada en el registro gráfico hay univocidad representacional. No hay tal univocidad al convertirlo al registro algebraico, pues $(2, +\infty)$ puede denotarse como $2 < x$ o como $x > 2$, variando alguna unidad significante, su significado y el orden de aprehensión de las unidades.

La congruencia entre representaciones será mayor cuantos más criterios se cumplan, aumentando la dificultad de la conversión cuando la congruencia es menor (Duval, 1999).

En este trabajo nos centramos en el modo en el que los alumnos realizan las conversiones entre representaciones de los intervalos no acotados de la recta real. Se pretende detectar empíricamente cuáles son las *estrategias de conversión* utilizadas. Por estrategia de conversión entendemos el conjunto de acciones que deben seguirse para alcanzar con éxito (o, al menos, así se piensa) el propósito de realizar una conversión de un sistema de representación a otro, acciones generalmente apoyadas en algún criterio o razonamiento.

A veces las estrategias pueden causar errores en la conversión realizada. La presencia de errores es algo natural y legítimo en un proceso de aprendizaje y de desarrollo del conocimiento científico (Rico, 1998). Aquí no nos va a interesar tanto la presencia de un error, como su interpretación en términos de la estrategia de conversión utilizada. En esta interpretación pueden subyacer dificultades en el aprendizaje del concepto o en el rol y el significado de las unidades significantes que constituyen sus representaciones. Será de especial interés estudiar la posible relación entre la incidencia de errores y la mayor o menor congruencia entre las representaciones involucradas.

MARCO METODOLÓGICO. DESARROLLO EXPERIMENTAL DE LA INVESTIGACIÓN

Se parte de una situación escolar susceptible de mejora, el aprendizaje de las conversiones entre representaciones de intervalos, buscando una mejor comprensión de esta para orientar una mejora de la práctica educativa. Por ello, se opta por seguir una metodología cualitativa de investigación-acción (Elliot, 1990; Kemmis y McTaggart, 1988). La investigación-acción se articula a través de ciclos en espiral, cada uno con cuatro fases. En la primera, planificación, se analiza el problema de investigación y se realiza una propuesta de plan de actuación. En la fase de acción se pone en marcha el plan diseñado y se recoge información sobre esa implementación. En la fase de observación se organiza y se analiza la información recogida. Finalmente, en la fase de reflexión, a partir de los resultados obtenidos se extraen conclusiones y se toman decisiones que buscan mejorar el plan y el proceso, y que orientan la planificación del siguiente ciclo.

En nuestro caso, se han desarrollado cinco ciclos de investigación-acción. En los cuatro primeros comenzaron a identificarse y consolidarse diferentes estrategias de conversión entre representaciones de intervalos no acotados a las que recurría el alumnado, y a interpretarse desde ellas las respuestas y los posibles errores. En el quinto ciclo se detectaron las mismas estrategias e interpretaciones que en todos los ciclos anteriores, sin añadir nueva información, por lo que se constituyó como ciclo final para los objetivos de investigación planteados.

La primera autora tuvo un rol de docente-investigadora. Tras un primer acercamiento en 3.º de la ESO, los intervalos fueron tratados en sus clases de modo más sistemático en 4.º de la ESO y en 1.º de Bachillerato, en la primera parte del curso, en el tema «Números reales». En ambos cursos se aborda el significado del propio concepto de intervalo (en particular, los no acotados) y la forma de expresarlo en diferentes registros de representación, junto con sus unidades significantes. Además, se tratan todas las conversiones entre representaciones de los intervalos de la recta real. Se consideraron los registros numérico, gráfico y algebraico, junto con la presencia explícita del registro verbal. La figura 1 muestra ejemplos de representaciones de intervalos usados en la clase en los diferentes registros.

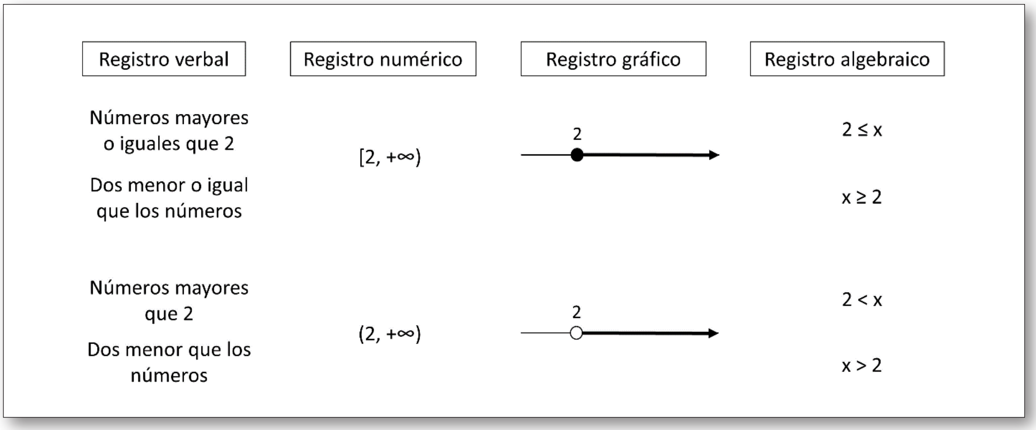

Fig. 1. Representaciones de intervalos no acotados en los diferentes registros

La docencia en 1.º de Bachillerato tiene un mayor componente de repaso y afianzamiento de estos contenidos, ya tratados y usados en 4.º de la ESO (por ejemplo, al expresar propiedades globales de funciones). En ella se enfatizan sobre todo los registros y conversiones en los que se mostraban habitualmente mayores dificultades.

En todos los casos, la docente planificó y desarrolló sesiones de tipo mayoritariamente magistral, pero demandando la participación de los alumnos, de forma que fueran más activos cognitivamente. Se trataron los diferentes registros y conversiones a través de numerosos ejemplos y actividades que requerían escribir o convertir intervalos.

En cada uno de los cinco ciclos participaron alumnos diferentes, en algunos ciclos de 4.º de la ESO y en otros de 1.º de Bachillerato, escogidos por disponibilidad. Teniendo presentes los objetivos de la investigación, se consideró oportuno recoger información de los dos niveles en los que se impartió la docencia, para detectar e interpretar cuáles eran las estrategias de conversión usadas por los estudiantes en ambos casos, e interpretar los posibles errores. Es cierto que los alumnos de 1.º de Bachillerato tienen un mayor volumen de conocimientos previos cuando afrontan esta docencia; también fueron capaces de mostrar mayor variedad de estrategias y verbalizar mejor estas. Así, en la fase de reflexión de cada ciclo, la toma de decisiones conducente al refinamiento de la docencia seguida sí tiene en cuenta el curso en que se ha hecho la implementación, considerando necesario dedicar una mayor atención a aquellos registros y conversiones con mayor evidencia de dificultad, como en el registro algebraico.

