



El papel del *folding back* en el proceso de comprensión del concepto de área: un estudio de caso

The role of folding back in the process of understanding the concept of area: A case study

Graciela B. García-Amadeo

Instituto Superior de Formación Docente y Técnica N.º 25, Buenos Aires, Argentina
edugra@rnonline.com.ar

M. Cinta Muñoz-Catalán

Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla, Sevilla, España
mcmunozcatalan@us.es

José Carrillo

Didácticas Integradas, Universidad de Huelva, Huelva, España
carrillo@ddcc.uhu.es

RESUMEN • Este artículo presenta un estudio de caso en el que pretendemos comprender, desde una perspectiva interpretativa, el proceso de comprensión del concepto de área de una niña de quinto curso de Primaria, Cecilia, en el contexto de una unidad de enseñanza cuya estrategia metodológica es consistente con la resolución de problemas. Abordamos este proceso considerando *la teoría dinámica para el crecimiento de la comprensión matemática* (Pirie & Kieren, 1994, 1999) como herramienta analítica. El *folding back* ha emergido como una herramienta conceptual eficaz para asimilar el proceso de comprensión del concepto de área, permitiéndonos identificar los diferentes papeles que ciertos indicadores del concepto han jugado en dicho proceso. Así, para el caso de Cecilia, se han identificado tres tipos diferentes de indicadores para el concepto de área: *generadores*, *impulsores* y *derivados*.

PALABRAS CLAVE: Concepto de área; Proceso de comprensión; *Folding back*; Educación Primaria; Estudio de caso.

ABSTRACT • This paper presents an interpretatively oriented case study focused on the development of understanding of the concept of area in a fifth year primary student, Cecilia. The methodological context of the study was a teaching unit based on problem solving. Our approach takes into consideration the model of *growth in mathematical understanding* (Pirie & Kieren, 1994, 1999) as an analytical tool. Particularly, *folding back* emerged as a powerful tool for understanding the dynamics of Cecilia's growth in understanding the area concept, and enabled us to identify three distinct roles of indicators in her process: *generators*, *drivers* and *derivative*.

KEYWORDS: Concept of area; Process of understanding; Folding back; Primary Education; Case study.

Recepción: mayo 2017 • Aceptación: abril 2018 • Publicación: noviembre 2018

García-Amadeo, G. B., Muñoz-Catalán, M. C., & Carrillo J. (2018). El papel del *folding back* en el proceso de comprensión del concepto de área: Un estudio de caso. *Enseñanza de las ciencias*, 36(3), 79-98.

INTRODUCCIÓN

Este artículo forma parte de un estudio más amplio (García-Amadeo, 2013) en el que se caracteriza el proceso de comprensión del concepto de área que manifiestan tres niñas de quinto año de primaria cuando trabajan desde un enfoque de resolución de problemas.

En este trabajo, nos centramos en Cecilia (pseudónimo, al igual que los nombres de las otras niñas que se mencionarán más adelante) y, desde la *teoría dinámica para el crecimiento de la comprensión matemática* (Pirie & Kieren, 1994, 1999), ponemos de relieve el papel del *foldings back* en su proceso de comprensión respecto de algunas características del concepto de área.

Asumimos el carácter complejo de la construcción de un concepto matemático y las limitaciones para documentar lo que los niños procesan en interacción consigo mismos, sus compañeros y la maestra. Los indicadores del concepto de área contemplados aquí permiten un análisis más preciso acerca de las características del concepto de área que construye Cecilia. En este proceso, el *foldings back* (Pirie & Kieren, 1994, 1999; Martin, 2008) ha emergido como un elemento clave para detectar cómo se construyen esas características de la noción y cómo inciden las intervenciones de la niña con sus compañeras y/o la maestra al resolver los problemas.

MARCO TEÓRICO

Características sobre la construcción del concepto de área

Entendemos la noción *superficie* como la región del plano limitada por una línea cerrada, distinguiéndola del número que la mide (Douady & Perrin, 1989). La magnitud *área* es la característica común a todas las superficies que las hace igualables y sumables, mientras que *cantidad de área* es lo que tienen en común las superficies equivalentes entre sí.

El uso temprano de las fórmulas, a través de medidas lineales, dificulta la comprensión del proceso de medición de esta magnitud (Outhred & Mitchelmore, 2000; Lehrer, Jaslow & Curtis, 2003; Bonotto, 2003; Zacharos, 2006).

A este respecto, Del Olmo, Moreno & Gil (1993) manifiestan que para Piaget la comprensión del área se vincula con la consecución del principio de conservación, asumiendo la invariabilidad de ciertas cualidades de las superficies cuando estas son sometidas a transformaciones, y con el principio de transitividad de relaciones, a través del uso de superficies intermedias. Para estos autores, los niños inician el proceso de comprensión de dicho concepto a través de la percepción, y continúan el proceso natural subdividiendo la superficie en partes, que pueden mover y reubicar. En una etapa posterior, cubren la superficie utilizando una figura intermedia que funciona como unidad, y anticipan la cantidad utilizada en dicho cubrimiento (Douady & Perrin, 1989; Kamii & Kysh, 2006), identificando en este proceso superficies equivalentes. La bidimensionalidad de la unidad es importante para la comprensión de la noción de área (Outhred & Michelmore, 2000). Los niños interactúan con distintas unidades de medida y advierten que el área de una superficie tiene asociados distintos números, según la unidad de medida considerada. Estas nociones cobran sentido cuando se considera el cuadrado como unidad convencional (Dickson, 1991). Con respecto al resultado, los niños tienden a identificar la medida entera con la exacta, y en este sentido es conveniente que, en el contexto de una situación concreta, efectúen aproximaciones convenientes que respondan a lo solicitado (Del Olmo, Moreno & Gil, 1993; Chamorro, 2001).

Al hilo de este artículo, consideramos el concepto de área desde una perspectiva de aprendizaje, atendiendo a las consideraciones anteriores y las diferentes relaciones que se establecen con otros contenidos. Nos centramos en: reconocer las figuras simples que componen una superficie; percibir el área

de las superficies como cualidad que facilita su comparación, en particular la equivalencia; conceptualizar el área como medida de cubrimiento, y acotar el resultado entre valores próximos.

El crecimiento de la comprensión del concepto de área

Abordamos la construcción de un concepto en el contexto escolar desde la noción de campo conceptual (Vergnaud, 1996), asumiendo que no puede reducirse a una definición, sino que engloba al conjunto de situaciones que resuelve y le otorga significado.

