



Identificación y caracterización de los subniveles de desarrollo del *esquema* de derivada

Identification and characterization of the development sub-levels of the derivative *schema*

Claudio Fuentealba
Facultad de Ciencias
de la Ingeniería
Universidad Austral de Chile
cfuentealba@uach.cl

Edelmira Badillo
Departament de Didàctica de la Matemàtica
i de les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona
edelmira.badillo@uab.cat

Gloria Sánchez-Matamoros
Departamento de Didáctica
de la Matemática
Universidad de Sevilla
gsanchezmatamoros@us.es

RESUMEN • Los resultados de investigaciones relacionadas con el aprendizaje del concepto de derivada constatan que su comprensión resulta muy compleja y que una cantidad significativa de estudiantes solo logra una construcción parcial del concepto. Desde este contexto, en esta investigación presentamos un análisis exploratorio/confirmatorio en el que identificamos y caracterizamos, por medio de métodos de análisis mixtos, los distintos subniveles de desarrollo del esquema de derivada que alcanzaron estudiantes universitarios con instrucción previa en Cálculo Diferencial. Los resultados muestran la utilidad del uso de estos métodos que, en este estudio, permitieron identificar los 9 subniveles de desarrollo y caracterizar 5 de ellos en función de las variables dominantes y sus elementos matemáticos asociados.

PALABRAS CLAVE: *Esquema* de derivada; Subnivel de desarrollo; análisis de Cluster; Análisis impli-cativo; Teoría APOE.

ABSTRACT • The results of the research related to the learning process of the derivative notion show that its understanding is very complex and that only a significant number of students acquire a partial comprehension of the concept. In this context, this research presents an exploratory/confirmatory analysis in which we identify and characterize, through mixed analysis methods, the different sub-levels of development of the derivative schema that university students previously instructed in Differential Calculus managed to reach. The results show how useful these methods are in this study, since they made it possible to identify the 9 sub-levels of development and to characterize 5 of them according to the dominant variables and their associated mathematical elements.

KEYWORDS: Derivative *schema*; Development sub-level; Cluster analysis; Implicative analysis; APOS theory

Recepción: noviembre 2017 • Aceptación: noviembre 2018 • Publicación: junio 2019

INTRODUCCIÓN

El concepto de derivada es indispensable en el curso de Cálculo y tanto su comprensión como sus métodos de enseñanza necesitan ser continuamente investigados. En particular, las investigaciones que abordan el desarrollo de este concepto reportan la existencia de dificultades en su comprensión, así como de otras nociones matemáticas subyacentes (Asiala *et al.*, 1997; Zandieh, 2000). Asimismo, otros trabajos señalan que estas dificultades se deben a los métodos de enseñanza tradicionales, que enfatizan la construcción del concepto en un único modo de representación, lo cual se contrapone a las sugerencias que hacen hincapié en el uso de diversas representaciones y su coordinación como elemento estructurante y clave en el desarrollo de su comprensión (Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006).

Existen estudios sobre el desarrollo de *esquemas*, desde la teoría APOE, para distintos conceptos matemáticos, algunos vinculados al concepto de derivada (Baker, Cooley y Trigueros, 2000; Sánchez-Matamoros *et al.*, 2006; García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2011; Font, Trigueros, Badillo y Rubio, 2016; Fuentealba, Sánchez-Matamoros, Badillo y Trigueros, 2017), pero la investigación sobre subniveles de desarrollo casi no ha sido abordada. Además, el análisis del desarrollo de *esquemas* se ha llevado a cabo, principalmente, con análisis cualitativos.

Los estudios realizados sobre el aprendizaje de la derivada han tenido implicaciones sobre el currículo Cálculo y sus métodos de enseñanza, sin embargo aún se reportan problemas y dificultades vinculadas a su comprensión. Esto pone de manifiesto la necesidad de seguir profundizando sobre el desarrollo de su comprensión por parte de los estudiantes. Concretamente, en este estudio nos enfocamos en identificar y caracterizar los subniveles de desarrollo del *esquema* de derivada que exhibe un grupo de estudiantes universitarios con instrucción previa en Cálculo Diferencial. Esta caracterización, realizada por medio de métodos mixtos, permitirá el refinamiento de los subniveles de desarrollo obtenidos, previamente, por medio de estudios cualitativos.

LA TEORÍA APOE

La teoría APOE es el resultado de la adaptación de las ideas piagetianas sobre la *abstracción reflexiva*, aplicadas a la investigación del pensamiento matemático avanzado. Uno de los objetivos de APOE es describir tanto el camino como la construcción de las estructuras cognitivas realizadas por un individuo durante su proceso de aprendizaje de un concepto. En particular, APOE señala que, para lograr la comprensión, un individuo debe transitar por las construcciones mentales de *acción*, *proceso*, *objeto* y *esquema*, por medio de los mecanismos de *interiorización*, *encapsulación*, *desencapsulación*, *reversión*, *coordinación* y *tematización* (Arnon *et al.*, 2014). Concretamente, APOE considera que la comprensión comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales, previamente construidos en términos de *acciones*; a su vez, las *acciones* se *interiorizan* en *procesos* que se *encapsulan* en *objetos*. Finalmente, las *acciones*, los *procesos* y los *objetos* se pueden organizar en *esquemas* (Arnon *et al.*, 2014).

Un elemento importante de APOE es la *descomposición genética* (DG), que es un modelo que describe e intenta predecir la construcción del concepto de interés. En este trabajo, las tareas que conforman el instrumento de recolección de datos se basan en las DG de Asiala *et al.* (1997) y Font *et al.* (2016).

EL ESQUEMA Y SU DESARROLLO

Un *esquema* es una estructura dinámica que está en constante cambio o evolución y su desarrollo pasa por tres niveles: intra, inter y trans, denominados tríada. Estos se suceden un orden fijo; además, se

pueden observar cuando se analiza el desarrollo de un *esquema* de cualquier concepto matemático (Piaget y García, 1983).

Para APOE un *esquema* se conforma por sus estructuras cognitivas básicas: *acciones, procesos, objetos* y otros *esquemas*, que están conectadas de forma coherente e interrelacionada de forma consciente o inconsciente. Así, ante una misma tarea, distintos estudiantes evocan un *esquema* y utilizan distintas relaciones entre sus componentes, lo que permite observar en sus respuestas distintos niveles de desarrollo (Trigueros, 2005).

Piaget y García (1983) señalan que, al analizar el desarrollo de un *esquema*, usando la tríada, se observa que cada nivel contiene subniveles que siguen un mismo orden y solo se puede pasar de uno a otro cuando se ha alcanzado el previo. Por tanto, el desarrollo de un *esquema* no solo indica una progresión gradual en su construcción, sino que supone una estructura fractal de este (Meel, 2003).

EL DESARROLLO DEL *ESQUEMA* DE DERIVADA

Este estudio toma como referencia el trabajo realizado por Sánchez-Matamoros *et al.* (2006) que analiza el *esquema* de derivada en función de las relaciones lógicas (conjunción, contrarrecíproco y equivalencia) que se establecen entre los distintos elementos matemáticos cuando se resuelven problemas. Además, señala que la derivada posee elementos estructurantes de distinta naturaleza; puntual, si hacen referencia a una propiedad específica en un punto, y global, si corresponden a una propiedad en un intervalo. Tomando en cuenta estos elementos matemáticos y las relaciones lógicas entre ellos Sánchez-Matamoros *et al.* (2006) definen los niveles de desarrollo de la siguiente forma:

- Nivel intra. No se establecen relaciones lógicas entre los elementos matemáticos (ya sean gráficos o analíticos, puntuales o globales), y los posibles esbozos de relación (del tipo conjunción lógica) entre ellos se realizarán con errores. Uso de elementos matemáticos de forma aislada (y a veces de forma incorrecta).
- Nivel inter. Se establecen relaciones lógicas entre los elementos matemáticos utilizados, pero con limitaciones, predominando el uso de la conjunción lógica, y solo relacionan elementos matemáticos puntuales o/y globales que se encuentren en el mismo modo de representación analítico o gráfico. Se usan más elementos matemáticos de forma correcta que en el nivel anterior.
- Nivel trans. Aumenta el repertorio de uso de las relaciones lógicas (y lógica, contrarrecíproco, equivalencia lógica) entre los elementos matemáticos. En este nivel se produce la «síntesis» de los modos de representación. Todo ello lleva a la construcción de la estructura matemática (pp. 73-74).