En cada ciclo se diseñaron e implementaron dos cuestionarios *ad hoc* buscando recoger datos directamente relacionados con los objetivos de la investigación. Los cuestionarios se componían de tareas de conversión directa de un intervalo no acotado dado en un registro a otro registro. Se consideraron todas las conversiones entre los registros gráfico, numérico y algebraico en el primer cuestionario, añadiendo conversiones con llegada al registro verbal en el segundo. Cada cuestionario tenía bloques de cuatro ítems por conversión, con un enunciado que solicitaba esta (ejemplo: «Pasa a representación gráfica»). En cada bloque, se tuvo en cuenta la posible escritura diferente de intervalos en el registro inicial (si no hay en él univocidad representacional), así como la presencia de intervalos no acotados en ambos sentidos y el diferente signo del extremo para generar cuatro ítems variados que permitieran detectar posibles relaciones entre el porcentaje de error y la congruencia entre las representaciones involucradas. En posteriores ciclos se añadió una pregunta extra por bloque para optimizar el propósito del cuestionario, con el fin de que el alumno explicara su estrategia (por ejemplo: «Explica cómo llegas a uno de estos intervalos, ¿qué pones primero y qué pones después?»). Los cuestionarios fueron consensuados por el equipo investigador, formado por los tres autores junto con un profesor experto en didáctica del análisis.

En cada ciclo, los dos cuestionarios se implementaron una vez finalizada la docencia sobre intervalos, uno tras acabarla y otro tres meses después, para estudiar las estrategias asimiladas por los alumnos. Los cuestionarios se cumplimentaron en condiciones homologables a las de un examen individual, a sabiendas del alumnado, y contaban para la evaluación. En la fase de análisis, el equipo investigador analizó las respuestas de los estudiantes a los ítems, tratando de interpretar la estrategia de conversión usada en cada caso. Cuando no había explicación en el cuestionario, consenso en la interpretación o no se reconocía la estrategia, la docente realizó pequeñas entrevistas particulares informales a los alumnos implicados, buscando conocer el razonamiento y la estrategia seguida, si la hubiere.

Como hemos indicado, en el quinto ciclo aparecieron y se confirmaron todas las estrategias de conversión e interpretaciones presentes en los ciclos anteriores. Por ello, basaremos la presentación de estrategias a partir de los datos obtenidos en este último ciclo, al considerar que estos resultados son representativos de la investigación global y del conocimiento desarrollado durante esta. En este último ciclo participó un grupo de alumnos de 1.º de Bachillerato (modalidad de Ciencias), compuesto por 13 alumnos, a los que nos referiremos con códigos de A1 a A13.

RESULTADOS: ESTRATEGIAS DE CONVERSIÓN DETECTADAS, ERRORES Y DIFICULTADES

Presentamos los resultados organizados conversión por conversión, centrándonos en las representaciones gráfica, numérica y algebraica, y completándose finalmente con la verbal. En cada conversión, se explican las estrategias de conversión detectadas, junto con los errores y las dificultades asociadas y su interpretación.

Conversión gráfica → numérica (G → N)

En esta conversión de intervalos existe univocidad representacional. Algunas unidades significantes en el sistema gráfico no tienen su unidad correspondiente en el sistema numérico (por ejemplo, no hay ningún signo para los números que configuran el intervalo), pero en las que lo hay se mantiene el orden de aprehensión.

La conversión tuvo un porcentaje muy alto de respuestas correctas en ambos cuestionarios (véase tabla 1 posterior). Al existir univocidad representacional, la pregunta extra en el cuestionario y las entrevistas informales sirvieron para conocer la estrategia de conversión empleada. En general, los alumnos realizaron esta conversión siguiendo el orden de la recta real (de izquierda a derecha) para escribir los extremos del intervalo, identificando $+\infty$ y $-\infty$ con la flecha y su sentido. Después, completaron la escritura poniendo corchetes o paréntesis según los extremos pertenecieran o no al intervalo. La misma disposición de las unidades significantes presentes en ambos registros y la existencia de un mismo orden de aprehensión hacen que los razonamientos basados en aspectos de congruencia sean correctos.

Conversión numérica → gráfica (N → G)

Esta conversión, inversa a la anterior, cumple los mismos criterios de congruencia. En ella también se observa un alto número de respuestas correctas (tabla 1).

Como antes, las características de la conversión facilitan realizar conversiones basadas en criterios de congruencia. Siete alumnos enfatizaron una *conversión por congruencia* (en adelante, CC), al añadir o traspasar directamente símbolos propios del registro numérico al registro gráfico. Seis de ellos escribieron –∞ o +∞ junto con la flecha hacia la izquierda o la derecha, respectivamente (véase figura 2), y aunque no es un símbolo necesario, la representación se ha considerado como correcta.

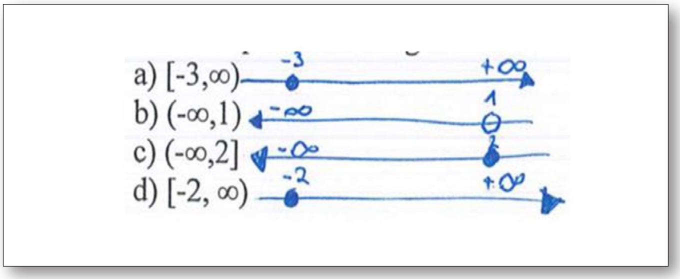

Fig. 2. Enfatización de una CC del registro numérico al gráfico (A5)

Además, algunos alumnos usaron símbolos compartidos en estos dos registros, como el paréntesis o el corchete para indicar la exclusión o inclusión del extremo, respectivamente, lo que también se ha considerado como correcto (figura 3).

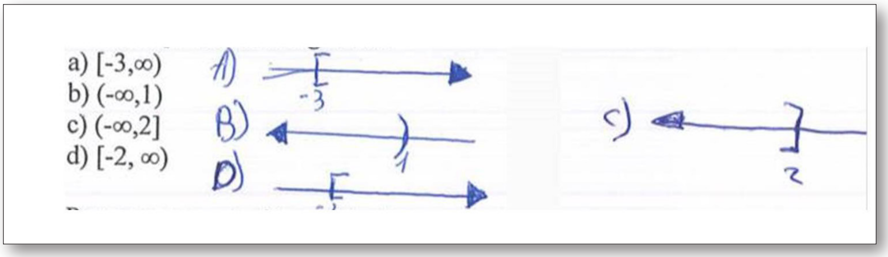

Fig. 3. Uso de símbolos compartidos en los sistemas semióticos (A2)

Conversión algebraica → gráfica (A → G)

En esta conversión hay univocidad representacional, pero el cumplimiento de los criterios de congruencia varía según cuál sea la forma elegida de representar algebraicamente el intervalo no acotado (por ejemplo, x < a o a > x), al influir en el orden de aprehensión entre las unidades significantes. La tabla 1 muestra un número elevado de conversiones correctas. No obstante, se detectaron dos estrategias de conversión que dieron lugar a errores.