La *teoría dinámica para el crecimiento de la comprensión matemática* de Pirie y Kieren (1994, 1999) permite observar y describir el proceso de crecimiento en la comprensión de un concepto matemático en la etapa escolar, considerando de manera simultánea las acciones específicas que el sujeto desarrolla y la conceptualización más general que va construyendo. Lo conciben como un proceso activo que se desplaza por las diferentes capas de comprensión, siguiendo un movimiento recursivo hacia adelante y hacia atrás. Este proceso es representado gráficamente a través de una sucesión de capas de forma elipsoidal dispuestas concéntricamente. Cada capa contiene a las anteriores siguiendo un orden de complejización creciente, del interior hacia el exterior, compartiendo todas ellas un punto en el margen izquierdo (figura 1). Siguiendo el orden, se denominan: *conocimiento primitivo*, *confección de una imagen*, *posesión de una imagen*, *identificación de propiedades*, *formalización*, *observación*, *estructuración e invención*. Entre dos capas se distingue una curva denominada anillo, por ejemplo: *producción-posesión de una imagen*.

Compartimos la importancia del trabajo en grupo y las interacciones con los iguales y docentes en el proceso de construcción de conceptos. Codes, Delgado, González y Monterrubio (2013), aplicando el modelo presentado, muestran el proceso de construcción de la serie numérica considerando las interacciones entre alumnos (de modo similar a como se presentará en este artículo).

Teniendo en cuenta las características de la noción de área para este estudio y el nivel educativo de la informante (quinto curso de Primaria), desestimamos las capas *observación y estructuración e invención*, que requieren un mayor grado de madurez, y algunos de los anillos. Asignamos a cada uno de ellos –capas y anillos– el nombre que mejor denota el proceso y los definimos en función de la inferencia que como investigadores asumimos de la comprensión que el niño posee de la base de la acción que realiza. En especial, en el anillo se consideran aquellas peculiaridades del concepto que denotan que el niño comienza a incursionar en una capa exterior, aunque todavía sigue conservando características de la capa interior. A continuación, describimos las capas y los anillos en función de las acciones del sujeto, y con ejemplos sobre el área.

- A. *Conocimiento matemático primitivo*: Expresa lo que sabe y lo que no, lo que puede hacer y lo que no, respecto a los conocimientos matemáticos previos al concepto que desea construir. A diferencia de la propuesta de Pirie y Kieren (1994, 1999), no consideramos las ideas que el alumno sabe al respecto de esta nueva noción, por lo que añadimos el adjetivo *matemático* al nombre de esta capa. Así, el uso de una estrategia multiplicativa para calcular la cantidad de celdillas de una cuadrícula es un ejemplo de conocimiento propio de esta capa, pues constituye un conocimiento matemático previo para abordar la noción de área de una superficie.
- B. *Producción de una imagen*: Se familiariza con el conocimiento en cuestión. Para ello se basa en la visualización, acude a materiales didácticos, a un dibujo o a la verbalización, con el objeto de distinguir, construir, comparar u ordenar figuras de su colección. Hemos sustituido el término *confección* por el de *producción* porque este sustantivo se adecúa mejor al proceso que sigue el sujeto en la obtención de la representación mental del concepto. Pavimentar una superficie y contar el número de unidades empleadas son acciones características de esta capa.

- Anillo. *Producción-posesión de una imagen*: Incursiona en la posesión de la imagen del área de la figura, acudiendo para ello, solo en algunos casos, a materiales didácticos o a un dibujo para facilitar el proceso que le permita construir, comparar u ordenar una o más figuras de su colección. Irrumpe en una capa exterior pero sigue conservando características de la capa interior.
- C. *Posesión de una imagen*: Dispone de la construcción mental del área de una figura para comparar y/u ordenar con otras de su colección, sin tener que disponer de materiales didácticos para su realización. Este objeto mental puede ser pensado por el sujeto y usado como conocimiento matemático. Seleccionar una unidad de medida adecuada en función de la magnitud considerada es una característica que asociamos a esta capa.
- D. *Percepción de propiedades*: Manipula y/o combina la imagen del concepto de área o la cantidad de magnitud, para predecir y registrar propiedades de las figuras. *Percepción*, en lugar de *identificación*, se adecúa mejor al nivel de comprensión de los niños. Anticipar y registrar la equivalencia entre figuras sobre la base de una situación en particular es una característica que asociamos a esta capa.
- Anillo. *Percepción de propiedades-formalización*: Dispone de una imagen formal en vistas a arribar a una definición. Advertir de la necesidad de unidades de medida convencionales según la magnitud considerada es una característica que asociamos a este anillo.
- E. *Formalización*: Abstrae un método o cualidad común de la noción que debe construirse, al que le otorga funcionalidad. Acotar el valor de la medida de una cantidad de magnitud, entre valores próximos, es una característica que asociamos a esta capa.

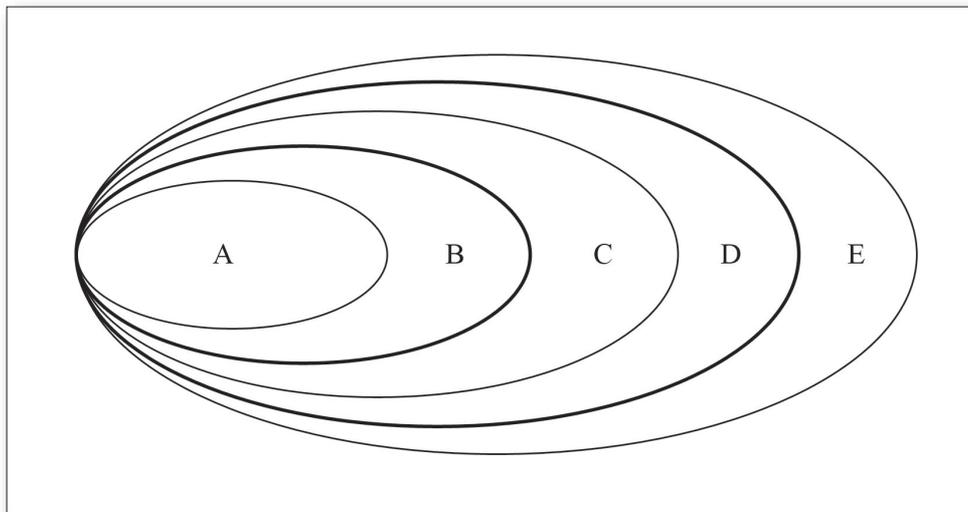


Fig. 1. Representación gráfica de la disposición en capas del modelo de Pirie y Kieren (1994, 1999).

El *folding back* en el proceso de comprensión

En el proceso de comprensión de un concepto, puede ocurrir que el sujeto se encuentre con dificultad al resolver una actividad y retroceda a una capa o anillo interior con la finalidad de reconstruir o construir el conocimiento objeto de dificultad, para regresar con una comprensión más profunda hacia la misma capa u otra exterior a ella. Pirie y Kieren (1994, 1999) y Martin (2008) denominan a este proceso *folding back*.