Asimismo, dicho estudio revela la existencia de 2 subniveles anidados, tanto para el nivel intra como para el inter (tabla 1). Estos surgen de la progresión en el desarrollo del *esquema*, caracterizada en términos de la incorporación de un mayor número de elementos matemáticos y relaciones lógicas entre ellos, así como de la paulatina síntesis de los modos de representación (Sánchez-Matamoros *et al.*, 2006).

Tabla 1.
Subniveles de desarrollo (Sánchez-Matamoras *et al.*, 2006)

| <i>Nivel</i> | <i>Relaciones lógicas</i> | <i>Elementos matemáticos</i> |
|--------------|---|---|
| Intra 1 | No se establecen relaciones lógicas entre los elementos matemáticos | Recta tangente a la curva en $x = a$ Interpretación geométrica de la derivada en un punto ($x = a$) Derivada en un punto como límite de la tasa de variación media Tasa de variación media |
| Intra | Intento de relación «y lógica» | Condición necesaria para que f tenga un extremo o punto de inflexión en $x = a$ Condición suficiente para que f tenga un extremo o punto de inflexión en f Condición necesaria para que f sea derivable en $x = a$ Condición suficiente para que f sea una función creciente o decreciente en (a,b) Condición suficiente de convexidad y concavidad de f en relación con el signo de f'' Condición suficiente de convexidad y concavidad de f en relación con el crecimiento y decrecimiento de f' Operador derivada: reglas de derivación Inverso del operador derivada: integración |
| Inter 1 | Se establecen relaciones del tipo «y lógica» entre elementos matemáticos analíticos o gráficos puntuales o globales (generalmente en el mismo modo) | Derivada en un punto como límite de la tasa de variación media: se usa «desencapsulando» la idea de la existencia de f' en un punto $x = a$, mediante la aplicación de la igualdad de los límites laterales del cociente incremental |
| Inter | Se establecen relaciones del tipo «y lógica» entre elementos matemáticos analíticos o gráficos puntuales o globales (generalmente en el mismo modo) | Cúspide: gráfica «quebrada» Relaciones de f' con extremos y puntos de inflexión Relaciones de f'' con los extremos y los puntos de inflexión Condición suficiente de los puntos de inflexión (relaciones con f'') Interpretación geométrica de la derivada (con carácter global) Operador derivada: si el gráfico de f es una parábola, el gráfico de f' es una recta Operador derivada: utilizando el significado geométrico de la segunda derivada como la tangente a la gráfica f' Condición necesaria para que f sea una función creciente o decreciente Operador derivada: reglas de derivación |
| | Contrarrecíproco de elemento matemático analítico puntual | Condición necesaria para que f sea derivable en $x = a$ |
| | Equivalencias lógicas (o doble implicación) de elementos matemáticos analíticos puntuales o globales | Condición necesaria y suficiente para que f sea una función creciente o decreciente en (a,b) |
| | Esbozos de síntesis de los modos de representación analítico y gráfico | Condición suficiente para que f tenga un extremo o punto de inflexión en $x = a$ Operador derivada: si el gráfico de f es una parábola, el gráfico de f' es una recta Condición suficiente para que f sea una función creciente o decreciente en (a,b) |
| Trans | Síntesis de los modos de representación analítico y gráfico | Condición suficiente para que f sea una función constante, creciente o decreciente a través de la interpretación geométrica de la derivada |

Otro aspecto importante del desarrollo de un *esquema* es su *tematización*, la cual solo se puede lograr en el nivel de desarrollo trans (Arnon *et al.*, 2014). Este mecanismo da cuenta de cómo un *esquema* (estructura dinámica) se transforma en un *objeto* (estructura estática) sobre el cual es posible aplicar nuevas *acciones y procesos* (Arnon *et al.*, 2014).

En cuanto a la *tematización* del *esquema* de derivada, García *et al.* (2011) señalan que esta se alcanza cuando se transfieren las relaciones e implicaciones que se han construido y organizado para el par (f, f') al par (f', f'') , considerando f' como totalidad al igual que $(f')' = f''$, es decir, cuando se es consciente del operador derivada como una transformación. Esto implica que el *esquema* derivada *tematizado* es un *objeto* que puede ser usado sin vínculos al contexto inicial desde el cual comenzó su construcción (f') . Por tanto, se considera como una transformación generalizable a $(f')' = f''$, $(f'')' = f'''$ y así sucesivamente, lo que es la estructura subyacente del *esquema tematizado*. Sin embargo, esta generalización del operador derivada presenta matices asociados al tipo de relaciones que se establecen entre pares de derivadas sucesivas de una función (Fuentealba *et al.*, 2017), lo que induce la existencia de subniveles anidados en el nivel trans.

METODOLOGÍA

Esta investigación se enmarca en los denominados métodos mixtos y tiene carácter exploratorio y confirmatorio (Rocco, Bliss, Gallagher y Pérez-Prado, 2003). Los datos recogidos se analizan con métodos cuantitativos y se interpretan, cualitativamente, contrastándolos con resultados de trabajos cualitativos previos (Sánchez-Matamoros *et al.*, 2006; García *et al.*, 2011; Fuentealba *et al.*, 2017) y con elementos teóricos de APOE (Arnon *et al.*, 2014).

Participantes

Los participantes fueron 103 estudiantes universitarios de los cursos 2014/2015 y 2015/2016, de la licenciatura doble de Matemáticas y Física de una universidad pública de la provincia de Barcelona. Todos habían cursado y aprobado, como mínimo, una asignatura que incluía los tópicos del curso de Cálculo diferencial. La opción de escoger a estos estudiantes es intencional y se fundamenta en el interés por observar los distintos subniveles de desarrollo del *esquema* alcanzados tras un proceso de instrucción.

Instrumento de recogida de información

El instrumento fue un cuestionario (figura 1) construido sobre la base de la selección y/o adaptación de 3 tareas utilizadas en estudios previos sobre el concepto de derivada (Baker *et al.*, 2000; Sánchez-Matamoros *et al.*, 2006), además para su validación por expertos (Cisterna, 2005) fue presentado en talleres y seminarios de los simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. El cuestionario fue aplicado a los 103 estudiantes y su duración fue de 90 minutos.

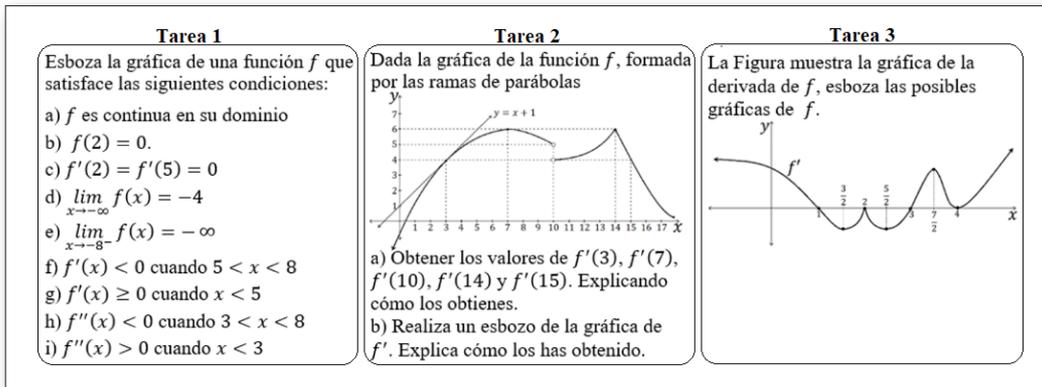


Fig. 1. Tareas del cuestionario.

La resolución de las tareas involucraba el uso de elementos matemáticos puntuales y globales en 2 modos de representación (analítico y gráfico). La tabla 2 presenta los elementos matemáticos y la(s) tarea(s) asociada(s). Se destaca que no todos los elementos se asocian a todas las tareas; sin embargo, una mirada global del cuestionario informa sobre el uso correcto, o no, de las variables obtenidas a partir de ellos.