A1 (en ambos cuestionarios, véase figura 4) realizó conversiones fundamentadas en la congruencia entre las representaciones (CC), marcando el valor del extremo y la «x» en la recta real o identificando esta con +∞ o –∞, replicando la posición de los objetos. Esta estrategia de conversión ignora el significado del símbolo de desigualdad, lo que provoca errores con los signos > o ≥, para los que no se mantiene el orden de aprehensión. Además, confunde el símbolo para excluir el extremo en el primer cuestionario (izquierda), y sitúa una «x» concreta en la recta real en el segundo (derecha), por lo que parece entender esta como un valor desconocido concreto y no como una variable.

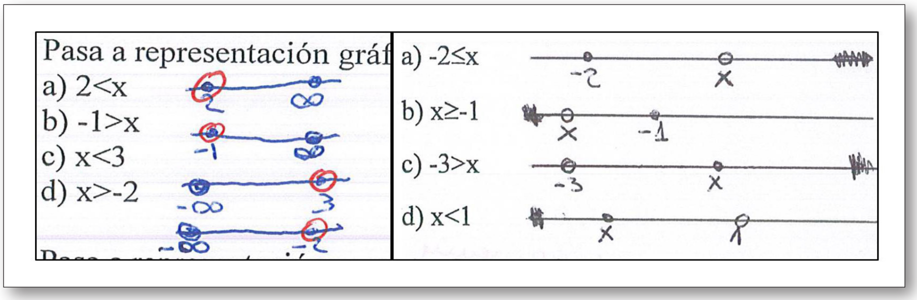

Fig. 4. Errores de conversión derivados de una CC y de desconocer el significado de unidades significantes (A1)

También se ha detectado una estrategia de *conversión focalizada en el símbolo de desigualdad* (en adelante, CFD) en los cuestionarios de A6, que da lugar a conversiones erróneas (figura 5). El alumno ubica el número en la recta real y considera el sentido de la desigualdad para marcar el sentido de la flecha en la representación gráfica. Además, confunde el símbolo para marcar la exclusión del extremo.

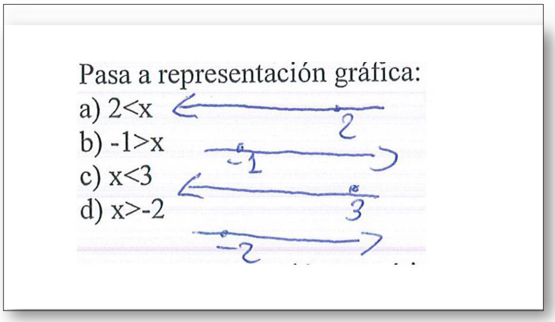

Fig. 5. Errores de conversión derivados de una CFD (A6)

De nuevo, varios alumnos han escrito indebidamente +∞ o –∞ en la representación gráfica (ejemplo en la figura 4), considerando el infinito como un número (punto de la recta).

Conversión gráfica → algebraica (G → A)

Esta conversión es inversa a la anterior. Al existir diversas formas de representar algebraicamente los intervalos, no existe univocidad representacional. Este hecho permitió detectar una mayor variedad de estrategias de conversión. Además, se ha observado aquí un menor número de conversiones correctas (tabla 1), en comparación con las anteriores.

Se detectaron tres tipos de razonamientos para hacer esta conversión, también reflejados en el último ciclo.

El primero son las estrategias de *conversión basadas en el mantenimiento del orden lingüístico* (en adelante, COL), que inician la escritura y el razonamiento a partir del término números, «x», núcleo del sintagma nominal en la expresión verbal. A partir de ahí, se coloca el símbolo de desigualdad y finalmente el extremo. Esta estrategia siempre dio lugar a conversiones correctas. A5 (figura 6) utilizó esta estrategia en los dos cuestionarios, A7, A11 y A13 en el primero y A3, A8 y A9 en el segundo.

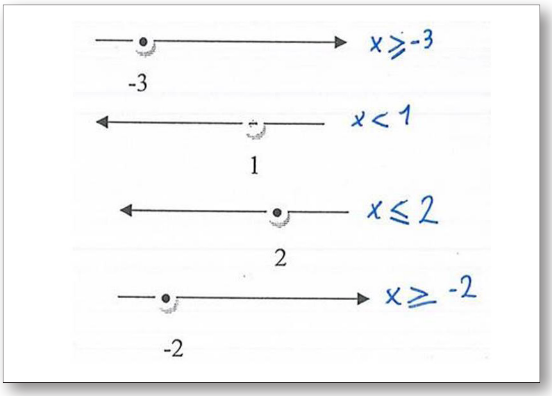

Fig. 6. Estrategia de conversión COL (A5)

El segundo tipo son las estrategias de *conversión focalizada en el número que es extremo del intervalo no acotado* (en adelante, CFN). Se comienza escribiendo el número y después se completa con la «x» y con el símbolo de desigualdad correspondiente, siempre satisfactoriamente. Se muestra un ejemplo en la figura 7, con respuestas del alumno A4. A12 recurrió a esta estrategia en ambos cuestionarios, A4, A8 y A10 en el primero, y A11 y A13 en el segundo.

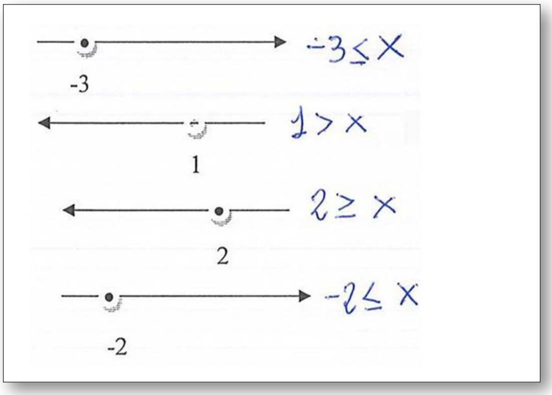

Fig. 7. Estrategia de conversión CFN (A4)

En los casos restantes, los alumnos recurrieron a estrategias basadas en la congruencia entre las representaciones (CC). La expresión algebraica se escribe en el mismo orden (de izquierda a derecha) en el que se presentan gráficamente los elementos, realizando una conversión de símbolos: se asocia la flecha con el $-\infty$ o el $+\infty$, la semirrecta con «x», se coloca el extremo del intervalo y se completa con los símbolos de desigualdad. La respuesta de A3 (figura 8) evidencia la CC, resultando expresiones correctas, aunque es superflua la presencia del infinito.