Así, el *folding back* es el proceso que permite recuperar los conocimientos previos, revisarlos y/o otorgarles un nuevo significado más profundo y estable para avanzar en la construcción de conocimiento matemático. En este complejo proceso, el *folding back* es crucial y resulta conveniente considerar *la fuente de información* y *el tipo de intervención* como categorías que lo caracterizan (Martin, 2008). Según *la fuente de intervención*, el *folding back* puede ser inducido por la maestra, por sus compañeros, por el mismo niño o por los materiales didácticos utilizados; según *el resultado* puede ser intencional o no en función de la finalidad de la intervención.

La identificación de *folding back* nos permitirá dar cuenta no solo de *qué* es lo que el alumno construye respecto a la noción de área, sino *cómo* se produce dicha construcción.

DISEÑO METODOLÓGICO

En este trabajo pretendemos, desde un paradigma interpretativo (Bassey, 1999), comprender cómo se produce el proceso de construcción del concepto de área en una niña de quinto de Primaria, Cecilia, cuando se implementa una metodología de resolución de problemas. En particular, queremos identificar los significados que Cecilia le asigna al concepto de área, en interacción con sus compañeros y con la maestra, así como identificar el papel del *folding back* (Martin, 2008) en dicho proceso. Abordamos este estudio mediante un diseño consistente en un *estudio de caso*, en el sentido de que es un «estudio de una singularidad conducida en profundidad en entornos naturales» (Bassey, 1999: 47). Cecilia presenta una actitud positiva hacia la matemática, es respetuosa con las consignas de trabajo y proporciona ejemplos eficaces para comprender el papel del *folding back* en el proceso de comprensión del concepto. La elección de Cecilia, frente a Mirta y Patricia, se fundamenta en los siguientes aspectos. Por un lado, Mirta proporcionó una información escasa y poco relevante para entender el proceso de comprensión del concepto de área. Por otro lado, el punto de partida de Patricia se correspondía con capas avanzadas del modelo, por lo que proporcionaba menos situaciones en las que identificar el *folding back*. Seguimos a Cecilia siempre en el contexto natural del aula, durante el periodo en el que se implementó una secuencia de actividades sobre el concepto de área. El caso de Cecilia nos interesa en la medida en que nos permite detectar cómo se construye el concepto de área y formular algunas precisiones de este, tratándose, por lo tanto, de un estudio de *caso instrumental* (Stake, 2000).

Hemos utilizado distintos instrumentos de recogida de información y de análisis que se centran en el proceso de resolución personal de Cecilia, en el contexto de las interacciones con la maestra y con su pequeño grupo de compañeros integrado por Patricia, Mirta y Flor y que se describen en los apartados que siguen.

Instrumentos y técnicas de obtención de información

La secuencia de enseñanza para el concepto de área

La secuencia de actividades que implementó la maestra de Cecilia constituye el contexto que facilitó la obtención de información. Fue diseñada conjuntamente por la primera autora y la maestra, considerando las características del concepto, explicitadas en el apartado 2.1, y las respuestas de los niños a un cuestionario inicial para detectar *sus conocimientos matemáticos primitivos* y las *ideas previas* acerca del concepto de área.

Para abordar la complejidad de la comprensión del concepto, se consideraron los organizadores curriculares propuestos por Rico y Segovia (2001): evolución histórica del concepto; fenomenología; errores y dificultades, y sistema de representación. Entendemos que el concepto surge ante la necesidad

de comparar objetos y, entre las dificultades más frecuentes, advertimos limitaciones al efectuar comparaciones visuales, no dejar huecos en el proceso de medir y diferenciar la superficie de su área. Para su enseñanza es necesario proponer actividades relacionadas con procedimientos de reparto equitativo, comparación de superficies y equivalencia, sin apelar a la asignación numérica y medición antes de construir la noción matemática. Asimismo, también se deben aplicar métodos cualitativos, mediante procedimientos geométricos y/o gráficos, y cuantitativos, a través de procedimientos numéricos, asignando un número a la medida del área de una superficie.

Estas consideraciones se corresponden con la resolución de problemas como la estrategia didáctica adecuada, pues permite que el estudiante manifieste los conocimientos que va construyendo, potencia el establecimiento de relaciones con otros y favorece las justificaciones de las decisiones que se toman. No se trató de presentar actividades aisladas, sino una secuencia que contenía tanto problemas estructurados como otros abiertos o de descubrimiento (Santos Trigo, 2008; Arcavi & Friedlander, 2007) con la intención de ayudar a los niños a construir el concepto de área. Su implementación propició el diálogo y la reflexión desde un marco social. Por un lado, las intervenciones de la maestra posibilitaron la organización de la enseñanza, creando un ambiente que favoreció instancias de reflexión grupal y explicitación de las nociones que cada actividad impulsó a construir. Por otro lado, las interacciones entre los niños y las oportunas intervenciones de la maestra incidieron en la representación que el sujeto realiza individualmente para producir respuestas acordes que favorecieran la construcción de la noción. La secuencia se compuso de trece actividades; por su importancia en este trabajo, hemos seleccionado cinco de ellas. Las presentamos en el apartado de análisis con el fin de no duplicar información y facilitar la lectura.

Registro en vídeo de la secuencia y la producción escrita de Cecilia

Utilizamos dos técnicas de obtención de información: *el registro en vídeo de la secuencia*, para observar el trabajo de la niña en grupo, y *la producción escrita de la niña* referida a su trabajo individual.

Registro en vídeo de la secuencia: la primera autora se integró en el aula antes de comenzar la implementación de la secuencia con el fin de que los niños se acostumbraran a su presencia. Filmó especialmente la participación de Cecilia con sus compañeras y con la maestra, para obtener descripciones detalladas y representativas del comportamiento con sus compañeros, y sus representaciones sobre el concepto. También registró anotaciones que, a su juicio, aportaban y complementaban información para el trabajo.

Producción escrita de la niña: como documento personal (Colás & Buendía, 1998) recoge las acciones, experiencias y subjetividades de Cecilia, y nos permite obtener evidencias pormenorizadas de cómo resuelve los problemas planteados. Al comienzo de la secuencia de enseñanza se les solicitó que justificaran por escrito los procedimientos empleados en cada problema con objeto de registrar en detalle las construcciones y reconstrucciones que iban produciendo.

Proceso e instrumento de análisis

En el proceso de análisis hemos adoptado la perspectiva de *análisis interpretativo* (Kvale, 1996) con el propósito de comprender la noción de área en términos de evolución. De esta manera, se busca producir un informe de análisis que ponga de relieve el proceso de construcción del concepto de área de Cecilia.

