ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 37-1 (2019), 93-116
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión

Structure and dynamic of analogical, abductive and deductive arguments: a course on solid geometry as a context for reflection

Óscar Javier Molina Jaime
Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia
ojmolina@pedagogica.edu.co

Vicenç Font Moll
Departament d'Educació Lingüística i Literària i de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica Universitat de Barcelona, Barcelona, España
vfont@ub.edu

Luis Pino-Fan
Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile
luis.pino@ulagos.cl

RESUMEN • Se describen procesos de argumentación con énfasis en los argumentos analógicos, surgidos cuando un grupo de estudiantes aborda un problema que puede ser resuelto tanto en la geometría plana como en la del espacio. Para ello, en el marco de una metodología cualitativa basada en la realidad del aula, se emplea el modelo de Toulmin para tipificar los argumentos producidos y se realiza un análisis ontosemiótico para describir la actividad matemática asociada. Los resultados permiten legitimar el uso de argumentos abductivos o analógicos en procesos de resolución de problemas (particularmente, de geometría del espacio) precisando la forma en que estos articulan y dinamizan diversos objetos (conceptos, procedimientos, proposiciones) presentes en el proceso. Además, permiten detallar las fases de una argumentación por analogía mediante las configuraciones de los dominios que involucra.

PALABRAS CLAVE: Tipos de argumentos; Configuración ontosemiótica; Geometría del espacio

ABSTRACT • We describe the argumentation process, focusing on arguments by analogy, emerging when a group of students addresses a problem that can be solved in both 2D geometry and 3D geometry. To this end, within a qualitative-naturalist methodology called classroom-based research, the Toulmin Model was used to typify the arguments produced by students, and an ontosemiotic analysis was carried out to describe the mathematical activity associated. Outcomes legitimate the use of abductive or analogical arguments in problem-solving processes (particularly, in 3D geometry) specifying the way how they articulate and dynamize objects (concepts, procedures, propositions) present in that process. In addition, we explain the phases of the argumentation by analogy through the relationship between the domains involved in it.

KEY WORDS: Type of Arguments; Ontosemiotic Configuration; Solid Geometry

Recepción: octubre 2017 • Aceptación: enero 2019 • Publicación: marzo 2019

Molina, O., Font, V. y Pino-Fan, L. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las ciencias, 37*(1), 93-116. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484

INTRODUCCIÓN

En las últimas dos décadas la educación matemática ha tenido un gran desarrollo investigativo en torno a los tipos de argumentos inductivos, abductivos y deductivos que pueden estar involucrados en procesos de enseñanza-aprendizaje (*e.g.*, Mariotti, 2006; Pedemonte, 2007; Boero, Douek, Morselli y Pedemonte, 2010; Arzarello, Bartolini-Bussi, Leung, Mariotti y Stevenson, 2012). Sin embargo, como señalan otros autores (*e.g.*, English, 2004; Reid y Knipping, 2010; Lee y Sriraman, 2011), no ha pasado lo mismo con respecto al argumento por analogía. Afirman que el término *analogía* aparece usualmente en tres contextos diferentes pero relacionados: 1) la resolución de problemas (Polya, 1954), donde son comparados dos problemas similares para poder abordar uno (el problema nuevo) a partir de sus similitudes con el otro (ya conocido); 2) los procesos de enseñanza donde, desde un punto de vista pedagógico, se valoran las comparaciones como una manera para describir lo «desconocido» en términos de algo conocido, y 3) procesos argumentativos donde una analogía se utiliza como medio para establecer inferencias a partir de la comparación que sugiere.

Dada la importancia que la analogía tiene en la actividad matemática (Polya, 1954) y el efecto que tiene el proceso de argumentación por analogía en el desarrollo del pensamiento lógico (English, 2004) y en la construcción del conocimiento científico (Juthe, 2005; Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1989), este artículo tiene la intención de estudiar dicho proceso en el contexto de un curso universitario de geometría del espacio. Específicamente, el objetivo de este artículo es describir procesos de argumentación, especialmente por analogía, que emergen cuando un grupo de estudiantes se involucra en la solución de un problema que puede ser resuelto tanto en el contexto de la geometría plana como en el de la geometría del espacio. Concretamente, la pregunta que orienta la investigación es: ¿Cómo procesos argumentativos, principalmente por analogía, articulan conceptos, procedimientos y proposiciones, al resolver un problema? Proveer respuestas permitiría legitimar el uso de ciertos argumentos (abductivos o analógicos, no solo deductivo-formales) a través del dinamismo de los objetos involucrados en la argumentación correspondiente durante la resolución de un problema. Con ello, abordar la dicotomía formal-informal en el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Mariotti, 2006; Arzarello, Bartolini-Bussi, Leung, Mariotti y Stevenson, 2012) en un contexto poco explorado como la geometría del espacio.

El texto se estructura como sigue: primero, presentamos el marco conceptual del estudio; en él exponemos la conceptualización para argumentación, argumento y su tipología empleando el modelo de Toulmin (2003), además de las fases para un proceso de argumentación por analogía. Dado que un proceso de argumentación implica la organización de una cierta actividad matemática, luego indicamos una herramienta del enfoque ontosemiótico (EOS) que permite analizar dicha actividad (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013); esta herramienta nos permite ver con mayor nitidez cómo los objetos matemáticos primarios (problemas, conceptos, procedimientos, proposiciones, lenguajes) son articulados por los procesos argumentativos implicados en tal actividad. Luego describimos la metodología, básicamente cualitativa, empleada para llevar a cabo el estudio. Enseguida, exponemos el análisis de la actividad de los estudiantes de acuerdo con la metodología y las herramientas teóricas descritas. Finalmente, presentamos las conclusiones que responden a la pregunta orientadora del estudio.

MARCO CONCEPTUAL

Esta sección se compone de tres secciones: la primera presenta la definición de *argumento* empleada en este artículo y una tipología de argumentos estructurados con el modelo de Toulmin (2003). Dado el interés especial de este reporte, siguiendo las ideas de Juthe (2005) y Steinhart (2001), en la segunda sección se presenta una conceptualización de *analogía* y de *argumento por analogía*; además, se exponen las fases del proceso que lleva a un argumento de ese tipo. Luego, se describe la propuesta del EOS (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013) para el análisis de la actividad matemática en términos de prácticas y de objetos primarios activados en ellas; con ello, se aporta una herramienta para precisar los objetos primarios que se articulan en procesos de argumentación.

Argumento y tipología de argumentos

Asumiendo una postura sociocultural, entendemos por *argumentación* un proceso colectivo o individual que, de acuerdo con reglas compartidas, apunta a una conclusión mutuamente aceptable acerca de la veracidad o falsedad de una aserción o acción (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri y Garuti, 1997; Boero, 1999; Boero, Douek, Morselli y Pedemonte, 2010), o a la búsqueda de la toma de una decisión (Krummheuer, 1995). En este sentido, un *argumento* es un discurso oral o escrito producto de dicho proceso que se compone de tres elementos básicos (Toulmin, 2003): la aserción (A) o punto de vista pronunciado por alguien, los datos (D) que soportan la aserción A cuando esta es desafiada y la garantía (G) que presenta la incidencia de los datos D en la aserción A, cuando se desafía la forma en que D puede ser conectado con (o soporta) A. La garantía G puede ser expresada por un principio o una regla general que autoriza el paso de D a A. Un argumento puede ser tipificado por alguna de las siguientes formas: inductivo, abductivo, deductivo, o por analogía (Reid y Knipping, 2010). Tal como sugieren varios autores (Pedemonte, 2007; Boero, Douek, Morselli y Pedemonte, 2010; Conner, Singletary, Smith, Wagner y Francisco, 2014; Krummheuer, 1995; 2015; Knipping y Reid, 2015) usamos el modelo de Toulmin –concretamente la forma en que se relacionan A, D y G– para describir cada uno de dichos tipos de argumento. Seguimos, principalmente, la idea de Pedemonte (2007):

En un *argumento deductivo* se aplica una proposición general (G) conocida $(r: p \rightarrow q)$ a unos datos (D) dados (p_1: particularización de *p*), para inferir necesariamente la aserción (A) (q_1: particularización de *q*. El esquema del argumento es $(p_1 \wedge r) \rightarrow q_1$ (figura 1).[1]

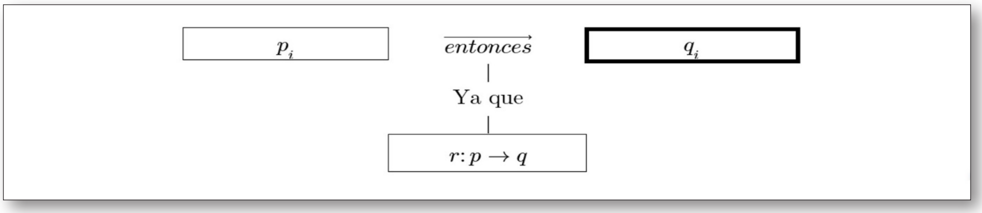


Fig. 1. Modelo de Toulmin para argumento deductivo.

En un *argumento abductivo* la proposición particular (A) que se tiene se refiere a un hecho observado q_1(caso de *q*), y se cuenta con la proposición general $r: p \rightarrow q$ (G). Se infiere que es posible el hecho p_1, caso de *p* (D). El esquema del argumento es $(q_1 \wedge r) - \rightarrow p_1$ (figura 2). La inferencia así obtenida es de índole provisional y plausible.[2]

1. Se presenta, en un cuadro en negrilla, lo que se infiere en cada tipo de argumento.
2. Indicamos esto en el esquema con el símbolo « y en el diagrama con el borde punteado.

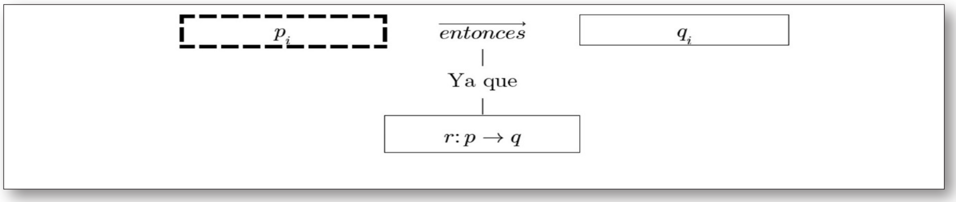


Fig. 2. Modelo de Toulmin para argumento abductivo.

