ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 37-3 (2019), 149-167
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2673
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

# Caracterización del esquema de sucesión numérica en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria

## Characterization of the numeric sequence schema among Compulsory Secondary Education students

José Mariano Bajo Benito, José María Gavilán-Izquierdo, Gloria Sánchez-Matamoros García
*Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Sevilla (España)*
jbajo@us.es, gavilan@us.es, gsanchezmatamoros@us.es

RESUMEN • El objetivo de esta investigación es la caracterización de la compresión del concepto de sucesión numérica en los estudiantes de segundo ciclo de Educación Secundaria Obligatoria (14-16 años), considerando como marco teórico APOS, a través del uso que hacen los estudiantes de los elementos matemáticos, las relaciones que se establecen entre ellos, los modos de representación y los modos de conocer que se ponen de manifiesto en la resolución de las tareas matemáticas que se les proponen. Nuestra metodología es cualitativa, usando datos provenientes de dos cuestionarios de distinta naturaleza. A partir del análisis conjunto de los dos cuestionarios contestados por cada estudiante, se caracterizan los distintos niveles de comprensión del esquema del concepto de sucesión como lista numérica.

PALABRAS CLAVE: Sucesiones numéricas; Estudiantes de educación secundaria obligatoria; Teoría APOS; Desarrollo de un esquema.

ABSTRACT • The aim of this research is to characterize the understanding of the numerical sequence concept in high school students (14-16 years old). The study draws on the APOS theory, which considers how students use mathematical elements, the relationships established between them, theirs modes of representation and the cognitive structures that are showed in the resolution of mathematical tasks. Our methodology is qualitative, using data from two questionnaires of diverse nature. The different levels of understanding of the scheme of the concept of numerical sequence were characterized taking into consideration the analysis of the two questionnaires.

KEYWORDS: Numerical sequences; High school students; APOS theory; Schema development.

Recepción: mayo 2018 • Aceptación: abril 2019 • Publicación: noviembre 2019

Bajo Benito, J. M., Gavilán-Izquierdo, J. M. y Sánchez-Matamoros García, G. (2019). Caracterización del esquema de sucesión numérica en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria. *Enseñanza de las ciencias, 37*(3), 149-167
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2673

## INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones han resaltado la importancia de la investigación sobre el concepto de sucesión numérica por las implicaciones en la comprensión de otros conceptos de análisis matemático. Así, Mamona-Downs (2001) y Roh (2008), en sus investigaciones sobre el concepto de límite, destacaron que una buena concepción del concepto de sucesión es fundamental para la comprensión del concepto de límite. Vinculadas a la comprensión del concepto de serie numérica, las investigaciones de Bagni (2005) y Codes Valcarce y González-Martín (2017) señalan la relevancia de las investigaciones sobre el concepto de sucesión numérica, ya que formalmente una serie numérica es una sucesión de sumas parciales. Debido al auge de la tecnología, actualmente Weigand (2015) considera que se debería prestar más atención a las sucesiones numéricas en términos de relaciones de recurrencia, pues son prototipos de objetos discretos en matemáticas.

El análisis de la comprensión del concepto de sucesión ha sido abordado por diferentes investigadores desde distintas perspectivas teóricas. Así, McDonald, Mathews y Strobel (2000), en su investigación con estudiantes universitarios, en relación con el tipo de construcciones mentales que hacen los estudiantes sobre la comprensión de dicho concepto, indican que construyen dos objetos cognitivos diferentes: por una parte, un objeto como listado de números (*Seqlist*), y, por otra, otro objeto como función, cuyo dominio pertenece al conjunto de los naturales (*Seqfun*), centrando su estudio en este último. Przenioslo (2006), en su investigación con estudiantes de secundaria (16-19 años), dividió las concepciones de los estudiantes en dos grupos: en un primer grupo se percibía una sucesión como una función, y en un segundo grupo se percibía una sucesión conectada con un conjunto ordenado de números, en el que debe existir una relación entre los términos o una cierta regularidad. Esta autora considera que para la comprensión del concepto de sucesión numérica es conveniente el uso de diferentes modos de representación, distinguiendo dentro del modo gráfico entre gráfico-lineal (representación de las sucesiones como puntos de la recta numérica) y gráfico-cartesiano (representación de las sucesiones como puntos del plano cartesiano).

Por su parte, Mor, Noss, Hoyles, Kahn y Simpson (2006), en su investigación también con estudiantes de Secundaria, observaron que las secuencias numéricas son consideradas intuitivamente recursivas por dichos estudiantes. Es decir, más que como una relación entre los valores y sus posiciones respectivamente, se ven como una relación entre valores sucesivos de una secuencia. Cañadas (2007), en su investigación sobre sucesiones de números naturales lineales y cuadráticos, se centra en cuatro sistemas relacionados con las representaciones discretas (numérica, gráfica, algebraica y verbal) y sus variantes. González, Medina, Vilanova y Astiz (2011), en su investigación con estudiantes universitarios, identificaron dificultades en la relación entre la interpretación gráfica y la algebraica en el concepto de sucesión.

En este trabajo, nos centramos en caracterizar la comprensión del concepto de sucesión como lista numérica en alumnos de segundo ciclo de Educación Secundaria Obligatoria (14-16 años) a través del desarrollo de un esquema (Arnon et al., 2014).

Desde el punto de vista curricular, el concepto de sucesión numérica aparece en segundo ciclo de Educación Secundaria Obligatoria, recogido en el bloque de Álgebra, en los siguientes términos «Estudio y análisis de sucesiones numéricas. Progresiones aritméticas y geométricas. Sucesiones recurrentes. Curiosidad e interés por investigar las regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en los conjuntos de números» (BOE, n.º 5, 05/01/2007, p. 756).

En nuestra investigación, siguiendo la definición de Stewart, Hernández y Sanmiguel (2007), consideramos el concepto de sucesión numérica de la siguiente forma: una sucesión es un conjunto infinito de números escritos en un orden específico, $a_1$, $a_2$, $a_3$..., $a_n$..., donde cada miembro del conjunto ha sido etiquetado con un subíndice natural, siendo $a_1$ el primero y, en general, el término n-ésimo $a_n$. Anotaremos la sucesión como $\{a_n\}$.

Existen diversas formas de construir los términos de una sucesión numérica; nosotros vamos a considerar las siguientes: mediante una fórmula que defina el término n-ésimo (término general), a través de un conjunto de instrucciones que indican cómo se obtiene un término a partir de los anteriores (por recurrencia) o dando una serie de términos consecutivos ordenados, uno detrás de otro, como una lista infinita de números (por extensión).

Del mismo modo, una progresión aritmética es una sucesión de la forma a, a+d… a+nd..., y una progresión geométrica es una sucesión de la forma a, ar..., $ar^n$... (Stewart et al., 2007).

En consecuencia, en este trabajo vamos a considerar los siguientes elementos matemáticos con relación al concepto de sucesión como lista numérica:

- E1 Sucesión (como lista): secuencia de números reales dispuestos en un orden, es decir, para todo número natural n existe un número real.
- E2 Términos de una sucesión: se definen como los integrantes de la sucesión; el lugar que ocupa lo determina su posición, que se denota por un subíndice que pertenece a los números naturales.
- E3 Término general de una sucesión: se define como el término que, dependiendo de su posición, es decir, subíndice, sabemos su valor, y se denota por «$a_n$» (con n perteneciente a los naturales).
- E4 Progresión aritmética: sucesión donde cada término se obtiene del anterior sumándole una cantidad fija que denominamos diferencia.
- E5 Término general de una progresión aritmética:

  $\{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d, n \in N\}$ siendo $a_1$ el primer término y d la diferencia entre términos consecutivos.
- E6 Progresión geométrica: sucesión donde cada término se obtiene del anterior multiplicándolo una cantidad fija que denominamos razón.
- E7 Término general de una progresión geométrica:

  $\{a_n = a_1 \cdot r^{n-1},\ n \in N\}$ donde $a_1$ es el primer término y r la razón de la progresión.
- E8 Sucesión recurrente: una sucesión es recurrente si hay definida sobre ella una ley de recurrencia, es decir, una relación entre un término y los anteriores.
- E9 Sucesión por extensión: se define una sucesión por extensión cuando se dan una serie de términos consecutivos de ella.
- E10 Sucesión creciente: se dice que una sucesión $\{a_n,\ n \in N\}$ es creciente cuando cada término es menor o igual que el término siguiente.
- E11 Sucesión decreciente: se dice que una sucesión $\{a_n,\ n \in N\}$ es decreciente cuando cada término es mayor o igual que el término siguiente.