En primer lugar, considerando el concepto de área desde la perspectiva de su aprendizaje y los obstáculos epistemológicos a los que se enfrentan los niños, descomponemos la construcción del concepto de área en categorías e indicadores, los cuales reflejan diferentes aspectos en la comprensión del

concepto, aunque no prescriben linealidad en su desarrollo. La relación de dichas categorías e indicadores con las capas y anillos del modelo de Pirie y Kieren (1994, 1999), indicados entre paréntesis, conformaron nuestro primer instrumento de análisis.

Tabla 1.
Instrumento de análisis 1

<i>Categorías del concepto de área</i>	<i>Indicadores del concepto de área y capas o anillos donde se ubican</i>
1. Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja.	1.1 Maneja el material mediante manipulación (B). 1.2 Aparea lados (B). 1.3 Aparea vértices (B/C). 1.4 Representa mentalmente la composición de figuras (B/C). 1.5 Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos (B/C).
2. Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos.	2.1 Compara superficies por percepción visual (B). 2.2 Compara superficies por superposición y/o inclusión (B). 2.3 Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone) (B/C). 2.4 Compara superficies por composición y descomposición (B/C). 2.5 Compara superficies por la medición y utilización de una unidad conveniente (B/C). 2.6 Construye superficies por la medición y utilización de una unidad conveniente (B/C). 2.7 Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía (D). 2.8 Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área (D). 2.9 Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área (D).
3. Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento.	3.1 Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado (B). 3.2 Elige una unidad adecuada (C). 3.3 Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada (D). 3.4 Advierte la necesidad de unidades convencionales (D/E). 3.5 Acota el área de una superficie entre valores próximos (E).

Con el fin de dar cuenta del proceso de comprensión del concepto de área llevado a cabo por Cecilia, hemos analizado cada una de las cinco actividades según el orden en el que se impartieron. En el análisis, no solo constatábamos el logro o no de los indicadores, sino que involucró un *interjuego* entre la acción de resolución de problemas y la construcción de significados asociados a los distintos indicadores. Estas consideraciones nos llevaron a realizar el análisis de cada actividad en dos fases: la primera, se focaliza en el análisis del logro de los indicadores involucrados en ellas, y la segunda, en la elaboración del *gráfico de comprensión* para representar cómo se produce ese proceso.

Primera fase: Con el fin de acometer esta primera fase, construimos el instrumento de análisis 2, en formato tabla, que presenta las actividades de la secuencia de enseñanza (primera columna), su finalidad educativa (segunda columna) y su relación con los indicadores del concepto de área que aborda, así como las capas y los anillos de comprensión donde estos se ubican (tercera columna). Con el fin de no duplicar información y facilitar la lectura de este trabajo, hemos decidido presentar este instrumento desglosado en el apartado de análisis, precediendo al análisis de cada actividad. Así, las tablas 2.1 a 2.5 constituyen este instrumento, las cuales han sido completadas con una segunda fila, donde incluimos la producción escrita de Cecilia cuando proceda.

En esta primera fase, realizamos el análisis pormenorizado de cada actividad considerando la producción escrita de Cecilia y el *registro en vídeo de la secuencia* correspondiente a cada actividad. Siguiendo el proceso de resolución de Cecilia, vamos interpretando el logro de cada indicador involucrado

aportando las unidades de información que lo respaldan, así como el dominio de la comprensión de las características asignadas a una capa en particular. Cuando existe, destacamos en negrita el proceso de *folding back*.

Segunda fase: En esta segunda fase, realizamos una representación gráfica del análisis del proceso de comprensión de Cecilia correspondiente a cada actividad, elaborando un *gráfico de comprensión* (figura 2) después de cada análisis que permite visualizar su proceso de comprensión. Hemos modificado el formato de la figura 1, asignando las capas y los anillos a regiones rectangulares, que comparten el lado del margen izquierdo señalado con mayor grosor, respetando las mismas propiedades del modelo de Pirie y Kieren (1994, 1999). Es decir, el rectángulo que representa la capa A está incluido en el de la capa B, este está incluido en el rectángulo del anillo B/C, y así sucesivamente.

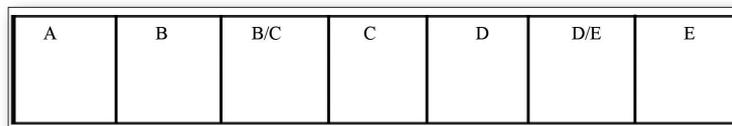


Fig. 2. Formato de *gráfico de comprensión* utilizado en la segunda fase de análisis.

Ubicamos el código de cada indicador movilizado por Cecilia en la capa o anillo correspondiente, según el instrumento de análisis 1 (tabla 1), precedido por uno de los siguientes iconos que expresan el logro de cada indicador: ● lo logra; □ algunas veces lo logra; ♦ carece de información; y ♣ no lo logra (este último no aparece en las actividades seleccionadas). A continuación, unimos cada código mediante una línea poligonal orientada, que advierte de la secuenciación de los indicadores involucrados, y la denominamos *trayectoria de comprensión*, según observamos en el *gráfico de comprensión* de Cecilia asociado a cada actividad.

En la trayectoria, distinguimos en trazo grueso cuándo se produce un *folding back*, que revela que el retroceso a un indicador asociado a un anillo o capa interior sirve a la niña de sustento para avanzar y comprender indicadores ubicados en la misma capa o en otra exterior, destacando tanto el indicador hacia el que retrocede, como el que intenta lograr.

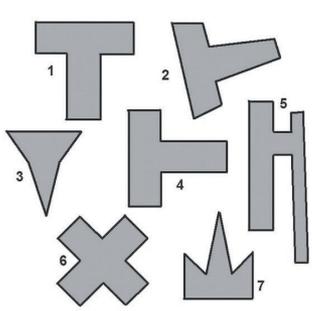
Con el fin de visualizar el proceso a través del cual Cecilia va construyendo su comprensión del concepto de área al resolver la secuencia, integramos los *gráficos de comprensión* de cada actividad en un único gráfico, denominado *gráfico de comprensión global de Cecilia* en relación con el concepto área. Este gráfico nos permite realizar una interpretación global de todo el proceso, extrayendo características relevantes del proceso de comprensión e identificando regularidades e indicadores que parecen haber desempeñado papeles especiales.

EL PROCESO DE CRECIMIENTO DE COMPRENSIÓN DE CECILIA RESPECTO DEL CONCEPTO DE ÁREA

Análisis del proceso de comprensión de Cecilia por actividad

Tabla 2.1.