Tabla 2.
Elementos matemáticos y tareas asociadas

| Elemento matemático | Tarea |
|---|---------|
| E_1 . Si $f'(a) = 0$, entonces en $x = a$ existe un valor extremo o punto de inflexión de f | 1, 2, 3 |
| E_2 . Si f es continua en $x = a$ y f tiene un cambio de curvatura en el punto de abscisa $x = a$, entonces en $(a, f(a))$ existe un punto de inflexión de f | 1, 2, 3 |
| E_3 . Si $f' > 0$ en un intervalo I , si y solo si, f es estrictamente creciente en I | 1, 2, 3 |
| E_4 . Si $f' < 0$ en un intervalo I , si y solo si, f es estrictamente decreciente en I | 1, 2, 3 |
| E_5 . Si $f'' > 0$ en un intervalo I , si y solo si, f es convexa en I | 1, 2, 3 |
| E_6 . Si $f'' < 0$ en un intervalo I , si y solo si, f es cóncava en I | 1, 2, 3 |
| E_7 . Si $f'(a)$ es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = a$ | 2 |
| E_8 . Si $f'(a)$ es igual al límite del cociente incremental de f en la vecindad del punto de abscisa $x = a$ | 2 |
| E_9 . Si $f'(a^-) = f'(a^+)$ y f es continua en $x = a$, entonces f posee un punto cúspide o anguloso en $x = a$ | 2, 3 |
| E_{10} . Si f es derivable en $x = a$, entonces f es continua en $x = a$ | 3 |
| E_{11} . Si f no es continua en $x = a$, entonces f no es derivable en $x = a$ | 2 |
| E_{12} . Operador derivada: Por ejemplo, si f es una parábola, entonces f' es una recta | 2 |

MÉTODOS DE ANÁLISIS

La aplicación del cuestionario permitió obtener 103 protocolos de resolución. Estos se discretizaron para obtener un vector por cada uno de ellos. Para realizar este proceso definimos, previamente, 27 variables (tabla 3) a partir de la descomposición de los elementos matemáticos en los 2 modos de representación; además, usamos las relaciones lógicas y la información proporcionada por estudios previos (Sánchez-Matamoros *et al.*, 2006; Trigueros y Escandón, 2008). Por ejemplo, el elemento matemático que relaciona, por medio de la equivalencia lógica, el signo negativo de f' con el decrecimiento estricto de f (E_4 , tabla 2) lo dividimos en sus 2 implicaciones dando origen a las variables V_{13} y V_{14} .

Tabla 3.
Variables utilizadas para discretizar los protocolos de resolución

| <i>Variable</i> | <i>Se obtuvo de</i> |
|--|---|
| V_1 . Usa correctamente el significado geométrico de la derivada en $x = a$ | E_7 |
| V_2 . Usa correctamente el significado analítico de la derivada en $x = a$ | E_8 |
| V_3 . Usa correctamente el significado de función derivada | La capacidad de vincular globalmente f' con f'' (E_3, E_4, E_5, E_6) |
| V_4 . Usa correctamente el significado del operador derivada | Del elemento E_{12} |
| V_5 . Usa correctamente el significado de máximo local geoméricamente | Las relaciones de conjunción e implicación (\wedge) vinculadas a E_3, E_4, E_1 y E_9 |
| V_6 . Usa correctamente el significado de máximo local analíticamente | Las relaciones de conjunción e implicación (\Rightarrow) vinculadas a E_3, E_4, E_1 y E_9 |
| V_7 . Usa correctamente el significado de mínimo local geoméricamente | Las relaciones de conjunción e implicación (\Leftarrow) vinculadas a E_3, E_4, E_1 y E_9 |
| V_8 . Usa correctamente el significado de mínimo local analíticamente | Las relaciones de conjunción e implicación (\Rightarrow) vinculadas a E_3, E_4, E_1 y E_9 |
| V_9 . Usa correctamente el significado de punto de inflexión geoméricamente | Las relaciones de conjunción e implicación (\Leftarrow) vinculadas a E_5, E_6, E_1 y E_2 |
| V_{10} . Usa correctamente el significado de punto de inflexión analíticamente | Las relaciones de conjunción e implicación (\Rightarrow) vinculadas a E_5, E_6, E_1 y E_2 |
| V_{11} . Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo positivo de f' en un intervalo I y el crecimiento estricto de f en dicho intervalo | La relación de implicación (\Rightarrow) de E_3 |

| <i>Variable</i> | <i>Se obtuvo de</i> |
|--|--|
| V_{12} . Usa correctamente la relación de implicación entre: el crecimiento estricto de f en un intervalo I y el signo positivo de f' en dicho intervalo | La descomposición de la relación de equivalencia lógica en la implicación (\Leftarrow) de E_3 |
| V_{13} . Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo negativo f' en un intervalo I y el decrecimiento estricto de f en dicho intervalo | La descomposición de la relación de equivalencia lógica en la implicación (\Rightarrow) de E_4 |
| V_{14} . Usa correctamente la relación de implicación entre: el decrecimiento estricto de f en un intervalo I y el signo negativo de f' en dicho intervalo | La descomposición de la relación de equivalencia lógica en la implicación (\Leftarrow) de E_4 |
| V_{15} . Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo positivo de f'' en un intervalo I y la convexidad de f en dicho intervalo | La descomposición de la relación de equivalencia lógica en la implicación (\Rightarrow) de E_5 |
| V_{16} . Usa correctamente la relación de implicación entre: la convexidad de f en un intervalo I y el signo positivo de f'' en dicho intervalo | La descomposición de la relación de equivalencia lógica en la implicación (\Leftarrow) de E_5 |
| V_{17} . Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo negativo de f'' en un intervalo I y la concavidad de f en dicho intervalo | La descomposición de la relación de equivalencia lógica en la implicación (\Rightarrow) de E_6 |
| V_{18} . Usa correctamente la relación de implicación entre: la concavidad de f en un intervalo I y el signo negativo de f'' en dicho intervalo | La descomposición de la relación de equivalencia lógica en la implicación (\Leftarrow) de E_6 |
| V_{19} . Usa correctamente las derivadas laterales | Las relaciones de conjunción entre E_8 , E_9 y E_{10} |
| V_{20} . Usa correctamente el significado de los puntos conflictivos (cúspides y angulosos) | E_9 |
| V_{21} . Usa correctamente la relación directa: si f es derivable en $x = a$, entonces f es continua en $x = a$ | E_{10} |
| V_{22} . Usa correctamente la relación contrarrecíproca: si f no es continua en $x = a$, entonces f no es derivable en $x = a$ | E_{11} |
| V_{23} . Es capaz de dividir correctamente una gráfica en distintos intervalos determinados por los elementos gráficos proporcionados (monotonía y curvatura) | Las relaciones de conjunción e implicación (\Leftarrow) vinculadas a E_1 , E_2 , E_3 , E_4 , E_5 , E_6 y E_9 |

| <i>Variable</i> | <i>Se obtuvo de</i> |
|--|--|
| V_{24} . Es capaz de definir correctamente distintos intervalos del dominio de la función determinados por la información analítica proporcionada (signos/puntos de f' y f'') | Las relaciones de conjunción e implicación (\Rightarrow) vinculadas a $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ y E_9 |
| V_{25} . Es capaz de graficar correctamente una función a partir del conocimiento de sus propiedades gráficas | Las relaciones de conjunción e implicación (\Leftarrow) vinculadas a $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ y E_9 |
| V_{26} . Es capaz de graficar correctamente una función a partir del conocimiento de sus propiedades analíticas | Las relaciones de conjunción e implicación (\Rightarrow) vinculadas a $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ y E_9 |
| V_{27} . Es capaz para establecer correctamente relaciones entre la primera y segunda derivada | La capacidad de establecer vínculos entre f' y f'' |

Para evaluar las 27 variables usamos una escala dicotómica asociada al uso correcto de cada una de ellas. Así, obtuvimos una matriz de datos de 103 x 27 celdas, donde cada columna era un vector binario de la forma ($V_1, V_2, V_3, \dots, V_{27}$). Esta matriz permitió realizar los análisis estadísticos enfocados en identificar y caracterizar los subniveles de desarrollo.

Análisis de Cluster

El primer método usado fue el análisis de Cluster que permite realizar una partición de un conjunto de objetos en grupos homogéneos, en donde a cada grupo se le denomina Cluster. El objetivo de este análisis es encontrar grupos cuyos objetos sean lo más homogéneos entre sí, de tal forma que los objetos de grupos distintos sean lo más heterogéneos posible (Johnson, 1998). Para desarrollar este análisis usamos el programa Infostat, que calcula el coeficiente de correlación cofenética (Sokal y Rohlf, 1962). Este coeficiente es una medida de asociación entre las distancias iniciales, determinadas a partir de los datos originales, y las distancias finales con las cuales se realizó la clasificación. Su rango de variación es de 0 a 1, en donde valores cercanos a 1 indican que en el proceso de clasificación no hubo una gran perturbación en cuanto a la estructura original de los datos.

