



El papel de los modelos epistemológicos y didácticos en la formación del profesorado a través del dispositivo del *estudio de clase*

The role of epistemological and didactic models in the education of teachers through *lesson study*

Francisco Javier García García
Departamento de Didáctica de las Ciencias. Universidad de Jaén. Jaén, España.
fjgarcia@ujaen.es

Geoff Wake
School of Education. The University of Nottingham. Nottingham, Reino Unido.
Geoffrey.Wake@nottingham.ac.uk

Elena M. Lendínez Muñoz, Ana M. Lerma Fernández
Departamento de Didáctica de las Ciencias. Universidad de Jaén. Jaén, España.
elmunoz@ujaen.es, alerma@ujaen.es

RESUMEN • En este trabajo analizamos cómo los modelos epistemológicos y didácticos asumidos por una comunidad de *estudio de clase* determinan la forma en que este proceso se lleva a cabo, así como los resultados de este. Para ello, proponemos una reinterpretación del *estudio de clase* como una *praxeología de la profesión docente*, apoyándonos en las herramientas de la teoría antropológica de lo didáctico. El análisis de tres casos de *estudio de clase* permitirá evidenciar el papel que diferentes modelos epistemológicos y didácticos desempeñan en su estructuración, desarrollo y en el posible aprendizaje profesional de los participantes, contribuyendo, de esta forma, a visibilizar parte de la teoría que subyace al *estudio de clase*.

PALABRAS CLAVE: Estudio de clase; Desarrollo profesional del profesorado; Modelos epistemológicos y didácticos

ABSTRACT • In this paper, we analyse how the epistemological and didactic models that a lesson study community assumes determine the way this professional development process is conducted, as well as its outcomes. To do this, we propose a reinterpretation of lesson study as a *praxeology of the teaching profession*, drawing on tools from the Anthropological Theory of Didactics. The analysis of three cases will evince the role that different epistemological and didactic models play in the organisation and development of the work of lesson study groups, and in the potential learning of teachers. Thus, we provide new theory-informed insights into lesson study.

KEY WORDS: Lesson study; Teacher professional development; Epistemological and didactic models

Recepción: noviembre 2017 • Aceptación: enero 2019 • Publicación: marzo 2019

INTRODUCCIÓN

El *estudio de clase* (*EC* en adelante) es una práctica profesional establecida hace más de 100 años en Japón, que el profesorado interpreta como un quehacer más de su profesión, en la que este colabora con el fin de *estudiar* los contenidos que se deben enseñar, cómo enseñarlos y los procesos de pensamiento y comprensión de los estudiantes (Shimizu, 2014). Como dispositivo para la formación del profesorado, atrajo el interés de investigadores a nivel mundial tras la publicación del estudio TIMSS a finales del siglo xx (Fujii, 2016). Desde entonces, se ha observado un incremento notable en el número de investigaciones centradas en el uso de este dispositivo en otros países.

Cuando se quiere implementar el *EC* en otros contextos culturales, Stigler y Hiebert (2016) advierten de que este queda a menudo distorsionado y resulta difícil de mantener. Y aunque es de esperar que su uso en otros contextos implique posibles adaptaciones, Murata (2011) señala la importancia de que no se modifiquen sus características esenciales: que esté centrado en los intereses del profesorado, focalizado en los estudiantes y en su aprendizaje; que incluya una «lección (o clase) de investigación», y que sea reflexivo y colaborativo.

Numerosas investigaciones han abordado la dimensión cultural del *EC*. Así, Doig y Groves (2011) identifican, como hechos culturales relevantes y distintivos el estatus alto de la profesión de profesor en Japón, que es vista como una ocupación para toda la vida, y abierta a un mayor compromiso a largo plazo; la percepción del aula en Japón, más como una comunidad de aprendizaje que centrada en las diferencias individuales del alumnado, y el contexto escolar en Japón, que permite agrupamientos flexibles necesarios para que el profesorado pueda asistir a las *clases de investigación* y a la *discusión posterior*. Lewis y Tsuchida (1999) identifican cuatro condiciones principales que se dan en Japón y que favorecen la implementación del *EC*: un currículo «frugal», una cultura de colaboración entre el profesorado, una capacidad para la autorreflexión crítica, muy valorada en la cultura japonesa, y una estabilidad en las políticas educativas. Shimizu (2014) considera que el éxito del *EC* en Japón viene determinado por la existencia, en el currículo nacional, de objetivos claros de aprendizaje para el alumnado, compartidos por el profesorado, así como el esfuerzo voluntario de los profesores y el apoyo que reciben de la Administración. Doig, Groves y Fujii (2011) se refieren a la cultura de la clase en Japón, en la que todos los estudiantes tienen ganas de participar en la resolución de la tarea propuesta, desean aportar a las discusiones y saben que todas las contribuciones son valoradas. También a una cultura profesional del profesorado abierta a otras perspectivas de enseñanza, en la que los comentarios son vistos como contribuciones positivas. Fujii (2016) considera que hay aspectos clave en el *EC* que el profesorado japonés da por sentado, pero que parecen no entenderse bien fuera de Japón, como el tiempo y el esfuerzo que el profesorado emplea en la elaboración artesanal del *plan de clase*, destacando cómo este se centra en anticipar el «flujo» de la clase y, en particular, en analizar la adecuación de la tarea elegida (desde la perspectiva matemática y curricular), en la anticipación de las posibles respuestas de los estudiantes y en cómo organizar y llevar a cabo la fase de comparación y discusión de las posibles estrategias de los alumnos durante la *clase de investigación*. Hart y Carriere (2011) consideran que hay tres «hábitos de pensamiento» (*lentes críticas*) en los profesores japoneses que faltan en los profesores estadounidenses: la «lente de investigador» (para formular cuestiones sobre su práctica docente y diseñar experiencias), la «lente de los estudiantes» (para centrarse en el pensamiento de los estudiantes y examinar las clases a través de sus ojos) y la «lente de desarrolladores del currículo» (para organizar, secuenciar y conectar experiencias de aprendizaje).

De lo anterior se desprende que la noción de «cultura», o de «lo cultural», es amplia y ambigua, incluyendo múltiples aspectos: curriculares, profesionales, de la organización escolar, sociales, etc. Por ello, nos proponemos comenzar a problematizar esta noción, intentando identificar la naturaleza de las condiciones y restricciones que operan sobre el *EC* cuando se usa en un contexto determinado. Nues-

tra aportación va en el sentido expresado por Elliott (2012), que sugiere que el *EC* está «subteorizado», y a lo que Stigler y Hiebert (2016) añaden que gran parte de la teoría que subyace al *EC* es implícita, sustentada sobre creencias muy generales sobre la enseñanza y el aprendizaje.

De acuerdo con estos autores, consideramos que es necesario avanzar hacia una explicitación de los supuestos teóricos sobre los que se sustentan los procesos de *EC*, más allá de ciertas creencias generales. Esta teorización es relevante y necesaria para los investigadores, así como para los diseñadores de procesos de *EC*, no debiendo ser confundida con un alegato a favor de dotar de más componentes teóricos al profesorado involucrado en ciclos de *EC*. En otras palabras, no se trata de hacer más teórico el *EC* para el profesorado, sino de profundizar, como investigadores y diseñadores de procesos de *EC*, en la comprensión de una práctica profesional basada en supuestos culturales bastante difusos, generales y desarticulados entre sí.

Como mostraremos más adelante, dicha explicitación permitirá ahondar en cómo el *EC* se organiza, se lleva a cabo y resulta en determinado tipo de aprendizaje profesional. Los casos que analizaremos permitirán mostrar que, bajo una estructura aparentemente simple y similar del proceso de *EC*, subyacen supuestos epistemológicos y didácticos diversos, que dotan a cada proceso de *EC* de características y particularidades importantes y distintivas. La originalidad y la necesidad de nuestra propuesta queda justificada por una carencia importante detectada en la revisión de investigaciones indicada en párrafos anteriores, en las que autores de países muy diferentes identifican numerosos «factores culturales» que afectan al *EC*, pero en las que no se problematiza explícitamente el impacto que tiene, en cada contexto, la forma en que las matemáticas y su enseñanza son consideradas.

Así, en este artículo abordamos las siguientes cuestiones: ¿cuál es el papel que los modelos epistemológicos y didácticos asumidos por la comunidad de *EC* desempeñan en la organización y evolución de esta? ¿Cómo afectan al aprendizaje profesional del profesorado implicado?