Instrumento de análisis 2 correspondiente a la actividad 1. Incluye la producción escrita de Cecilia

<p><i>Actividad 1</i></p> <p>1. Sobre una hoja blanca se dibujaron los diseños de los escudos para un club, que serán hechos con tela de color. ¿Para cuál de todos se necesita la menor cantidad de tela?</p> 	<p><i>Finalidad</i></p> <p>Se pretende que comparen superficies. Si la diferencia de tamaño es notable, el procedimiento será la percepción visual; si no, se producirá a través de superposición, o utilizando una figura intermedia que funcione como unidad y facilite la relación de cada escudo con ella.</p> <p>Algunos compararán entre dos escudos y otros, por transitividad, podrán establecer relaciones entre todos.</p>	<p><i>Indicadores capas o anillos</i></p> <p>2.1. B 2.2. B 2.3. B/C 2.4. B/C 2.7. D 2.8. D 2.9. D 3.1. C</p>
<p><i>El menor es el 3</i></p> <p>$1=4=6$ <i>tienen sus áreas equivalentes</i></p> <p>5, 2, 7 <i>no son equivalentes</i></p> <p>$3 > 6$ $3 < 6$ $3 < 1$ $3 < 2$ $3 < 4$ $3 < 7$ $3 < 5$</p>		

Cecilia responde directamente «la 3», es decir, identifica el diseño por percepción visual (2.1), ubicándose en *Producción de una imagen*. Cuando la maestra le pregunta «¿Cómo lo hicieron?», Cecilia comienza a tomar la longitud de los lados con la intención de sumarlos: «Voy a tomar la medida de los lados y luego los sumo y al sumar todos los lados estamos hallando lo que pide de la figura». Supone que puede comparar superficies a través de la noción de perímetro, denotando confusión con la noción de área. Cuando la maestra sugiere no dar respuesta numérica, Cecilia considera un aspecto geométrico para comparar, descomponiendo las piezas en distintas formas (2.3), situándose en *producción-poseción de una imagen* y se desplaza a *percepción de propiedades*, pues supone que dos de las figuras obtenidas son de igual área (2.7): «los escudos 1 y 6 son iguales en medida». Las explicaciones no intencionales que brinda Mirta cuando compara los diseños 3 y 5 (a través de romper y recomponer: «Corto esto y lo pongo aquí, es decir, relleno lo que falta y luego observo que esta parte sobra, entonces considero que el diseño 5 (la H) necesita más tela que el diseño 3») reafirman la idea de Cecilia y provocan un *folding back*: al identificar más de dos superficies de igual área, se ve obligada a retroceder en su proceso

de comprensión a un anillo interior: *producción-poseción de una imagen* para comparar cada una de las superficies a través de la composición y descomposición (2.4), y, a partir de ahí, avanzar nuevamente a *percepción de propiedades*. En esta capa identifica más de dos escudos de igual o distinta forma y de igual área (2.9) (manifiesta: «los diseños 1, 4 y 6 son iguales en medida») y su producción cuando escribe «1 = 4 = 6 tienen sus áreas equivalentes») y, por tanto, es capaz de identificar por parejas (2.8) (diseños 1 y 4 o 4 y 6).

Las intervenciones de sus compañeras, al comparar los distintos diseños, permitieron a Cecilia avances significativos en su proceso de comprensión. Asimismo, no detectamos intervenciones que permitan suponer que haya comparado diseños a través de la inclusión o superposición (2.2) en *producción de una imagen* (figura 3).

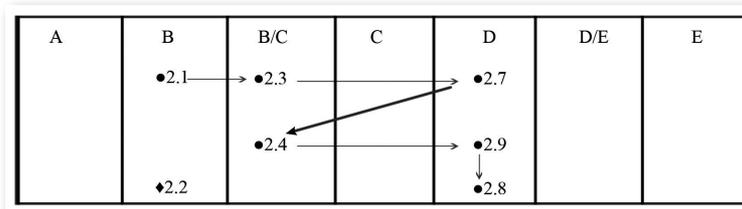
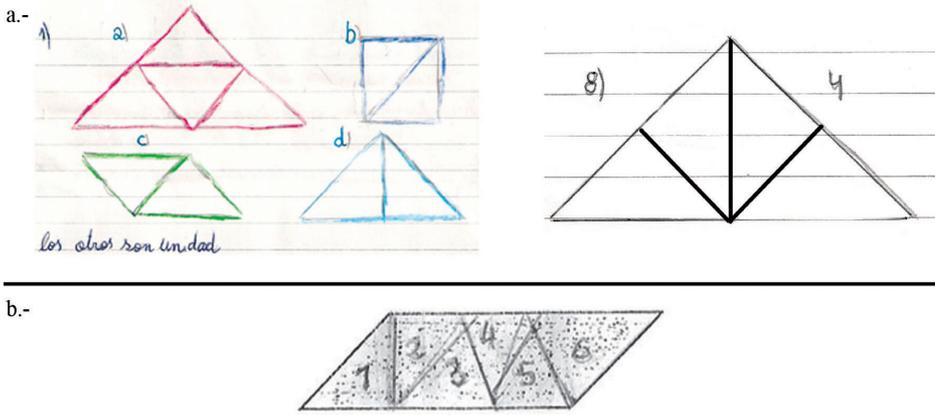


Fig. 3. Gráfico de comprensión de la actividad 1.

Tabla 2.2.

Instrumento de análisis 2 correspondiente a la actividad 2. Incluye la producción escrita de Cecilia

Actividad 2	Finalidad	Indicadores Capas o anillos
<p>a) Toma como unidad el área, la pieza (triángulo chico):</p> <ul style="list-style-type: none"> - ¿Cuál es el área de las demás piezas? - ¿Cuáles de ellas son equivalentes? - Construye una figura que tenga 4 unidades. <p>b) Detecta la unidad de medida en el siguiente paralelogramo, de modo que tenga 6 unidades.</p> 	<p>Se pretende que:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Lleguen al área de distintas superficies utilizando otra, que denominamos unidad. - Detecten la unidad de medida de superficies de área prevista. - Identifiquen formas equivalentes y dibujen una forma considerando una medida establecida. 	<ul style="list-style-type: none"> 1.1. B 1.2. B 1.4. B/C 2.3. B/C 2.4. B/C 2.5. B/C 2.6. B/C 2.7. D 2.8. D 2.9. D 3.1. B 3.2. C 3.4. D/E
 <p>los otros son unidad</p>		

Debido a la extensión de la actividad y a su relevancia para comprender el proceso de comprensión de Cecilia, hemos decidido organizar su análisis según los ítems: *a* y *b*.

- a*) Cecilia, Patricia y Mirta manejan el material libremente (1.1). Dibujan las piezas, excepto el triángulo chico, posicionándose en *producción de una imagen*. Mirta efectúa el cubrimiento de estas con el triángulo chico: «si lo pones así, te va dando cuantos entran... cuatro triángulos. En el triángulo grande entran 4 triángulos chicos y en el más chico va a entrar 1 pues es la unidad», consideraciones que llevan a Cecilia a representar mentalmente el paralelogramo como composición de dos triángulos (1.4) avanzando a *producción-posesión de una imagen*. Estas interpretaciones compartidas producen un *folding back* no intencional en Cecilia, pues pavimenta con el triángulo las otras figuras (3.1), retrocediendo a la capa interior *producción de una imagen* para avanzar en el proceso midiendo las otras figuras en función del triángulo chico como unidad (2.5), posicionándose en *producción-posesión de una imagen*.