## MARCO TEÓRICO

Consideramos como marco teórico para estudiar la comprensión del concepto de sucesión numérica el marco APOS (Arnon et al., 2014; Dubinsky, 1991). En este marco, acciones, procesos, objetos y esquemas son constructos mentales para la construcción de conocimiento matemático que se organizan en la descomposición genética de un concepto, entendida como «un conjunto estructurado de constructos mentales, que pueden describir cómo el concepto se desarrolla en la mente del individuo» (Asiala et al., 1996). La descomposición genética de un concepto matemático no es única y proporciona una posible progresión en el aprendizaje del estudiante para la formación del concepto.

Según Arnon et al. (2014), un concepto se concibe primero como una acción, es decir, como una transformación externa que necesita ser realizada explícitamente sobre un objeto u objetos concebidos previamente. A medida que las acciones se repiten, el individuo pasa de depender de señales externas a tener control interno sobre ellas, pasando a concebir el concepto como un proceso. Los procesos se construyen utilizando uno de los siguientes mecanismos mentales: interiorización, inversión o coordinación, y cada uno de estos mecanismos da lugar a nuevos procesos.

La interiorización permite ser consciente de una acción, reflexionar sobre ella y combinarla con otras acciones (Dubinsky, 1991). Una acción interiorizada es un proceso. La inversión de un proceso es la posibilidad de pensarlo invertido en el sentido de deshacer los pasos del proceso interiorizado, lo que da lugar a un nuevo proceso.

La coordinación de procesos es el acto cognitivo de coger dos o más procesos y usarlos para construir un nuevo proceso. En general, la coordinación puede transformar procesos en procesos o procesos en objetos a partir de la encapsulación.

La encapsulación se produce cuando un individuo aplica una acción o proceso a un proceso, es decir, ve una estructura dinámica (proceso) como una estructura estática (objeto) a la que se pueden aplicar acciones.

## Desarrollo de un esquema en la teoría APOS

La teoría APOS aborda el desarrollo de la comprensión de conceptos matemáticos en términos de construcción de esquemas, mediante el mecanismo de abstracción reflexiva (Piaget y García, 1983). En este modelo se define un esquema

> como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática (Trigueros, 2005: 11).

Un esquema se puede transformar en una estructura estática (objeto) y/o se puede usar como una estructura dinámica que asimila otros objetos o esquemas relacionados.

Esta aproximación al desarrollo de un esquema ha sido considerada en distintas investigaciones para caracterizar la comprensión de diferentes conceptos matemáticos como, por ejemplo, el de derivada (Baker, Cooley y Trigueros, 2000; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006), transformación lineal (Roa-Fuentes y Oktac, 2010) o límite (Valls, Pons y Llinares, 2011). En dichas investigaciones, un esquema se desarrolla pasando por tres niveles (tríada): intra-inter-trans, en un orden fijo. En el esquema de sucesión como lista numérica, estos tres niveles se caracterizan de la siguiente forma:

## Nivel intra

Está caracterizado por el uso de elementos matemáticos de forma aislada en algún modo de representación, sin establecer relaciones. Es decir, los modos de representación son considerados por el estudiante como distintos y no los relaciona cognitivamente. Es decir, los estudiantes, en este nivel, no son capaces de entender que un elemento matemático puede estar representado en diferentes modos de representación. Un individuo, en este nivel de desarrollo de un esquema, se centra en acciones, procesos y objetos individuales sin relacionarlos con otros.

### Nivel inter

Está caracterizado por el uso de elementos matemáticos de forma correcta en algunos modos de representación y se establecen relaciones lógicas entre elementos matemáticos que se encuentran en el mismo modo de representación. Este nivel está caracterizado por la construcción de relaciones y transformaciones entre los procesos y los objetos que constituyen el esquema.

### Nivel trans

En este nivel aumenta el repertorio de uso de las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos. Se produce la *síntesis* de los modos de representación. Es decir, los estudiantes, en este nivel, son capaces de entender que un elemento matemático puede estar representado en diferentes modos de representación y tratarse de un mismo objeto. Todo ello lleva a la construcción de la estructura matemática. En este nivel es cuando el estudiante reflexiona sobre las conexiones y las relaciones desarrolladas en el nivel anterior y aparecen nuevas estructuras. A través de las síntesis de estas relaciones, el estudiante es consciente de las transformaciones que se desarrollan en el esquema y construye una estructura nueva. En este nivel aparece el desarrollo de la coherencia del esquema, que se demuestra por la capacidad de un individuo para reconocer las relaciones que se incluyen en el esquema, reflexionar sobre la estructura explícita del esquema y considerar el contenido del esquema adecuado a la resolución de un problema.

En los niveles inter y trans de la tríada, el estudiante reorganiza conocimientos adquiridos en el nivel anterior. El paso de un nivel al siguiente por parte del estudiante incluye un aumento en el repertorio de los elementos matemáticos, así como la construcción de nuevas formas de relaciones o transformaciones entre los elementos matemáticos usados por el estudiante en la resolución de un problema.

A partir de las ideas planteadas en este marco teórico, la pregunta que abordamos en este trabajo es la siguiente: ¿Podemos caracterizar los niveles de comprensión del esquema de sucesión numérica en estudiantes de segundo ciclo de Educación Secundaria?

## METODOLOGÍA

### Participantes

Los participantes en esta investigación son 105 estudiantes de segundo ciclo de la ESO (14-16 años) de un centro de la Comunidad Autónoma de Andalucía. A dichos estudiantes se les había introducido el concepto de sucesión numérica según el currículo oficial (BOE, n.º 5, 5/01/2007, p. 756; BOJA, n.º 171, 10/08/2007, p. 54). Es en este ciclo de ESO donde aparece por primera vez este concepto en el currículo.