Para *argumento inductivo* en el que la generalización se focaliza en la regularidad de resultados[3] se tienen n casos $(p_1 \wedge q_1),\cdots,(p_n \wedge q_n)$ (D), donde las p_i son casos de p y para las cuales se satisface una propiedad q_1, instanciaciones respectivas de q (A). Se infiere que es posible generalizar los resultados a través de una proposición general $r: p \rightarrow q$ (G). El esquema del argumento es $(p_1 \wedge q_1)\wedge\cdots\wedge(p_n \wedge q_n) - \rightarrow r$ (figura 3). La inferencia sería válida si la proposición coexiste con todos los casos de .

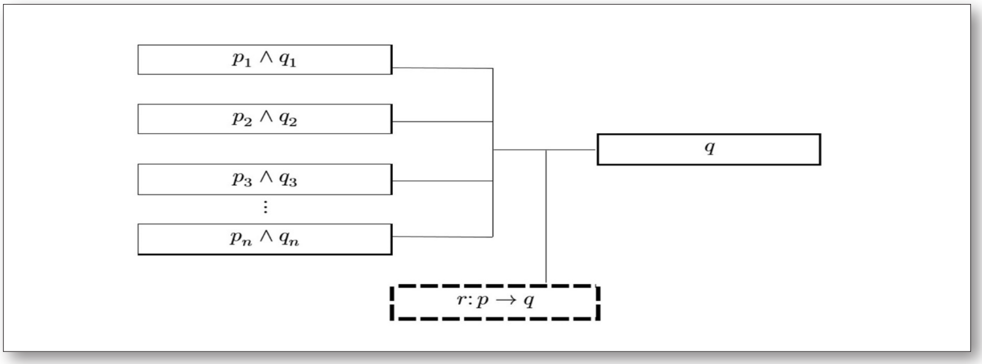


Fig. 3. Modelo de Toulmin para argumento inductivo sobre resultado.

Argumento por analogía

Una *analogía* se concibe como las similitudes resultantes de la comparación entre las estructuras de dos sistemas (English, 2004; Juthe, 2005; Perelman y Olbrechts-Tyteca, 1989; Polya, 1954; Conner, Sigletary, Smith, Wagner y Francisco, 2014). Dichos autores asumen la caracterización clásica según la cual una *analogía* se refiere a una relación *proporcional* que involucra cuatro términos y que se expresa mediante la proposición (*a*): *p' es a q' como p es a q*. Basándose en lo anterior, Steinhart (2001) y Juthe (2005) plantean una descripción más precisa que enuncian de la siguiente manera: Sean dos dominios (objetivo O y fuente F). La proposición *a* implica los elementos p' y q' en O, p y q en F; y una función f_a mediante la cual (i) p' y q' son las respectivas imágenes de p yq; y (ii) la relación « p' es a q'» en O es la imagen de la relación «p es a q» en F. Así, una analogía es una terna (F, O, f_a) en la cual O y F tienen estructuras similares según f_a.

Con lo anterior, se tiene un contexto para precisar que, mediante un *argumento analógico*, se pretende inferir la estructura de un O mediante una comparación con un F sugerida por una analogía *a* (Steinhart, 2001; Juthe, 2005; Reid y Knipping, 2010; Conner, Sigletary, Smith, Wagner y Francisco, 2014). En particular Conner y sus colegas usan el modelo de Toulmin para caracterizar tal argumento indicado como *dato* la *estructura de* F, como *garantía* la *analogía* y como *aserción* la *estructura de* O (véase figura 4). No obstante, consideramos prudente seguir la idea de Juthe (2005) para caracterizar

3. Otra forma de argumento inductivo es aquel fundamentado en la generalización sobre el proceso. Para mayor detalle, véase Pedemonte (2007).

la estructura de dicho tipo de argumento. Esto, porque precisa con mayor detalle los elementos que intervienen en él; en consecuencia, permite reinterpretar la propuesta de Conner y sus colegas: Sean dos dominios F y O, el segundo menos conocido que el primero. Un argumento por analogía tiene la siguiente estructura: (i) *p'*, *q'* en O. (ii) *p* y *q* en F y la relación «*p* es a *q*» en F. (iii) Los elementos de F contrapartes mediante , de los elementos de O; y la relación « es a en F contraparte de «*p'* es a *q'*» en O. Por lo tanto, (iv) « *p'* es a *q'* en O. Usando el modelo de Toulmin, interpretamos a (i) y (ii) como los *datos* del argumento, a (iii) como su *garantía* (analogía representada con f_a) y a (iv) como la *aserción* correspondiente (figura 5).

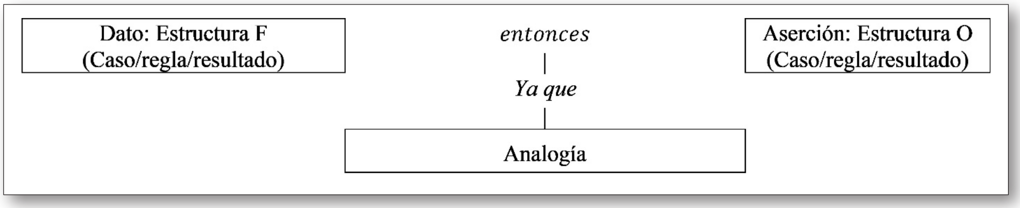


Fig. 4. Modelo de Toulmin para argumento por analogía propuesto por Conner, *et al.* (2014).

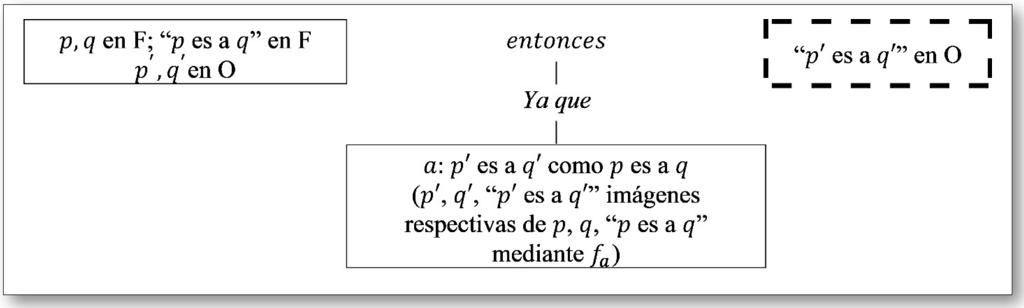


Fig.5. Modelo de Toulmin para argumento por analogía.

Fases del proceso de argumentación por analogía

Steinhart (2001) identifica tres fases en el proceso de argumentación por analogía: de acceso, de correspondencia y de trasferencia: la *fase de acceso* se inicia con la precisión de un O y tiene el propósito de identificar candidatos (F_1, ..., F_n) para ser dominios fuente, que son potencialmente análogos con O. Se buscan elementos y relaciones viables que generen, metafóricamente, un isomorfismo entre O y F.

La *fase de correspondencia* consiste en producir la función f_a que preserve en O la mayor parte de la estructura del dominio F como sea posible; es decir, busca generar analogías (*a*) y con ellas garantizar, metafóricamente, un isomorfismo entre ambos dominios.

En la *fase de transferencia* se usan las analogías generadas en la fase anterior y se interpretan en términos de O. Para ello, es necesario mover el conocimiento adquirido de las relaciones en F y ponerlo en juego en O; esto, con miras a realizar inferencias analógicas (crear nuevas proposiciones no necesariamente válidas) en O. Estas nuevas proposiciones (*p'* es a *q'*) pueden generarse de dos formas bajo f_a: (i) si la relación «es a» ya existe en O, mediante una simple sustitución de (*p*, *q*) por (*p'*, *q'*). O (ii) si dicha relación no existe en O, mediante la generación de una relación que puede ser la misma (o una similar) en el dominio F; hecho esto, se sigue (i). Esta fase produce el argumento por analogía descrito en la figura 5.

Objetos primarios en la práctica matemática

El EOS supone que la matemática es una actividad humana, y que las entidades u objetos involucrados en esta actividad emergen de las acciones y el discurso a través del cual se expresan y comunican (Font, Godino y Gallardo, 2013). Este enfoque propone una ontología de los *objetos matemáticos* derivada de la *práctica matemática*. Se consideran seis objetos matemáticos primarios que pueden emerger de dicha práctica: (i) *Elementos lingüísticos*: términos, expresiones, gráficas, etc., en sus diferentes registros (escritos, orales, etc.). (ii) *Situaciones/problemas*: tareas, ejercicios, ejemplos, etc. (iii) *Conceptos/definiciones*: introducidos por medio de definiciones o descripciones, explícitas o no (recta, punto, mediatriz, etc.). (iv) *Proposiciones*: declaraciones sobre conceptos. (v) *Procedimientos*: algoritmos, técnicas de cálculo, etc. Y (vi) *Argumentos*: discursos utilizados para validar o soportar proposiciones y procedimientos. Estos son producto de un proceso de argumentación que da significado, organiza y relaciona entre sí objetos matemáticos primarios cuya organización constituye una solución a un problema. Estos objetos forman configuraciones (figura 6) que pueden ser consideradas *cognitivas* –vista desde la perspectiva del estudiante– o *epistémicas* –vista desde una perspectiva institucional– (Godino, Batanero y Font, 2007).

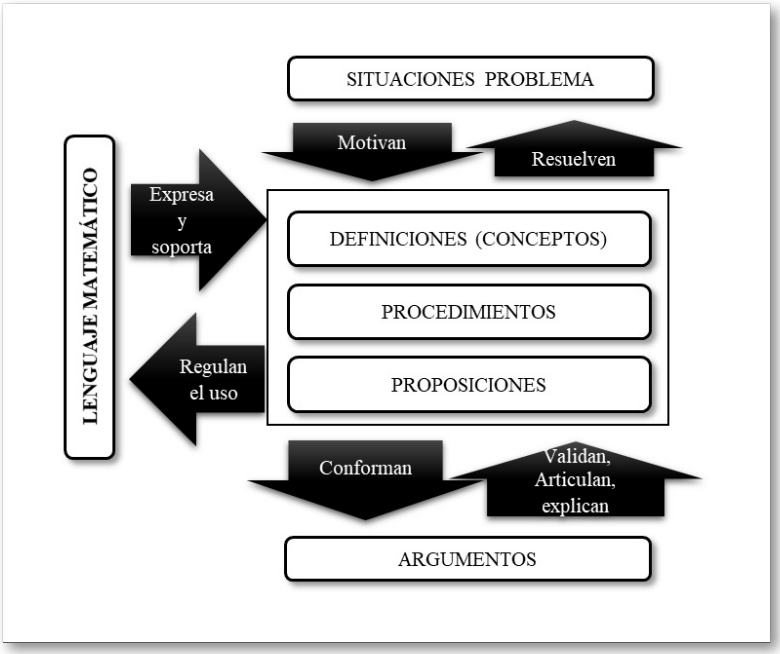


Fig. 6. Objetos primarios y relaciones de una configuración ontosemiótica.