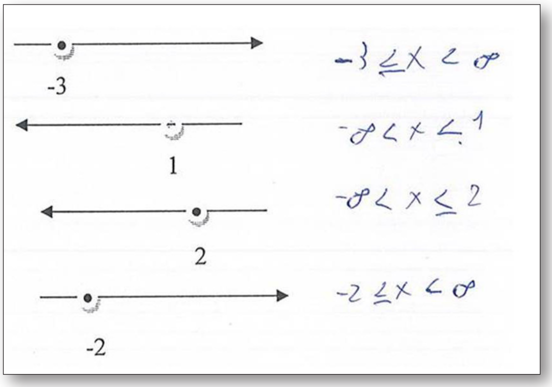

Fig. 8. CC al pasar del registro gráfico al algebraico (A3)

La estrategia CC ha estado ligada a un número de conversiones correctas muy inferior (alrededor del 50 %), con varios errores. Por ejemplo, en el primer cuestionario, A2 y A9 consideraron tanto $+\infty$ como $-\infty$ como algo más grande que cualquier número, lo que hizo que completaran erróneamente el sentido de las desigualdades con $-\infty$ (figura 9). En estos casos, los alumnos no hicieron uso de $<$ o $\leq$, que son los símbolos apropiados para esta estrategia al asociarse al orden de la recta real y a su sentido de recorrido.

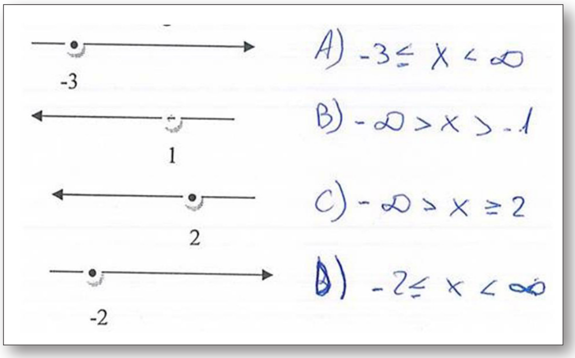

Fig. 9. CC con error al colocar los símbolos de desigualdad (A2)

A6 también procedió por congruencia, pero identificó la flecha bien con la «x» o bien con $+\infty$ o $-\infty$. Esto último no genera expresiones correspondientes a un intervalo, como, por ejemplo, $-\infty < 1$.

Conversión algebraica → numérica (A → N)

En esta conversión, como en la algebraica → gráfica, hay univocidad representacional en el sistema de llegada, pero la congruencia depende de la expresión algebraica usada, al influir en el orden de aprehensión entre las unidades significantes. En esta conversión hubo bastantes respuestas correctas (tabla 1), pero también algunos errores. Explicamos a continuación las tres estrategias de conversión detectadas que dieron lugar a errores al escribir la representación numérica.

A1 volvió a recurrir siempre a una conversión de tipo CC (véase figura 10). Su explicación de la estrategia, «Pongo el 4 primero porque hay que seguir el orden en el que viene y luego el ∞», explicita el mantenimiento del orden como un principio de referencia. En este caso, A1 identifica la x con $+\infty$ o $-\infty$, manteniéndose los problemas al interpretar la pertenencia o no del extremo al intervalo. Además, sus errores se asocian a la presencia del «>» en la expresión algebraica, símbolo ligado a la no existencia de un mismo orden de aprehensión.

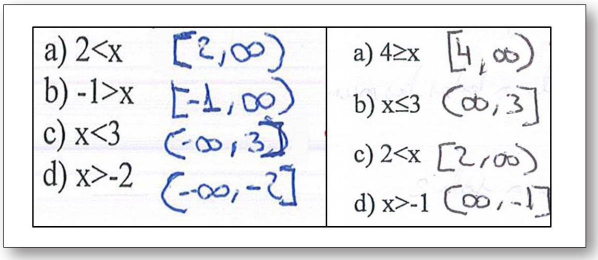

Fig. 10. Respuesta basada en una estrategia CC (A1)

Los alumnos A11 y A12, en el segundo cuestionario, recurrieron a una estrategia de tipo CFN, escribiendo siempre a la izquierda el extremo del intervalo, y completándolo a la derecha con +∞ o –∞, según la «x» esté o no, respectivamente, en el lado del «mayor» (véase figura 11).

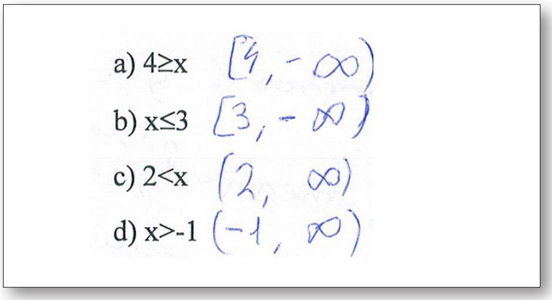

Fig. 11. Respuesta basada en una estrategia CFN (A11)

Por último, A6, en el primer cuestionario, y A8, en el segundo, realizaron una conversión focalizada tanto en el número como en la orientación del símbolo de desigualdad respecto de él, detectada también en ciclos anteriores. En la figura 12 se observa cómo aplica A6 esta estrategia en los apartados a, b y c, produciendo respuestas incorrectas. No es una CC, al no considerar la posición del número. Si el número está al lado de «menor», se escribe el intervalo partiendo de –∞ y acabando en el número (apartado a). Si el número está del lado del «mayor», el intervalo parte del número y acaba en +∞ (apartados b y c).

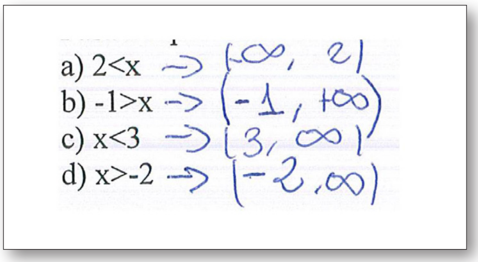

Fig. 12. Conversión focalizada en extremo y orientación de desigualdad (A6)

Conversión numérica → algebraica (N → A)

Esta conversión es inversa a la anterior. Como en la conversión gráfica → algebraica, la existencia de varias representaciones algebraicas equivalentes posibilitó una mayor variedad de estrategias de conversión. Se detectaron muchas conversiones correctas, pero también algunas erróneas (tabla 1).