### Instrumentos de recogida de datos

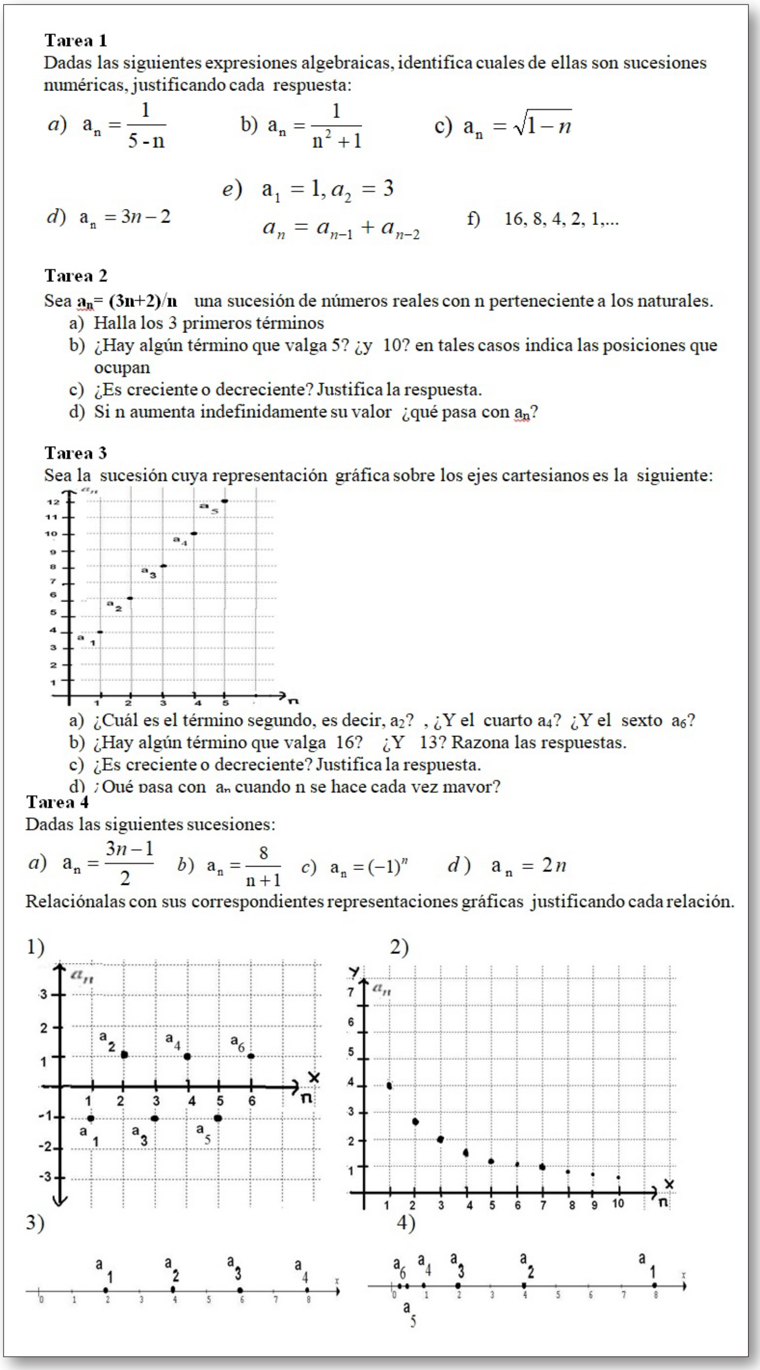
Como instrumentos de recogida de datos, usamos dos cuestionarios. Un primer cuestionario con cuatro tareas y un segundo cuestionario diseñado para cada estudiante a partir de las respuestas dadas en el primer cuestionario (entrevista semiestructurada escrita), y profundizar así en aquellas respuestas que no habían sido explicadas.

El primer cuestionario se diseñó a partir de una descomposición genética del concepto de sucesión como lista numérica, construida a partir de la experiencia de los investigadores sobre la enseñanza-aprendizaje de dicho concepto, su conocimiento del modelo APOS, su conocimiento matemático, el desarrollo histórico de dicho concepto y la revisión de investigaciones sobre este (Arnon et al., 2014). Dicha descomposición genética es la siguiente:

0. Prerrequisitos
   Los conceptos previos para la construcción del esquema de sucesión numérica son expresión algebraica y valor numérico de expresión algebraica como objetos y representaciones gráficas de puntos en la recta numérica y en el plano cartesiano como proceso.
1. Acción de calcular términos de una sucesión a partir de la posición que ocupa.
2. Interiorización de la acción de calcular términos de la sucesión a partir de la posición que ocupa como proceso, reflexionando sobre los resultados obtenidos a partir de la repetición de la acción de calcular diferentes términos de la sucesión sustituyendo en el término general.
3. Inversión del proceso construido en el punto 2 para obtener la posición que ocupa un término concreto de la sucesión numérica.
4. Coordinación del proceso construido en el punto 2 en los diferentes modos de representación.
5. Encapsulación del proceso 4 como un objeto sobre el que realizar acciones o procesos para el estudio de propiedades globales donde están implicados todos los términos de la sucesión ($a_n = [a_1, a_2, \ldots]$).
6. Desencapsulación del objeto 5 como proceso, donde puede considerarse la sucesión completa y algunos de sus términos concretos, por ejemplo en situaciones de comparación de sucesiones, tendencia, etc.

En relación con los modos de representación del concepto de sucesión numérica, teniendo en cuenta la revisión de la literatura, consideramos los siguientes: modo de representación numérico, modo de representación algebraico, modo de representación gráfico-lineal (representación de las sucesiones como puntos de la recta numérica) y modo de representación gráfico-cartesiano (representación de las sucesiones como puntos del plano cartesiano).

Las tareas fueron diseñadas teniendo en cuenta la descomposición genética de sucesión numérica, la revisión de la literatura, los elementos matemáticos que constituyen el concepto de sucesión numérica (enumerados en la introducción) y las relaciones que se podían establecer entre ellos en los diferentes modos de representación.



**Tarea 1**

Dadas las siguientes expresiones algebraicas, identifica cuales de ellas son sucesiones numéricas, justificando cada respuesta:

*a)* $a_n = \dfrac{1}{5-n}$  b) $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$  c) $a_n = \sqrt{1-n}$

*d)* $a_n = 3n-2$  *e)* $a_1 = 1, a_2 = 3$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  f) 16, 8, 4, 2, 1,...

**Tarea 2**

Sea $a_n = (3n+2)/n$ una sucesión de números reales con n perteneciente a los naturales.

a) Halla los 3 primeros términos
b) ¿Hay algún término que valga 5? ¿y 10? en tales casos indica las posiciones que ocupan
c) ¿Es creciente o decreciente? Justifica la respuesta.
d) Si n aumenta indefinidamente su valor ¿qué pasa con $a_n$?

**Tarea 3**

Sea la sucesión cuya representación gráfica sobre los ejes cartesianos es la siguiente:

a) ¿Cuál es el término segundo, es decir, $a_2$? , ¿Y el cuarto $a_4$? ¿Y el sexto $a_6$?
b) ¿Hay algún término que valga 16? ¿Y 13? Razona las respuestas.
c) ¿Es creciente o decreciente? Justifica la respuesta.
d) ¿Qué pasa con $a_n$ cuando n se hace cada vez mayor?

**Tarea 4**

Dadas las siguientes sucesiones:

*a)* $a_n = \dfrac{3n-1}{2}$  *b)* $a_n = \dfrac{8}{n+1}$  *c)* $a_n = (-1)^n$  *d)* $a_n = 2n$

Relaciónalas con sus correspondientes representaciones gráficas justificando cada relación.

1) 2) 3) 4)

Fig. 1. Tareas del cuestionario 1

El primer cuestionario se respondió en una hora de clase y el segundo fue respondido un par de semanas después. A continuación, describimos las cuatro tareas del cuestionario primero (figura 1).

En la tarea 1, a partir de expresiones analíticas (numéricas y algebraicas), se pide a los estudiantes que determinen cuáles de ellas son sucesiones numéricas. Ello requiere del estudiante, en los apartados b y d, una *forma de conocer acción* del concepto de sucesión numérica, a través del uso conjunto (relación «Y lógica») de los elementos matemáticos, término (E2), sucesión como lista (E1) y término general (E3). Y para considerar que dicha expresión algebraica es una sucesión, requiere de los estudiantes una *forma de conocer proceso* del concepto de sucesión numérica, ya que debe considerar que es posible obtener los infinitos valores que constituyen la sucesión.

En los apartados a y c, requiere del estudiante una *coordinación de procesos* en el concepto de sucesión numérica a través del uso de la relación lógica de contrarrecíproco de los elementos sucesión como lista (E1) y términos de una sucesión (E2) (no E2 → no E1); de esta manera el estudiante indicará que no son sucesiones numéricas, en el apartado a), por no existir el término correspondiente a n = 5, y en el apartado c) por solo existir el término correspondiente a n = 1.

El apartado e) requiere del estudiante una forma de conocer acción para calcular los términos desde el primero (ley de recurrencia [E8]), y en el apartado f) requiere del estudiante una forma de conocer acción para identificar los términos de la progresión geométrica de razón ½ (E6). Y manifiesta una forma de conocer proceso al considerar los infinitos valores a través de su término general (E7).