Para el estudio, nos interesa precisar cómo un proceso de argumentación articula objetos que conforman la configuración de la cual forma parte el argumento. Para el caso del argumento por analogía, tal como se planteó anteriormente, se necesita considerar dos configuraciones. Por tanto, vemos viable utilizar la herramienta de configuración ontosemiótica propuesta por el EOS de una manera similar a como fue empleada para describir los procesos metafóricos que tienen lugar en la práctica matemática[4] (Rondero y Font, 2015). Dado que una metáfora explicita una proyección de F en O, es decir,

4. Esto tiene sentido dada la relación existente entre una metáfora y una analogía: una analogía «A es a B como C es a D» se puede condensar en una proposición metafórica de la forma «A es el C de B» o sencillamente «A es C» (Perelman y Olbrechts-Tyteca, 1989: 611). En otras palabras, es posible concebir una metáfora como una versión condensada de una analogía.

una proyección de configuraciones de F en configuraciones en O, concebimos que, similarmente, podemos usar esta herramienta para concretar cómo la f_a relaciona F con O (*i.e.*, relaciona los objetos de las respectivas configuraciones) y precisar las posibles inferencias del argumento por analogía. Así, nos permitiría describir con objetos concretos, las fases del proceso de argumentación por analogía propuestas por Steinhart (2001).

METODOLOGÍA

Los análisis reportados forman parte de un estudio más amplio. Uno de los objetivos de dicho estudio consistió en precisar los tipos de argumentos que emergen de la práctica matemática regulada por ciertas normas, surgida en un curso universitario de geometría del espacio que se fundamenta en la resolución de problemas y el uso de entornos de geometría dinámica (EGD). El curso estaba conformado por 31 estudiantes y ubicado en el tercer semestre de un programa de formación inicial de profesores de Matemáticas. Los estudiantes habían tomado un curso previo de Geometría Plana en el cual ya habían experimentado una metodología basada en la resolución de problemas y uso de EGD. Para este reporte se tomaron en cuenta los registros escritos, videograbados y audiograbados (43 minutos de una sesión de clase, 32 minutos de la entrevista) correspondientes a uno de los grupos de estudiantes (conformado por Andrés, Brayan y Jefferson). El estudio se enmarca en una tradición naturalista-cualitativa (Moschkovich y Brenner, 2000) y emplea como estrategia una *investigación basada en el aula* (Kelly & Lesh, 2000). La profesora no participó del equipo investigativo y los investigadores hicieron una observación no participante; esto, porque se quería recabar sobre las prácticas que emergían en la clase de forma que estas fueran lo más genuinas posible. De acuerdo con tal estrategia, las etapas llevadas a cabo fueron las siguientes:

– *Etapa I*. Dado que esta estrategia postula que la fundamentación teórica, la selección del fenómeno y del escenario se van desarrollando una en relación con la otra, en primera instancia se precisaron el propósito del estudio (antes descrito), el escenario en el cual este se llevaría a cabo (antes mencionado) y los fundamentos teóricos que fueron ilustrados previamente. Con estos últimos se pretendía tener un referente con el cual identificar tipos de argumentos, fases del proceso de argumentación por analogía y otros objetos emergentes de prácticas matemáticas de los estudiantes cuando abordaban las tareas propuestas por la profesora.
– *Etapa II*. Se llevó a cabo el proceso de recolección de datos. Para ello, fueron dispuestas tres videograbadoras en el aula de clase: una que registraba a la profesora, el tablero y la pantalla del televisor que proyectaba el EGD usado (Cabri ii Plus o Cabri 3D); otra que registraba frontalmente a todos los estudiantes; y una tercera que registraba toda el aula, tanto a la profesora y estudiantes, como el tablero y la pantalla del televisor. Cuando los estudiantes debían resolver un problema (por grupos de tres), las últimas dos cámaras registraban, cada una respectivamente, la actividad de un grupo de estudiantes y el computador que usaban. Fueron grabadas 26 sesiones de clase, cada una con una duración de 120 minutos. Así mismo, fueron fotocopiadas las producciones de todos los grupos y realizadas entrevistas audiograbadas postclase, tanto a los estudiantes como a la profesora, para complementar la información. Para estas entrevistas, los investigadores mostraban fragmentos de videos de los estudiantes o la profesora, según el caso, para que ellos fueran estimulados a evocar lo sucedido en el momento registrado (Mackey & Gass, 2005). Los registros fueron trascritos posteriormente. Para este reporte, los datos tenidos en cuenta fueron producto del abordaje de la siguiente tarea:

Para responder las siguientes preguntas, deben usar Cabri 3D. La tarea no es solo responder las preguntas sino también realizar un reporte completo en el que incluyan para cada numeral la siguiente información:

i) El proceso de construcción de los objetos involucrados en la situación.
ii) El proceso de exploración que llevó a cabo (por ejemplo, qué medidas tomó, qué arrastró –objeto o caja de cristal–, en qué se fijó cuando arrastró tal objeto –o caja de cristal–, si redefinió algún objeto, etc.).
iii) Una conjetura que responda a la pregunta del problema.
iv) La demostración de la conjetura (núcleos y pilares).

Problema Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos congruentes. ¿Es posible determinar un punto de forma tal que ΔABE y ΔCDE sean congruentes?

Vale decir que la profesora pretendía que los estudiantes resolvieran el problema en dos dominios, geometría plana y geometría del espacio, indicando que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ pueden ser coplanares o alabeados. Pretendía que los procedimientos de solución llevaran a establecer, respectivamente, que E es $\mathcal{M}_{\overline{AC}} \cap \mathcal{M}_{\overline{BD}}$, o un punto de $m = \beta_{\overline{AC}} \cap \beta_{\overline{BD}}$[5]. Esperaba que ellos evocaran conocimientos previos para que, deductivamente, propusieran los respectivos procedimientos de construcción. No contempló que los estudiantes aludieran a una analogía para abordar el problema en un domino, con base en una solución propuesta para el otro.

– *Etapa III.* Se emplearon los elementos teóricos como herramientas analíticas para abordar los datos trascritos: (i) El modelo de Toulmin (2003) para precisar los argumentos (y su tipo) en la práctica de los estudiantes. (ii) Las fases para un proceso de argumentación por analogía propuestas por Steinhart (2001). (iii) La configuración de objetos propuesta por el EOS para hacer un análisis ontosemiótico (Pino-Fan, Godino, & Font, 2018) con el cual describir los objetos primarios activados en (o emergente de) dicha práctica y cómo estos se articulan por los argumentos.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Analizamos la actividad matemática de un grupo de tres estudiantes cuando abordan la tarea propuesta por la profesora. Tendremos interés en los procesos de argumentación (y los argumentos) producidos por ellos, con miras a determinar cómo estos articulan los objetos primarios activados o emergentes de sus prácticas. Para ello, ponemos en juego los referentes conceptuales descritos.

Como evidencia, presentamos fragmentos de la trascripción relativos a momentos específicos de la práctica matemática de los estudiantes. Cuando sea necesario, con el ánimo de complementar y ganar precisión en la actividad de los estudiantes, exponemos fragmentos de la trascripción de la entrevista del momento correspondiente. En relación con su actividad, vale decir que ellos dieron respuesta a los ítems i y iii de la tarea propuesta: no reportaron una exploración porque a su criterio no la hicieron, solo hicieron el proceso de construcción; y no hicieron una prueba de su solución porque el tiempo no les resultó suficiente.[6] No obstante, a partir de la entrevista, se pudieron ver diferentes argumentos deductivos que se pueden interpretar como pruebas de algunos de los resultados obtenidos por ellos.

5. $\beta_{\overline{XY}}$ es la notación para el *plano mediador* de $\overline{XY}$, nombre formal con el cual se indica al plano perpendicular a un segmento por su punto medio. A su vez, $\mathcal{M}_{\overline{XY}}$ es la notación simbólica que indica la recta mediatriz del $\overline{XY}$.
6. De hecho, no hubo grupos de estudiantes que reportaran una prueba formal a sus conjeturas. En la puesta en común, la profesora comentó que los estudiantes se concentraron en hacer exploraciones y producir conjeturas más que en producir las pruebas respectivas.

La actividad de los estudiantes se puede dividir en seis momentos concretamente: (i) Lectura de la tarea e interpretación de esta [1,6].[7] (ii) Propuesta de solución: una esfera [7,14; 45; 54]. (iii) Proceso de construcción de los segmentos dados ($\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ congruentes) de forma tal que no sean coplanares [15,27]. (iv) Reporte verbal a la profesora de tal proceso [28,44]. v) Propuesta de solución: poner un punto E' aleatorio [45,52]. (vi) Propuesta de solución: planos perpendiculares [53,55,80]. Dada la extensión de un escrito como este, fueron escogidos los momentos ii y vi para ilustrar el análisis; esto por cuanto en ellos las propuestas de solución tuvieron algún desarrollo y, en consecuencia, fueron producidos argumentos en mayor medida. Especialmente, concentramos la atención en la última propuesta de solución (basada en una analogía) que, entre otras cosas, fue el momento que tuvo mayor extensión en la actividad de los estudiantes. Resaltamos que, en términos del EOS, dichos momentos se pueden concebir como las prácticas matemáticas que llevaron a cabo los estudiantes durante su actividad. Solo haría falta indicar la relativa a la realización del reporte escrito de su producción, trasversal en toda su actividad. A continuación, presentamos el análisis de los momentos citados. En ellos, se usan los códigos L, C, Pr, Pp, Ab, Ad y Aa para indicar, respectivamente, objetos lenguaje, concepto, procedimiento, proposición, argumento abductivo, argumento deductivo y argumento por analogía.