EL ESTUDIO DE CLASE COMO PRAXEOLOGÍA DE LA PROFESIÓN DOCENTE

Para reinterpretar los procesos de *EC*, usaremos el marco teórico de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD en adelante) (Chevallard y Sensevy, 2014). Si un principio básico de la TAD es que las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas son actividades humanas modelizables en términos de praxeologías matemáticas y didácticas,¹ postulamos que también el desarrollo profesional es una actividad que podría ser modelizada en términos praxeológicos, si bien esta modelización resulta mucho más difícil al tratarse de un ámbito en el que lo matemático y lo didáctico se combinan y articulan entre sí.

Propondremos una posible reformulación del *EC* como praxeología de la profesión docente, adoptando para ello una visión hasta cierto punto idealizada y simplificada de este proceso. Esta modelización obedece a una necesidad de ahondar en la actividad matemática y didáctica llevada a cabo en un grupo de *EC*, siendo imprescindible para nuestro objetivo analizar cómo el *EC* está condicionado por la forma en la que lo matemático y lo didáctico se interpretan.

En la literatura se pueden encontrar diversas descripciones del *EC* (por ejemplo, Murata, 2011; Shimizu, 2014; Doig y Groves, 2011; Takahashi y McDougal, 2016). Todas comparten los siguientes postulados fundamentales (figura 1):

1. Una praxeología es un constructo teórico que se usa para describir y analizar las prácticas humanas. Consta de cuatro componentes: tipos de tareas, técnicas para llevarlas a cabo, los discursos que explican y justifican estas técnicas (llamados tecnologías) y un último nivel, más general, de justificación de las tecnologías, que se denomina teoría. En el caso de modelizar una actividad matemática, se hablará de praxeologías matemáticas, en el caso de modelizar una actividad de enseñanza de las matemáticas se hablará de praxeología didáctica. Toda praxeología didáctica se relaciona con una o varias praxeologías matemáticas (objeto del proceso de enseñanza). Recíprocamente, todo proceso de enseñanza de praxeologías matemáticas en una institución escolar implica la activación de una praxeología didáctica (Chevallard y Sensevy, 2014).

- el trabajo de los profesores se centra en un tema o cuestión de investigación sobre el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes,
- debe existir un diseño detallado de una intervención en el aula (*plan de clase*), que incluye una fase de indagación profunda (*kyouzai kenkyuu*),
- esta propuesta debe ser implementada en un aula real, por uno de los profesores del grupo, y observada por el resto (*clase de investigación*),
- tras el proceso de enseñanza, habrá una discusión grupal, más centrada en los alumnos y su aprendizaje que en el profesor.

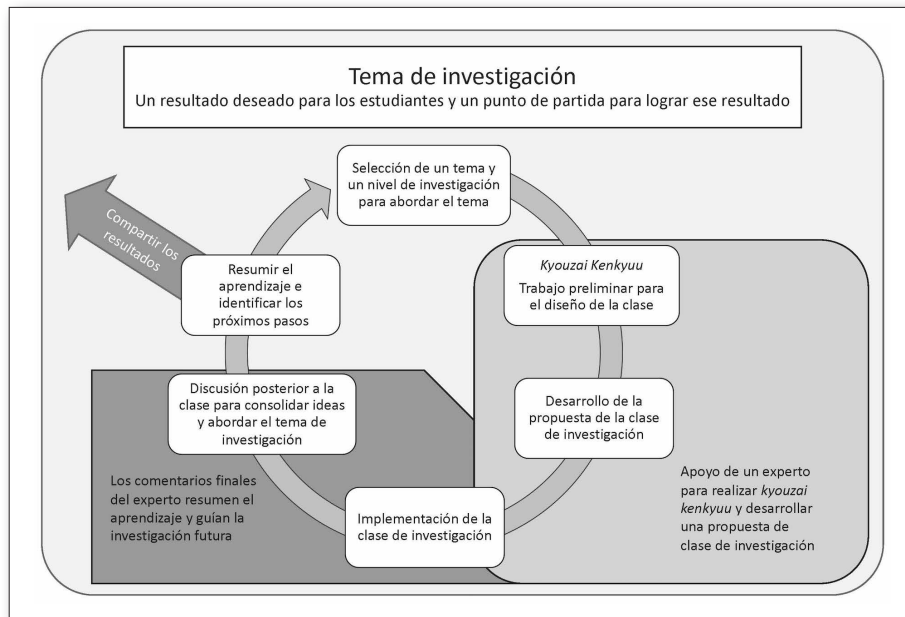


Fig. 1. Ciclo de EC (Takahashi y McDougal, 2016: 521, traducción propia).

A lo largo del proceso, el grupo de profesores, con el posible asesoramiento de un experto (*koshi*), busca posibles respuestas a la cuestión o tema de investigación, lo que provoca aprendizaje profesional (sobre cómo los estudiantes aprenden, sobre la enseñanza de determinados contenidos o procesos matemáticos, sobre el propio conocimiento matemático, etc.).

La comunidad de profesores se embarca en una actividad colaborativa, que podemos modelizar con la noción de praxeología. Es importante señalar que se trataría no de una praxeología matemática o didáctica, sino de una praxeología de la profesión docente, ya que se abordan tipos de tareas propias de esta (por ejemplo, la de planificar una clase o la de observar la actividad matemática de los estudiantes). La modelización del EC como praxeología de la profesión permitirá hacer explícitos y, en consecuencia, analizar los tipos de tareas que se abordan y las técnicas que ponen en funcionamiento (*praxis*) en un proceso de EC, así como los discursos que explican y justifican sus formas de proceder (*logos*).

En todo proceso de EC los profesores ocupan un papel dual. Por un lado, están inmersos en un sistema didáctico (en el sentido de Brousseau, 2002) de aprendizaje profesional, en el que llevan a cabo una serie de tareas profesionales (por ejemplo, identificar un tema de investigación, planificar una clase u observar una implementación en el aula, entre otras). Por otro lado, todas estas tareas se relacionan, de formas diversas, con otro sistema didáctico escolar (formado por estudiantes que aprenden matemáticas). Para distinguir estos sistemas didácticos y, por tanto, poder describirlos, analizarlos, cuestionarlos y establecer relaciones entre ellos, Winsløw (2011) propone emplear el término «sistema didáctico» para

el caso del sistema didáctico escolar de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y usar el término «sistema paradidáctico» para referirse a los sistemas en los que los profesores construyen conocimiento profesional. El uso del prefijo *para-* hace precisamente referencia al hecho de que estos sistemas se vinculan a un sistema didáctico escolar, pretendido en las fases de formulación de la cuestión y planificación, haciéndose vivo en la fase de observación y, finalmente, siendo evocado en las fases de discusión *a posteriori* y comunicación. La figura 2, elaborada a partir de la propuesta por Winslów (2011), representa esta compleja interacción entre sistemas que coexisten en el tiempo (didáctico: DS; y paradidácticos: PrS, DoS y PoS) y que nos permitirán ubicar el trabajo del profesorado con mayor precisión.

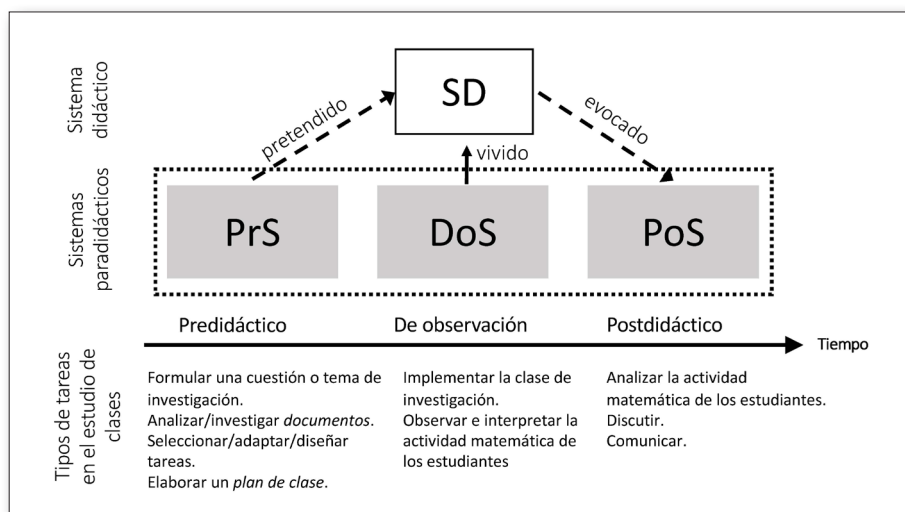


Fig. 2. Sistemas didácticos y paradidácticos en el EC (adaptado de Winslów, 2011).