En la tarea 2, a partir de una sucesión numérica expresada en forma algebraica, se requiere del estudiante, por un lado, una *forma de conocer acción* del concepto de sucesión numérica para el apartado a), ya que para ello el estudiante debe hacer uso de los elementos término (E2) y término general (E3) mediante la relación «y lógica». Por otro lado, se requiere de los estudiantes una *forma de conocer proceso* para el apartado b) como proceso inverso del descrito anteriormente en la tarea 1 (apartados b, d, e y f); para este apartado b) se necesita la relación recíproca del elemento término general (E3), donde a cada valor se le asigna su posición. En el apartado c) se requiere del estudiante una *forma de conocer objeto*, ya que debe considerar la sucesión completa y por lo tanto tenerla encapsulada, pues debe decidir si la sucesión es creciente (E10) o decreciente (E11). Al tratarse de una propiedad global, afecta o están implicados todos los términos de la sucesión. El apartado d) requiere del estudiante desencapsular el objeto de sucesión numérica creciente (E10) o decreciente (E11) utilizado en el apartado anterior para decidir qué ocurre con la sucesión cuando n aumenta indefinidamente.

En la tarea 3, a partir de una sucesión numérica expresada en forma gráfica-cartesiana, en el apartado a) se requiere del estudiante una *forma de conocer acción* del concepto de sucesión numérica (E1) en modo gráfico-cartesiano, para poder hallar los términos segundo y cuarto (E2); por otro lado, para hallar el término sexto se requiere del estudiante una *forma de conocer proceso*, con el fin de considerar la sucesión como una progresión aritmética (E4) y, a partir del quinto término representado en la gráfica, calcular el siguiente. Y en el apartado b), el proceso inverso del término general de una progresión aritmética (E5), donde a partir del valor (eje Y) obtener la posición mediante la coordinación entre ambos ejes (E2). En el apartado c), igual que en la tarea anterior, se requiere del estudiante una *forma de conocer objeto*, para decidir si la sucesión es creciente (E10) o decreciente (E11). Y, por último, en el apartado d) se requiere del estudiante desencapsular el objeto de sucesión numérica al igual que en la tarea anterior.

La consideración conjunta de las tareas 2 y 3 permite apreciar las distintas formas de conocer el concepto de sucesión numérica en diferentes modos de representación, pudiéndose poner de manifiesto la síntesis entre ellos.

En la tarea 4, a partir de 4 sucesiones numéricas expresadas en modo algebraico y 4 sucesiones numéricas expresadas en modo gráfico (2 en forma gráfico-lineal y 2 en forma gráfico-cartesiana), se le pide al estudiante que relacione cada expresión algebraica con su correspondiente representación gráfica. Esta tarea requiere del estudiante una *forma de conocer objeto* del concepto de sucesión numérica, en los modos de representación algebraico, gráfico-lineal y gráfico-cartesiano. Por un lado, a través de la coordinación (mediante una relación de conjunción lógica) como objetos de los elementos matemáticos, términos (E2), sucesión como lista numérica (E1) y término general (E3), el estudiante debe ser capaz de desencapsular el elemento término general (E3), en la expresión algebraica (apartados a, b, c y d), a un proceso para obtener los términos (E2) y para considerar que es posible obtener los infinitos valores que constituyen la sucesión numérica (E1). Por otro lado, en el modo de representación gráfico-lineal (apartados 3 y 4) y gráfico-cartesiano (apartados 1 y 2) debe ser capaz de desencapsular el elemento matemático términos (E2) a un proceso para obtener la sucesión como lista numérica (E1) mediante la relación «implicación lógica» E2 → E1.

Finalmente, el estudiante debe establecer una relación de equivalencia lógica entre los elementos matemáticos, sucesión como lista numérica (E1), términos (E2) y término general (E3), en diferentes modos de representación donde a cada término de la expresión en modo algebraico le corresponda su equivalente en modo gráfico-lineal o gráfico-cartesiano, y viceversa, poniéndose de manifiesto la síntesis entre los modos de representación, lo que le lleva a emparejar el apartado b) con el apartado 2), el c) con el 1) y el d) con el 3), y a no poder establecer la relación de equivalencia del apartado a), puesto que el primer término del apartado a) ($a_1 = 1$) no se corresponde con el primer término de ninguna gráfica, y el primer término de la gráfica 4) $a_1 = 8$ no se corresponde con el primer término de ninguna expresión algebraica.

### Procedimiento de análisis

El análisis se centró en identificar los elementos matemáticos, las relaciones lógicas que se establecen entre ellos, los modos de representación, las traslaciones entre ellos y las formas de conocer el concepto de sucesión numérica que se ponían de manifiesto en las repuestas de los estudiantes en la resolución de las tareas.

El análisis se realizó considerando conjuntamente los datos procedentes de los dos cuestionarios. Una característica del proceso de análisis seguido es que el segundo cuestionario se respondió en días posteriores a la realización del primer cuestionario, con el objetivo de aclarar el proceso de resolución llevado a cabo por el estudiante en el primer cuestionario. Para ello, previamente a la realización del segundo cuestionario, se examinaron las respuestas dadas por los estudiantes en el primer cuestionario, a fin de adecuar el segundo cuestionario a las respuestas dadas por los estudiantes en el primero. De esta manera, el segundo cuestionario era personalizado para cada estudiante y permitió ampliar la información.

El procedimiento de análisis se ha realizado en dos fases. En la primera fase, se analizó cada una de las tareas, considerando conjuntamente las respuestas dadas a la tarea en los dos cuestionarios; con ello obtuvimos una caracterización de la comprensión del concepto de sucesión para cada una de las tareas.

En la segunda fase del análisis, a partir de los resultados obtenidos en la primera fase, se analizó la resolución de todas las tareas para cada uno de los estudiantes. De esta manera se obtuvo una caracterización del nivel comprensión del concepto de sucesión numérica que ha alcanzado el estudiante.

## RESULTADOS

En esta sección de resultados mostramos la caracterización de los diferentes niveles de comprensión del concepto de sucesión numérica puestos de manifiesto por los estudiantes. Esta sección está organizada presentando las características de los diferentes niveles de comprensión del concepto de sucesión numérica, a través de una selección de respuestas de estudiantes que describen comportamientos prototípicos de estos en los diferentes niveles de compresión del concepto de sucesión numérica (intra, inter y trans).

## Nivel intra del desarrollo del esquema de sucesión numérica

Un individuo, en este nivel de desarrollo del esquema, se centra en acciones, procesos y objetos individuales sin relacionarlos con otros. Este nivel se caracteriza por el uso que hace el estudiante de (pocos) elementos matemáticos de forma aislada (a veces de forma correcta) en algún modo de representación, sin establecer relaciones, es decir, no los relaciona cognitivamente.

Un ejemplo de este nivel lo muestra la estudiante e29. Esta estudiante, en el apartado a) de la tarea 1 del primer cuestionario (figura 1), hace uso correcto del elemento matemático término general de una sucesión (E3) para calcular algunos términos concretos, $a_1$ y $a_2$, a partir de la expresión algebraica, lo que pone de manifiesto que e29 conoce como acción el concepto de sucesión numérica. Por otra parte, esta estudiante hace un uso incorrecto de la relación lógica entre sucesión numérica (E1) y progresión (E4) (figura 2) al considerar una relación de equivalencia lógica entre ambos elementos en lugar de la relación de implicación (E4 → E1).

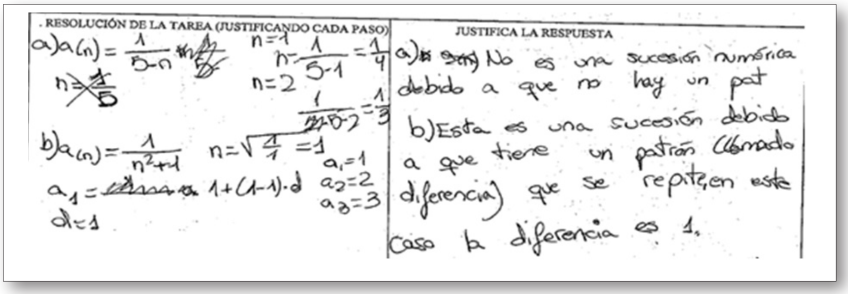



Fig. 2. Respuesta de e29 a la tarea 1 del primer cuestionario

Para indagar sobre esta respuesta nos apoyamos en el segundo cuestionario, donde le pedimos que nos aclare dicha respuesta: «Pregunta: Para el apartado a), ¿por qué no es una sucesión?». «e29: Porque no había nada que se repita».