En bastantes casos se realizaron razonamientos similares a los seguidos en la conversión gráfica → algebraica, detectando también las tres estrategias de conversión encontradas entonces. Una es la estrategia COL, obteniendo expresiones siempre correctas. A5 volvió a recurrir a esta estrategia en ambos cuestionarios, A10, A11 y A13 en el primero y A3, A7, A8 y A9 en el segundo. En muchos casos hubo coincidencia con la estrategia seguida en la conversión G → A en el cuestionario correspondiente.

Otra es la estrategia CFN, usada por A8 en el primer cuestionario, y por A10, A11, A12 y A13 en el segundo, habiendo también cierta coincidencia con la estrategia usada en la conversión G → A. El alumno A12 explica su estrategia en el segundo cuestionario, en la conversión de (–∞, 1): «Escribo el número que me dan (1), y una x, y el símbolo > para señalar que los números del tramo son los menores que 1». En esta estrategia se parte siempre del número extremo del intervalo, que se escribe a la izquierda, y se completa comprensivamente la expresión de forma correcta.

Además, se ha detectado en A12 una conversión de tipo CFD en el segundo cuestionario, al colocar la desigualdad en un mismo sentido (> o ≥), sin considerar el orden de recorrido de la recta real. A partir de él completó la expresión satisfactoriamente (figura 13).

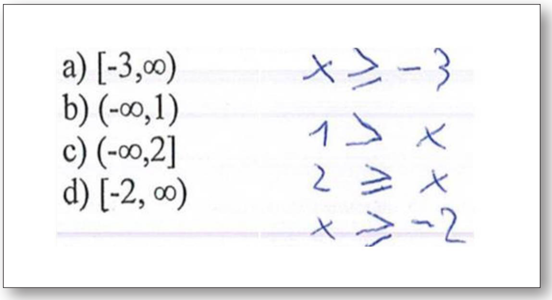

Fig. 13. Uso de estrategia de conversión CFD (A12)

En los casos restantes, los alumnos usaron estrategias de conversión por congruencia (CC). Estos estudiantes ubicaron todas las unidades de la representación numérica en la algebraica, manteniendo su orden de aparición y completando con los signos de desigualdad. Algunos alumnos, como A7 en el primer cuestionario (figura 14, parte izquierda), aplicaron esta estrategia añadiendo de forma superflua +∞ o –∞, pero completando satisfactoriamente expresiones con la desigualdad adecuada, que fueron consideradas como correctas. En otros casos, como A2 en el segundo cuestionario (figura 14, parte derecha), cambiaron el infinito por una «x» y completaron la conversión también correctamente.

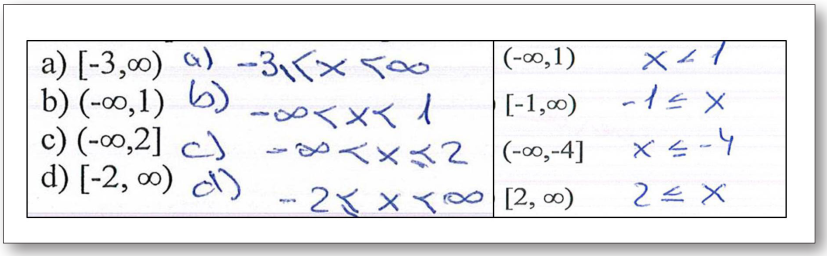

Fig. 14. CC en la conversión numérica → algebraica (izquierda: A7, derecha: A2)

Sin embargo, emergieron varios errores al aplicar estrategias CC. Los alumnos A1 y A6 han vuelto a identificar la «x» con el infinito. A2 y A9 han cometido errores al completar el sentido de las desigualdades, de nuevo por identificar el infinito (ya sea $+\infty$ o $-\infty$) como algo mayor que cualquier número real. Este aspecto parece evidenciarse como un obstáculo cognitivo para algunos alumnos.

CARÁCTER CORRECTO DE LAS CONVERSIONES (EXCLUYENDO EL SISTEMA VERBAL)

La tabla 1 presenta un resumen del carácter correcto de cada conversión, en cada cuestionario y globalmente. Al haber cuatro conversiones de cada tipo y 13 alumnos, el total es 52.

Tabla 1.
Número y porcentaje de respuestas correctas (RC) por cuestionario y global

Conversiones	$G \to N$	$N \to G$	$A \to G$	$G \to A$	$A \to N$	$N \to A$
Primer cuestionario. Número y porcentaje de RC	52/52 100 %	51/52 98,08 %	44/52 84,62 %	40/52 76,92 %	43/52 82,69 %	40/52 76,92 %
Segundo cuestionario. Número y porcentaje de RC	46/52 88,46 %	52/52 100 %	47/52 90,38 %	41/52 78,85 %	40/52 76,92 %	43/52 82,69 %
Global. Número y porcentaje de RC	98/104 94,23 %	103/104 99,04 %	91/104 87,5 %	81/104 77,88 %	83/104 79,81 %	83/104 79,81 %

El mayor porcentaje de conversiones correctas está ligado a la conversión del sistema numérico al gráfico y viceversa. En estas conversiones hay univocidad representacional y se mantiene el orden de aprehensión de las unidades significantes, lo que puede facilitar el carácter correcto de las conversiones, incluidas las obtenidas aplicando estrategias basadas en la congruencia. Además, la tabla 1 evidencia que las conversiones con un mayor número de errores han sido las que involucraban al registro algebraico. La doble función y la doble lectura de los símbolos de desigualdad, que permiten diferentes opciones equivalentes de representación, parecen concretarse en una mayor dificultad de conversión. Muchos errores se han interpretado a partir de la aplicación inadecuada de estrategias de tipo CC en casos sin mantenimiento del orden de aprehensión, o cuando no se hace una apropiada traducción o interpretación de símbolos entre representaciones (como al identificar los números de un intervalo con $+\infty$ o $-\infty$), ligado a una menor correspondencia semántica entre unidades significantes.

CONVERSIONES A REPRESENTACIONES VERBALES

En el segundo cuestionario se incluyeron conversiones con llegada en el registro verbal. El registro verbal, como el algebraico, se caracteriza por la ausencia de univocidad representacional, pudiendo usarse diferentes expresiones verbales para nombrar un intervalo. La menor presencia de este registro en los cuestionarios y el hecho de que algunos alumnos hicieran uso de diferentes representaciones como apoyo para generar las representaciones verbales hacen que optemos por presentar globalmente las estrategias y el número y porcentaje de respuestas correctas.