Constata que el cuadrado, el paralelogramo y el triángulo mediano son equivalentes (2.9) según su producción escrita, que codifica con 1, y cuando expresa: «el cuadrado es equivalente al paralelogramo y también al triángulo mediano porque hay 2 triángulos en cada uno», avanzando así a *percepción de propiedades*.

Con respecto a armar una figura de cuatro unidades, Cecilia arma figuras de 4 piezas (2.6), el retroceso ocurre por la consigna solicitada y no por el proceso que desarrolla la niña retrocediendo a *producción-posesión de una imagen*. Cuando la maestra solicita aclaración, Patricia responde: «Tienen que tener 4 triángulos chicos, no 4 piezas». Las relaciones que propone la maestra entre algunas piezas del Tangram («el triángulo mediano, ¿cuántos triángulos chicos tiene?») producen *folding back* intencional en Cecilia, lo que la lleva a aparear las figuras por sus lados (1.2), retrocediendo a la capa interior *producción de una imagen*, con intención de utilizar las mismas piezas, pero disponiéndolas en distinta dirección (2.3), consideración que facilita el avance a *producción-posesión de una imagen*, según podemos apreciar en su producción escrita que especifica 8. Estos aspectos del proceso llevan a la niña a construir las figuras solicitadas según el triángulo chico, utilizándolo como unidad.

Cecilia denota una apertura a las sugerencias de sus compañeras, pues las intervenciones producidas fueron insumos para el proceso de todas.

- b*) Cecilia trata de subdividir la figura pero no lo logra. Su compañera Mirta pasa al pizarrón a solicitud de la maestra y dibuja el cubrimiento según lo solicitado.

El procedimiento permite que Cecilia subdivida la figura según la unidad considerada (3.2), ubicándose en *posesión de una imagen*. La presentación de Mirta produce *folding back* intencional en Cecilia, aunque con resultados parciales: en su producción escrita (b.-) y en función de las piezas del Tangram observamos que, al seleccionar la unidad, intenta realizar el cubrimiento de la superficie a medir (3.1), lo que supone un retroceso a *producción de una imagen*. Sin embargo, no logra totalmente identificar la unidad como unidad convencional (3.4.), avanzando parcialmente a *percepción de propiedades-formalización*, pues la niña subdivide según el triángulo rectángulo solamente los numerados como 1 y 2, pero los otros 4 triángulos no son rectángulos ni congruentes (figura 4).

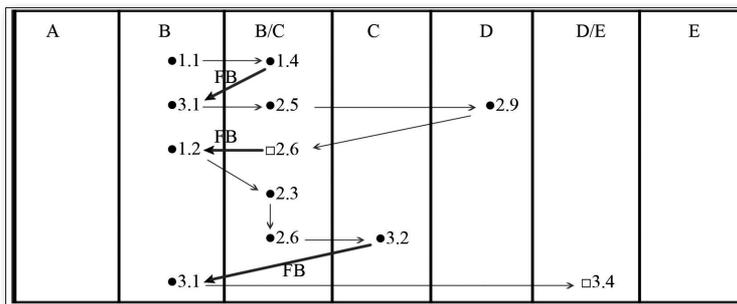
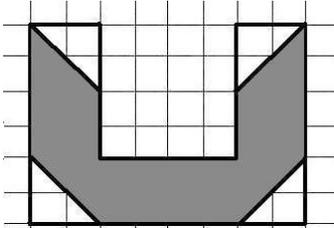


Fig. 4. Gráfico de comprensión de la actividad 2.

Tabla 2.3.
Instrumento de análisis 2 correspondiente a la actividad 3

Actividad 3	Finalidad	Indicadores capas o anillos
<p>Determina el área de la figura sombreada:</p> <p>a) utiliza triángulo como unidad;</p> <p>b) utiliza cuadrado como unidad;</p> <p>c) utiliza rectángulo como unidad.</p> <p>¿Qué puedes decir acerca de los resultados obtenidos?</p> 	<p>Se pretende que interactúen con distintas unidades de medida, establezcan relaciones entre ellas y descubran la dependencia con el valor del área.</p>	<p>1.4. B/C</p> <p>3.1. B</p> <p>3.2. C</p> <p>3.3. D</p> <p>3.4. D/E</p>

Cecilia reconoce cómo realizar el cubrimiento para medir la superficie y observa que existen 5 (rectángulos) sobre la superficie sombreada (3.2), ubicándose en *posesión de una imagen*. Sin embargo, refuta la relación, pues el resultado lo expresa en función del rectángulo que considera como unidad de medida y recién cuando la maestra interpela a Mirta el resultado (*hay 12 triángulos*) y comienza a contar según las unidades solicitadas, Cecilia reconoce su equivocación. Revisa la unidad y representa mentalmente la composición de las distintas figuras propuestas (1.4), retrocediendo en su proceso de comprensión a *producción-posesión de una imagen*. Continúa retrocediendo a *producción de una imagen*, para realizar el cubrimiento y contar (3.1) cada una de las unidades de medida solicitadas (3.2), avanzando en dicho cubrimiento a *posesión de una imagen* hasta llegar al resultado.

Observamos dos retrocesos de distinta índole en el proceso de comprensión de Cecilia. El primero se produce a través de un *folding back*, intencional por parte de la maestra y no intencional por parte de Mirta, mientras que el segundo ocurre por el propio enunciado de la actividad.

Cuando la maestra institucionaliza la dependencia entre la cantidad, la unidad de medida y la relación que las vincula, Cecilia avanza a *percepción de propiedades*, considera la unidad de medida con la que mide (3.3) (concluyen: «tengo que saber con la unidad con que mido») y continúa a *percepción de propiedades-formalización*, pues advierte la importancia de considerar unidades convencionales a la hora de pretender establecer relaciones entre ellos (3.4) (figura 5).

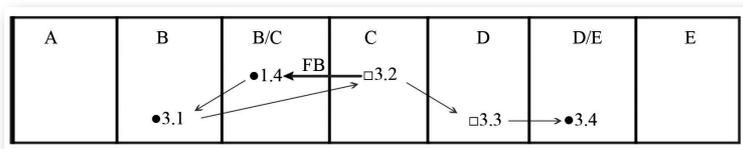


Fig. 5. Gráfico de comprensión de la actividad 3.