En el apartado b) de la tarea 1, hace un uso incorrecto del elemento matemático término general (E3), que había usado anteriormente de forma correcta, es decir, no obtiene los términos de la sucesión numérica a partir de la expresión algebraica dada por el término general (figura 2). Esto la ha llevado a considerar que la expresión es una sucesión al identificarla como una progresión aritmética de diferencia 1. Considerando conjuntamente este apartado con el anterior, se vuelve a evidenciar la relación de equivalencia que esta estudiante establece incorrectamente entre sucesión y progresión.

A partir de estas respuestas podemos inferir que e29 se encuentra en el nivel intra, pues usa un mismo elemento de forma correcta e incorrecta (término general E3). Y usa las relaciones de equivalencia lógica e implicación lógica con errores, al establecer relaciones entre sucesión y progresión. Lo mismo sucede en los restantes apartados de esta tarea 1 y en las tareas 2 y 3.

En la tarea 4, donde e29 tiene que relacionar cada expresión algebraica con su correspondiente representación gráfica, justificando la respuesta (figura 1), no coordina los elementos matemáticos necesarios para resolver la tarea (términos (E2), sucesión como lista numérica (E1) y término general (E3)), al no tenerlos como objeto. Tan solo es capaz de emparejar de forma correcta la expresión algebraica del apartado d ($a_n = 2n$) con la gráfica-lineal 3. Esto puede deberse a que se trata de la sucesión correspondiente a los pares, que e29 puede conocer como acción, puesto que no se evidencia que pueda conocerla como objeto que desencapsula. De ser así podría haberla considerado como progresión aritmética de diferencia 2 en lugar de hablar de la construcción de los números pares («se va multiplicando por 2 el término n») (figura 3).

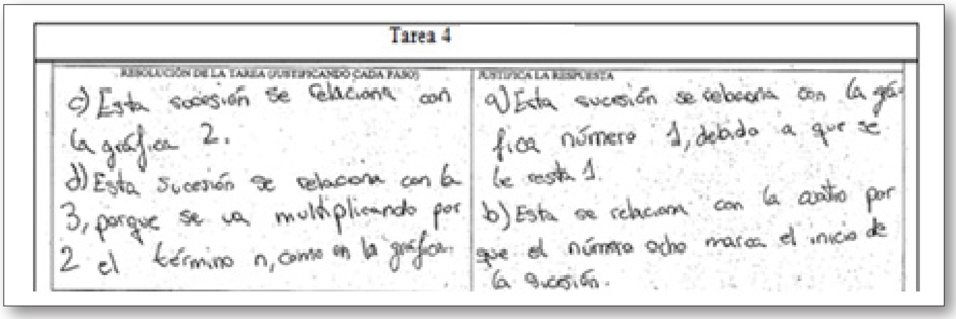



Fig. 3. Respuesta de e29 a la tarea 4 del primer cuestionario

Estos hechos nos llevan a considerar que este comportamiento es característico de los estudiantes que se encuentran en el nivel intra de desarrollo del esquema de sucesión como lista numérica. Es decir, se pone de manifiesto una forma de conocer acción del concepto de sucesión numérica, lo que conlleva que a veces un mismo elemento pueda ser usado de forma correcta en determinadas tareas e incorrecta en otras. Los elementos matemáticos se usan vinculados a un modo de representación, y no se realizan traslaciones entre modos de representación. Además, en este nivel las relaciones lógicas entre elementos se producen siempre con errores.

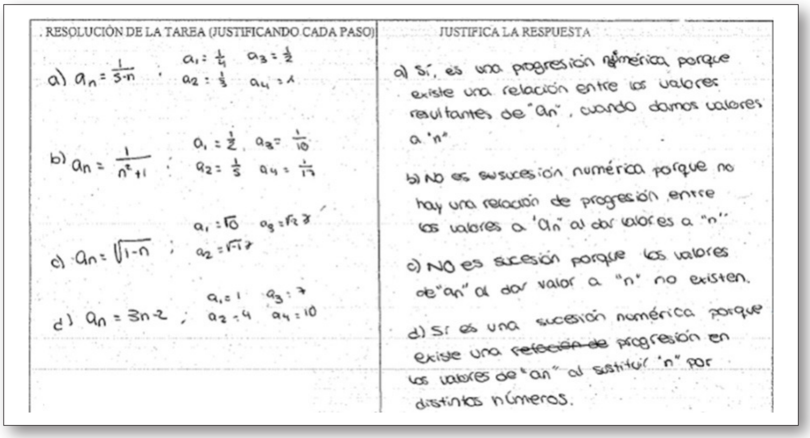
## Nivel inter del desarrollo del esquema de sucesión numérica

En este nivel de desarrollo, los estudiantes usan los elementos matemáticos de forma correcta y establecen relaciones entre ellos cuando se encuentran en un mismo modo de representación, a veces de forma incorrecta. También en este nivel se ponen de manifiesto las traslaciones de un modo de representación a otro y diferentes formas de conocer el concepto.

Un ejemplo de este nivel es e5, estudiante que en la respuesta a la tarea 1 pone de manifiesto el uso correcto de la relación de conjunción lógica a través del uso conjunto de los elementos matemáticos, términos de una sucesión (E2), sucesión como lista (E1) y término general de una sucesión (E3), para obtener términos concretos a partir de una expresión algebraica o numérica en el apartado a). Y el uso incorrecto de la relación de equivalencia lógica en el apartado b), en el que justifica la respuesta dada de la siguiente manera: «No es sucesión numérica porque no hay una relación de progresión entre los valores $a_n$ al dar valores a n» (figura 4), afirmación que pone de manifiesto que la relación no progresión (E4-E6) implica no sucesión (E1), lo que muestra un uso incorrecto de la relación lógica de contrarrecíproco. Sin embargo, sí hace uso correcto de la implicación lógica E4 → E1 (apartado d) y E6 → E1 (apartado f).

En el segundo cuestionario le preguntamos sobre este hecho y e5 responde: «Una progresión es un tipo concreto de sucesión en la cual entre los términos que la forman hay una diferencia/razón (aritmética o geométrica) común». Esta respuesta muestra que, aunque e5 conoce la relación que existe entre sucesiones o progresiones (progresión como tipo de sucesión), cuando debe hacer uso de ello en la resolución de una tarea no es capaz de hacerlo de forma correcta. Este hecho pone de manifiesto que una característica del nivel inter es el uso incorrecto de algunas relaciones lógicas.

Además, también se pone de manifiesto en e5 una forma de conocer proceso del concepto de sucesión numérica, al considerar que no es sucesión porque no existe un término $a_5$ (tarea 1 apartado a). Para contestar de esta manera, el estudiante coordina dos procesos a través del uso de la relación lógica de contrarrecíproco de los elementos sucesión como lista (E1) y términos de una sucesión (E2) (no E2 → no E1).