Ocho alumnos (A2, A4, A5, A7 a A11) generaron representaciones verbales a partir de *conversiones basadas en el mantenimiento del orden lingüístico* (COL). En ellas se escribe un sintagma nominal cuyo núcleo es la palabra *números* (constituyentes del intervalo), utilizando diferentes expresiones como «Números mayores/menores que...», «Todos los números mayores/menores que...» o «Números superiores/inferiores a...» (figura 15). Todos los estudiantes hicieron correctamente las conversiones, salvo una omisión del «o iguales» en un intervalo cerrado y excepto el alumno A2, que escribió expresiones como «un número se encuentra entre...» que parecen mostrar que, para este alumno, el intervalo está compuesto por un único número.

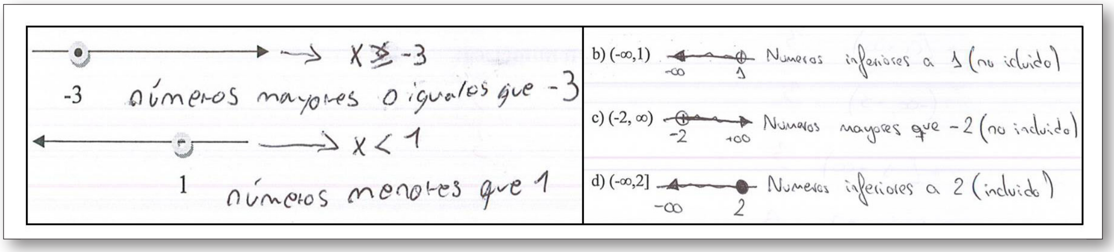

Fig. 15. Representaciones verbales siguiendo una estrategia COL (izquierda: A5, derecha: A10)

Cuatro estudiantes (A1, A3, A6 y A13) construyeron representaciones *de tipo descriptivo*, basadas en describir o enumerar elementos de otros registros. Esta construcción es altamente dependiente de la representación de partida considerada y responde a una conversión por congruencia, leyendo o describiendo sus elementos de izquierda a derecha. En particular, A6 y A13 recurrieron siempre a la escritura en el registro algebraico como punto de partida para escribir la representación verbal. Las representaciones verbal y algebraica tienen una alta congruencia cuando se eligen representaciones con un mismo orden de aprehensión (Pecharromán et al., 2018), lo que puede ayudar a construir representaciones verbales correctas. A1 siempre partió del registro gráfico, mientras que A3 partió de diferentes registros (véase figura 16), lo que provocó algunas conversiones correctas (al describir a partir de una representación algebraica) y otras incorrectas (al leer los símbolos de una representación numérica). El porcentaje de aciertos de los alumnos que optaron por representaciones de tipo descriptivo fue menor que el de los que usaron estrategias de tipo COL. Por último, A12 dejó en blanco las conversiones al sistema verbal.

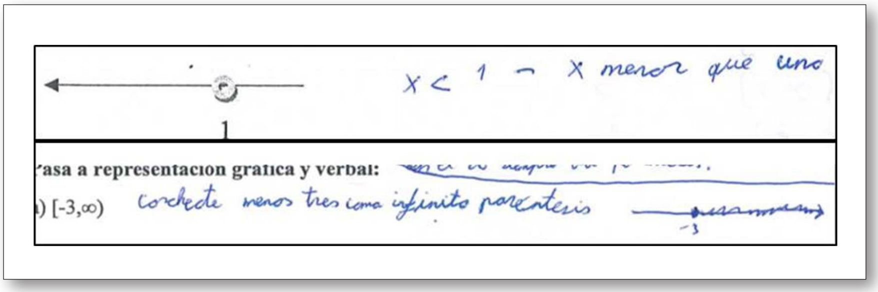

Fig. 16. Representaciones verbales de tipo descriptivo (A3)

De las 104 conversiones con llegada en el registro verbal, se consideraron como correctas 66, lo que supone un porcentaje del 63,46 %. Se puede observar que el porcentaje de aciertos es menor que para las anteriores conversiones, lo que está en consonancia con los resultados de Bossé et al. (2011).

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En este apartado se discuten los resultados y lo que estos aportan en función de los objetivos de investigación planteados. A partir de dicha discusión, se concluye con algunas orientaciones didácticas para facilitar el aprendizaje de los intervalos a través de sus representaciones.

Sobre el primer objetivo, la detección e interpretación de estrategias de conversión entre representaciones de intervalos no acotados usadas por el alumnado, la estrategia COL ha tenido cierta presencia cuando el registro de llegada no tenía univocidad representacional. En ella se prioriza el orden lingüístico, al escribir primero los elementos genéricos que constituyen el intervalo («los números» o «x»). Este estudio empírico ha confirmado la existencia de esta estrategia planteada de forma teórica en Pecharromán et al. (2018). Esta estrategia siempre ha dado lugar a conversiones correctas, salvo las excepciones indicadas en el subapartado sobre representaciones verbales. En la estrategia COL se destacan los números que constituyen el conjunto intervalo como un aspecto fundamental de la representación, a partir de los cuales se indican las condiciones que discriminan los que sí pertenecen de los que no.

Se han detectado dos estrategias más de conversión que focalizan la atención en ciertos signos. En un caso, la escritura pivota sobre el extremo del intervalo (CFN) y, en el otro, sobre el símbolo de desigualdad (CFD). Estas estrategias siempre dieron lugar a expresiones correctas cuando el registro de llegada era el algebraico, completándose en esos casos las representaciones comprensivamente.

Las estrategias de conversión apoyadas en la congruencia entre representaciones (CC) han tenido una importante presencia. En ellas, se tiende a escribir todas las unidades significantes que configuran la representación inicial en el nuevo registro, manteniendo un mismo orden para intentar conservar una congruencia visual entre registros. Estas estrategias CC dieron lugar a expresiones correctas en algunos casos (figura 14), pero también a un mayor número de errores, sobre todo en aquellos casos sin un mismo orden de aprehensión y, por tanto, con menor congruencia.