Tabla 2.4.
Instrumento de análisis 2 correspondiente a la actividad 4

Actividad 4	Finalidad	Indicadores capas o anillos
Resuelve nuevamente la primera actividad utilizando las cuadrículas de acetato y comprueba si la elección a la que arribaste es la apropiada.	Se pretende retomar la primera actividad, desde un tratamiento numérico y arribar al resultado desde la noción de valores aproximados.	1.4. B/C 1.5. B/C 2.3. B/C 2.5. B/C 2.7. D 3.1. B 3.2. C 3.4. D/E

Cecilia utiliza la plantilla para pavimentar los distintos escudos y cuenta los cuadraditos incluidos en cada uno de ellos (3.1), posicionándose en *producción de una imagen*. Por ejemplo, superpone la plantilla en el diseño 1 y pretende que los cuadraditos «entren» completos en el diseño (1.5), con el objeto de su medición (2.5), avanzando a *producción- posesión de una imagen*, y considerando el cuadradito de la plantilla como unidad conveniente (3.2) manifiesta: «el diseño 1 mide 20 y me sobran 2». Se desplaza así a *posesión de una imagen*.

La niña trabaja con su compañera Patricia, que la alienta y le indica que, a través de la composición, puede armar los cuadraditos que no *entran* exactamente. Esta manifestación lleva a Cecilia a un *folding back*, pues representa mentalmente la composición de «las partes incompletas» (1.4), recompone y arma cuadraditos (2.3) («¿Unís los dos de abajo? 21 me da»), retrocediendo a *producción-posesión de una imagen*, y al constatar que el área de la figura considerada no cambia (2.7) avanza a *percepción de propiedades*.

Aunque Cecilia esgrime con argumentos algunas decisiones que pretende tomar, acepta las consideraciones de Patricia, y retrocede en el proceso de comprensión a *producción de una imagen*, pavimentando, según el cuadradito, los restantes escudos a medir y contando dicha unidad (3.1) para avanzar a *percepción de propiedades-formalización*, identificando «el cuadradito» como convencional en el contexto de la actividad (3.4). Aquí, el retroceso es alentado por el proceso de resolución que la actividad induce y no para fortalecer la comprensión (figura 6).

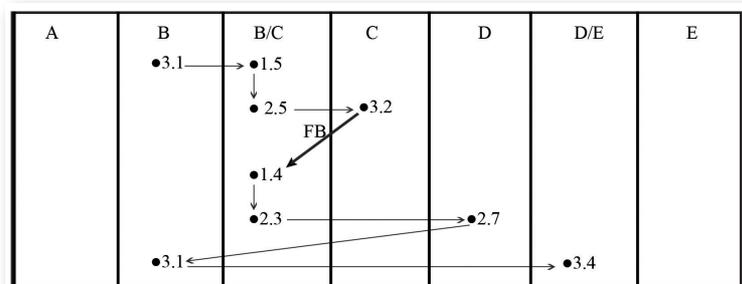
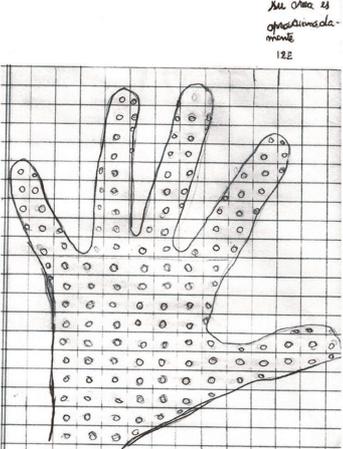


Fig. 6. Gráfico de comprensión de la actividad 4.

Durante la puesta en común, los niños validaron los procedimientos. Los resultados a los que arribaron instaron a la maestra a explicar el concepto de acotar el área de una superficie entre valores próximos y proponer la siguiente actividad para culminar con la secuencia.

Tabla 2.5.

Instrumento de análisis 2 correspondiente a la actividad 5. Incluye la producción escrita de Cecilia

<i>Actividad 5</i>	<i>Finalidad</i>	<i>Indicadores capas o anillos</i>
<i>Dibuja la palma de tu mano sobre la hoja y carpeta y calcula el área aproximada de la superficie que ocupa.</i>	Se propone el cálculo del área de una superficie irregular a fin de comprobar los procedimientos que utilizan. Asimismo, puedan verbalizar la aproximación del resultado con expresiones como: «más de», «alrededor de», «aproximadamente».	1.4. B/C 2.3. B/C 2.7. D 3.1. B 3.2. C 3.4. D/E 3.5. E
		

Observamos en la producción escrita que Cecilia cuadrícula la superficie irregular y adiciona repetidamente el cuadradito (3.1) posicionándose en *producción de una imagen*. Este procedimiento puede deberse a que en la actividad anterior se sugiere una cuadrícula de acetato para medir. Después utiliza partes de dicha superficie para obtener la unidad (2.3), en un avance de ese proceso a *producción-posesión de una imagen*. Al seleccionar el cuadradito como unidad (3.2) continúa el desarrollo de la actividad a *posesión de una imagen*. Además, considera dicha unidad como convencional (3.4), posicionándose en *percepción de propiedades-formalización*.

Este proceso señala un progreso respecto de la actividad 2b puesto que, para lograr el resultado antes señalado, en esa oportunidad, tuvo que retroceder a pavimentar la superficie y contar el número de unidades (3.1).

Arriba al resultado y estima el número total de dichos cuadrados: «su área es aproximadamente 122» (3.5), avanzando a la *formalización* (figura 7).

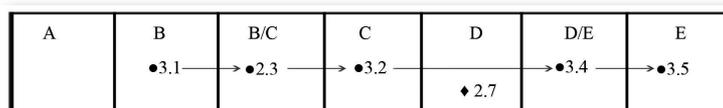


Fig. 7. Gráfico de comprensión de la actividad 5.

Así, la niña partió desde *producción de la imagen*, al cubrir el dibujo de la mano con cuadrados o parte de ellos para efectuar su sumatoria, hasta *formalización*, pudiendo acotar el valor e interpretar el concepto de área como herramienta que responde al requerimiento de la actividad.

Análisis global del proceso

Para comprender el proceso de construcción del concepto de área a través de las actividades, elaboramos un *gráfico de comprensión global* (figura 8) con la información que brindan los gráficos asociados a cada actividad y nos centramos en los procesos de *folding back* que favorecieron la comprensión del concepto.