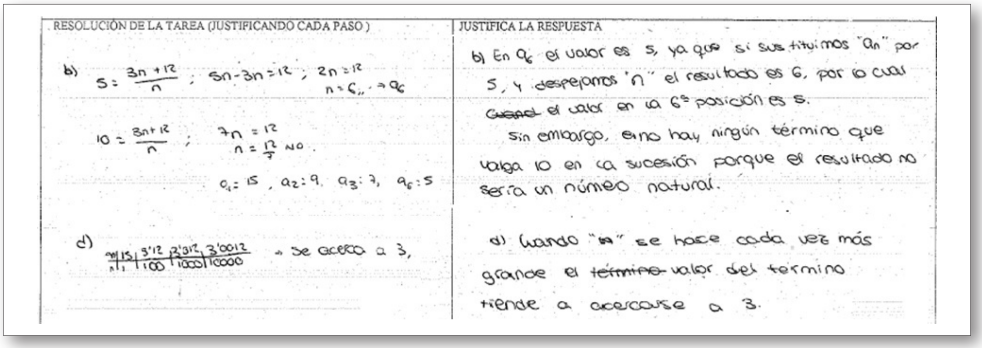


| RESOLUCIÓN DE LA TAREA (JUSTIFICANDO CADA PASO) | JUSTIFICA LA RESPUESTA |
|---|---|
| a) $a_n = \frac{1}{5-n}$ ; $a_1 = \frac{1}{4}$ $a_2 = \frac{1}{3}$ $a_3 = \frac{1}{2}$ $a_4 = 1$ | a) Sí, es una progresión numérica porque existe una relación entre los valores resultantes de "an", cuando damos valores a "n" |
| b) $a_n = \frac{1}{n^2+1}$ ; $a_1 = \frac{1}{2}$ $a_2 = \frac{1}{5}$ $a_3 = \frac{1}{10}$ $a_4 = \frac{1}{17}$ | b) No es su sucesión numérica porque no hay una relación de progresión entre los valores a "an" al dar valores a "n" |
| c) $a_n = \sqrt{1-n}$ ; $a_1 = \sqrt{0}$ $a_2 = \sqrt{-1}$ $a_3 = \sqrt{-2}$ | c) NO es sucesión porque los valores de "an" al dar valor a "n" no existen. |
| d) $a_n = 3n-2$ ; $a_1 = 1$ $a_2 = 4$ $a_3 = 7$ $a_4 = 10$ | d) Si es una sucesión numérica porque existe una ~~relación de~~ progresión en los valores de "an" al sustituir "n" por distintos números. |

Fig. 4. Respuesta de e5 a la tarea 1 del primer cuestionario

En la tarea 2, e5 pone de manifiesto una forma de conocer proceso el concepto de sucesión numérica, a través de la traslación del modo de representación algebraico al modo numérico, construyendo una tabla de valores (figura 5), y responde que «se acerca a 3» (figura 5).

En el apartado b) se manifiesta una forma de conocer proceso a través de la relación de recíproco del elemento término general (E3), ya que a partir del valor dado (5) debe decidir si pertenecen o no a la sucesión, lo que le lleva a demostrar que el valor (5) se alcanza en el sexto término ($a_6 = 5$) y que 10 no es un término de la sucesión (figura 5).



| RESOLUCIÓN DE LA TAREA (JUSTIFICANDO CADA PASO) | JUSTIFICA LA RESPUESTA |
|---|---|
| b) $5 = \frac{3n+12}{n}$ ; $5n-3n=12$ ; $2n=12$ $n=6 \rightarrow a_6$<br>$10 = \frac{3n+12}{n}$ ; $7n=12$ $n=\frac{12}{7}$ NO.<br>$a_1=15$, $a_2=9$, $a_3=7$, $a_6=5$ | b) En $a_6$ el valor es 5, ya que si sustituimos "an" por 5, y despejamos "n" el resultado es 6, por lo cual ~~Cuando~~ el valor en la 6ª posición es 5. Sin embargo, no hay ningún término que valga 10 en la sucesión porque el resultado no sería un número natural. |
| d) n: 1, 100, 1000, 10000; an: 15, 3'12, 3'012, 3'0012 → se acerca a 3, | d) Cuando "n" se hace cada vez más grande el ~~término~~ valor del término tiende a acercarse a 3. |

Fig. 5. Respuesta de e5 a la tarea 2 del primer cuestionario

En la tarea 3 se pone de manifiesto la traslación del modo de representación gráfico-cartesiano a los modos algebraico (término general de una progresión aritmética, apartado b) y numérico (tabla de valores, apartado d) (figura 6), así como una forma de conocer objeto del concepto de sucesión numérica, ya que debe considerar la sucesión completa para justificar la monotonía de la sucesión numérica a través de la coordinación de los elementos término general de la progresión aritmética (E5) y sucesión creciente (E11) (apartado c) (figura 6): «Es creciente porque mientras más grande sea el valor de n, al colocarlo en la fórmula de término general el valor de $a_n$ es siempre mayor».

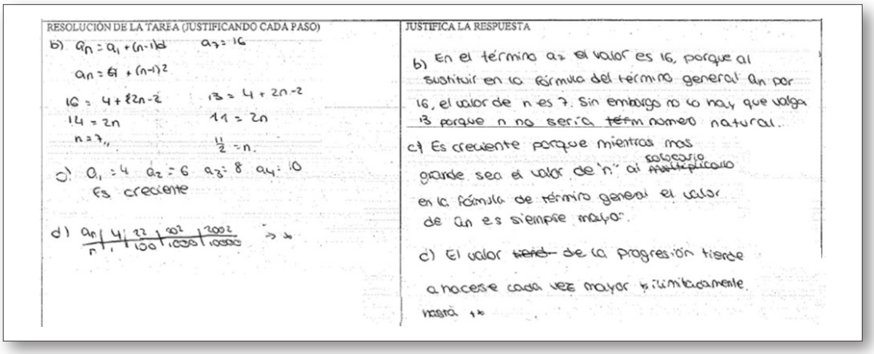



Fig. 6. Respuesta de e5 a la tarea 3 del primer cuestionario

El estudiante e5, en la tarea 4, pone de manifiesto el uso correcto de diferentes elementos y traslaciones entre los distintos modos de representación; esto le lleva a emparejar las distintas sucesiones y responder que el apartado a) no se corresponde con ninguna gráfica (figura 7).

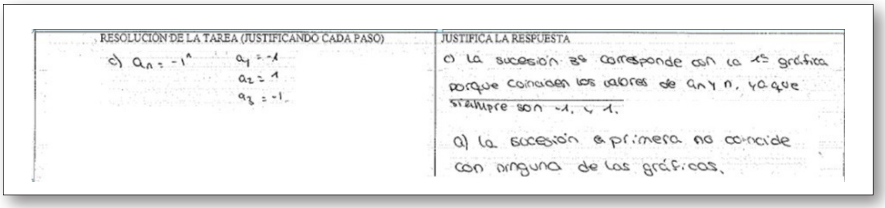



Fig. 7. Respuesta de e5 a la tarea 4 del primer cuestionario

Este comportamiento es característico de los estudiantes que se encuentran en el nivel inter de desarrollo del esquema de sucesión como lista numérica. Es decir, se ponen de manifiesto las diferentes formas de conocer el concepto de sucesión numérica y los elementos matemáticos se usan de forma correcta, pero vinculados a determinadas tareas o modos de representación. Además, se empieza a poner de manifiesto el establecimiento de relaciones lógicas entre elementos de forma correcta, pero en algunos casos estas se establecen con errores (equivalencia lógica).

## Nivel trans del desarrollo del esquema de sucesión numérica

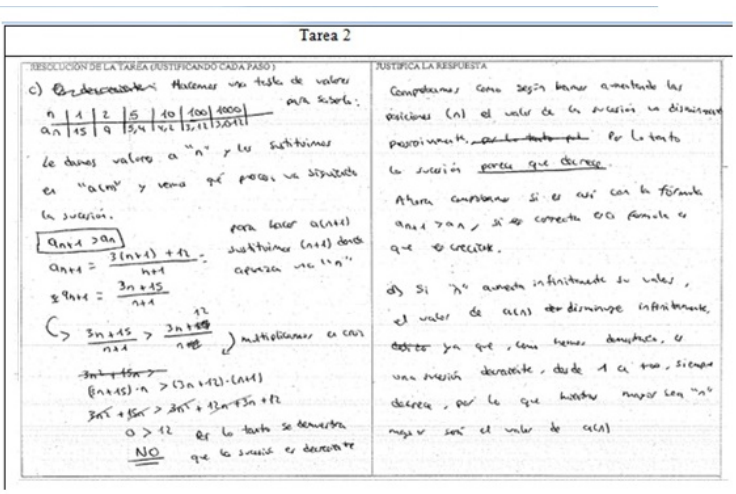
Este nivel se caracteriza por que los estudiantes no tienen restricciones a la hora de establecer relaciones entre los elementos del esquema, se producen coordinaciones entre los distintos modos de representación de forma fluida (síntesis de los modos de representación) y se manifiestan diferentes formas de conocer el concepto.