CUESTIONANDO EL PAPEL DE LOS MODELOS EPISTEMOLÓGICOS Y DIDÁCTICOS EN EL ESTUDIO DE CLASE

En el apartado precedente hemos propuesto una modelización del EC como praxeología de la profesión, donde conviven y se relacionan diferentes sistemas didácticos. En particular, hemos formulado posibles tipos de tareas profesionales a las que debe enfrentarse la comunidad de profesores que participa en un proceso de EC (basándonos en descripciones ampliamente aceptadas como las de Murata, 2011; Shimizu, 2014; Doig y Groves, 2011; o Takahashi y McDougal, 2016). Sin embargo, y de forma deliberada, la parte del *logos* ha sido omitida, ya que no hemos sido capaces de encontrar, en estos y otros artículos consultados, los discursos que explican y justifican cómo los profesores llevan a cabo estas tareas. Por ejemplo, es posible encontrar en la literatura referencias al tipo de *plan de clase* que elaboran, a las observaciones que llevan a cabo durante la clase de investigación o a la discusión posterior, pero no se suelen hacer explícitos los discursos que justifican la elaboración de tal *plan de clase*, de cierto tipo de observaciones o de determinadas discusiones.

Este artículo persigue, precisamente, ahondar en la identificación y en el cuestionamiento de *logos* profesional, partiendo de la tesis principal de que la forma en que una comunidad de EC afronta estas tareas profesionales, e incluso cómo se formulan estas, depende, en gran medida, de asunciones fundamentales sobre qué son las matemáticas y cómo se organiza la actividad matemática (modelo epistemológico de las matemáticas), y qué es enseñar y aprender matemáticas y cómo se estructura la actividad matemática escolar (modelo didáctico).

Seguiremos una metodología de estudio de casos (tres, en total), cuyo objetivo es una comprensión profunda de la particularidad y complejidad de cada caso, llegando a entender en profundidad fenómenos en entidades educativas (Sáez-López, 2017). El primero corresponde a un tipo de *EC* que se lleva a cabo de forma bastante extendida en Japón,² tomando como base empírica el proyecto IMPULS³ (Universidad Tokyo Gakugei). El segundo corresponde al proyecto inglés LeMaPS⁴ (Universidad de Nottingham). El tercer caso corresponde a ciclos de *EC* diseñados en la Universidad de Jaén y llevados a cabo con profesorado en formación inicial.

EL ESTUDIO DE CLASE DESDE LA PERSPECTIVA DE LA RESOLUCIÓN ESTRUCTURADA DE PROBLEMAS

La *resolución estructurada de problemas* (REP en adelante) es una forma de entender y organizar la enseñanza de las matemáticas muy extendida en Japón. Shimizu (1999) y Hino (2007) sitúan su origen en los años sesenta, basada en una estructura tradicional sobre cómo planificar e implementar clases, pero fuertemente influenciada por el interés creciente que la resolución de problemas y el trabajo de Pólya tuvieron en las reformas curriculares de los años cincuenta (Hino, 2007; Takahashi, 2008).

La REP es un modelo didáctico fuertemente conectado con un modelo epistemológico conceptualista de las matemáticas, pero que valora los procesos de pensamiento y las destrezas de resolución de problemas. El método pretende que «los estudiantes creen ideas matemáticas y conocimiento por sí solos, experimentando procesos de resolución de problemas» (Hino, 2007: 509, traducción propia), enfrentándose a situaciones cuidadosamente diseñadas y llegando así a una comprensión profunda de los objetos matemáticos (Takahashi, 2006).

Se apoya en las denominadas «actividades abiertas-cerradas» (Asami-Johansson, 2011). Según Fujii (2015), se trata de problemas que deben ser comprensibles por los estudiantes con la mínima intervención del profesor, deben ser resolubles, al menos, por algunos estudiantes (pero no demasiado rápido), y deberían dar lugar, por sí mismos, a múltiples estrategias de resolución. Posteriormente, el profesor se apoyará en estas para elaborar un discurso que las compare y conecte, con la intención última de favorecer la comprensión por parte de su alumnado de ciertos objetos matemáticos, que son los que desea enseñar (Asami-Johansson, 2011). La clase se organiza en diferentes fases bien definidas (Miyakawa y Winsløw, 2009): presentación del problema por parte del profesor (*hatsumon*); trabajo individual del alumno, buscando una o varias soluciones (*kikan-shido*); presentación de soluciones por parte de algunos estudiantes (*takuto*); discusión, por parte del profesor, de la validez y la pertinencia de las ideas de los estudiantes (*neriage*); síntesis, por parte del profesor, de los puntos principales tratados en la clase (*matome*).

La REP forma parte de modelos didácticos fundamentados sobre modelos epistemológicos de tipo constructivista, caracterizados por un predominio de los momentos didácticos exploratorio y tecnológico-teórico (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997), en las fases de *kikan-shido* y *neriage*, respectivamente. Así lo destaca Takahashi (2008) cuando enfatiza que la REP está diseñada para que los estudiantes adquieran conocimientos y destrezas a través de una actividad matemática creativa, presentándoles problemas retadores, y que los profesores y los investigadores japoneses creen que la fase crucial de la clase empieza una vez que cada estudiante ha llegado a una posible solución, momento en el que el profesor inicia una discusión extensa con sus alumnos (*neriage*) para comparar y resaltar las similitudes y las diferencias entre las diferentes soluciones propuestas por los estudiantes.

2. Incluso en este país, el *EC* no se lleva a cabo de manera uniforme y estandarizada.
3. International Maths-teacher Professionalization Using Lesson Study.
4. Lessons for Mathematical Problem Solving.

La asunción, implícita o explícita, de los principios epistemológicos y didácticos de la REP dentro de una comunidad de *EC* condiciona y regula determinados aspectos importantes de su actividad profesional en los diferentes *sistemas paradidácticos* a partir de los datos del proyecto japonés IMPULS.

Empezando en el *sistema predidáctico*, observamos que determina cómo se formulan posibles *cuestiones de investigación*. Aunque no es posible encontrar una estructura común para este tipo de cuestiones, la importancia que se le otorga a los procesos de pensamiento de los estudiantes y de resolución de problemas sin duda delimita el tipo de cuestiones o temas asumibles. La tabla 1 recoge algunos de los temas de investigación de *planes de clase* hechos públicos por el proyecto IMPULS.⁵

Tabla 1.
Temas de investigación (proyecto IMPULS)

Diseñando clases de matemáticas en las que los alumnos estén absortos: estrategias de enseñanza que valoran las preguntas de los estudiantes y los ayudan a disfrutar expresándose y razonando.
Promoviendo estudiantes que pueden pensar por sí mismos: explorando aproximaciones docentes que incorporan el pensamiento crítico.
Diseñando clases que absorban a los estudiantes. Concibiendo una instrucción que se preocupa por las cuestiones de los estudiantes y proporciona experiencias para que los estudiantes disfruten pensando y expresándose.

Sin embargo, tras cuestiones como estas, encontramos que los objetivos de la *clase de investigación* diseñada en cada caso están fuertemente conectados con contenidos concretos. Por ejemplo, para los temas de investigación anteriores, los objetivos de las correspondientes *clases* son comprender el significado de la división (con resto, relación entre multiplicación y división), de las líneas paralelas y perpendiculares (definición de trapezoides, paralelogramos y rombos, y características de las diagonales de los cuadriláteros) o de la velocidad y la relación entre velocidad, tiempo y espacio.

La combinación de procesos de resolución de problemas y de comprensión profunda de los conocimientos matemáticos, característica de la REP, se refleja de forma más evidente cuando se procede al *estudio del contenido* y al *diseño de un plan de clase*. Según Watanabe, Takahashi y Yoshida (2008), los profesores investigan, en primer lugar, sobre actividades que pueden usar, con el fin de tener una visión clara y profunda de lo que quieren enseñar. Luego, piensan en las actividades desde el punto de vista del estudiante, intentando anticipar las posibles repuestas que podrían poner en funcionamiento. De esta forma, van ajustando cuidadosamente la actividad con el fin de que esta provoque la emergencia de las estrategias deseadas. Elaboran así un *plan de clase* (sistema didáctico pretendido) que sigue la estructura arriba descrita. La importancia que se concede a los momentos exploratorio, o de búsqueda individual de soluciones por parte de los estudiantes (*kikan-shido*), y tecnológico-teórico, o de explicación y justificación de las estrategias, asumidos por el profesor (*neriage*), se refleja nítidamente en el trabajo del profesorado cuando diseña. Por un lado, por la descripción minuciosa en el *plan de clase* de las posibles estrategias que podrían poner en funcionamiento los estudiantes. Por otro lado, con la planificación en detalle del discurso tecnológico-teórico que el profesor va a producir en la fase de *neriage*, apoyándose en las respuestas esperadas de los alumnos, y basado en un uso estratégico y cuidado de la pizarra del aula, existiendo, incluso, un término que identifica la tarea profesional de planificar cómo se van a presentar las soluciones en la pizarra (*bansho*) y qué tipo de discurso va a elaborar el profesor a partir de ellas (Takahashi, 2006). En la figura 3 se puede consultar la primera parte de un *plan de clase* diseñado dentro del proyecto IMPULS, para una clase de Educación Primaria en la que se explora la noción de velocidad.