Momento ii: Esfera como propuesta de solución –argumentos abductivos y deductivos–

Tras leer el problema, Brayan, a raíz de su interpretación del problema, ha propuesto una solución. La trascripción correspondiente es la siguiente:

7	Brayan	Pues, hallando una esfera ¿no?
8	Jefferson	Vamos haciendo y pues vamos mirando.
9	Brayan	Pero recopilemos ideas.
10	Jefferson	Pues abra un archivo.
11	Brayan	Pongámoslo [se refieren al computador] en la mitad [le pasa el computador a Jefferson].
12	Jefferson	Bueno, bueno.
13	Andrés	Hay que ponerlos en un plano [se refiere a los dos segmentos]. Son dos esferas.
14	Brayan	Es un punto que equidista en los extremos de los segmentos.
45	Brayan	Entonces, hay que encontrar un punto que equidiste de los extremos de los cuatro puntos.
54	Brayan	¿No es equidistante con estos cuatro puntos, y tenemos el criterio lado, lado, lado?

Brayan concibe que la solución al problema consiste en encontrar un punto (el *E* solicitado) de manera que equidiste de los extremos de los segmentos dados ($\overline{AB}$ y $\overline{CD}$) [14, 45]. Teniendo eso en mente, propone como solución al problema una esfera. No obstante, tal como se observa en la trascripción, él no precisa las condiciones de tal esfera ni cómo la usaría para solucionar el problema. Tampoco, por qué concibe que el punto solución es uno que equidiste de los puntos *A*, *B*, *C* y *D*. Con el ánimo de tener información sobre estos asuntos y complementar la configuración (cognitiva en este caso) de la actividad de Brayan, le fue realizada la primera parte de la entrevista (tabla 1). Para facilitar la lectura, adyacente a la trascripción de tal entrevista exponemos el análisis asociado a las respuestas del estudiante. El entrevistador [Ent] reproduce el video hasta que Brayan pronuncia la línea 45.

7. Entre paréntesis rectangulares se ponen las líneas (intervenciones numeradas de los estudiantes) de la trascripción que corresponden a los momentos. La trascripción tiene un total de 80 intervenciones.

Tabla 1.
Trascripción y análisis entrevista parte 1

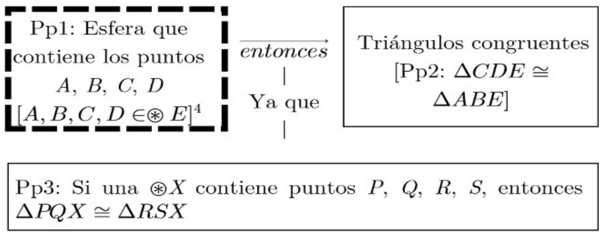
<table>
<tr><th colspan="3">Trascripción</th><th>Proceso de argumentación y análisis ontosemiótico</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Ent</td><td>¿Por qué se te ocurrió esa idea?</td><td rowspan="6">Brayan produce un argumento abductivo (Ab1) en [2], cuya inferencia (o dato) es la proposición Pp1: existe una esfera que contenga los puntos A, B, C y D, y su aserción es Pp2: la congruencia de los triángulos en cuestión (figura 7). En la práctica, la inferencia del argumento se convierte en un procedimiento de construcción que podría solucionar el problema (Pr1: hacer una esfera con esas condiciones).


Fig. 7. Ab1 de Brayan</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Brayan</td><td>Es que como se pedían triángulos congruentes, entonces podríamos hacer una esfera que contuviera los cuatro puntos…</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Ent</td><td>¿Cuáles puntos?</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Brayan</td><td>Los extremos de los segmentos dados, los congruentes… Los puntos A, B, C y D.</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Ent</td><td>Y la solución al problema, ¿cuál sería?</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Brayan</td><td>El centro de la esfera.</td></tr>
</table>

El entrevistador continúa la reproducción del video hasta la línea 54:[8] Al pausar el video, tiene lugar el siguiente diálogo (tabla 2):

Tabla 2.
Continuación trascripción y análisis entrevista parte 1

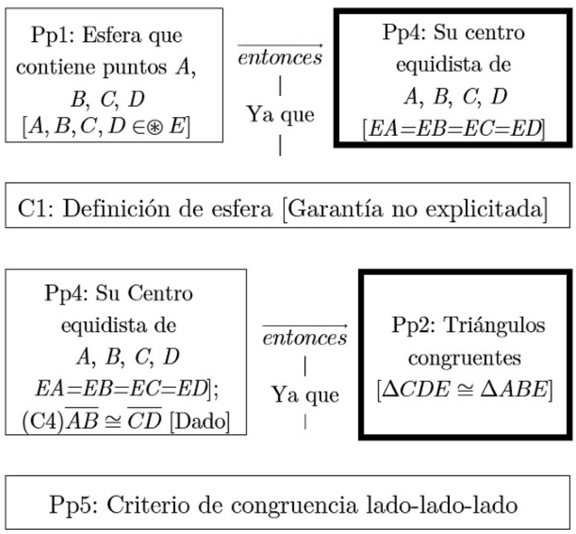
<table>
<tr><th colspan="3">Trascripción</th><th>Proceso de argumentación y análisis ontosemiótico</th></tr>
<tr><td>7.</td><td>Ent</td><td>¿Por qué haces esa pregunta? ¿Cuál era tu intención con ella? [dirigiéndose a Brayan]</td><td rowspan="2">Para argumentar que el centro de una esfera que contenga los puntos A, B, C, D sería la solución al problema, en [8] Brayan propone dos argumentos deductivos (Ad1, Ad2) –figura 8–:


Fig. 8. Ad1 y Ad2 de Brayan</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>Brayan</td><td>Es que yo pensaba que, al tener un punto, el centro de la esfera, pues equidista de los cuatro, A, B, C y D. Y así por lado lado lado [criterio de congruencia], los triángulos serían congruentes y ya.</td></tr>
</table>

8. ¿No es equidistante con estos cuatro puntos, y tenemos el criterio lado, lado, lado?

Trascripción			*Proceso de argumentación y análisis ontosemiótico*
9.	Ent	Pero no hicieron la esfera que tú pensabas… [dirigiéndose a Brayan]	Brayan explicita en [11] por qué no construyeron la esfera propuesta por él como solución al problema. Básicamente esto ocurre dado que Jefferson propuso otra idea de solución. En [15], Andrés explicita una refutación a la solución propuesta por Brayan: No es necesario que dos parejas de lados correspondientes sean congruentes entre sí, esto es, tener cuatro lados congruentes, para que dos triángulos sean congruentes (Pp6:). Es suficiente que los lados correspondientes de los dos triángulos sean congruentes entre sí, para inferir su congruencia (Pp2). Interpretamos que Andrés y Jefferson proveen una refutación *–rebuttal* en términos de Toulmin (2003, pág. 94)– al argumento Ab1 provisto por Brayan. Si bien, Brayan propone una solución plausible al problema, sus compañeros conciben que esta es una solución particular, que impone condiciones no necesarias.
10.	Andrés	No. Otra. La que se usó para construir los segmentos *CD* y *AB* congruentes [líneas 23 a 43].	
11.	Brayan	Es que Jefferson hizo un punto *E* y quería ensayar varios casos a ver si se podía solucionar el problema.	
⋮		[Brayan se ausenta de la entrevista]	
14.	Ent	¿Y tú [dirigiéndose a Andrés] por qué decías que la esfera no servía?	
15.	Andrés	Ah, luego discutimos [se refiere a una discusión que tuvo con Brayan después de que la clase acabó]. Es que él [Brayan] quería que los cuatro [puntos] equidistaran del punto [E], y nosotros [Andrés y Jefferson] decíamos que solo se necesitaban dos… Dos segmentos, lados correspondientes y los otros dos correspondientes.	
	Ent	Ah, no todos los segmentos congruentes.	
	Andrés	Sí, sino de dos en dos.	

La entrevista realizada pone de manifiesto las pretensiones de Brayan al proponer como solución construir una esfera que contenga los puntos *A*, *B*, *C* y *D* (Pr1), y cómo sus argumentos (y el proceso de argumentación respectivo) articulan los objetos de su configuración: Ante la pregunta del entrevistador *¿Por qué se te ocurrió esa idea?*, el estudiante alude a un argumento abductivo (figura 7) para inferir un dato (Pp1) que provee un objeto (concepto/definición *esfera* –C1–) útil para solucionar el problema. Luego, con el objetivo de argumentar que el objeto concepto *centro de esfera* (C3) presente en Pp1 solucionaría el problema (esto es, demostrar Pp3: Pp1→Pp4 empleado como garantía en Ab1), Brayan *transforma* Ab1 en dos argumentos deductivos (figura 8). En ellos, el estudiante usa como garantías C1 (*definición de esfera*) y la Pp5, respectivamente. Finalmente, Andrés explicita una refutación al Ab1, mediante la conjunción de dos objetos *proposición*, Pp6 y Pp5. La figura 9 sintetiza la configuración cognitiva (principalmente asociada a Brayan) articulada por los argumentos citados.