Un ejemplo de este nivel es el estudiante e3, que en la tarea 1 pone de manifiesto, además del uso correcto de diferentes elementos matemáticos y las relaciones lógicas entre ellos, una forma de conocer proceso del concepto de sucesión numérica cuando considera que para que exista una sucesión es necesario que existan todos sus términos, a través de la relación lógica de contrarrecíproco no E2 (términos de una sucesión) → no E1 (sucesión como lista). De esta manera, e3 señala en el apartado a) que no es sucesión numérica, ya que no existe $a_5$, pues obtiene como valor 1/0. En el segundo cuestionario le preguntamos expresamente por esa respuesta: «Pregunta: ¿Si no puedes encontrar el valor entonces es sucesión?». «e3: No, porque le falta un término».

Y en los apartados b) y d), para afirmar que sí son sucesiones, el estudiante e3 escribe como justificación de estos apartados: «es sucesión numérica porque nos da un valor para $a_n$ según el valor que le demos a "n"».

En el apartado f) hace uso de la relación de implicación lógica que se da entre estos elementos E6 (progresión geométrica) y E7 (término general progresión geométrica (E6 → E7); y de la relación que se establece entre progresiones geométricas y sucesiones numéricas (E1), (E6 → E1) cuando escribe: «es una sucesión porque a partir de este término general que hemos hallado con la fórmula $a_n = a_1 r^{(n-1)}$ para cada valor de n obtenemos $a_n$». Y, además, se pone de manifiesto, de nuevo, una forma de *conocer proceso* cuando responde: «para cada valor de n obtenemos $a_n$», es decir, considera este estudiante que, al ser progresión geométrica, es posible obtener los infinitos valores que constituyen la sucesión.

Además, en la tarea 2, en el apartado c) se evidencia una *forma de conocer objeto el concepto de sucesión numérica* por parte de e3, ya que debe considerar la sucesión completa para desencapsularla en un proceso y así construir la tabla de valores (figura 8). Este hecho se confirma en el apartado d), cuando a partir del término general desencapsula para obtener un proceso con infinitos términos y responde que: «según va aumentando la posición, el valor de la sucesión disminuye» (elemento sucesión decreciente E11).


Tarea 2

RESOLUCIÓN DE LA TAREA (JUSTIFICANDO CADA PASO) | JUSTIFICA LA RESPUESTA

Transcripción de "justifica la respuesta":

*Comprobamos como según vamos aumentando las posiciones (n) el valor de la sucesión va disminuyendo progresivamente. Por lo tanto, la sucesión* *<u>parece que decrece</u>.*

*Ahora comprobamos si es así con la fórmula $a_{n+1} > a_n$, si es correcta esa fórmula es que es creciente.*

*d) si "n" aumenta infinitamente su valor, el valor de $a_n$ disminuye infinitamente, ya que, como hemos demostrado, es una sucesión decreciente, desde 1 a +∞, siempre decrece, por lo que mientras mayor sea "n" mayor será el valor de $a_n$.*

Fig. 8. Respuesta de e3 a la tarea 2 del primer cuestionario

El estudiante e3, en las tareas 3 y 4, pone de manifiesto la síntesis de los modos de representación. Por ejemplo, en el apartado c) de la tarea 3 se manifiesta dicha síntesis entre los modos algebraico y gráfico-cartesiano cuando responde que

> es creciente porque como podemos ver la gráfica [refiriéndose al modo de representación gráfico-cartesiano del enunciado], y según el término general [refiriéndose al modo de representación algebraico especificado por e3 en el apartado a de esta tarea] mientras mayor sea n mayor será $a_n$, ya que cada término es dos cifras mayor que el anterior [refiriéndose a la diferencia de la progresión aritmética].

Estos hechos son característicos de los estudiantes que se encuentran en el nivel trans de desarrollo del esquema de sucesión como lista numérica. Es decir, hacen siempre uso correcto de los elementos matemáticos necesarios en la resolución de las diferentes tareas vinculadas a los distintos modos de representación, lo que evidencia la síntesis entre ellos. Además, establece diferentes tipos de relaciones lógicas (conjunción lógica, implicación lógica, contrarrecíproco, equivalencia lógica) cuando son necesarias en la resolución de la tarea, y se ponen de manifiesto las diferentes formas de conocer del concepto de sucesión numérica.

Para finalizar, en cada una de las secciones hemos descrito un nivel de compresión del concepto de sucesión numérica a través de una selección de casos representativos. La siguiente figura muestra los resultados descritos en esta sección indicando el número de estudiantes en cada uno de los niveles (figura 9). Además, en la figura se recogen las características propias de cada nivel. Sin olvidar su carácter progresivo, es decir, los elementos matemáticos y las relaciones lógicas que se establecen entre ellos, en el nivel trans son, además de las que figuran en dicho nivel, las que figuran en el nivel inter e intra. Y lo mismo sucede con los elementos matemáticos y las relaciones lógicas que figuran en el nivel inter con los que figuran en el nivel intra.

| NIVEL | CARACTERÍSTICAS | ELEMENTOS MATEMÁTICOS | Nº Est. |
|---|---|---|---|
| INTRA | Un mismo elemento matemático puede ser usado de forma correcta en determinadas tareas e incorrectas en otras vinculados a un modo de representación.<br>Las relaciones lógicas entre elementos matemáticos se producen siempre con errores.<br>Se pone de manifiesto una forma de conocer acción del concepto de sucesión numérica. | Sucesión como lista(E1)<br>Términos de la sucesión(E2)<br>Término general (E3)<br>Progresión Aritmética(E4)<br>Progresión Geométrica(E6) | 61 |
| INTER | Los elementos matemáticos se usan de forma correcta en un mismo modo de representación.<br>Los elementos matemáticos se usan de forma incorrecta cuando hacen traslaciones entre distintos modos de representación.<br>Uso correcto de las relaciones lógicas (conjunción lógica, implicación lógica y contrarrecíproco) entre elementos matemáticos en un mismo modo de representación.<br>Uso incorrecto de la relación lógica de equivalencia.<br>Se pone de manifiesto la traslación entre modos de representación en algunas situaciones.<br>Se pone de manifiesto una forma de conocer proceso del concepto de sucesión numérica.<br>Se pone de manifiesto la coordinación procesos en algunas situaciones. | Sucesión Creciente(E10)<br>Sucesión Decreciente(E11)<br>Sucesiones recurrentes (E8)<br>Sucesión por extensión(E9)<br>Término general de una progresión aritmética (E5)<br>Término general de una progresión geométrica (E7) | 37 |
| TRANS | Uso de todos los elementos matemáticos de forma correcta en el modo de representación necesario en cada tarea.<br>Uso de las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos de forma correcta.<br>Se pone de manifiesto la síntesis entre los diferentes modos de representación a través de traslaciones entre los diferentes modos de representación.<br>Se pone de manifiesto una forma de conocer objeto del concepto de sucesión numérica y desencapsulación de este en procesos. | | 7 |

Fig. 9. Caracterización de niveles del esquema de sucesión numérica

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo hemos caracterizado los diferentes niveles de la comprensión del concepto de sucesión numérica (figura 9). Así, el nivel intra del esquema de sucesión numérica se caracteriza por que, en la resolución de las diferentes tareas del cuestionario por parte del estudiante, un mismo elemento es usado en algunas ocasiones de forma correcta y en otras de forma incorrecta, vinculando el uso de los elementos matemáticos a un modo de representación. Las relaciones lógicas entre elementos se producen siempre con errores, lo que pone de manifiesto una forma de conocer acción del concepto de sucesión numérica. En el nivel inter, el estudiante usa los elementos matemáticos de forma correcta, pero solo en algunos modos de representación. Se empieza a poner de manifiesto el establecimiento de relaciones lógicas entre elementos de forma correcta (conjunción lógica, implicación lógica y contrarrecíproco), y en otros casos con errores (la equivalencia lógica que lleva al estudiante a identificar las progresiones con las sucesiones). Se ponen de manifiesto las diferentes formas de conocer el concepto de sucesión numérica (acción, proceso y coordinación de procesos). Por último, en el nivel trans, el estudiante usa siempre los elementos matemáticos necesarios en la resolución de las diferentes tareas y se evidencia la síntesis entre los modos de representación. Además, establece los diferentes tipos de relaciones lógicas necesarias en la resolución de la tarea. Y se ponen de manifiesto las diferentes formas de conocer del concepto de sucesión.