Análisis implicativo

El análisis de frecuencias permitió hacer una primera caracterización de los subniveles identificados; sin embargo, no indica qué variables son las más importantes en cada subnivel y tampoco informa sobre las relaciones entre ellas. Por tanto, para identificar dichas variables y sus relaciones, realizamos un análisis implicativo. Este método cuantifica cómo de probable es que suceda la variable b si se ha observado la variable a en la población (Lerman, Gras y Rostam, 1981). El análisis implicativo genera una matriz con todas las implicaciones $a \rightarrow b$ encontradas en los datos y forma un grafo con flechas relacionando las variables con las implicaciones más fuertes en distintos niveles e intensidades. Para la creación de los grafos utilizamos el programa CHIC 6.0. Destacamos que, en los grafos implicativos, no se observan todas las variables. Esto se debe a que se seleccionó la opción de mostrar implicaciones, cuyo porcentaje mínimo es del 85 %.

ANÁLISIS

El primer análisis realizado fue el de Cluster y para seleccionar la clasificación óptima construimos 6 clusters combinando 3 distancias (euclídea, euclídea al cuadrado y mahalanobis) con 2 métodos de agrupamiento (encadenamiento simple y completo). A partir de los resultados obtenidos se seleccionó el construido con distancia euclídea al cuadrado y método de agrupamiento de encadenamiento por que su coeficiente de correlación cofenética (0,859) fue el más alto (figura 2).

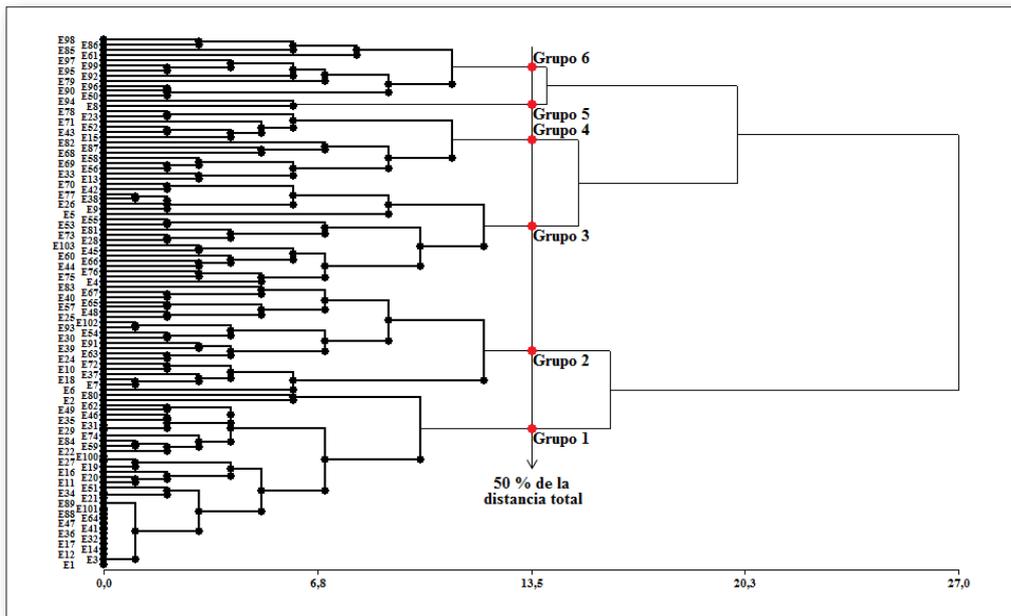


Fig. 2. Dendograma con distancia euclídea al cuadrado y encadenamiento completo.

Para identificar los grupos seleccionamos el punto medio de la distancia máxima del dendrograma, pues es un criterio frecuentemente usado (Balzarini *et al.*, 2008). Así, identificamos 6 subniveles asociados a cada uno de los grupos clasificados por el Cluster. Esto permitió dividir la matriz de datos en 6 submatrices; además, mostró la clasificación de los estudiantes en función de sus argumentaciones y desempeño en la resolución de las tareas del cuestionario.

Análisis por subnivel de desarrollo

A partir de la división de la matriz de datos por subnivel fue posible calcular las frecuencias absolutas y porcentuales de uso correcto para las 27 variables (tabla 4).

Tabla 4.
 Frecuencias de uso correcto de las variables por subnivel

| | <i>Subnivel</i> | | | | | | | | | | | | Total | |
|----------|-----------------|------|----|------|----|-----|----|------|---|-----|----|------|-------|------|
| | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | | |
| | f | % | f | % | f | % | F | % | f | % | f | % | f | % |
| V_1 | 33 | 97,1 | 15 | 71,4 | 15 | 75 | 8 | 57,1 | 1 | 50 | 6 | 50 | 78 | 75,7 |
| V_2 | 24 | 70,6 | 8 | 38,1 | 9 | 45 | 1 | 7,1 | 0 | 0 | 1 | 8,3 | 43 | 41,7 |
| V_3 | 23 | 67,6 | 5 | 23,8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 28 | 27,2 |
| V_4 | 25 | 73,5 | 15 | 71,4 | 4 | 20 | 4 | 28,6 | 0 | 0 | 1 | 8,3 | 49 | 47,6 |
| V_5 | 33 | 97,1 | 21 | 100 | 20 | 100 | 2 | 14,3 | 2 | 100 | 9 | 75 | 87 | 84,5 |
| V_6 | 34 | 100 | 20 | 95,2 | 20 | 100 | 12 | 85,7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 86 | 83,5 |
| V_7 | 33 | 97,1 | 21 | 100 | 19 | 95 | 0 | 0 | 1 | 50 | 6 | 50 | 80 | 77,7 |
| V_8 | 33 | 97,1 | 21 | 100 | 19 | 95 | 1 | 7,1 | 1 | 50 | 3 | 25 | 78 | 75,7 |
| V_9 | 33 | 97,1 | 20 | 95,2 | 13 | 65 | 1 | 7,1 | 1 | 50 | 2 | 16,7 | 70 | 68 |
| V_{10} | 34 | 100 | 20 | 95,2 | 20 | 100 | 12 | 85,7 | 0 | 0 | 1 | 8,3 | 87 | 84,5 |
| V_{11} | 34 | 100 | 21 | 100 | 20 | 100 | 14 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 89 | 86,4 |
| V_{12} | 34 | 100 | 7 | 33,3 | 8 | 40 | 8 | 57,1 | 1 | 50 | 2 | 16,7 | 60 | 58,3 |
| V_{13} | 34 | 100 | 21 | 100 | 20 | 100 | 14 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 89 | 86,4 |
| V_{14} | 34 | 100 | 7 | 33,3 | 7 | 35 | 7 | 50 | 1 | 50 | 2 | 16,7 | 58 | 56,3 |
| V_{15} | 34 | 100 | 21 | 100 | 20 | 100 | 14 | 100 | 0 | 0 | 2 | 16,7 | 91 | 88,3 |
| V_{16} | 29 | 85,3 | 2 | 9,5 | 1 | 5 | 1 | 7,1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 33 | 32 |
| V_{17} | 34 | 100 | 21 | 100 | 20 | 100 | 14 | 100 | 0 | 0 | 1 | 8,3 | 90 | 87,4 |
| V_{18} | 33 | 97,1 | 6 | 28,6 | 13 | 65 | 6 | 42,9 | 1 | 50 | 6 | 50 | 65 | 63,1 |
| V_{19} | 31 | 91,2 | 13 | 61,9 | 6 | 30 | 4 | 28,6 | 1 | 50 | 3 | 25 | 58 | 56,3 |
| V_{20} | 30 | 88,2 | 11 | 52,4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 8,3 | 42 | 40,8 |
| V_{21} | 32 | 94,1 | 21 | 100 | 14 | 70 | 7 | 50 | 2 | 100 | 7 | 58,3 | 83 | 80,6 |
| V_{22} | 33 | 97,1 | 18 | 85,7 | 11 | 55 | 11 | 78,6 | 1 | 50 | 6 | 50 | 80 | 77,7 |
| V_{23} | 34 | 100 | 21 | 100 | 7 | 35 | 1 | 7,1 | 1 | 50 | 4 | 33,3 | 68 | 66 |
| V_{24} | 34 | 100 | 21 | 100 | 19 | 95 | 13 | 92,9 | 2 | 100 | 1 | 8,3 | 90 | 87,4 |
| V_{25} | 34 | 100 | 21 | 100 | 5 | 25 | 0 | 0 | 1 | 50 | 2 | 16,7 | 63 | 61,2 |
| V_{26} | 29 | 85,3 | 5 | 23,8 | 8 | 40 | 6 | 42,9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 48 | 46,6 |
| V_{27} | 19 | 55,9 | 3 | 14,3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 22 | 21,4 |
| N | 34 | | 21 | | 20 | | 14 | | 2 | | 12 | | 103 | |

Adicionalmente, para complementar este análisis se realizó un análisis implicative de las 27 variables para 5 de los 6 subniveles identificados; se excluyó el subnivel 5 por la baja cantidad de estudiantes clasificados en él (figura 3).