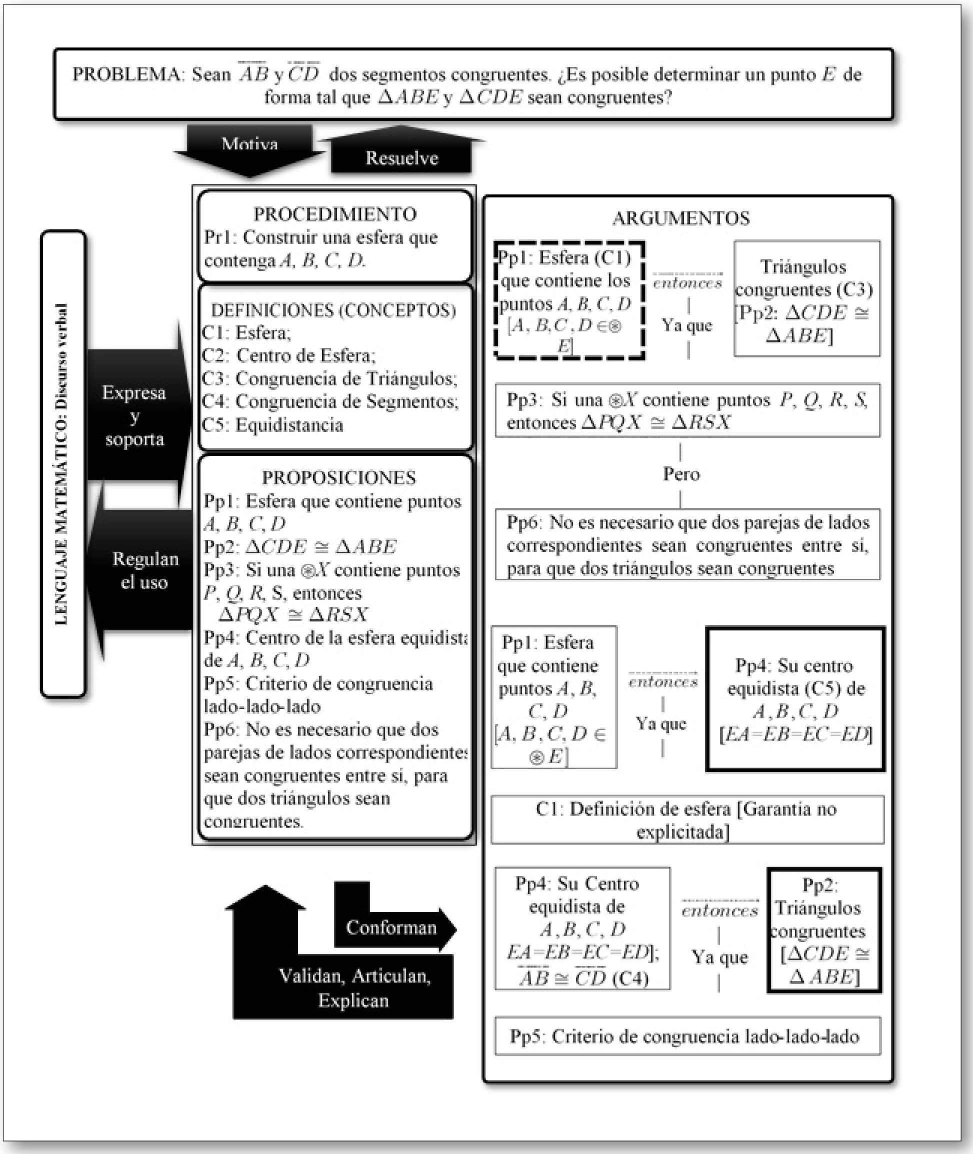
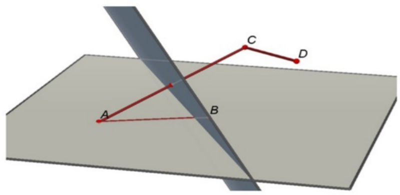
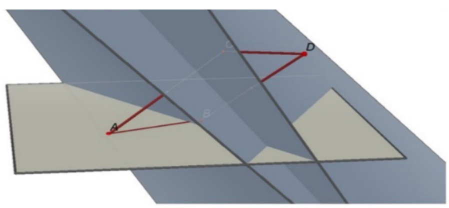


Fig. 9. Configuración cognitiva articulada con argumentos, respecto a la primera propuesta de solución.

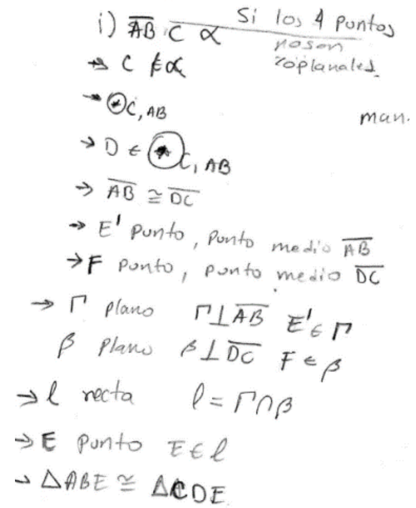
Momento vi: Planos mediadores como propuesta de solución –argumento por analogía y deductivo–

Andrés propone su procedimiento de solución y le indica a Jefferson (quien estaba manejando el computador con el software Cabri 3D) qué objetos construir. Los estudiantes ya tienen construidos los y alabeados y congruentes. Andrés ha estado mirando el enunciado del problema en la hoja que les fue entregada, mientras sus compañeros proponían sus ideas. Presentamos la trascripción de la interacción que corresponde a ese momento:

53	Andrés	Hágase el plano… o sea…
⋮		
55	Andrés	Sí. Ahora haga el segmento AC y el punto medio de AC [se dirige a Jefferson].
56	Jefferson	¿AC?
57	Andrés	Sí.
58	Jefferson	¿Para qué?
59	Andrés	Luego haga el plano perpendicular AC, para no… En el plano.
60	Jefferson	Espere, espere, yo estoy haciendo eso [el punto medio de $\overline{AC}$], pero ¿para qué?
61	Andrés	Para que equidiste.
62	Jefferson	[Construye el y su punto medio]
63	Brayan	Ahora, el plano perpendicular.
64	Andrés	El plano perpendicular.
65	Jefferson	Por este punto [señala el punto medio del y hace la respectiva construcción empleando la herramienta plano perpendicular (figura 10)].  Fig. 10. Diagrama dinámico de plano mediador de $\overline{AC}$.
66	Andrés	Sí, por ese punto
67		[Andrés reporta por escrito lo que llevan hecho].
68	Andrés	Ahora haga lo mismo con D y B.
69	Jefferson	¿Con D y B?
70	Andrés	Sí, claro, haga lo mismo.
71	Jefferson	¿Y ahí qué, igual? ¿Punto medio y un plano?
72	Andrés	Si, igual punto medio y un plano, y la intersección entre los dos [se refiere a los dos planos construidos] es una recta.
73	Jefferson	Punto medio y un plano perpendicular a este segmento, por este punto [Verbaliza mientras hace la respectiva construcción del plano perpendicular al $\overline{BD}$ por su punto medio (figura 11)].  Fig. 11. Diagrama dinámico de planos mediadores de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.
74	Brayan	Sí.

75	Andrés	No, mueva aquí a ver [le sugiere a Jefferson que arrastre la caja de cristal para ver la construcción realizada] ¿Cómo es que se escribe esfera [se refiere a la notación]?
76	Jefferson	La bolita pero con una estrella adentro.
⋮		
79	Andrés	Creo que equidista a los puntos [se refiere a la recta de intersección]. Creo, no sé… Ah, sí…
80	Brayan	Sí, porque la intersección…una de las propiedades de esta y de esta… la mediatriz. [Termina la clase. La tabla 3 presenta el proceso de construcción que reportan a la profesora].

Tabla 3.
Trascripción reporte de construcción



Trascripción del reporte
$\overline{AB} \subset \alpha$
$C \notin \alpha$
$\circledast\ C, AB$
$D \in \circledast\ C, AB$
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$
E' punto medio $\overline{AB}$
F punto medio $\overline{DC}$
δ plano, $\delta \perp \overline{AB}, E' \in \delta$
β plano, $\beta \perp \overline{AB}, F' \in \beta$
l recta, $l = \delta \cap \beta$
E punto, $E \in l$
$\Delta ABE \cong \Delta CDE$

Andrés propone a sus compañeros un procedimiento (Pr1) para solucionar el problema. Este se resume en [80], línea en la cual se presenta el reporte escrito respectivo (Objetos-Lenguaje –L1– expresados en simbolización geométrica y de teoría de conjuntos). Como resultado de dicho procedimiento, surge una representación dinámica (figura 10, 11) en EGD (L2). Vale comentar dos aspectos: (i) Dicho reporte no se corresponde en sentido estricto con lo sugerido por Andrés y ejecutado por Jefferson: en él se alude a que los planos δ y β son perpendiculares a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente; en realidad, dichos planos se construyeron perpendiculares a $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. (ii) No ejecutan los últimos dos pasos del procedimiento de construcción pues el tiempo se les agotó y debieron entregar su reporte a la profesora. Surge el interés por conocer qué motivó a Andrés a sugerir su procedimiento. Se usó la segunda parte de la entrevista para ganar claridad al respecto (tabla 4):

Tabla 4.
Trascripción y análisis entrevista parte 2

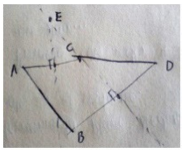
<table>
<tr><th colspan="3">Trascripción</th><th>Proceso de argumentación y análisis ontosemiótico</th></tr>
<tr><td>12.</td><td>Ent</td><td>Ahí [en el video] tú acabas de decir que lo harías directo. ¿A qué te refieres con hacerlo directo?</td><td rowspan="8">Ante la pregunta del entrevistador, el estudiante explicita un procedimiento (Pr2) para solucionar el problema, considerando los $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en un plano. Dicho Pr2 no fue explicitado por Andrés en la clase:
Pr2
1. Dibujar $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$
2. Dibujar $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$
3. Dibujar, para $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ su respectiva mediatriz
4. Dibuja el punto de intersección entre tales mediatrices y lo llama E.
Como resultado de tal procedimiento produce una representación gráfica (L3) que se presenta en [19].
Los principales objetos conceptos involucrados son mediatriz de un segmento (C1) y punto de intersección de mediatrices (C2). Otro concepto clave es el de relación de equidistancia (C3) como se observará en el argumento que sigue.</td></tr>
<tr><td>13.</td><td>Andrés</td><td>Aaaah. Es que yo, cuando estaba ahí dibujando, yo había dibujado un segmento con la mediatriz. Es que yo primero lo hice en el plano con las mediatrices.</td></tr>
<tr><td>14.</td><td>Ent</td><td>O sea, tú hiciste dos segmentos congruentes en el plano…</td></tr>
<tr><td>15.</td><td>Andrés</td><td>Y con las mediatrices, como se intersecaban en un punto, pues yo ahí…</td></tr>
<tr><td>16.</td><td>Ent</td><td>Las mediatrices de cuáles segmentos…</td></tr>
<tr><td>17.</td><td>Andrés</td><td>[Andrés hace un dibujo en una hoja de dos segmentos aparentemente congruentes]</td></tr>
<tr><td>18.</td><td>Ent</td><td>¿Cómo se llaman esos segmentos?</td></tr>
<tr><td>19.</td><td>Andrés</td><td>AB y CD [les pone nombre en el dibujo a los segmentos antes representados. Luego dibuja las mediatrices de tales segmentos y nombra E al punto de intersección (figura 12)].