5. Disponibles en línea: <<http://www.impuls-tgu.org/en/library/index.html>>.

Flujo de la clase




	<p>Contenido de aprendizaje (presentación de la tarea – hatsumon – y anticipación de respuestas)</p>	<p>☆ Medidas para lograr el tema de investigación</p> <p>○ Apoyo y puntos a recordar</p> <p>◎ Evaluación</p>																				
Comprender	<p>1. Comprender el objetivo de aprendizaje</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Problema: vamos a pensar sobre cómo ordenar la velocidad de estos 3 niños</p> </div> <table border="1" style="margin: 10px 0;"> <thead> <tr> <th></th> <th>Tiempo (segundos)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>5</td> </tr> </tbody> </table> <p>Profesor: ordenar la velocidad del sprint de 3 niños en una carrera, desde el más rápido.</p> <p>Niño: C está en 1er lugar, y A y B en 2º lugar.</p> <p>Niño: No podemos saberlo sólo con esa información.</p> <p>Profesor: ¿Por qué piensas eso?</p> <p>Niño: Porque no sabemos cuánto han corrido.</p> <p>Niño: No podemos comparar la velocidad si no sabemos el tiempo y la distancia que han corrido.</p> <p>Profesor: esta es la distancia que corrieron</p> <table border="1" style="margin: 10px 0;"> <thead> <tr> <th></th> <th>Distancia (m)</th> <th>Tiempo (segundos)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>40</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>30</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>30</td> <td>5</td> </tr> </tbody> </table> <p>Niño: C tarda menos pero también recorre menos distancia, por lo que no podemos decir si C es el más rápido.</p> <p>Niño: Pero podemos decir que C es más rápido que B.</p> <p>Profesor: ¿es cierto eso? ¿Podemos saberlo sólo mirando los datos?</p> <p>Niño: Porque B y C corren la misma distancia pero B tarda más tiempo.</p> <p>Niño: También pienso así.</p> <p>Profesor: Entonces podemos decir que C es más rápido que B.</p> <p>Niño: Sí, y puedo decir más. A es más rápido que B.</p> <p>Niño: A y B corren el mismo tiempo, pero A recorre más distancia, por eso podemos decir que A es más rápido.</p> <p>Profesor: Bien, no hemos comparado A y C. ¿Cuál es más rápido?</p> <p>Niño:</p> <p>Profesor: ¿Por qué no podéis decir nada?</p> <p>Niño: Porque en ambos la distancia y el tiempo son diferentes.</p> <p>Niño: Bueno, podemos compararlas si las hacemos iguales.</p> <p>Niño: Podemos comparar si las hacemos iguales</p> <p>Niño: Si hacemos una de ellas igual que otra, podemos comparar.</p> <p>Profesor: ¿Si las hacéis iguales....? ¿Podéis compararlas?</p> <p>Niño: ¡Sí, podemos! ¡Sí, podemos!</p>		Tiempo (segundos)	A	6	B	6	C	5		Distancia (m)	Tiempo (segundos)	A	40	6	B	30	6	C	30	5	<p>☆ Propón el problema con información insuficiente (proporcionando sólo el tiempo) y haz emerger preguntas de los estudiantes</p> <p>○ Cuando pensamos sobre la distancia en el contexto del sprint de una carrera, el uso de distancia es más común. Por ello, en esta clase usamos distancia en lugar de distancia de viaje para proponer el problema.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>No podemos comparar la velocidad usando sólo el tiempo</p>  </div> <p>○ Abre la tabla y muestra la información de la distancia.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Tanto la distancia y el tiempo de A como de C son diferentes. ¿Qué podemos hacer?</p>  </div> <p>○ Comparando 2 personas a la vez, ayuda a los estudiantes a entender la cuestión principal de la clase.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Podríamos ser capaces de compararlas si hacemos una de ellas igual que la otra.</p>  </div> <p>◎ Los estudiantes tienen clara la cuestión principal y tratan de resolver el problema con entusiasmo (interés, motivación, disposición).</p>
	Tiempo (segundos)																					
A	6																					
B	6																					
C	5																					
	Distancia (m)	Tiempo (segundos)																				
A	40	6																				
B	30	6																				
C	30	5																				

Fig. 3. Plan de clase: introducción de la tarea (tomado de <<http://www.impuls-tgu.org/en/>>, traducción propia).

Finalmente, en los sistemas de *observación y postdidáctico*, el modelo epistemológico y didáctico de la REP también condiciona los modos de observar la clase y los aspectos que hay que tener en cuenta en la *discusión posterior*. Si la REP pretende la comprensión profunda por parte de los estudiantes de conceptos matemáticos a partir de tareas cuidadosamente diseñadas (Takahashi, 2006), entonces los observadores se centran en recopilar evidencias sobre si la tarea propuesta hizo emerger las estrategias esperadas y, por tanto, la discusión se orienta a identificar los efectos que la tarea ha tenido en la comprensión, por parte de los alumnos, del concepto involucrado, tratando de aportar evidencias (Fujii, 2015).

EL ESTUDIO DE CLASE DESDE LA PERSPECTIVA DE LA ENSEÑANZA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En Inglaterra, el proyecto LeMaPS ha diseñado e implementado ciclos de *EC* con profesores de Educación Secundaria. El reto del proyecto ha sido identificar principios clave para la implementación del *EC* en Inglaterra, tratando de iniciar y establecer esta práctica dentro de una organización escolar y administrativa que es muy diferente a la que se da en Japón. Los modelos epistemológicos y didácticos asumidos, foco de este artículo, se centran en la enseñanza de la resolución de problemas, y no, como en el caso anterior, en la comprensión en profundidad de conceptos a través de la resolución de problemas.

En el modelo epistemológico subyacente en el proyecto LeMaPS, la resolución de problemas se interpreta desde la perspectiva de la modelización matemática, de acuerdo con la conceptualización formulada en PISA (OECD, 2004). Esta se usa para informar las discusiones entre investigadores y profesorado sobre la naturaleza de los procesos de resolución de problemas (figura 4), y ha tenido un papel central en todo el proceso de *EC*.

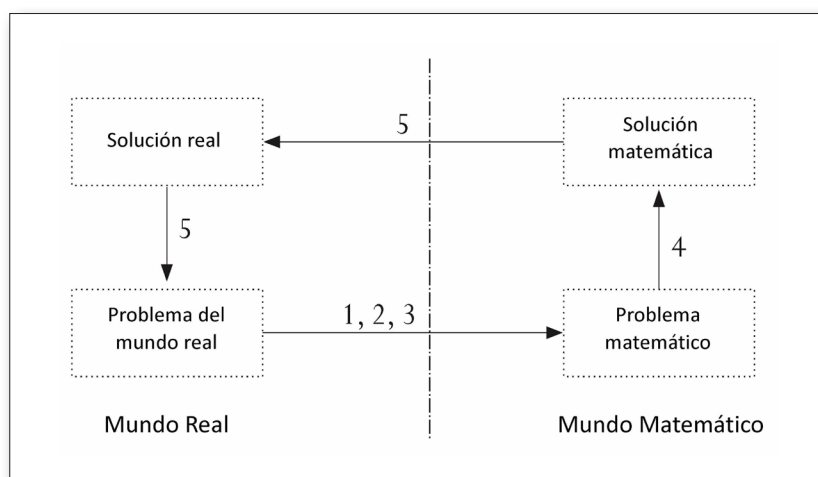


Fig. 4. Representación del ciclo de resolución de problemas según PISA (OECD, 2004: 38, traducción propia).