Si adaptamos la idea de Goldin (2002) de significado sintáctico y semántico en un sistema de representación al contexto de una conversión entre sistemas de representación, las conversiones por congruencia están basadas, a lo sumo, en un significado sintáctico. Las estrategias CC son el resultado de razonamientos basados en la traducción sintáctica concatenada, signo a signo, de unos sistemas semióticos a otros. En el mejor de los casos, el conocimiento del significado de cada signo en cada sistema semiótico sirve de puente para cada traducción, y la concatenación de signos da lugar a expresiones satisfactorias cuando hay mayor cumplimiento de los criterios de congruencia de Duval (1999). En otros casos pueden obviarse algunos signos, como los de desigualdad y su significado en el registro algebraico, o la traducción del signo es también errónea, identificando signos con distinto significado (por ejemplo, cuando se identifica la «x» en el registro algebraico con «+∞» o «–∞» en los registros gráfico o numérico). Todo ello aumenta la cantidad de expresiones erróneas.

En las conversiones por congruencia, la actividad matemática parece acercarse más a una conversión atomizada de signos, sin que exista realmente un significado semántico (Goldin, 2002), es decir, un significado inherente al objeto matemático global que se está representando a través de ese conjunto de signos. Este fenómeno de discretización en el razonamiento sobre un objeto matemático, y los errores a los que da lugar, también se han detectado en estudios sobre el aprendizaje de las funciones (Leinhardt et al., 1990).

Por el contrario, en las estrategias en las que la escritura de la representación pivota alrededor de algún elemento o signo concreto, como las estrategias COL, CFN y CFD, la actividad de conversión sí que se sustenta en un significado semántico (Goldin, 2002). Se razona a partir del significado global del objeto matemático representado en el registro de partida, completando mayoritariamente de manera adecuada su escritura en el registro semiótico de llegada, se mantenga o no el orden de aprehensión entre unidades significantes. Esa alta presencia de respuestas correctas parece reflejar también un adecuado *esquema conceptual* (Azcárate y Camacho, 2003) del concepto de intervalo. El mantenimiento de estas estrategias (COL, CFN o CFD) en los alumnos podría indicar, aparentemente, poca flexibilidad en su razonamiento, pero parece mostrar más una preferencia en la escritura de los intervalos cuando no hay univocidad representacional. La mayor atención a algunas unidades significantes concretas no es aquí incompatible con la existencia de un razonamiento global sustentado en el objeto intervalo.

No parece haber relación entre la elección de la estrategia de conversión en los alumnos y su valoración del grado de congruencia. En general, los alumnos han elegido una estrategia de conversión y la han mantenido en las conversiones de un mismo tipo en cada cuestionario, pero algunos han variado la estrategia cuando los registros involucrados cambiaban. Así, algunos estudiantes parecen mostrar una actividad de conversión compartimentada, aplicando estrategias diferentes según cuál sea la conversión. Gagatsis, Elia y Andreou (2003, citado en Elia et al., 2007) interpretan que esa compartimentación puede evidenciar diferentes visiones del objeto matemático según la representación que se use y un esquema conceptual poco integrado y con poca relación entre sus componentes. Sin embargo, también podría ser una muestra de adaptación de la actividad de conversión a partir de una comprensión global del objeto involucrado. Avanzar en la interpretación de este hecho queda abierto como línea futura de investigación.

Con relación al segundo objetivo del artículo, el estudio de las posibles relaciones entre el porcentaje de error y la congruencia entre las representaciones, los menores porcentajes de acierto se han dado en conversiones que involucran a los registros algebraico y verbal. Gran parte de los errores detectados están ligados a conversiones por congruencia, lo que, en gran medida, explica el mayor porcentaje de error que ha habido en las conversiones entre representaciones con menor congruencia y sin univocidad representacional. Este estudio ratifica la falta de congruencia como una dificultad importante para generar representaciones correctas (Duval, 1999, 2006). La explicación del error basada en estrategias CC es coincidente con la encontrada por González-Calero et al. (2015) en el caso del error de inversión al traducir expresiones verbales al lenguaje algebraico.

El porcentaje de acierto ha sido especialmente bajo en las conversiones con llegada al registro verbal. Esto puede ser parcialmente explicado por la menor congruencia en estas conversiones cuando no se mantiene el orden de aprehensión (Pecharromán et al., 2018), pero la dificultad se acrecienta por otros motivos. Uno de ellos es la mayor dificultad intrínseca de las representaciones verbales, que tienen una forma menos definida y se entrelazan con el lenguaje natural como medio de comunicación (Bossé et al., 2011). Otro es la menor atención que habitualmente suelen prestar los docentes a este registro (Adu-Gyamfi y Bossé, 2014; Bossé et al., 2011). Además, los alumnos también suelen infravalorar este registro, por ejemplo, en las anotaciones que toman de las clases frente a otros registros como el simbólico o el numérico (Arce, Conejo y Ortega, 2016). Por todo ello, son necesarias investigaciones que sigan profundizando en las conversiones donde el sistema de representación verbal esté involucrado.

Este estudio ha evidenciado la mayor facilidad de las conversiones en las que hay un mayor cumplimiento de los criterios de congruencia (especialmente, cuando se mantiene el orden de aprehensión), al presentar un mayor porcentaje de respuestas correctas. Estas conversiones podrían ser útiles en el tratamiento inicial del concepto.

Así, proponemos iniciar el tratamiento del concepto de intervalo con su representación gráfica, al considerar que es la que mejor muestra su significado, como subconjunto de la recta real (gráficamente, una semirrecta). Las primeras conversiones que se deben tratar serían la conversión del registro gráfico al numérico y viceversa, conversiones con univocidad representacional y mantenimiento del orden de aprehensión. En estos casos, las estrategias CC pueden dar lugar a expresiones correctas en una etapa inicial del aprendizaje. Sin embargo, en etapas posteriores, los alumnos deben ser conscientes de la insuficiencia de esta estrategia en términos de la comprensión global del concepto y de la producción de conversiones correctas. Por ejemplo, al proceder con una estrategia de tipo CC para convertir el intervalo $-1 > x$ al registro numérico, se producen errores como el mostrado en la figura 10. Para provocar la aparición de conflictos y errores asociados a la aplicación de estrategias de tipo CC, pueden proponerse actividades donde se demande, por ejemplo, convertir representaciones de intervalos de tipo numérico a representaciones algebraicas en las que se exija utilizar el signo «mayor que» o «mayor o igual que», u otro tipo de tareas donde el cumplimiento de los criterios de congruencia sea menor. Superar estos conflictos estará ligado al avance en sus razonamientos matemáticos, tratando de generar estrategias de conversión que evolucionen de un posible significado sintáctico a uno semántico.