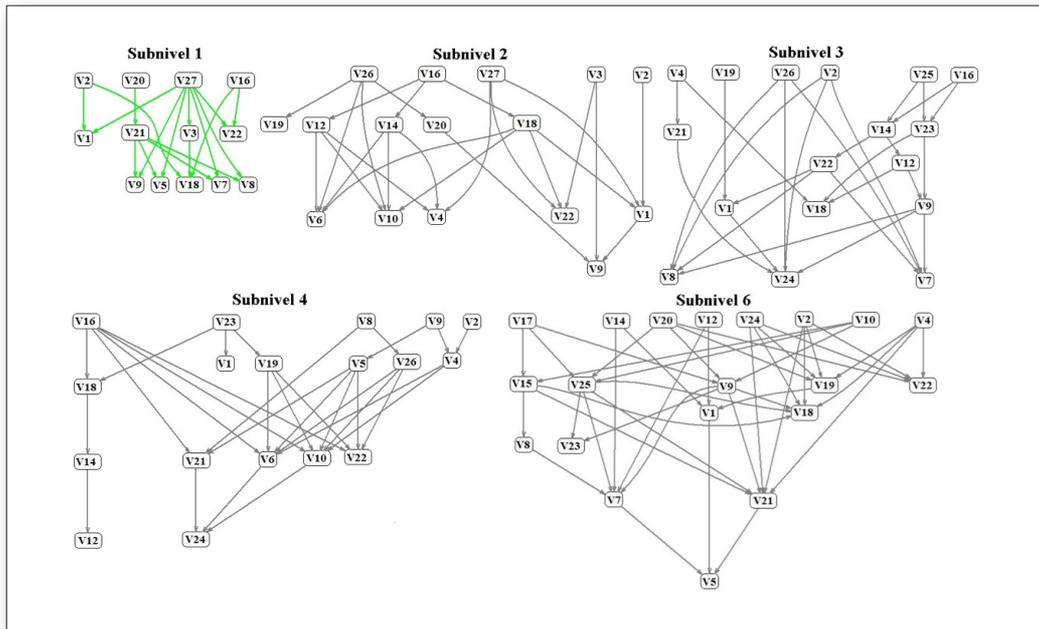


Fig. 3. Grafos implicativos por subnivel.

Subnivel 1

La tabla 4 muestra que en el subnivel 1 hay un uso correcto mayor al 85 % en 23 variables y solo en 4 los porcentajes son menores, pero superiores al 55 %. Por tanto, no existen mayores dificultades para utilizar correctamente las variables independientes del modo de representación en el cual fueron presentadas las tareas. Asimismo, los altos porcentajes muestran la capacidad para construir *coordinaciones y reversiones de procesos*, tanto puntuales como globales. Además, se establecen relaciones entre derivabilidad y continuidad asociadas al tratamiento de puntos conflictivos.

En su grafo implicative (figura 3) se observan 2 niveles de implicación. La variable dominante en la generación de implicaciones es la V_{27} , de la que surgen 7 cadenas. Asimismo, en el primer nivel, la variable más fuerte es la V_{21} , pues desde ella se originan 4 implicaciones. Es importante destacar que esta variable se encuentra conectada con la variable V_{20} .

Sobre la base de estos análisis, observamos que el subnivel 1 posee características comunes a las descritas para el nivel de desarrollo trans (tabla 1). Además, el análisis implicative refina esta caracterización al identificar las variables dominantes en su estructura implicative, las cuales corresponden a:

- La V_{20} asociada a los elementos matemáticos E_8 , E_9 y E_{10} .
- La V_{21} asociada al elemento matemático E_9 .
- La V_{27} asociada al establecimiento de relaciones entre f' y f'' , elemento matemático E_{12} .

Subnivel 2

La tabla 4 muestra que en este subnivel los menores porcentajes de uso correcto corresponden a las variables relacionadas con la consideración de f' como función (V_3), el establecimiento de relaciones entre f' y f'' (V_{27}), la capacidad de graficar a partir del uso de información analítica (V_{26}), la relación entre la monotonía de f y el signo de f' (V_{12} , V_{14}), la relación entre la curvatura de f y el signo de f'' (V_{16} , V_{18}), el tratamiento de puntos conflictivos (V_{20}) y el uso de las derivadas laterales (V_{19}). Esto establece una diferenciación de este subnivel con el anterior, donde se usaban correctamente gran parte de las variables.

Igualmente, en este subnivel, no existen mayores dificultades para determinar valores extremos (V_5 , V_6 , V_7 y V_8) y puntos de inflexión (V_9 y V_{10}). Además, se establecen de forma correcta las relaciones entre derivabilidad y continuidad (V_{21} , V_{22}). Asimismo, se determinan los intervalos para esbozar una gráfica independiente del modo de representación en el cual se dio la información (V_{23} y V_{24}). Sin embargo, solo se grafica correctamente a partir de información gráfica (V_{25}). Esto último puede deberse a la contradicción en las condiciones analíticas proporcionadas en la tarea 1.

El grafo implicativo (figura 3) muestra 3 niveles de implicación y la variable más importante en su estructura es la V_{16} . Asimismo, en el primer nivel aparece la variable V_{18} como más importante. Ambas variables se asocian al establecimiento de relaciones entre la curvatura de f y el signo de f'' .

La variable V_{26} genera 4 cadenas de implicaciones; sin embargo, 3 de ellas solo presentan un nivel, por tanto su importancia en la estructura es menor.

En análisis realizado permite asociar este subnivel con la caracterización del subnivel inter (tabla 1), pues se establecen relaciones (puntuales/globales) de conjunción e implicación para determinar valores extremos y puntos de inflexión (*coordinación de procesos*). Sin embargo, los datos informan que existen dificultades para relacionar tanto la monotonía como la curvatura de f con los signos de f' y f'' . Esto es un indicador que difiere de la caracterización de la tabla 1, pero que refuerza la idea de esbozos de síntesis de los modos de representación en este subnivel; además, confirma que solo se construyen *coordinaciones de procesos* vinculados a condiciones suficientes de monotonía y curvatura. Otro aspecto complementario a la caracterización se relaciona con la capacidad para utilizar correctamente la relación directa entre derivabilidad y continuidad y no solo la contrarrecíproca, como ocurría en el subnivel 1. Además, en análisis implicativo muestra que las variables dominantes en su estructura corresponden a:

- La V_{16} asociada a la relación implicación \Leftarrow del elemento E_5 .
- La V_{18} asociada a la relación implicación \Leftarrow del elemento E_6 .

Subnivel 3

En el subnivel 3, la tabla 4 muestra que no existe utilización correcta de las variables V_3 , V_{20} y V_{27} , en donde V_3 está asociada a considerar f' como función, V_{20} se vincula al tratamiento de los puntos conflictivos y V_{27} está asociada al establecimiento de relaciones entre f' y f'' . Esto es un elemento diferenciador respecto al subnivel anterior, pues en él había bajo porcentaje de uso correcto de esas variables, pero no era nulo. Además, hay bajos porcentajes en la variable V_{19} , asociada con las derivadas laterales, y de las variables V_{23} y V_{25} , vinculadas al uso de información gráfica.

En este subnivel, se determinan valores extremos y puntos de inflexión, así como implicaciones directas que vinculan los signos de f' y f'' con f (V_{11} , V_{13} , V_{15} y V_{17}). Sin embargo, existen problemas para construir las implicaciones contrarias (*reversiones de procesos*), es decir, aquellas que vinculan la monotonía y curvatura de f con los signos de f' y f'' .