En los diferentes ciclos de *EC* llevados a cabo, el interés fundamental ha sido la enseñanza de la resolución de problemas abiertos y realistas y, por ello, el trabajo se ha centrado en aspectos particulares del ciclo de modelización y en la dimensión metacognitiva asociada a la resolución de problemas. Esta visión de la actividad matemática, que es parte de un modelo epistemológico de las matemáticas más centrado en procesos que en conceptos, ha tenido su reflejo, desde el comienzo, en el tipo de cuestiones de investigación que emergieron. Algunas de ellas se recogen en la tabla 2.

Tabla 2.
Preguntas de investigación (proyecto LeMaPS)

¿Cómo podríamos ayudar a los estudiantes a que hagan hipótesis razonables y a que analicen sus efectos sobre las soluciones?
¿Cómo podríamos ayudar a los estudiantes a identificar las variables importantes presentes en un problema, así como las relaciones entre ellas?
¿Cómo podríamos ayudar a los estudiantes a que comparen la efectividad de dos o más aproximaciones a un mismo problema?

Los grupos de *EC* afrontaron un doble reto: desarrollar esta nueva práctica profesional y nuevos modelos epistemológicos y didácticos que informen su acción en el aula y la de sus alumnos. Los aspectos más importantes de estos modelos de referencia se pueden analizar a partir de ciertos documentos de apoyo al profesorado proporcionados por los expertos del proyecto (véase tabla 3 a modo de ejemplo).

Tabla 3.
Rasgos del modelo epistemológico y didáctico, según se describe en documentos de trabajo del proyecto LeMaPS (traducción propia)

La actividad que se elija para la clase de investigación puede apoyarse en contenidos y procedimientos ya enseñados, y puede ser tentador planificar un repaso de estos antes de la clase. Sin embargo, esto sería de poca ayuda, puesto que podría llevar a los estudiantes a pensar que el problema que se les presenta es un mero ejercicio para usar dicha técnica. En clases de resolución de problemas los estudiantes deben elegir sus propios métodos y usar sus estrategias. Un problema rico debería permitir múltiples estrategias.
La resolución de problemas necesita tiempo, y los alumnos necesitan tener oportunidades para explorar ideas y estrategias alternativas. Los estudiantes necesitan «espacio» y no «ser dirigidos».
A veces, el profesor puede usar una solución de un estudiante (por ejemplo, de estudiantes de otra clase) para resaltar ideas importantes que quiere compartir y ayudar al desarrollo de su clase –ya sean buenas ideas o interpretaciones erróneas comunes–. En otras ocasiones, las respuestas de los estudiantes podrían necesitar, por parte del profesor, algún tipo de intervención en forma de sugerencia o de pregunta, con el fin de hacer progresar el aprendizaje del alumno.
Podría ser beneficioso para los estudiantes ver las estrategias que hacen otros. Algunas pueden ser más elegantes o efectivas, pero estas deben compartirse después de que los estudiantes hayan tenido la posibilidad de abordar el problema por sí mismos.

Se presentan rasgos de un modelo didáctico en el que el momento exploratorio tiene un papel crucial, y que se apoya en una epistemología de las matemáticas como actividad de resolución de problemas abiertos. El papel del profesor es proponer situaciones problemáticas abiertas y ofrecer guía al alumnado (metáfora del andamiaje, Wood, Bruner y Ross, 1976) a través de un uso cuidadoso de posibles ayudas (en forma de mensaje, en forma de recursos adicionales) y del uso estratégico de cuestiones que promueven el pensamiento (Watson y Mason, 1998).

Partiendo de estos modelos epistemológicos y didácticos, que determinan los sistemas didácticos pretendido, vivido y evocado, el proceso de *EC* presenta ciertos rasgos propios y distintivos. Por un lado, en la tarea de *estudio y la selección de posibles actividades*, se sugiere el uso de actividades ya diseñadas en proyectos y repositorios ingleses orientados a la resolución de problemas (por ejemplo, Nrich, MAPS), ya que son coherentes con el tipo de sistema didáctico pretendido (muy abiertas y poco estructuradas). En particular, para reforzar aspectos relevantes de este, se desea centrar la actividad del grupo de *EC* durante la tarea de *diseño del plan de clase* en las características básicas del modelo

didáctico asumido, basado en la intervención del profesor en el aula a través de un uso juicioso de preguntas. Para ello, se introducen dos artefactos (Wake, Swan y Foster, 2015): (1) la elaboración de una tabla que anticipe las dificultades y los problemas que pueden encontrar los alumnos, y en la que se describa el tipo de cuestiones que podría usar el docente para ayudar al alumno (figura 5); (2) la elaboración de un cuadro de progreso que permita al profesor y al resto del grupo observar y determinar la evolución de los estudiantes cuando se enfrentan a la actividad propuesta (figura 6), incluyendo de nuevo cuestiones guía.

Anticipación de dificultades	Preguntas y pautas sugeridas
<p><i>Los estudiantes inician cálculos detallados antes de planear un enfoque</i> Por ejemplo, empiezan en la parte superior de la lista y calculan el costo de la vacunación de los trabajadores sanitarios, luego pasan a la siguiente fila, etc.</p>	<p>Describe en palabras un plan para abordar este problema ¿Cuáles son las decisiones clave que tienes que tomar? ¿En qué información te vas a centrar al principio?: ¿Cuál ignorarás?</p>
<p><i>Los estudiantes ignoran una o más restricciones</i> Por ejemplo, olvidan que solo tienen 5 millones de libras de presupuesto, o que solo necesitan 946.000 vacunas.</p>	<p>¿Tienes suficientes recursos para tu solución? ¿Has hecho suficientes vacunas para todos? ¿Has desperdiciado dinero? ¿Has desperdiciado alguna vacuna?</p>
<p><i>Los estudiantes no justifican las decisiones tomadas</i> Por ejemplo, establecen una solución sin explicación.</p>	<p>¿Por qué has elegido asignar las vacunas de esta manera? ¿Cómo puedes estar seguro de que esta es la mejor solución?</p>
<p><i>Los estudiantes se precipitan en sus conclusiones</i> Por ejemplo, rápidamente asumen que solo se debe usar la vacuna A porque es más efectiva; o que solo se debe usar la vacuna B porque es más barata.</p>	<p>¿Has tenido todas las circunstancias en cuenta? ¿Podrías vacunar a más personas si usaras algo de la vacuna B? ¿Podrías salvar más vidas si usaras más de la vacuna A?</p>
<p><i>Los estudiantes no entienden el concepto de presupuesto</i> Por ejemplo, suponen que una buena solución será una solución barata y no se dan cuenta de que necesitan gastar el presupuesto entero para salvar la mayor cantidad de vidas.</p>	<p>¿Cuál es tu principal objetivo al tratar de resolver el problema? ¿Hay más vidas que posiblemente podrías salvar?</p>
<p><i>Los estudiantes se abruma con los números grandes</i> Por ejemplo, si gastan 4.8 millones de libras del presupuesto, pueden creer que están lo suficientemente cerca de su máximo y no apreciar que con 200.000 libras se podrían salvar muchas más vidas.</p>	<p>¿Cuánto dinero te queda de tu presupuesto? ¿Cuántas vacunas más podrías comprar con esta cantidad de dinero?</p>
<p><i>Los estudiantes no comprenden el significado de sus cálculos</i> Por ejemplo, los estudiantes pueden realizar un cálculo sensato, pero no entender lo que su respuesta representa.</p>	<p>¿Qué representa esta cantidad? ¿Cuánto dinero sobra o cuánto dinero se ha gastado? ¿Representa a cierto número de personas?</p>
<p><i>Los estudiantes solo escriben números sin justificaciones</i></p>	<p>¿De dónde vienen estas cantidades? ¿Sabes lo que representan? ¿Eres capaz de justificar por qué has usado estos números?</p>
<p><i>Los estudiantes no entienden la efectividad de cada vacuna</i> Por ejemplo, los estudiantes pueden no ser capaces de captar la idea de que algo sea efectivo al 70%.</p>	<p>Si 1.000 personas recibieron la vacuna B, ¿cuántas de ellas se espera que sobrevivan?</p>
<p><i>Los estudiantes se confunden entre los números que representan dinero y personas</i> Por ejemplo, los estudiantes pueden realizar un cálculo y obtener la solución 12.500, pero no saber si se trata de personas o de dinero.</p>	<p>¿Puedes pensar en una forma de distinguir los números que representan valores diferentes? ¿Cómo puedes distinguir entre valores que representan personas y valores que representan dinero?</p>

Fig. 5. *Plan de clase*: anticipación de las posibles dificultades de los alumnos y de la intervención del profesor mediante cuestiones (Wake, Swan y Foster, 2015: 252, traducción propia).