La investigación de McDonald et al. (2000) sobre el concepto de sucesión señaló que para la construcción de dicho concepto los estudiantes construyen dos objetos cognitivos diferentes, la sucesión como listado de números (seqlist) y la sucesión como función de dominio de los números naturales (seqfun), centrándose estos investigadores en el segundo de ellos. En nuestro trabajo complementamos dicha investigación centrándonos en la construcción del primero de ellos, la construcción del objeto cognitivo de sucesión como listado de números (seqlist).

En la investigación de Przenioslo (2006) hubo estudiantes que consideraron que en una sucesión «la diferencia entre términos sucesivos es la misma». Para esta investigadora esto podría deberse a que se consideran las sucesiones como progresiones aritméticas. Este resultado está en relación con los resultados obtenidos en nuestra investigación en la caracterización de los estudiantes situados en el nivel inter del esquema de sucesión numérica, en el sentido del establecimiento erróneo de la relación de equivalencia lógica entre sucesión numérica y progresión (Bajo, Sánchez-Matamoros y Gavilán-Izquierdo, 2015).

Diversas investigaciones (Cañadas, 2007; González et al., 2011; Przenioslo, 2006) señalan la importancia del uso de los diferentes modos de representación para el estudio del concepto de sucesión numérica, considerando los modos numérico, gráfico algebraico y sus variantes. Nuestros resultados corroboran dicha importancia e indican la dificultad en las traslaciones entre distintos modos de representación. Además, dentro del modo gráfico cabe señalar, a la vista de nuestros resultados, el diferente comportamiento de los estudiantes situados en el nivel inter en relación con los modos gráfico-lineal y gráfico cartesiano. Todos los estudiantes situados en el nivel inter muestran esbozos de síntesis de los modos de representación analítico y gráfico lineal; sin embargo, solo 17 de los 37 estudiantes situados en dicho nivel hacen un uso correcto del modo gráfico-cartesiano (Bajo, Gavilán y Sánchez-Matamoros, 2016). Este hecho nos podría permitir abordar la identificación de diferentes subniveles de desarrollo del nivel inter.

Para futuras investigaciones a partir de la caracterización de los niveles intra, inter y trans para el concepto de sucesión numérica, podemos empezar a considerar la identificación de subniveles dentro de cada uno de los niveles considerados, ya que cada nivel implica a su vez algunos subniveles, siguiendo el mismo orden de progresión, así como la tematización del esquema (Piaget y García, 1983).

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Berlín: Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II*, *6*, 1-32.

Bagni, G. T. (2005). Infinite series from history to mathematics education. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning* [revista en línea]. University of Plymouth, Reino Unido. Obtenido el 30 de junio de 2005 de: http://cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm.

Bajo, J. M., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2016). Los modos de representación gráfico lineal y cartesiano en la comprensión del concepto de Sucesión Numérica en estudiantes de segundo ciclo Enseñanza Secundaria Obligatoria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 157-166). Málaga: SEIEM.

Bajo Benito, J. M., Sánchez-Matamoros, G. y Gavilán Izquierdo, J. M. (2015). Las progresiones como indicador de la comprensión del concepto de sucesión numérica en alumnos de segundo ciclo de enseñanza secundaria obligatoria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 143-151). Alicante: SEIEM.

Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(5), 557-578.
https://doi.org/10.2307/749887

BOE (Boletín Oficial del Estado) (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. BOE, 5, 677-773. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

BOJA (Boletín Oficial de la Junta de Andalucía) (2007). ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. BOJA, 171, 23-65. Sevilla: Consejería de Educación.

Cañadas, M. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas* (tesis doctoral inédita). Granada.

Codes Valcarce, M. y González-Martín, A. S. (2017). Sucesión de sumas parciales como proceso iterativo infinito: un paso hacia la comprensión de las series numéricas desde el modelo APOS. *Enseñanza de las Ciencias*, *35*(1), 89-110.
http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1927

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Dordrecht: Kluwer.

González, J., Medina, P., Vilanova, S. y Astiz, M. (2011). Un aporte para trabajar sucesiones numéricas con Geogebra. *Revista de Educación Matemática*, *26*, 1-19.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal: A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 259-288.

McDonald, M. A., Mathews, D. M. y Strobel, K. H. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. *Research in Collegiate Mathematics Education IV, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island*, *8*, 77-102.

Mor Y., Noss, R., Hoyles, C., Kahn, K. y Simpson, G. (2006). Designing To See And Share Structure In Number Sequences. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, *13*(2), 65-78.

Piaget, J. y García, R. (1983). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI.

Przenioslo, M. (2006). Conceptions of a sequence formed in secondary schools. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37*(7), 805-823. https://doi.org/10.1080/00207390600733832

Roa-Fuentes, S. y Oktac, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(1), 89-112.

Roh, K. H. (2008). Students' Images and their Understanding of Definitions of the Limit of a Sequence. *Educational Studies in Mathematics*, *69*, 217-233.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, *24*(1), 85-98.

Stewart, J., Hernández, R. y Sanmiguel, C. (2007). *Introducción al cálculo*. Buenos Aires: Thomson Learning.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, *17*(1), 5-31.

Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(3), 325-338. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n3.637

Weigand, H-G. (2015). Discrete or continuous? –A model for a technology supported discrete approach to calculus. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2580-2586). Praga: ERME.

# Characterization of the numeric sequence schema among Compulsory Secondary Education students

José Mariano Bajo Benito, José María Gavilán-Izquierdo, Gloria Sánchez-Matamoros García
Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Sevilla (España)
jbajo@us.es, gavilan@us.es, gsanchezmatamoros@us.es

An understanding of the numeric sequence concept presents difficulties for Compulsory Secondary Education students (ESO in Spanish) (14-16 years). This, together with the fact that the concept is the basis of other mathematical concepts, such as limits, derivatives, integrals, and numeric series, justifies its relevance. The purpose of this research is to characterize the understanding of the concept of sequence as a numeric list in second cycle ESO students.

The instruments used for the collection of data consisted of two questionnaires, the former consisting of four tasks, the latter customized for each student. The students' responses were analyzed using the APOS theoretical framework, based on the contributions of Piaget and García with regards to the development of a schema through intra, inter, and trans levels.

The participants in the research were 105 ESO second course students, and a qualitative methodology was used throughout. For the analysis process of our study, the two questionnaires answered by each student were considered. This procedure provided two types of information. On the one hand, it enabled us to describe each student's understanding of the concept of sequence as a numeric list. On the other, it provided us with information regarding the way in which the understanding of the sequence schema seemed to be developed as a numeric list at three levels: intra, inter and trans.

The results allowed us to identify the characterization of the different levels involved in the mathematical elements used, their relationships, their representation modes, the translations among them, and the mental construction of the concept (action, process, and object).

The intra-level is characterized by the correct use of a single element in a representation mode, such use being incorrect in others. The logical relations between elements always occur with errors. This reveals an action conception. The inter-level is characterized by the correct use of mathematical elements in some representation modes. They start to show the establishment of correct logical relations between mathematical elements (logical conjunction, logical equivalence, and contrapositive), in other cases with errors (the logical equivalence that leads students to identify progressions with sequences). The different notions of action, process, and coordination of these processes are revealed. Finally, the trans-level is characterized by the use of the necessary mathematical elements for the resolution of different tasks, revealing the synthesis of the representation modes. Furthermore, the different types of logical relations necessary for task resolution are established. These reveal the different mental constructions with regards to the concept of sequence.

Our results corroborate the outcomes of diverse research works, indicating the importance of the use of the different representation modes (numeric, graphic, algebraic and corresponding variants) for the study of the concept of numeric sequence. Moreover, they indicate the difficulty in the translations of these. Thus, in view of our results, in the graphical mode, the different behaviors of students found at the inter-level, as related to lineal graph and cartesian graphic modes, should be noted. This could enable us to address the identification of different development sub-levels of the sequence schema as a numeric list for future research.