Su grafo implicativo (figura 3) muestra 4 niveles de implicación. Las variables que más cadenas generan son la V_{26} y la V_2 , pero estas cadenas solo poseen un nivel de implicación, por tanto su papel en su estructura es secundario. En cambio, el grupo conformado por las variables V_{25} y V_{16} , que generan 2 cadenas de implicaciones respectivamente, posee mayor importancia en su estructura porque sus cadenas tienen 4 niveles.

A partir del análisis, se observa que el subnivel 3 está asociado a la caracterización del subnivel inter 1 (tabla 1). Es más, los datos confirman que se establecen relaciones de equivalencia lógica y solo se construyen implicaciones directas vinculadas, principalmente, a información analítica proporcionada en términos de los signos de f' y f'' . Esto constituye un indicador de que no hay síntesis de los modos de representación, lo cual es concordante con los bajos porcentajes de uso correcto de las variables V_{23} y V_{25} . Además, a diferencia del subnivel 2, hay dificultades al tratar con puntos conflictivos y derivadas laterales.

El análisis implicativo muestra que en este subnivel el modo de representación analítico es el dominante, pues las variables más importantes son:

- La V_{25} , vinculada con la capacidad de graficar correctamente a partir del conocimiento de las propiedades gráficas de la función, asociada a los elementos matemáticos E_1 , E_2 , E_3 , E_4 , E_5 , E_6 y E_9 .
- La V_{16} , que conecta la convexidad de f con el signo positivo de f'' , asociada a la relación implicación \Leftarrow del elemento E_5 .

Subnivel 4

En el subnivel 4, la tabla 4 muestra que existen dificultades en el uso de 15 de las variables, que presentan porcentajes menores al 50 %. Un aspecto diferenciador, con respecto al subnivel 3, es el casi nulo uso correcto de la variable V_2 , que está asociada al significado analítico puntual de la derivada. Además, 5 de las variables no fueron utilizadas correctamente, o no se observaron en los protocolos de resolución. Las variables con porcentaje de uso nulo fueron la V_3 , vinculada a considerar f' como función; la V_7 , asociada con determinar un valor mínimo local a partir de información gráfica; la V_{20} , asociada al tratamiento de puntos conflictivos; la V_{25} , vinculada a la capacidad de determinar intervalos a partir de información gráfica, y la V_{27} , asociada al establecimiento de relaciones entre f' y f'' .

En este subnivel, al igual que en el anterior, se construyen implicaciones directas (*coordinación de procesos*) que vinculan los signos de f' y f'' con f (V_{11} , V_{13} , V_{15} y V_{17}). Además, se determinan intervalos para esbozar la gráfica de una función a partir de la información analítica (V_{24}) y se determinan máximos locales y puntos de inflexión utilizando el mismo tipo de información (V_6 , V_{10}), pero a diferencia del subnivel 3, existen dificultades para determinarlos a partir de la información gráfica (V_5 , V_7 , V_9).

Su grafo implicativo (figura 3) muestra 3 niveles de implicación donde la variable más importante es la V_{16} . Además, otra variable importante es la V_{23} , pues de ella nacen 3 cadenas y 2 de estas tienen 3 niveles.

Los análisis muestran que esta caracterización no está incluida en la tabla 1, por tanto corresponde a un subnivel inter de menor complejidad, caracterizado por el establecimiento de algunas relaciones lógicas de conjunción e implicación, pero con la existencia de dificultades al tratar con información gráfica y con el significado analítico puntual de la derivada. Además, el análisis implicativo indica que las variables más importantes en su estructura son:

- La V_{16} , que conecta la convexidad de f con el signo positivo de f'' , asociada a la relación implicación \Leftarrow del elemento E_5 .
- La V_{23} , vinculada con la capacidad de dividir correctamente una gráfica en distintos intervalos a partir de los elementos gráficos proporcionados (monotonía y curvatura), asociada a los elementos $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ y E_9 .

Subnivel 6

La tabla 4 muestra que en este subnivel existen dificultades en el uso de gran parte de las variables, es más, en 21 de ellas el porcentaje es 0, o bien es muy inferior al 50 %. Asimismo, solo las variables asociadas con la determinación de un máximo local a partir de información geométrica (V_5) y con el uso de la relación directa entre derivabilidad y continuidad (V_{21}) tienen un porcentaje mayor al 50 %. Además, a diferencia del subnivel 4, existen problemas para utilizar las variables vinculadas a las implicaciones directas y contrarias que relacionan los signos de f' y f'' con la monotónia y curvatura de f .

Su grafo implicativo (figura 3) presenta 4 niveles de implicación y 4 variables generan 4 cadenas (V_2, V_4, V_{20}, V_{24}). Esto muestra que existieron serias dificultades para utilizar las variables medidas en el cuestionario; sin embargo, se establecieron relaciones de conjunción entre algunas de ellas, las cuales, generalmente, se asocian a elementos puntuales.

A partir del análisis, se observa que la descripción de este subnivel no está en la tabla 1, pero, dadas las características aquí descritas, se infiere que este subnivel se ubica entre el intra 1 y el intra (tabla 1), debido al tipo de relaciones que se dan. Además, el análisis implicativo indica que las variables más importantes en su estructura son:

- La V_2 , asociada al elemento E_8 .
- La V_4 , asociada al elemento E_{12} .
- La V_{20} , asociada al elemento E_9 .
- La V_{24} vincula a la capacidad de definir correctamente distintos intervalos del dominio de la función a partir de la información analítica proporcionada, asocia los elementos $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ y E_9 .

REFINAMIENTO DE LA CARACTERIZACIÓN DE LOS SUBNIVELES DE DESARROLLO

Subniveles trans

El trabajo de Sánchez-Matamoros *et al.* (2006) no hace referencia explícita a la existencia de subniveles anidados en el nivel trans y concluye que, en dicho nivel, se establecen relaciones lógicas de diferente tipo (conjunción, contrarrecíproco, equivalencia); además, se alcanza la síntesis de los modos de representación y se establecen relaciones entre f' y f'' de forma puntual y global. Destacamos que esta descripción es concordante con la caracterización del subnivel 1 identificado en este trabajo, pues en él se pueden establecer *coordinaciones* entre *procesos*, no solo puntuales sino que también globales, que vinculan f' y f'' por medio de distintas relaciones lógicas. Esto queda de manifiesto en la identificación de la contradicción presente en la tarea 1, lo cual era posible al vincular, tanto global como puntualmente, f' con f'' . Asimismo, el análisis implicativo refuerza este resultado y proporciona

información respecto a las variables dominantes en su estructura. Esto permite hablar de elementos claves que, en este caso, corresponden a los asociados a las relaciones entre derivabilidad y continuidad, en conjunto con el tratamiento de puntos conflictivos, además del establecimiento de relaciones entre f' y f'' , que involucra todos los elementos de matemáticos de la tabla 2.

Por otra parte, los estudios sobre la *tematización* del *esquema* realizados por García *et al.* (2011) y Fuentealba *et al.* (2017) mencionan la existencia de distintos matices. Estos se asocian a la concepción de la derivada como operador lineal y al establecimiento de relaciones entre distintos pares de derivadas sucesivas, lo que induce la existencia de 3 subniveles anidados en el nivel de desarrollo trans. El primero de ellos, que hemos denominado trans C, es el identificado por medio del análisis de Cluster y su caracterización es la descrita anteriormente (García *et al.*, 2011). El segundo, que hemos denominado trans B, está asociado a la *tematización* como *totalidad* caracterizada por el establecimiento relaciones indirectas entre pares de derivadas sucesivas (Fuentealba *et al.*, 2017). Por último, el tercero, que denominamos trans A, se vincula a la *tematización* como *objeto* caracterizada por el uso de relaciones directas entre pares de derivadas sucesivas (Fuentealba *et al.*, 2017). Destacamos que los matices en la *tematización* solo se manifiestan en entrevistas clínicas donde los estudiantes se enfrentan a situaciones nuevas (Baker *et al.*, 2000; García *et al.*, 2011). Por tanto, estos matices no son observables en los análisis estadísticos desarrollados.

Triangulando los resultados de los estudios cualitativos previos (Sánchez-Matamoros *et al.*, 2006; García *et al.*, 2011; Fuentealba *et al.*, 2017) con los análisis cuantitativos desarrollados, se verifica la existencia de 3 subniveles anidados en el nivel de desarrollo trans (tabla 5).