Ambos documentos, integrados en los *planes de clase* elaborados por el profesorado que participó en el proyecto, determinan posteriormente las tareas profesionales en los *sistemas de observación y post-didáctico*, así como la forma de llevarlas a cabo. Por tanto, en la tarea de *observación de la clase de investigación*, tanto la «tabla de anticipación de dificultades» como el «cuadro de progreso» desempeñan un papel principal a la hora de guiar la observación por parte del resto de los profesores durante la *clase de investigación*, permitiendo que esta esté centrada en los procesos de resolución de problemas (en relación con el modelo epistemológico de la actividad matemática) y en las intervenciones estratégicas del profesor (según el modelo didáctico de referencia). También, en la tarea de *discusión posterior*, ambos artefactos han sido el eje usado para estructurar la discusión (véase Wake, Swan y Foster, 2015).

	Enfoque estratégico	Comunicación
Poco progreso	Intenta trabajar hacia una solución llevando a cabo operaciones con números pero muestra poca conciencia estratégica que conduzca a una solución.	Comienza a representar el problema utilizando solo números, sin indicar lo que representan. No ofrece ninguna explicación de lo que está sucediendo.
Preguntas para la progresión	¿Puedes escribir un plan de acción sobre cómo vas a completar la tarea de manera efectiva? ¿Qué otra información necesitas considerar?	¿Qué representa cada uno de estos números? ¿Puedes pensar en cómo dejarlo más claro para que quien vea tu trabajo entienda lo que estás haciendo?
Algo de progreso	Lleva a cabo cálculos adecuados y correctos, pero no tiene en cuenta las restricciones.	Los cálculos son claros, dando las unidades correctas (por ejemplo, £), pero no comunican las razones que hay detrás de los cálculos.
Preguntas para la progresión	¿Hay otra información sobre la que no hayas pensado?	¿Cuáles son las razones que hay detrás de las decisiones y cálculos que has realizado?
Progreso sustancial	Trabaja hacia una solución de forma lógica, alcanzando una solución viable.	Utiliza métodos ineficaces para comunicar ideas (por ejemplo, respuestas largas, en lugar de una tabla de doble entrada).
Preguntas para la progresión	¿Puedes pensar en un enfoque alternativo para resolver este problema? ¿Cuál sería el efecto en el resultado?	¿Puedes pensar en una forma más eficaz de mostrar esta información que haga que tus planteamientos sean más fáciles de seguir?
Tarea cumplida	Llega a una solución habiendo considerado alternativas.	Comunica claramente su solución en una variedad de formatos, seleccionando el más apropiado para lo que se pretende lograr (por ejemplo, una tabla de dos entradas, una letra). Todos los motivos están claramente explicados y justificados, utilizando argumentos lógicos.

Fig. 6. *Plan de clase*: posible progresión de los estudiantes durante la clase de investigación y posible intervención del docente mediante cuestiones (Wake, Swan y Foster, 2015: 253, traducción propia).

EL ESTUDIO DE CLASE DESDE LA PERSPECTIVA DE LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

Este tercer caso analiza un trabajo, aún en progreso, con profesorado de Educación Infantil en formación inicial de la Universidad de Jaén. El objetivo es que desarrollen su conocimiento y su *praxis* profesional, incorporando elementos clave del modelo epistemológico y didáctico de la teoría de las situaciones didácticas (TSD en adelante) (Brousseau, 2002). Este profesorado ya ha tenido una primera aproximación a la TSD en una asignatura cuatrimestral previa, pero no ha tenido la ocasión de experimentar esta forma de organizar la enseñanza de las matemáticas en un aula real. Se eligió la metodología del *EC* precisamente por su potencial para desarrollar no solo el conocimiento profesional (*logos*), sino también la *praxis* profesional, en situaciones lo más reales y auténticas posibles.

Sucintamente, Radford (2008) describe los principios epistemológicos sobre los que se apoya la TSD: el conocimiento resulta como la solución «óptima» a una cierta situación o problema; aprender es, en consonancia con la epistemología genética de Piaget, una forma de adaptación cognitiva; para cada conocimiento matemático existe una familia de situaciones que le dan sentido, significado (al aparecer este como la mejor estrategia posible ante dichas situaciones), y, para que se produzca aprendizaje, es necesario que los estudiantes se enfrenten de forma autónoma a las situaciones planteadas.

Las características esenciales del modelo didáctico asociado a la TSD derivan de los postulados anteriores y cristalizan en la noción de *situación adidáctica*: situación que tiene un carácter didáctico oculto, involucrando a los estudiantes en la interacción más independiente y fructífera posible con el *medio* propuesto (Brousseau, 2002). Ante estas, los estudiantes deben producir proposiciones, justificando su validez; tomar decisiones; formular hipótesis, prediciendo y juzgando sus consecuencias; comunicar, producir y organizar modelos, argumentos y pruebas; y evaluar y corregir sus acciones como resultado de las decisiones que toman y de la retroalimentación que les proporciona el medio de aprendizaje, sin la intervención del profesor (Brousseau y Warfield, 2014).

El papel del profesor es el de concebir *situaciones adidácticas* que ofrezcan una representación adecuada del conocimiento que desea enseñar, incluyendo un entorno de aprendizaje (*medio*) cuidadosamente diseñado. Estas situaciones deben proponer un problema a los estudiantes, hacerles *actuar contra este medio*, el cual ofrece a los estudiantes información para evaluar los efectos de sus acciones y, si es necesario, modificar sus estrategias. Las tres tareas didácticas fundamentales que caracterizan las acciones del profesor son: (1) la *devolución* de la situación, proponiendo a los alumnos un *medio* y un problema que estos puedan y deseen abordar (elaborando una estrategia de base); (2) provocar que las estrategias iniciales fracasen y evolucionen, mediante intervenciones estratégicas en aspectos clave del *medio* y de la situación (las *variables didácticas*); (3) una vez que los estudiantes han llegado al conocimiento pretendido, que se manifiesta al movilizar la estrategia óptima ante la situación problemática, extraer el conocimiento matemático de la situación y presentarlo como un conocimiento matemático cultural (*institucionalización*).

Esta interpretación de qué es hacer matemáticas y cómo se puede organizar la actividad matemática escolar condiciona la forma de llevar a cabo las diferentes tareas propias de un proceso de *EC*. En primer lugar, en el *sistema predidáctico*, se formulan tipos de cuestiones problemáticas de naturaleza diferente: relacionadas con el significado o la «razón de ser» de los conocimientos matemáticos (tipo de situaciones problemáticas ante las que estos podrían aparecer como estrategia óptima); con la evolución de las estrategias matemáticas de los alumnos como respuesta a las situaciones problema que se les plantean, y ante las que sus estrategias anteriores son insuficientes, costosas o directamente han dejado de funcionar; con el diseño de *medios adidácticos* y la gestión de las *variables didácticas* asociadas para provocar un fracaso y una evolución de las estrategias de los estudiantes (y, por ende, de los aprendizajes). A modo de ejemplo, la tabla 4 presenta algunas de las cuestiones formuladas por los estudiantes del Grado en Educación Infantil durante la experiencia piloto realizada entre febrero y mayo de 2017.

Tabla 4.
Preguntas de investigación (experiencia piloto de *EC*, Universidad de Jaén)

¿Utilizan los niños el conteo con sentido, o solo en situaciones en las que se les pide expresamente que cuenten? En caso de usar el conteo, ¿son capaces de hacer emerger códigos que permitan representar la cantidad por escrito?
¿Qué representaciones (tipos de numeración para expresar la cantidad y trazos para expresar la estructura aditiva) pueden emerger por parte del alumnado ante situaciones adidácticas de descomposición aditiva? ¿Las numeraciones que usan los niños reflejan la existencia de obstáculos de tipo epistemológico y/u ontogenético?
En observaciones previas, parece que los niños movilizan la estrategia del sobreconteo en situaciones de composición aditiva con colecciones alejadas, ¿qué notaciones pondrán en funcionamiento cuando tengan que pedir por escrito cada una de las subcolecciones (partes)? ¿Serán capaces de adaptar estas estrategias cuando pasen a trabajar con tres subcolecciones?