Fig. 12. Diagrama estático de mediatrices de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.</td></tr>
<tr><td>20.</td><td>Ent</td><td>O sea, haces las mediatrices de los segmentos…</td><td rowspan="4">El estudiante produce un argumento deductivo (Ad1) para validar que el punto E equidista de A y C, y de B y D (figura 13).
Pp1: $E = \mathcal{M}_{\overline{AB}} \cap \mathcal{M}_{\overline{CD}}$ $[E \in \mathcal{M}_{\overline{AB}}, E \in \mathcal{M}_{\overline{CD}}]$[7] $\xrightarrow{entonces}$ Pp2: E equidista de A y C, y de B y D [EA=EB, EC y ED]
Ya que
C4: Definición de mediatriz
Fig. 13. Ad1 de Andrés.</td></tr>
<tr><td>21.</td><td>Andrés</td><td>De los segmentos AC y BD y no de los dados, AB y CD, ¿sí? La idea es que equidistara, este y este [señala AE y EC] y este con este [BE y DE].</td></tr>
<tr><td>22.</td><td>Ent</td><td>Y equidistan, ¿por qué?</td></tr>
<tr><td>23.</td><td>Andrés</td><td>Por la definición de mediatriz.</td></tr>
</table>

El entrevistador reproduce el video hasta [69]. En este punto, pregunta: *Acá tú sugeriste construir el punto medio del segmento AC y el plano perpendicular al segmento por su punto medio. ¿Por qué se te ocurre eso*? Al respecto, surge el siguiente diálogo (tabla 5):

Tabla 5.
Continuación trascripción y análisis entrevista parte 2

<table>
<tr><th colspan="3">Trascripción</th><th>Proceso de argumentación y análisis ontosemiótico</th></tr>
<tr><td>24</td><td>Andrés</td><td>Porque estaba viendo varias [se refiere a que también estaba cursando el espacio académico Cálculo en Varias Variables] y ahí nos decía que el plano es al espacio como la recta es al plano, y de ahí me surgió la generalización.</td><td rowspan="13">Andrés explicita por qué se le ocurre emplear planos perpendiculares por el punto medio de los $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ para solucionar el problema (Pr1). Recurre a una analogía para ello [24]: El plano es al espacio como la recta es al plano (Pp3). Este hecho indica que Andrés está inmerso en un proceso de argumentación por analogía:

Fase de acceso. Con el ánimo de buscar una solución para segmentos no coplanares (dominio de la geometría del espacio, O), recurrió al dominio de la geometría plana (F) en el cual ya tenía una solución.

Fase de correspondencia. Andrés usa su analogía (Pp3) para implícitamente hacer las siguientes correspondencias entre F y O:

Pp4: recta con plano
Pp5: segmentos coplanares con segmentos alabeados

Toma Pp4 y la particulariza a una clase de rectas y planos:
Pp6: mediatriz de segmentos con plano mediador

En términos del problema, las correspondencias quedan instanciadas así:

Pp9: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ coplanares con $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ alabeados
Pp12: $\mathcal{M}_{\overline{AC}}$ y $\mathcal{M}_{\overline{BD}}$ con $\beta_{\overline{AC}}$ y $\beta_{\overline{BD}}$
Andrés hace otra correspondencia consistente en considerar la recta intersección entre los planos mediadores (C7) como la contraparte del punto de intersección entre las rectas mediatrices (C2), objetos que se instancian en Pp1 y $m = \beta_{\overline{AC}} \cap \beta_{\overline{BD}}$ (Pp13). Tal correspondencia queda determinada así:
Pp14: Pp1 con Pp13

Fase de trasferencia: El estudiante hace una inferencia analógica [36], plasmada por Aa1 (figura 14), a partir de la cual puede asentir que un punto de la recta m equidista de los puntos A y C, y B y D (Pp15), usando, principalmente la correspondencia Pp16: Pp2 con Pp15.

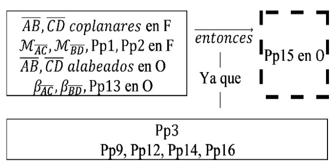


Fig. 14. Aa1 de Andrés.</td></tr>
<tr><td>25</td><td>Ent</td><td>Ah ya. O sea, tú evocas cosas del curso de Cálculo en Varias Variables en donde te dicen que… este, el plano es al espacio como la recta es al plano, y coges esa representación que tienes en el plano con la mediatriz y tratas…</td></tr>
<tr><td>26</td><td>Andrés</td><td>Pues después, ahí está la herramienta plano perpendicular [se refiere a la herramienta que muestra el software].</td></tr>
<tr><td>27</td><td>Ent</td><td>O sea, ¿terminaron usando esa herramienta?</td></tr>
<tr><td>28</td><td>Andrés</td><td>Sí.</td></tr>
<tr><td>29</td><td>Ent.</td><td>¿Y cómo la usaron?</td></tr>
<tr><td>30</td><td>Andrés</td><td>Pues en vez de usar mediatrices, hicimos los planos.</td></tr>
<tr><td>31</td><td>Ent.</td><td>Planos perpendiculares por el punto medio…</td></tr>
<tr><td>32</td><td>Andrés</td><td>Que se intersecan.</td></tr>
<tr><td>33</td><td>Ent</td><td>Se intersecaban en qué…</td></tr>
<tr><td>34</td><td>Andrés</td><td>En una recta.</td></tr>
<tr><td>35</td><td>Ent</td><td>Y la solución al problema cuál sería…</td></tr>
<tr><td>36</td><td>Andrés</td><td>Un punto de esa recta. Cualquier punto sobre esa recta solucionaría el problema.</td></tr>
</table>

Más adelante en la entrevista (tabla 6), se le pregunta a Andrés por lo expresado en [79]: «Creo que equidista a los puntos [se refiere a la recta de intersección entre los planos mediadores]. Creo, no sé… Ah, sí…»:

Tabla 6.
Continuación trascripción y análisis entrevista parte 2

Trascripción		*Proceso de argumentación y análisis ontosemiótico*
Ent	Ahí tú dices: creo, no sé. En ese momento estás diciendo: creo, no sé. ¿Por qué lo creías, no estabas tan seguro?	El estudiante concibe como posiblemente válida su inferencia analógica. Alude a la falta de verificación empírica para tener una mayor certeza de esta [50], y así, asegurar que la solución es correcta. Para validar su proceder en el S, el estudiante alude a Ad1 y al siguiente Ad2 (figura 15):
Andrés	Pues, porque ahí, en el plano funcionaba, pero en el espacio, no habíamos tomado medidas ni nada.	Pp2: E equidista de A y C, y de B y D [$EA=EB$, EC y ED] $\xrightarrow{entonces}$ Pp18: Triángulos congruentes [$\Delta CDE \cong \Delta ABE$]
Ent	Y por qué en el plano funcionaba…	Ya que
Andrés	Por la definición de mediatriz que da equidistancia, y luego, como decía Brayan, por lado lado lado para la congruencia.	Pp17: Criterio de congruencia lado-lado-lado Fig. 15. Ad2 de Andrés.

La entrevista hecha a Andrés pone de manifiesto lo que motivó su propuesta de solución: en un primer momento él resuelve el problema considerando $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ coplanares; provee el procedimiento Pr2. Enseguida, hace un argumento deductivo (figura 13) para explicitar por qué el resultado de ese procedimiento (punto de intersección entre $\mathcal{M}_{\overline{AC}}$ y $\mathcal{M}_{\overline{BD}}$) es clave para solucionar el problema en ese dominio (geometría plana -S-). Al final de la entrevista [54], el estudiante propone otro argumento deductivo (figura 15) para validar que $\Delta CDE \cong \Delta ABE$. Los principales conceptos y proposiciones involucrados son mediatriz de un segmento (C1); punto de intersección de mediatrices (C2); Relación de Equidistancia (C3); definición de mediatriz (C4); triángulos congruentes (C5); $E = \mathcal{M}_{\overline{AC}} \cap \mathcal{M}_{\overline{BD}}$ (Pp1); E equidista de A y C, y de B y D (Pp2); criterio de congruencia lado-lado-lado (Pp17); y $\Delta CDE \cong \Delta ABE$ (Pp18).

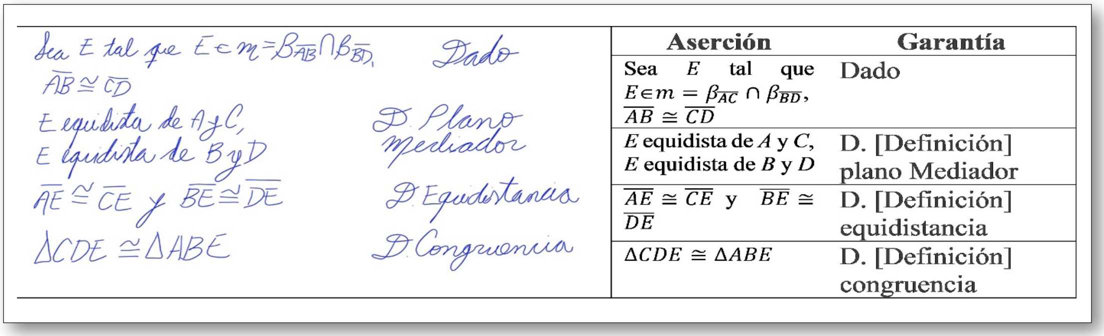
En un segundo momento, pronuncia una analogía (Pp3: *El plano es al espacio como la recta es al plano*) que indica su inmersión en un proceso de argumentación por analogía. Implícitamente involucra una función f_{Pp3}: F→O con la cual genera un procedimiento (Pr1) que potencialmente soluciona el problema cuando $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son alabeados (*i.e.*, en el domino geometría del espacio –O–). La figura 16 expone todos los objetos presentes en el proceso,[9] destacándose como emergentes el concepto plano mediador (C6) y la proposición punto en m equidista de A y C, y de B y D (Pp15), siendo la m la recta de intersección entre los planos mediadores involucrados.

Estos objetos son puestos en juego en el argumento Aa1 (figura 14). En síntesis, tal argumento se fundamenta en la siguiente correspondencia (Pp16): Si *el punto de intersección de las mediatrices de* $\overline{AC}$ *y* $\overline{BD}$ *equidista de sus extremos cuando* $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ *son coplanares* (Pp2), entonces probablemente *un punto de la recta de intersección entre los planos mediadores de y equidista de sus extremos, cuando y son alabeados* (Pp15). Con ella, Andrés tendría una solución al problema en O pues garantizaría la congruencia de los triángulos mediante Ad2. Es interesante notar cómo de la analogía original (Pp3), que en esencia compara *planos* con *rectas*, derivan varias correspondencias que dan sentido al Aa1: todos los elementos que la proposición Pp15 implícita o explícitamente involucra son contrapartida de

9. Se podría pensar que algunas proposiciones y conceptos son iguales, por ejemplo, que C6 = Pp11; esto es errado. Con C6 se está aludiendo al plano mediador como un concepto/definición (un plano mediador es…); mientras que con Pp11 se está aludiendo a una proposición instanciada que afirma que cierto plano es perpendicular a un segmento por su punto medio. De igual forma, se podría pensar que Pp5=Pp9 y Pp6=Pp12. Ello tampoco es así; tanto Pp5 como Pp6 son proposiciones genéricas mientras que Pp9 y Pp12 son instanciaciones de las primeras.

elementos del S mediante la f_{Pp3}. Su inferencia (Pp15) es totalmente plausible, siendo contrapartida de Pp2. No obstante, esto de ninguna manera certifica que Pp15 sea válida en S. Para que ello ocurra es necesario hacer su prueba formal. Ni en actividad de los estudiantes ni en la entrevista realizada, hubo evidencia de tal prueba. Los estudiantes no propusieron una contraparte en O del argumento Ad1 propuesto en S. Esto se explica por dos razones: (i) Durante la actividad en clase, el tiempo dado para abordar la tarea no les fue suficiente para realizar la prueba formal de la propuesta de solución que finalmente reportaron. (ii) En la entrevista, no había caso aludir a la prueba puesto que ya se había abordado mediante una tarea extraclase que solicitaba complementar los pasos de esta. En consecuencia, no tenemos evidencia para decir que la prueba que ellos hicieron de Pp15 fue resultado de una comparación (sugerida por) con Ad1. La figura 16 presenta la trascripción de la prueba asociada, escrita por la profesora en el tablero, luego de la puesta en común de tal tarea extraclase. La figura 17 ilustra la configuración cognitiva articulada por el proceso de argumentación relativo a Aa1, que sintetiza la actividad matemática asociada.