Tabla 5.
Subniveles trans

| <i>Trans</i> | <i>Caracterización</i> |
|--------------|---|
| C | Identificado por el Cluster (subnivel 1) Se establecen: <ul style="list-style-type: none"> – <i>Coordinaciones</i> entre <i>procesos</i> globales y puntuales que conectan f' con f'' (Sánchez-Matamoros <i>et al.</i>, 2006; García <i>et al.</i>, 2011). – <i>Coordinaciones</i> de dos o más <i>procesos</i> y, también, su correspondiente <i>reversión</i> (equivalencia lógica). – Relaciones entre derivabilidad y continuidad; por tanto, no existen dificultades en el tratamiento de las derivadas laterales y de los puntos conflictivos. Existe: <ul style="list-style-type: none"> – Síntesis de los modos de representación. |
| B | Igual al subnivel trans C y, además, se establecen relaciones indirectas entre derivadas sucesivas. |
| A | Igual al subnivel trans C y, además, se establecen relaciones directas entre derivadas sucesivas. |

Subniveles inter

Con relación al nivel de desarrollo inter, el análisis confirma la existencia de 3 subniveles que hemos etiquetado como inter A (subnivel2), inter B (subnivel 3) e inter C (subnivel 4). El primero de ellos, corresponde a la caracterización subnivel inter (tabla 1), pero el análisis indica que existen dificultades para establecer las relaciones contrarias que vinculan los signos de f' y f'' con f (*reversión* de *procesos*). Además, en este subnivel se establecen relaciones directas entre derivabilidad y continuidad. Adicionalmente, su grafo implicativo mostró que el grupo de variables más importantes es el conformado por aquellas que vinculan la curvatura de f' con el signo de f'' (V_{16} , V_{18}). Esto es concordante con análisis de frecuencias y, además, indica que los elementos E_5 y E_6 , tienen un papel fundamental en la formación de este subnivel.

Igualmente, la caracterización de subnivel inter B es concordante con la del subnivel inter 1 (tabla 1). Además, al igual que en el subnivel inter A, existen dificultades para establecer relaciones de equivalencia lógica y solo se construyen implicaciones directas, o conjunciones a partir de información analítica. Por tanto, no hay síntesis de los modos de representación, por ello existen bajos porcentajes en las variables asociadas al uso de información gráfica (V_{23}, V_{25}). Asimismo, existen dificultades en el tratamiento correcto de puntos conflictivos, lo cual se asocia con los problemas observados en el uso de derivadas laterales. El análisis implicativo de este subnivel informa que la variable V_{16} , vinculada al elemento matemático E_5 , es una de las más importantes en su estructura, en conjunto con la V_{25} , que asocia varios elementos matemáticos ($E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ y E_9). Ambas variables ratifican la existencia de dificultades en la interpretación de la información gráfica.

El subnivel inter C, que completa la caracterización de subniveles inter, no había sido identificado a partir de los estudios cualitativos. Específicamente, corresponde a un subnivel inter de menor complejidad, pues al igual que en el inter B, solo se establecen algunas relaciones de conjunción e implicación directa, pero existen dificultades con el significado analítico puntual de la derivada y con la determinación de valores extremos y puntos de inflexión a partir de la información gráfica. Además, el análisis implicativo indica que, tal como sucedía con los otros subniveles inter, la variable V_{16} es una de las más importantes en su estructura, siendo acompañada por la variable V_{23} , que vincula varios elementos matemáticos ($E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ y E_9). Destacamos que ambas variables, al igual que en el subnivel inter B, informan de la dificultad en el tratamiento de la información gráfica.

Un aspecto importante en la estructura implicativa de estos 3 subniveles está vinculado a la variable V_{16} , que asocia la convexidad de f con el signo positivo de f'' . Esta es transversal en las 3 estructuras implicativas, por tanto juega un papel primordial en la conformación del nivel de desarrollo. La tabla 6 presenta la caracterización de los subniveles inter.

Tabla 6.
Subniveles inter

| Inter | Caracterización |
|-------|---|
| C | Identificado por el Cluster (subnivel 4) Existen dificultades para: <ul style="list-style-type: none"> - Determinar valores extremos y puntos de inflexión a partir de información gráfica. - Construir <i>reversiones</i> de <i>procesos</i> que vinculan la monotonía y curvatura de f con los signos de f' y f'', por tanto no se establecen relaciones de equivalencia lógica. - Establecer las relaciones entre derivabilidad y continuidad. - Tratar los puntos conflictivos y las derivadas laterales. - Interpretar información gráfica puntual y global. Se establecen: <ul style="list-style-type: none"> - Solo algunas relaciones de conjunción e implicación. No hay: <ul style="list-style-type: none"> - Relaciones entre f' y f''. - Síntesis de los modos de representación. |

| Inter | Caracterización |
|-------|---|
| B | Identificado por el Cluster (subnivel 3) Existen dificultades para: <ul style="list-style-type: none"> - Construir <i>reversiones de procesos</i> que vinculan la monotonía y curvatura de f con los signos de f' y f'', por tanto no se establecen relaciones de equivalencia lógica. - Establecer las relaciones entre derivabilidad y continuidad. - Tratar los puntos conflictivos y las derivadas laterales. - Interpretar la información gráfica global. Se establecen: <ul style="list-style-type: none"> - Valores extremos y puntos de inflexión. - Relaciones de conjunción e implicación. No hay: <ul style="list-style-type: none"> - Relaciones entre f' y f''. - Síntesis de los modos de representación. |
| A | Identificado por el Cluster (subnivel 2) Existen dificultades para: <ul style="list-style-type: none"> - Construir <i>reversiones de procesos</i> que vinculan la monotonía y curvatura de f con los signos de f' y f'', por tanto no se establecen relaciones de equivalencia lógica. - Conectar f' con f''. Se establecen: <ul style="list-style-type: none"> - Valores extremos y puntos de inflexión. - Relaciones de conjunción e implicación. - Relaciones entre derivabilidad y continuidad, por tanto no existen dificultades en el tratamiento de las derivadas laterales y de los puntos conflictivos. Existen: <ul style="list-style-type: none"> - Esbozos de síntesis de los modos de representación, pero hay dificultades asociadas a la interpretación de la información gráfica. |

Subniveles intra

Los subniveles 5 y 6 están anidados en el nivel de desarrollo intra, pero el subnivel 5 no fue caracterizarlo debido a la baja cantidad de estudiantes clasificados en él. Esto es consecuencia de las características propias de los participantes. Sin embargo, en función de la progresión en el desarrollo del *esquema*, inferimos que este subnivel, etiquetado como intra A, está en transición hacia el inter C, por tanto su caracterización es la del subnivel intra (tabla 2).

Por su parte, el subnivel 6, que hemos denominado como intra B, corresponde a un subnivel no identificado anteriormente. En particular, en él se observan dificultades con el uso de la mayor parte de las variables. Sin embargo, se establecen algunas relaciones lógicas de conjunción que permiten determinar máximos locales. Además, se observa el establecimiento de algunas relaciones entre derivabilidad y continuidad. Adicionalmente, su grafo implicativo informa que las variables más importantes son V_2, V_4, V_{20} y V_{24} , las cuales, en conjunto, se asocian a los elementos $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_8, E_9$ y E_{12} . Esto confirma la dificultad existente para responder a las tareas propuestas en el cuestionario.

Por otra parte, el último subnivel de la tabla 1, que denominados intra C, no fue identificado por el análisis de Cluster. La tabla 7 presenta la caracterización de los subniveles intra.