Una vez identificada la cuestión para investigar, las tareas *de estudio del contenido y de los materiales* también se ven afectadas. Comparte con el *EC* en japonés, descrito previamente, una reflexión profunda sobre el significado de los objetos matemáticos y de la actividad matemática (tipos de situaciones donde aparecen, estrategias que se pueden movilizar, notaciones, etc.), pero se amplía con el estudio de las características de estas situaciones para dotarlas de un verdadero carácter adidáctico (para que el alumno, por sí solo, pueda determinar la pertinencia y la validez de sus estrategias) y la identificación de las *variables didácticas* que permitirán modificar las situaciones para provocar la evolución deseada en las estrategias de los estudiantes. Evidentemente, la búsqueda y el estudio de recursos se circunscribe a aquellos ya diseñados bajo este paradigma, cuando son accesibles, o a otros que pudiesen ser modificados para dotarlos de un carácter adidáctico, con el fin de garantizar que el sistema didáctico pretendido se mantenga dentro de los postulados epistemológicos y didácticos de la TSD.

Será la tarea de *elaboración de un plan de clase*, una vez más, la que quedará más fuertemente condicionada. En ella, el grupo de profesores debe afrontar tareas profesionales nuevas y específicas: cómo organizar la *devolución de la situación* a los alumnos; cómo hacer que estos puedan validar de forma autónoma ante el *medio*; qué decisiones tomar sobre las *variables didácticas* para generar diferentes fases que vayan provocando los fallos y las adaptaciones pretendidas en los estudiantes, o qué conocimiento *institucionalizar* y cómo. Son tipos de tareas propias de un modelo didáctico específico, asociado a un modelo epistemológico concreto, y que da lugar a una estructura muy particular de las clases de investigación (la figura 7 muestra un extracto de un *plan de clase* diseñado por un grupo, como respuesta a la primera cuestión de la tabla 4).

Plan de clase: las gallinas y pollitos (número natural-cardinal)

Plan de clase (Ciclo 1)

Fase 1

Consigna: Estamos en la granja y cada gallina tiene un pollito, pero estos pollitos se han perdido y tenemos que devolver a cada pollito con su mamá. Cada gallina necesita un pollito y solo uno para que todos estén contentos.

Variables didácticas concretas:

- Colecciones C_1 y C_2 visibles simultáneamente en el momento de la construcción.
- Número de gallinas: 20
- Configuración espacial lineal
- Número de viajes: ilimitados

Posibles estrategias de los niños:

- Biyección

Posibles dificultades de los niños:

- Creemos que esta fase se llevará a cabo por los niños sin dificultades.

Fase 2

Consigna: Estamos en la granja y cada gallina tiene un pollito, pero estos pollitos se han perdido y tenemos que devolver a cada pollito con su mamá. Cada gallina necesita un pollito y solo uno para que todos estén contentos. Ahora tienes que tener cuidado, ya que solo vas a poder ir una sola vez a coger los pollitos.

Variables didácticas concretas:

- Colecciones no visibles simultáneamente. Mientras se construye C_2 , C_1 no está presente.
- Número de gallinas: 20
- Disposición espacial: circular
- Número de viajes: 1

Posibles estrategias de los niños:

- Estimación visual
- Subitización
- Conteo

Posibles dificultades de los niños:

- Que no cardinen, es decir, que los alumnos cojan los pollitos al azar.
- Error en el conteo.
- Dificultad en la adquisición del principio del principio de cardinalidad.

Fig. 7. Extracto de un *plan de clase* diseñado bajo la perspectiva de la TSD.

Una vez elaborado el *plan de clase*, la actividad de *EC* en los *sistemas de observación y postdidáctico* también se reflejan los supuestos epistemológicos y didácticos de referencia. Si bien la observación de la *clase de investigación* se centra en las estrategias movilizadas por los estudiantes, característica común al modelo general de *EC*, aquí cobra un papel fundamental su interpretación según el tipo de situación propuesta por el profesor, y con los retos y las retroacciones que el *medio* provoca. Así, es especialmente importante observar y discutir con posterioridad: *a*) si la estructuración inicial del *medio* hace posible que los alumnos entren en la situación usando estrategias basadas en conocimientos que ya poseían (i.e., la *devolución* de la situación); *b*) si la gestión de las *variables didácticas*, para generar diferentes

situaciones problemáticas, provoca las adaptaciones deseadas en las estrategias de los estudiantes; *c*) si el *medio* funciona eficazmente ofreciendo retroacción a los estudiantes para que puedan determinar la validez y el alcance de sus estrategias de forma autónoma; *d*) si la evolución de las estrategias de los estudiantes en las diferentes situaciones propuestas en el *plan de clase*, y vividas en la *clase de investigación*, les permite crear el significado de los objetos matemáticos pretendido con la clase diseñada.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este artículo hemos partido de la descripción general del *EC* como dispositivo para el desarrollo profesional del profesorado. Al ser una práctica originada en un contexto cultural muy concreto, y que luego ha intentado reproducirse en otros diferentes, muchas investigaciones se han centrado en entender los aspectos esenciales del *EC*, así como las condiciones que explican su éxito o fracaso cuando se traslada de un contexto a otro. Aunque diferentes autores han formulado factores «culturales» que explican las dificultades y las adaptaciones que esta práctica profesional sufre para vivir en contextos diferentes al japonés, consideramos que se ha prestado poca atención a cómo los modelos epistemológicos y didácticos, que de forma más o menos explícita se asumen por la comunidad de *EC*, condicionan la forma en la que esta práctica profesional se lleva a cabo, así como sus resultados.

El uso de herramientas de la TAD nos ha permitido: (1) reinterpretar el *EC* como una *praxeología de la profesión docente*, descrita como la interacción entre un sistema didáctico (pretendido, vivido, evocado) y diferentes sistemas paradidácticos; (2) identificar los tipos de tareas más importantes del bloque práctico del *EC*, poniendo de manifiesto tipos de tareas profesionales y estrategias específicas en casos concretos; (3) vincular esta especificidad con los modelos epistemológicos y didácticos asumidos por el grupo de *EC*, y que actúan como un componente crucial del *logos* (bloque tecnológico-teórico) de esta *praxeología de la profesión*.

Siguiendo una metodología cualitativa de estudio de casos, hemos profundizado en tres procesos diferentes de *EC* llevados a cabo en tres países diferentes. Nuestro análisis, que no ha pretendido ser exhaustivo sino explicativo, ha permitido descubrir que, más allá de una estructura común y estandarizada del *EC*, existe un mundo complejo de prácticas profesionales que solo puede ser comprendido en profundidad cuando se mira a la luz de los modelos epistemológicos y didácticos que el grupo de *EC* asume, que determinan el *sistema didáctico* involucrado durante todo el proceso (pretendido, vivido, evocado). Así, hemos mostrado cómo estos modelos condicionan el tipo de temas o cuestiones de investigación que tiene sentido formular, la fase de estudio de materiales y reflexión que conduce a la elaboración de un *plan de clase*, la arquitectura de este y lo que tiene sentido observar en el aula y discutir con posterioridad.

En el caso japonés, hemos puesto en evidencia lo importante que es, por un lado, la tarea profesional de diseñar cuidadosamente la actividad que se va a proponer a los estudiantes, para que emerjan diferentes estrategias en la fase de trabajo individual (*kikan-shido*) y, por otro lado, la tarea de diseñar cuidadosamente la discusión que el profesor va a hacer de estas estrategias (*neriage*), momento clave para provocar los aprendizajes deseados en los estudiantes (que incluye, por ejemplo, nuevas tareas profesionales derivadas, como la de planificar la presentación en la pizarra de las diferentes estrategias, para que pueda ser usada como apoyo al discurso del profesor). En este modelo no se presta tanta atención al papel del profesor durante la fase de trabajo de los estudiantes, que sin embargo es crucial en el caso inglés, en el que se asume como una tarea profesional importante anticipar las posibles dificultades y bloqueos de los estudiantes, y diseñar cómo el profesor va a intervenir a través de un uso de cuestiones que provoquen el pensamiento, o mediante la introducción estratégica de ayudas o recursos (estrategias de andamiaje). Por su parte, el caso español comparte con el japonés el análisis en detalle

del conocimiento matemático y de las posibles estrategias que pueden emplear los estudiantes, si bien otorga un papel fundamental a la construcción lo más autónoma posible por parte de los estudiantes de su conocimiento matemático, dando lugar a tareas profesionales que tienen que ver con el diseño de situaciones que informen a los estudiantes, sin la intervención del profesor, sobre el alcance y la validez de sus estrategias, y que provoquen las adaptaciones necesarias en los estudiantes.