Lo anterior nos permite sugerir que el proceso de argumentación por analogía es una herramienta didáctico-matemática que puede favorecer el estudio de objetos de la geometría del espacio con base en sus contrapartes de la geometría plana. La figura 18 ilustra en abstracto el modelo de relación entre las configuraciones de F y O a partir de una.



Aserción	Garantía
Sea E tal que $E \in m = \beta_{\overline{AC}} \cap \beta_{\overline{BD}}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	Dado
E equidista de A y C, E equidista de B y D	D. [Definición] plano Mediador
$\overline{AE} \cong \overline{CE}$ y $\overline{BE} \cong \overline{DE}$	D. [Definición] equidistancia
$\Delta CDE \cong \Delta ABE$	D. [Definición] congruencia

Fig. 16. Prueba «Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $E \in m = \beta_{\overline{AC}} \cap \beta_{\overline{BD}}$, entonces $\Delta CDE \cong \Delta ABE$».

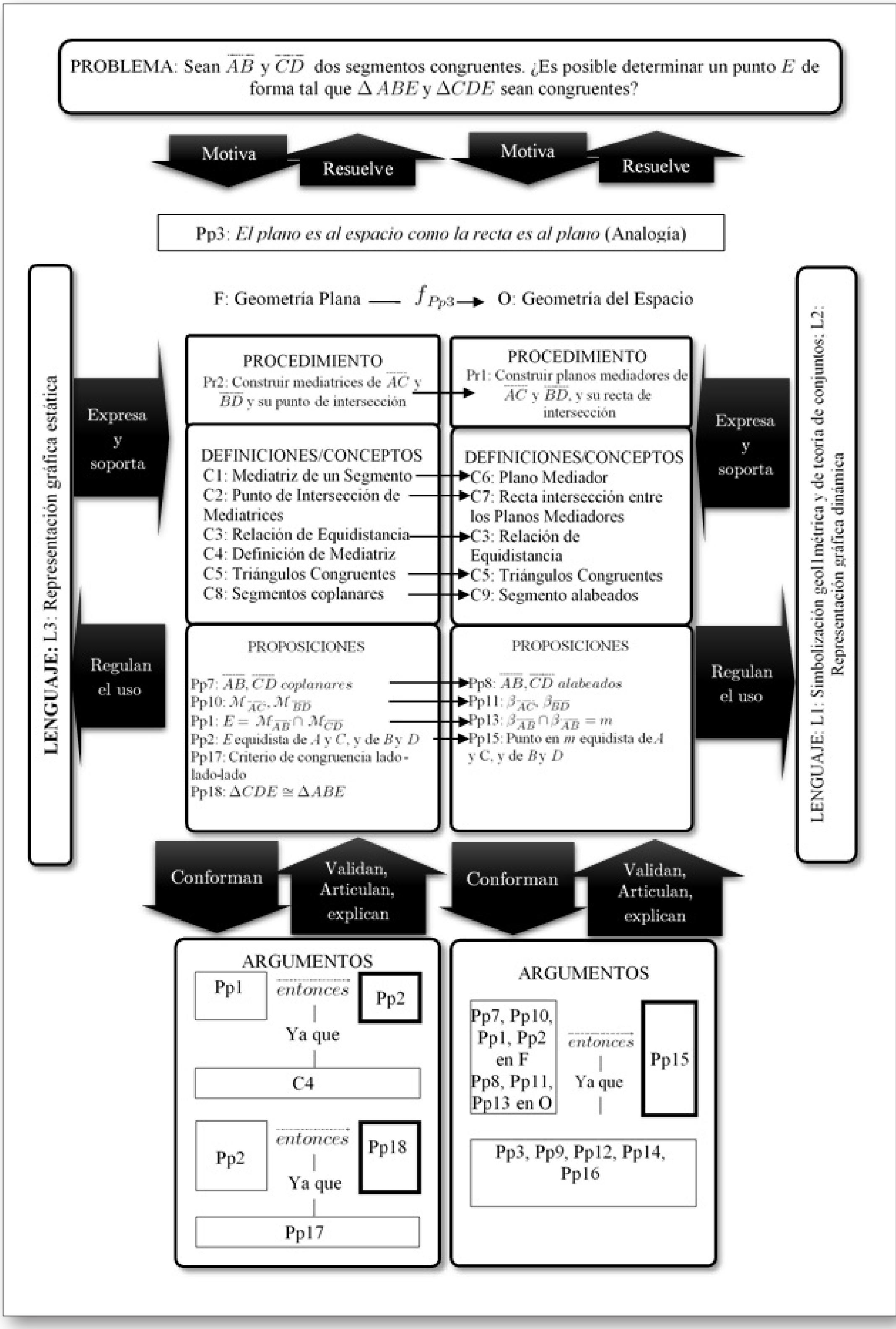


Fig. 17. Configuraciones cognitivas articuladas con argumentos, respecto a la segunda propuesta de solución.

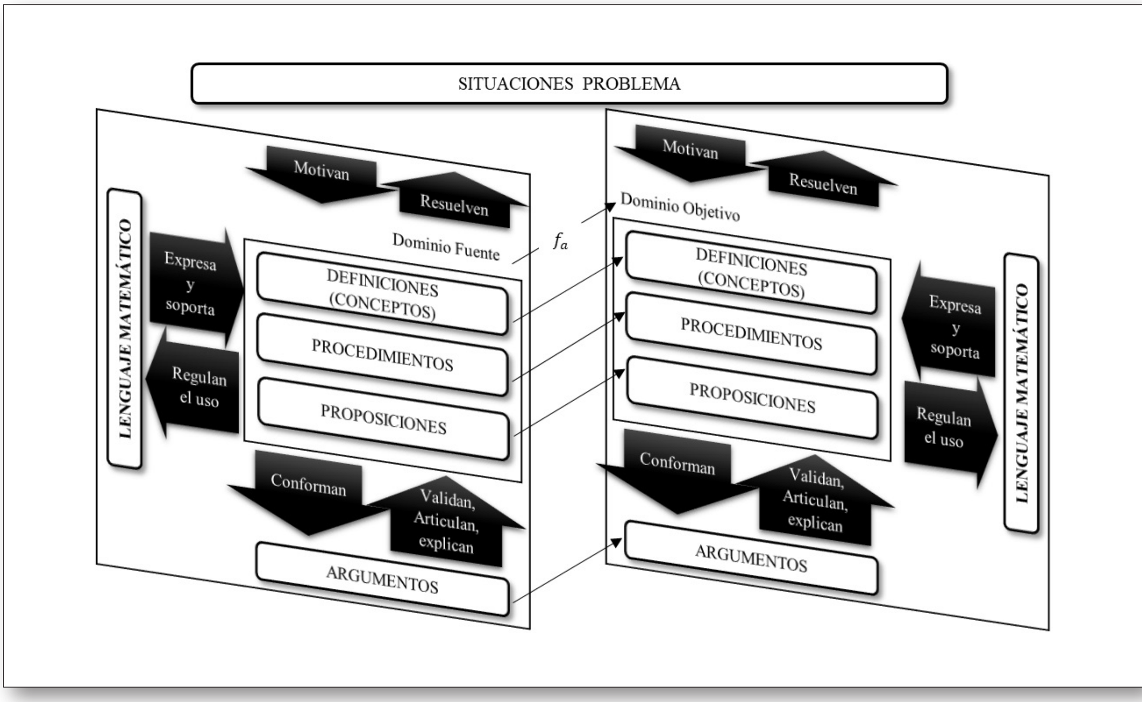


Fig. 18. Correspondencias producto del proceso de argumentación por analogía.

CONCLUSIONES

Mediante el uso sinérgico del *modelo de Toulmin* y la herramienta teórico-metodológica *configuración ontosemiótica del EOS* se pudo concretar una respuesta a la pregunta que orientó el estudio. Si bien el modelo de Toulmin permitió destacar y describir argumentos abductivos y analógicos producidos por los estudiantes (diferentes a los deductivos esperados por la profesora), el uso de la configuración permitió concretar cómo los objetos matemáticos activados en su práctica fueron articulados por los procesos argumentativos asociados. Específicamente, la sinergia dejó notar tanto la naturaleza (concepto, proposición, procedimiento) de los objetos presentes en cada argumento, como el dinamismo de tales objetos en términos de: (i) Su transformación a otro tipo de objetos (proposiciones, procedimientos) durante el proceso argumentativo del cual forman parte. O (ii) su cambio de rol en una argumentación siguiente (dato, aserción, garantía) en comparación con su rol en argumentos previos (véase figura 19). Para ilustrar (i), tómense las *proposiciones* (*inferencias o datos*) de ciertos argumentos (abductivo de la figura 7 y analógico de la figura 14) que fueron transformados en *procedimientos* plausibles de construcción que soportarían la solución del problema. Para ilustrar (ii) tómense los *datos* del argumento analógico (del dominio geometría del espacio) que luego fueron tomados como *aserciones* de una prueba formal posterior (hecha por toda la clase) que validó la solución del problema en tal dominio (figura 16).