Tabla 7.
Subniveles intra.

| <i>Intra</i> | <i>Caracterización</i> |
|--------------|---|
| C | No fue identificado por el Cluster, pero su caracterización se corresponde con la del subnivel intra 1 (tabla 1). |
| B | Identificado por el Cluster (subnivel 6) Existen dificultades para: <ul style="list-style-type: none"> – <i>Coordinar procesos</i> tanto globales como puntuales, por tanto, en general, no se determinan valores extremos o puntos de inflexión. – Construir <i>coordinaciones de procesos</i> que vinculan la monotonía y curvatura de una función con los signos de f' y f'', tanto de forma directa como contraria. – Interpretar la información proporcionada en ambos modos de representación. – Tratar puntos conflictivos y derivadas laterales. Se establecen algunas: <ul style="list-style-type: none"> – Relaciones entre derivabilidad y continuidad. – Relaciones de conjunción. No se: <ul style="list-style-type: none"> – Considera f' como función. – Esboza correctamente una función a partir de la información gráfica proporcionada. – Establecen relaciones entre f' y f''. – Observa síntesis de los modos de representación. |
| A | Identificado por el Cluster (subnivel 5). No fue caracterizado por la ínfima cantidad de estudiantes clasificados en él. La caracterización de este subnivel es la del subnivel intra 1 (tabla 1). |

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos identificado y caracterizado los 3 subniveles anidados en cada nivel de desarrollo del *esquema* de derivada. En particular, para identificar todos los subniveles fue clave el uso de métodos mixtos. Específicamente, se utilizaron dos métodos de análisis estadístico cuyos resultados fueron triangulados con los de estudios de carácter cualitativo a fin de completar la identificación de todos los subniveles cuya existencia asegura la teoría. Destacamos que los métodos estadísticos usados identificaron solo 6 subniveles, de los cuales se caracterizaron 5. En este punto, subrayamos la importancia de los estudios cualitativos previos, referentes a la *tematización* del *esquema* de derivada (García *et al.*, 2011; Fuentealba *et al.*, 2017), los que permitieron inferir y completar la caracterización de subniveles de desarrollo pertenecientes al nivel trans. Igualmente, el trabajo previo que identificó algunos subniveles de desarrollo (Sánchez-Matamoros *et al.*, 2006) permitió asociar los clusters con los distintos subniveles anidados en el nivel intra. Asimismo, los análisis estadísticos desarrollados permitieron identificar un nuevo subnivel de desarrollo anidado en el nivel inter.

Por otra parte, el análisis implicativo informó sobre las variables dominantes en la estructura de los 5 subniveles analizados. Sin embargo, se requieren nuevas investigaciones que identifiquen qué variables son las dominantes en los restantes subniveles. En este mismo sentido, el análisis implicativo mostró que la variable V_{16} es dominante en los 3 subniveles de desarrollo inter; por tanto es determinante en el desarrollo y la transición entre ellos. Asimismo, la información proporcionada por las variables dominantes identificadas y sus elementos asociados debe tenerse en cuenta en el desarrollo de tareas que permitan transitar de un subnivel a otro.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente financiado por los Proyectos EDU2014-54526-R, EDU2015-65378-P, EDU2016-81994-REDT y EDU2017-87411-R (Ministerio de Economía y Competitividad), por SGR-2017-101 (GIPEAM, AGAUR), la Facultad de Ciencias de la Ingeniería de la UACH y el proyecto Fondecyt 11180899.

REFERENCIAS

- ARNON, I., COTTRILL, J., DUBINSKY, E., OKTAÇ, A., FUENTES, S. R., TRIGUEROS, M. y WELLER, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Berlin: Springer.
- ASIALA, M., COTTRILL, J., DUBINSKY, E. y SCHWINGENDORF, K. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivate. *Journal of Mathematics Behavior*, 16(4), 399-430. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(97\)90015-8](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90015-8)
- BAKER, B., COOLEY, L. y TRIGUEROS, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for research in mathematics education*, 31(5), 557-578. <https://doi.org/10.2307/749887>
- BALZARINI, M. G., GONZÁLEZ, L., TABLADA, M., CASANOVES, F., DI RIENZO, J. A. y ROBLEDO, C. W. (2008). *Manual del Usuario*. Córdoba, Argentina: Editorial Brujas.
- CISTERNA, F. (2005). Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en investigación cualitativa. *Theoria*, 14(1), 61-71.
- FONT, V., TRIGUEROS, M., BADILLO, E. y RUBIO, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics*, 91(1), 107-122. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9639-6>
- FUENTEALBA, C., SÁNCHEZ-MATAMOROS, G., BADILLO, E. y TRIGUEROS, M. (2017). Thematization of derivative schema in university students: nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(3), 374-392. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1248508>
- GARCÍA, M., LLINARES, S. y SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International journal of science and mathematics education*, 9(5), 1023-1045. <https://doi.org/10.1007/s10763-010-9227-2>
- JOHNSON, D. (1998). *Applied multivariate methods for data analysts*. Duxbury Resource Center.
- LERMAN, I., GRAS, R. y ROSTAM, H. (1981). Élaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires. *Mathématiques et sciences humaines*, 75, 5-47.
- MEEL, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Relime*, 6(3), 221-278.
- PIAGET, J. y GARCÍA, R. (1983). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México, España, Argentina, Colombia: Siglo Veintiuno Editores, S.A.
- ROCCO, T., BLISS, L., GALLAGHER, S. y PÉREZ-PRADO, A. (2003). Taking the next step: Mixed methods research in organizational systems. *Information Technology, Learning, and Performance Journal*, 21(1), 19-29.

- SÁNCHEZ-MATAMOROS, G., GARCÍA, M. y LLINARES, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(1), 85-98.
- SOKAL, R. y ROHLF, F. (1962). The comparison of dendrograms by objective methods. *Taxon*, 11(2), 33-40.
- TRIGUEROS, M. y ESCANDÓN, C. (2008). Los conceptos relevantes en el aprendizaje de la graficación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 13(36), 59-85.
- TRIGUEROS, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1), 5-31.
- ZANDIEH, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education. IV* (pp. 103-127). Washington DC: American Mathematical Society Mathematical Association of America.

Identification and characterization of the development sub-levels of derivative *schema*

Claudio Fuentealba
Facultad de Ciencias
de la Ingeniería
Universidad Austral de Chile
fuentealba@uach.cl

Edelmira Badillo
Departament de Didàctica de la Matemàtica
i de les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona
edelmira.badillo@uab.cat

Gloria Sánchez-Matamoros
Departamento de Didáctica
de la Matemática
Universidad de Sevilla
gsanchezmatamoros@us.es

The notion of *derivative* corresponds to a fundamental piece of knowledge for the development of any Calculus course in various areas of science. Therefore, knowing how students construct and coordinate both the punctual and global aspects of this concept, in the different modes of representation, is a valuable tool that can serve as input for the construction of empirically-based instructional designs.

Several models have been developed or adapted from psychological and sociocultural theories that explain how mathematical concepts develop in the mind of an individual (student). However, in this research, we consider the cognitive model proposed by the APOS theory, which states that the construction of a mathematical concept requires four basic cognitive structures: action, process, object, and schema. A student can start to understand a concept thanks to the manipulation of previously constructed physical or mental objects in terms of actions; as actions are internalized to form processes that are encapsulated in objects. Finally, actions, processes, and objects can be organized into schemas that can have different levels of development (Arnon *et al.*, 2014). Likewise, the theory states that each of the stages or levels contains sub-steps or sub-levels which follow the same order and that one can only pass to another sub-level after completing the previous one. In this context, this paper presents an analysis of the development of the derivative schema focused on the identification and characterization of the different sub-levels of development located in each of the levels of the schema.

We used a questionnaire as our data collection instrument. It was composed of three tasks that had been selected and/or adapted from previous research studies linked to the concept of derivative. These tasks involved the use of mathematical elements of different nature –punctual and global– in different modes of representation –analytical and graphic–. The questionnaire was applied to 103 university students with previous instruction in Differential Calculus, who took, approximately, 90 minutes to complete.

This research adopted a mixed method of data analysis with an exploratory and confirmatory nature. Specifically, the 103 resolution protocols of the questionnaires were discretized from 27 variables previously established and measured with a dichotomous scale. This way, we obtained a vector associated with each of the 103 resolution protocols, which allowed us to perform: (1) a cluster analysis to identify the sub-levels of development included at each level, (2) an analysis of percentage frequencies of each of the 27 variables by sub-level, and, (3) an implicative statistical analysis to identify the most critical variables in the underlying structure of each sub-level. Likewise, the results were contrasted with previous qualitative research linked to the analysis of the development of levels and sub-levels of the derivative schema.

The analysis developed in this research allowed us to identify and characterize three nested sub-levels of development in the Trans, Inter and Intra levels of the derivative schema. However, the identification of these 9 sub-levels was only possible thanks to the triangulation of the statistical analysis developed here with the findings of previous qualitative research work. In fact, the cluster analysis only allowed us to identify 6 of the 9 sub-levels that the theory predicts and we could only characterize 5 of those 6 sub-levels. However, we highlight the potential of this model of analysis to identify and characterize levels/sub-levels of development of schemas of different mathematical concepts.