En este proceso el registro verbal tiene una especial influencia, que ha de reconocerse, al ser forma de representación y, a la vez, medio de expresión para presentar e interpretar representaciones en otros registros dentro de la comunicación que exige el proceso de enseñanza-aprendizaje. Así, es necesario promover una variedad de oportunidades de aprendizaje asociadas a las representaciones verbales. Desde el momento inicial recomendamos acompañar las conversiones en los registros gráfico y numérico (y luego algebraico) con una lectura verbal de estas (oral o escrita) en la que se haga uso y se incite al uso de representaciones basadas en el mantenimiento del orden lingüístico (de tipo COL). Estas representaciones hacen presentes ciertos signos que no lo están en alguna representación (como son los números, la «x», en el registro numérico), y orientan al alumno hacia estrategias de tipo COL. Estas estrategias de conversión se han mostrado aquí como un potencial garante para el desarrollo y la consolidación de una comprensión global subyacente del concepto de intervalo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adu-Gyamfi, K. y Bossé, M. J. (2014). Processes and reasoning in representations of linear functions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *12*(1), 167-192. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9416-x

Arce, M., Conejo, L. y Ortega, T. (2016). ¿Cómo son los apuntes de matemáticas de un estudiante? Influencia de los elementos matemáticos y sus relaciones. *Enseñanza de las Ciencias*, *34*(1), 149-172. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1706

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10*(2), 135-149.

Berciano, A., Ortega, T. y Puerta, M. (2015). Aprendizajes de las interpolaciones gráficas y algebraicas. Análisis comparativo. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(3), 43-58. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1454

Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K. y Cheetham, M. R. (2011). Assessing the difficulty of mathematical translations: synthesizing the literature and novel findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *6*(3), 113-133.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: ICE-Horsori.

Clement, J. J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(1), 16-30.

De Bock, D., Van Dooren, W. y Verschaffel, L. (2015). Students' understanding of proportional, inverse proportional, and affine functions: two studies on the role of external representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(Supplement 1), 47-69. https://doi.org/10.1007 %2Fs10763-013-9475-z

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A. y Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *5*(3), 533-556. https://doi.org/10.1007/s10763-006-9054-7

Elliot, J. (1990). *La investigación-acción en Educación*. Madrid: Morata.

Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

González-Calero, J. A., Arnau, D. y Laserna-Belenguer, B. (2015). Influence of additive and multiplicative structure and direction of comparison on the reversal error. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(1), 133-147. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9596-0

Janvier, C. (ed.) (1987). *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kemmis, S. y McTaggart, T. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción*. Barcelona: Laertes.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, *60*(1), 1-64.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado* del 3 de enero de 2015 (169-546). Madrid: Gobierno de España.

NCTM (2000). *Principles and standards for School Mathematics*. Reston, VA: Autor.

Pecharromán, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado. *Enseñanza de las Ciencias*, *31*(3), 121-134. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v31n3.931

Pecharromán, C., Arce, M., Conejo, L. y Ortega, T. (2018). Metodología teórica para analizar la congruencia entre representaciones de objetos matemáticos: el caso de los intervalos no acotados de la recta real. *Educación Matemática*, *30*(3), 184-210. https://doi.org/10.24844/EM3003.08

Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: Una Empresa Docente.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, *4*(1), 1-14.

Stylianou, D. A. (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(3), 265-280. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9273-2

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Turner, R., Blum, W. y Niss, M. (2015). Using competencies to explain mathematical item demand: a work in progress. En K. Stacey y R. Turner (Eds.), *Assessing Mathematical Literacy. The PISA experience* (pp. 85-115). Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10121-7

Conversion strategies and errors among representations of intervals of the real line

Cristina Pecharromán Gómez
Departamento de Didáctica de las CC. EE., CC. SS. y de la Matemática. Universidad de Valladolid. Valladolid, España
cristina.pecharroman@uva.es

Matías Arce Sánchez
Departamento de Didáctica de las CC. EE., CC. SS. y de la Matemática. Universidad de Valladolid. Segovia, España
matias.arce@uva.es

Laura Conejo Garrote
Departamento de Didáctica de las CC. EE., CC.SS. y de la Matemática. Universidad de Valladolid. Soria, España
laura.conejo@uva.es

Intervals contribute to the understanding and the use of the real line. They are necessary for the development of concepts and procedures of algebra and mathematical analysis. However, there is hardly any literature on their teaching and learning processes.

Mathematical objects belong to a conceptual domain (Rico, 2009). In order to communicate ideas about them it is necessary to use their representations. These representations are part of semiotic systems where they are endowed with meaning, which is essential for cognitive activity (Duval, 1999). Goldin (2002) distinguishes between a syntactic notion of meaning, which refers only to the signs and elements of the semiotic system, and a semantic notion, in which meaning is inherent to the mathematical objects that are being represented. Learning a mathematical concept is closely linked to mastering its representations. Conversions from one representation system to another have a greater or lesser cognitive distance depending on the significant units and relevant characteristics that each representation makes explicit (Duval, 2006), and the congruence between the significant units that constitute both representation systems.

The results of a research carried out on Grade 10 and 11 students are presented, whose objectives are to identify the strategies used by the students to accomplish conversions among different representations of unbounded intervals, as well as to interpret possible mistakes and difficulties derived from these strategies.

A qualitative research methodology is used. The different strategies as used by students, their interpretation and possible mistakes were identified and consolidated along five cycles. Two questionnaires were designed and implemented per each cycle with tasks of direct conversion of an unbounded interval given in a representation system to another. The representation systems considered were graphic, numerical, algebraic and verbal.

The conversions between the graphic system and the numerical one had the highest percentage of correct answers. The characteristics of these conversions make it easy to make them correctly by congruence, directly transferring the symbols from one expression to another. Conversions which involve the algebraic system had a higher percentage of error, due to the difficulties given by the double function and reading of the inequality symbols. Different successful strategies were detected, in which students decided to write firstly a particular element: the generic elements that the interval constitutes («the numbers», «x»), the number which is the endpoint of the interval or the inequality symbol always in the same sense. Many mistakes were identified in conversions by congruence involving > or ≥, since the writing does not follow the direction of the real line. These conversions by congruence are based, at most, on a syntactic meaning (Goldin, 2002) of the signs of an expression and show a phenomenon of discretization also detected in the learning of other mathematical objects, such as functions.

Conversions based on the verbal system had the highest percentage of error, perhaps due to its greater intrinsic difficulty and the fact that it is given less attention in the classroom context. Incorrect representations have appeared based on the reading of the symbols of the representation, revealing conversions by congruence.

Congruence conversions can be useful at early in the process of teaching a concept, but in later stages the student must be made aware of its insufficiency in terms of the overall understanding of the concept. Teachers should propose tasks that generate conflicts, thus fostering the evolution of conversion strategies, and doing adequate verbal readings of representations.