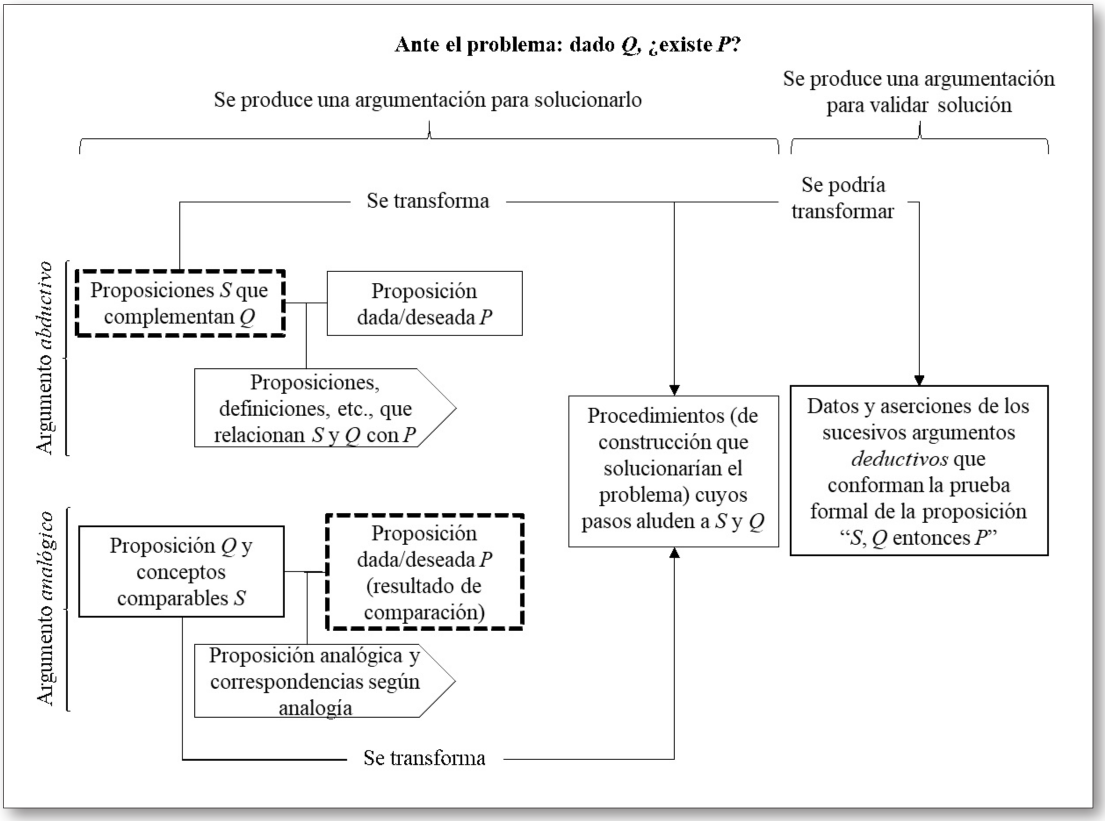


Fig. 19. Articulación y dinamismo de objetos en procesos argumentativos.

Con lo anterior, se complementan estudios que, en el marco de la educación geométrica, han abordado el papel de los argumentos abductivos como generadores de estrategias para abordar una situación (Pedemonte, 2007), o el papel de los argumentos analógicos como potenciadores del descubrimiento de hechos matemáticos (Lee, Kim, Na, Han, & Song, 2007) –en particular, de la geometría del espacio a partir de similitudes viables con la geometría plana (Graumann, 2005; Mammana, Micale, & Pennisi, 2012)–. Esto último se pudo detallar con el uso de configuraciones ontosemióticas que, a través de la proyección de la configuración de un dominio en otro (figura 18), dio sentido a la similitud entre F y O –principal característica de una analogía (English, 2004; Juthe, 2005; Perelman y Olbrechts-Tyteca, 1989; Polya, 1954; Conner, Sigletary, Smith, Wagner y Francisco, 2014)–.

Con el artículo, se ha estudiado la dicotomía formal-informal en procesos de enseñanza-aprendizaje en matemáticas. A partir del dinamismo de los objetos articulados por los procesos argumentativos presentado en la figura 19, se destacó la legitimidad de argumentos informales (abductivos o analógicos) a través de su utilidad tanto en los procesos de resolución de problemas como en los procesos de validación teórica de la solución.

REFERENCIAS

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 3*(4). Recuperado de: <http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html>.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F. y Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. En M. M. Pinto y T. F. Kawasaky (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 1*, (pp. 179-204). Belo Horizonte, Brazil: PME. Recuperado de: <http://www.seminariodidama.unito.it/2011/app/boero34.pdf>.

Conner, A., Sigletary, L., Smith, R., Wagner, P. y Francisco, R. (2014). Identifying kinds of reasoning in collective argumentation. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(3), 181-200. doi: https://doi.org/10.1080/10986065.2014.921131

English, L. (2004). Mathematical and analogical reasoning of young learners. En L. English (Ed.), *Mathematical and Analogical Reasoning in Early Childhood* (pp. 1-22). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc. doi:
https://doi.org/10.4324/9781410610706

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*(1), 97-124.
https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.
https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Graumann, G. (2005). Investigating and ordering Quadrilaterals and their analogies in space-problem fields with various aspects. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *37*(3), 190-198.
https://doi.org/10.1007/s11858-005-0008-2

Juthe, A. (2005). Argument by analogy. *Argumentation, 19*(1), 1-27.
https://doi.org/10.1007/s10503-005-2314-9

Kelly, A. y Lesh, R. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
https://doi.org/10.4324/9781410602725

Knipping, C. y Reid, D. (2015). Reconstructing argumentation structures: A perspective on proving processes in secondary mathematics classroom interactions. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 75-101). Dordrecht: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_4

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Krummheuer, G. (2015). Methods for reconstructing processes of argumentation and participation in primary mathematics classroom interaction. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 51-74). Dordrecht: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_3

Lee, K. H., Kim, M. J., Na, G. S., Han, D. H. y Song, S. H. (2007). Induction, analogy, and imagery in geometric reasoning. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 145-152). Seul: PME. Retrieved from https://www.emis.de/proceedings/PME31/3/145.pdf

Lee, K. y Sriraman, B. (2011). Conjecturing via reconceived classical analogy. *Educational Studies in Mathematics*, 123-140.
https://doi.org/10.1007/s10649-010-9274-1

Mackey, A. y Gass, S. (2005). *Second Language Research: Methodology and Design.* London: Lawrence Erlbaum Associates.
https://doi.org/10.4324/9781410612564

Mammana, M. F., Micale, B. y Pennisi, M. (2012). Analogy and dynamic geometry system used to introduce three-dimensional geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43*(6), 818-830.
http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2012.662286

Mariotti, M., Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F. y Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the theInternational Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 180-195). Lahti, Finland: PME.

Moschkovich, J. y Brenner, M. (2000). Integrating a naturalistic paradigm into research on mathematics and science cognition and learning. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 457- 486). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
https://www.routledgehandbooks.com/doi/10.4324/9781410602725.ch17

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 23-41.
https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x

Perelman, C. y Olbrechts-Tyteca, L. (1989). *Tratado de la Argumentación.* (J. Sevilla, Trans.) Madrid: Editorial Gredos.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. Journal of Mathematics Teacher Education, 21(1), 63-94.
http://dx.doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning.* New Jersey: Princeton University Press.

Reid, D. y Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching.* Rotterdam: Sense Publishers.

Rondero, C. y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 29-49.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1386

Steinhart, E. (2001). *The Logic of Metaphor: Analogous Parts of Possible Worlds.* Dordrecht: Springer Science+Business Media.
https://doi.org/10.1007/978-94-015-9654-1

Toulmin, S. (2003). *The Uses of Arguments* (Actualización de 1 ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005

Structure and dynamic of analogical, abductive and deductive arguments: a course on solid geometry as a context for reflection

Óscar Javier Molina Jaime
Departamento de Matemáticas
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia
ojmolina@pedagogica.edu.co

Vicenç Font Moll
Departament d'Educació Lingüística i Literària i de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica
Universitat de Barcelona, Barcelona, España
vfont@ub.edu

Luis Pino-Fan
Departamento de Ciencias Exactas
Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile
luis.pino@ulagos.cl

Given the importance that analogy has in mathematical activity (Polya, 1954), and the effect that the analogical argumentation process has in the development of logical thought (English, 2004) and in the scientific knowledge construction (Juthe, 2005; Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1989), this paper intends to study this process in the context of a university course on solid geometry. The question that guides the research is: How do argumentation processes, mainly by analogy, articulate concepts, procedures and propositions when a problem is addressed? Providing answers would make it possible to legitimize the use of certain arguments (abductive or analogical; not only formal-deductive), through the dynamism of the objects involved in the corresponding argumentation when a problem is addressed. In this sense, we approach the formal-informal dichotomy in the teaching-learning process of mathematics (Mariotti, 2006; Arzarello, Bartolini-Bussi, Leung, Mariotti & Stevenson, 2012) in a slightly researched context such as 3D geometry.

To answer the question, we analyze the production (and the corresponding argumentation process) that emerges when a group of students addresses a problem about congruence of triangles that can be solved in both 2D geometry and 3D geometry. To this aim, within a qualitative-naturalist methodology called classroom-based research, the Toulmin Model was used to typify the arguments produced by the students, and an ontosemiotic analysis was carried out to describe the mathematical activity associated.

Outcomes legitimate the use of abductive or analogical arguments in problem-solving processes (particularly, in 3D geometry) specifying the way how they articulate and dynamize objects (concepts, procedures, propositions) present in that process. Particularly, the synergistic use of the Toulmin Model and the ontosemiotic configuration tool made it possible to identify both the nature (concept, proposition, procedure) of the objects present in each argument, and the dynamism of such objects in terms of: *i*) their transformation into other types of objects (propositions, procedures) during the argumentative process of which they are part. Or *ii*) their change of role in a subsequent argument (data, assertion, guarantee) in comparison with their role in previous arguments.

Our results complement studies that, within Geometric Education research, have addressed the role of abductive arguments as generators of strategies to tackle a problem (Pedemonte, 2007), or the role of analogical arguments as potentiators of the discovery of mathematical facts (Lee, Kim, Na, Han & Song, 2007) –particularly, in 3D Geometry from viable similarities with 2D Geometry (Graumann, 2005; Mammana, Micale & Pennisi, 2012)–. The latter could be detailed with the use of ontosemiotic configurations which, through the projection of the configuration of one domain in another, gave sense to the similarity between F and O –main characteristic of an analogy (English, 2004; Juthe, 2005; Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1989; Polya, 1954; Conner, Sigletary, Smith, Wagner & Francisco, 2014).