Si Stigler y Hiebert (2016) afirmaban que «gran parte de la teoría tras el EC es implícita, y está también sustentada por amplias creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje» (p. 583, traducción propia), consideramos que hemos abierto una vía para empezar a hacer visible parte de esta teoría subyacente, que es novedosa en la medida en que la mayoría de la literatura existente sobre el EC se centra en factores «culturales» más generales, no llegando a profundizar en cómo se conciben las matemáticas y su enseñanza. Además, entendemos que nuestro análisis permite hacer explícitas condiciones y restricciones que operan sobre la forma en la que el EC se lleva cabo, visibilizando y particularizando los tipos de tareas profesionales y, por tanto, es una herramienta útil no solo para el análisis, sino también para el diseño de nuevos ciclos.

AGRADECIMIENTOS

Parte de esta investigación ha sido realizada al amparo del contrato predoctoral para la Formación de Profesorado Universitario FPU14/06496 del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España.

REFERENCIAS

- ASAMI-JOHANSSON, Y. (2011). A study of a problem solving oriented lesson structure in mathematics in Japan. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2549-2558). Rzeszów, Polonia: University of Rzeszów.
- BROUSSEAU, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Springer.
<https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2>
- BROUSSEAU, G. y WARFIELD, V. (2014). Didactic situations in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 163-170). Dordrecht: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_47
- CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: Horsori.
- CHEVALLARD, Y. y SENSEVY, G. (2014). Anthropological approaches in mathematics education, French perspectives. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 38-43). Dordrecht: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_9
- DOIG, B. y GROVES, S. (2011). Japanese lesson study: teacher professional development through communities of inquiry. *Mathematics Teacher Education and Development*, 13(1), 77-93.
- DOIG, B., GROVES, S. y FUJII, T. (2011). The critical role of task development in lesson study. En L. Hart, A. Alston y A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 181-200). Dordrecht: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_15
- ELLIOTT, J. (2012). Developing a science of teaching through lesson study. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 1(2), 108-125.
<https://doi.org/10.1108/20468251211224163>

- FUJII, T. (2015). The critical role of task design in lesson study. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 273-286). Cham, Suiza: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_9
- FUJII, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: a critical process of lesson study. *ZDM Mathematics Education*, 48(4), 411-423.
<https://doi.org/10.1007/s11858-016-0770-3>
- HART, L. y CARRIERE, J. (2011). Developing the habits of mind for a successful lesson study community. En L. Hart, A. Alston y A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 27-38). Dordrecht: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_3
- HINO, K. (2007). Toward the problem-centered classroom: trends in mathematical problem solving in Japan. *ZDM Mathematics Education*, 39(5-6), 503-514.
<https://doi.org/10.1007/s11858-007-0052-1>
- LEWIS, C. y TSUCHIDA, I. (1999). A lesson is like a swiftly flowing river: research lessons and the improvement of Japanese education. *Improving Schools*, 2(1), 48-56.
<https://doi.org/10.1177/136548029900200117>
- MIYAKAWA, T. y WINSLØW, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: an «open approach» lesson and a «fundamental situation». *Educational Studies in Mathematics*, 72(2), 199-218.
<https://doi.org/10.1007/s10649-009-9188-y>
- MURATA, A. (2011). Introduction: conceptual overview of lesson study. En L. Hart, A. Alston y A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 1-12). Dordrecht: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_1
- OECD (2004). *The PISA 2003 assessment framework-mathematics, reading, science and problem-solving knowledge and skills*. Paris: OECD.
<https://doi.org/10.1787/9789264101739-en>
- RADFORD, L. (2008). Theories in mathematics education: a brief inquiry into their conceptual differences. Comunicación en el *ICME 11, 6-13 de julio, 2008*. Monterrey, México. Recuperado de: <http://www.luisradford.ca/pub/31_radfordicmist7_EN.pdf>.
- SÁEZ-LÓPEZ, J. M. (2017). *Investigación educativa. Fundamentos teóricos, procesos y elementos prácticos*. Madrid: UNED.
- SHIMIZU, Y. (1999). Aspects of mathematics teacher education in Japan: focusing on teachers' roles. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2(1), 107-116.
<https://doi.org/10.1023/A:1009960710624>
- SHIMIZU, Y. (2014). Lesson study in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 358-360). Dordrecht: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_91
- STIGLER, J. W. y HIEBERT, J. (2016). Lesson study, improvement, and the importing of cultural routines. *ZDM Mathematics Education*, 48(4), 581-587.
<https://doi.org/10.1007/s11858-016-0787-7>
- TAKAHASHI, A. (2006). Characteristics of Japanese mathematics lessons. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics*, 25, 37-44.
- TAKAHASHI, A. (2008). Beyond show and tell: neriage for teaching through problem-solving. Comunicación en el *ICME 11, 6-13 de julio, 2008*. Monterrey, México.

- TAKAHASHI, A. y MCDUGAL, T. (2016). Collaborative lesson research: maximizing the impact of lesson study. *ZDM Mathematics Education*, 48(4), 513-526.
<https://doi.org/10.1007/s11858-015-0752-x>
- WAKE, G., SWAN, M. y FOSTER, C. (2015). Professional learning through the collaborative design of problem-solving lessons. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(2-3), 243-260.
<https://doi.org/10.1007/s10857-015-9332-9>
- WATANABE, T., TAKAHASHI, A. y YOSHIDA, M. (2008). Kyozaikenkyu: A critical step for conducting effective lesson study and beyond. En F. Arbaugh y P. M. Taylor (Eds.), *Inquiry into mathematics teacher education* (Vol. 5, pp. 131-142). San Diego, CA: Association of Mathematics Teacher Educators.
- WATSON, A. y MASON, J. (1998). *Questions and prompts for mathematical thinking*. Derby, Inglaterra: Association of Teachers of Mathematics.
- WINSLØW, C. (2011). A comparative perspective on teacher collaboration: the cases of lesson study in Japan and of multidisciplinary teaching in Denmark. En G. Gueudet, B. Pepin y L. Trouche (Eds.), *From text to 'lived' resources. Mathematics teacher education* (pp. 291-304). Dordrecht: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-94-007-1966-8_15
- WOOD, D., BRUNER, J. y ROSS, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17(2), 89-100.
<https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x>

The role of epistemological and didactic models in the education of teachers through *lesson study*

Francisco Javier García García

Departamento de Didáctica de las Ciencias. Universidad de Jaén. Jaén, España.
fjgarcia@ujaen.es

Geoff Wake

School of Education. The University of Nottingham. Nottingham, Reino Unido.
Geoffrey.Wake@nottingham.ac.uk

Elena M. Lendínez Muñoz, Ana M. Lerma Fernández

Departamento de Didáctica de las Ciencias. Universidad de Jaén. Jaén, España.
elmunoz@ujaen.es, alerma@ujaen.es

Lesson study is considered a powerful professional practice to develop teachers' knowledge and teaching skills. Originating in Japan more than a century ago, it has been attracting researchers' and practitioners' interest all over the world. However, lesson study is practised somewhat differently from one country to another. This fact has raised researchers' concerns about essential aspects of lesson study that should be preserved, as well as about cultural factors that might affect it. In this paper we adopt a different perspective in relation to this issue. In lesson study, teachers critically think about mathematics and its teaching. Consequently, it is a practice that is sensitive to the way mathematics and its teaching is conceived within a lesson study community, that is, to the epistemological and didactic models assumed. Here we aim to analyse how the epistemological and didactic models that we adopt affect critical aspects of lesson study practice. To do so, we reinterpret lesson study as a praxeology of the teaching profession from the Anthropological Theory of Didactics perspective. We find this helpful as it uncovers and differentiates, on the one hand, the lesson study «praxis» (that is, the type of tasks the community faces, and ways of dealing with them) and, on the other hand, the lesson study «logos» (that is, the knowledge that, implicitly or explicitly, explains and justifies the lesson study community praxis). This provides insight into the mutual dependency between the lesson study practice of, and the epistemological and didactic models assumed by, practitioners that until now has not been sufficiently considered by existing research. In order to explore this dependency, we draw on analysis of the work of three lesson study groups, conducted in three countries (Japan, England, and Spain). The epistemological and didactic models underlying the work of the groups is developed from the structured problem-solving approach in Japan, the teaching of problem-solving in England, and the Theory of the Didactical Situations in Spain. The analysis of these cases shows how the lesson study practice is shaped by key aspects of the epistemological and didactic model assumed, and supported by particular tasks that make sense only when adopting a specific approach. Our analysis highlights that both researchers and practitioners should pay more attention to the epistemological and didactic models that underpin their approach in addition to the more general cultural factors that are often highlighted by existing research. Our work contributes to a better understanding of lesson study, potentially useful both to analyse ongoing lesson study processes and to design and conduct new ones.