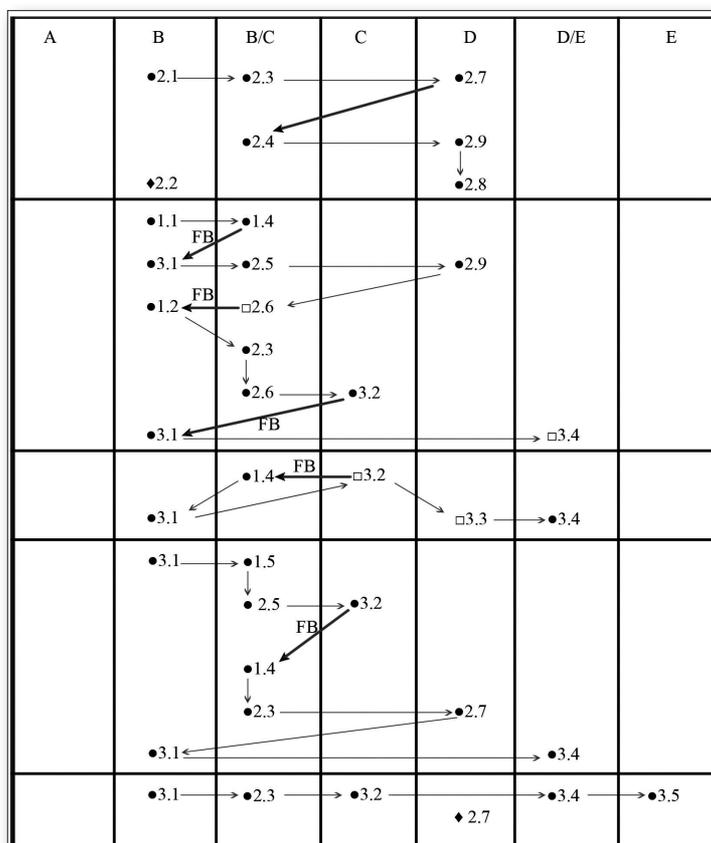


Fig. 8. Gráfico de comprensión global.

Según este gráfico, los indicadores implicados en los procesos de *folding back* parecen jugar papeles diferentes en la evolución de la comprensión.

Detectamos indicadores que originaron dicho proceso, fundamentalmente en el momento de *elegir una unidad adecuada* (3.2), por ejemplo, cuando la niña retrocede a darle un nuevo significado a la noción de dividir y pavimentar la superficie a medir (3.1) para lograr advertir unidades convencionales (3.4). O bien, cuando retrocede a representar mentalmente la composición de figuras (1.4) en vista a comprender mejor la elección de la unidad (3.2) o reconocer que si una figura se descompone en otra con otra forma su área no varía (2.7). El mismo comportamiento observamos con los indicadores: *representa mentalmente la composición de figuras* (1.4), *construye superficies por medición según una unidad conveniente* (2.6) y *reconoce que una figura se recompone con otra forma, su área no varía* (2.7).

Estos indicadores, en cursiva, los denominamos generadores de *folding back* y se encuentran asociados a las capas *producción-poseción de una imagen* (B/C), *poseción de una imagen* (C) y *percepción de propiedades* (D).

Otros indicadores han jugado un papel decisivo como sustento para avanzar en la construcción del concepto, pues cuando Cecilia elige una unidad conveniente (3.2) retrocede en dos ocasiones a *representar mentalmente la composición de figuras* (1.4) para abordar con un mayor nivel de comprensión la elección de una unidad adecuada (3.2) y reconocer que la recomposición de una figura en otra, de distinta forma, lleva a que ambas resulten equivalentes (2.7).

Otro ejemplo lo encontramos cuando representa mentalmente la composición de figuras (1.4) o elige una unidad adecuada (3.2), pues retrocede para darle un nuevo significado a la noción de *dividir y pavimentar la superficie a medir contando el número de unidades empleado* (3.1) para lograr comparar superficies por medición (2.5) o advertir unidades convencionales (3.4).

Asimismo, al construir figuras de una medida estipulada y según una unidad conveniente (2.6), retrocede a *aparear las mismas por sus lados* (1.2) para recomponer figuras en distinta forma (2.3), o bien, al reconocer figuras equivalentes (2.7), retrocede a *comparar superficies por composición-descomposición* (2.4), para identificar la equivalencia de varias de ellas (2.9).

Estos indicadores a los que retrocede Cecilia en el proceso, señalados en cursiva, los denominamos «impulsores de comprensión» y los asociamos a la capa *producción de una imagen* (B) y al anillo *producción-poseción de una imagen* (B/C).

Podríamos manifestar que, para Cecilia, *aparear figuras por sus lados* (1.2), *representar mentalmente la composición de figuras* (1.4), *realizar cubrimiento con ellas para medir* (3.1) y *comparar estas por composición-descomposición* (2.4) son importantes para avanzar en su proceso de comprensión. Indicadores que podrían ser considerados fundamentales a la hora de incursionar en la construcción del concepto.

Por último, hemos identificado un conjunto de indicadores que, por su complejidad, han supuesto para Cecilia un esfuerzo adicional para su logro. A saber: *recomponer piezas en distintas formas* (2.3), *reconocer figuras equivalentes por descomposición-recomposición* (2.7), *identificar tres o más superficies equivalentes* (2.9), *seleccionar la unidad adecuada* (3.2) y *advertir la necesidad de unidades convencionales* (3.4).

Dichos indicadores, los designamos *derivados*, dado que obligan a la niña a revisar la comprensión que poseía de cuestiones ya sabidas. Estos indicadores derivados están ubicados en las siguientes capas y anillos: *producción-poseción de una imagen* (B/C), *poseción de una imagen* (C), *percepción de propiedades* (D) y *percepción de propiedades-formalización* (D/E).

Esquemizamos lo indicado en la siguiente tabla.

Tabla 3.
Tipos de indicadores organizados por actividad

Actividad	Indicador y capa		
	Generadores	Impulsores	Derivados
	Ubicado en	Retrocedemos a	Para avanzar a
1	ind 2.7 Capa D	ind 2.4 Anillo B/C	ind 2.9 Capa D
2.a	ind 1.4 Anillo B/C	ind 3.1 Capa B	ind 2.5 Anillo B/C
2.a	ind 2.6 Anillo B/C	ind 1.2 Capa B	ind 2.3 Anillo B/C
2.b	ind 3.2 Capa C	ind 3.1 Capa B	ind 3.4 Capa D/E

Actividad	Indicador y capa		
	Generadores	Impulsores	Derivados
	Ubicado en	Retrocedemos a	Para avanzar a
3	Ind 3.2 Capa C	ind 1.4 Anillo B/C	ind 3.2 Capa C
4	ind 3.2 Capa C	ind 1.4 Anillo B/C	ind 2.7 Capa D

En otro momento, el proceso global de comprensión de la niña alrededor del concepto nos lleva a destacar algunas cuestiones que emergen del análisis de la última actividad respecto de estos indicadores especiales. Por ejemplo, en dicha actividad, el análisis comienza con el abordaje del indicador 3.1 (dividir y pavimentar las superficies a medir contando el número de unidades empleado), que para la niña ha funcionado como indicador *impulsor*, pues le facilitó avanzar en el proceso. También observamos en él que cuando la niña recompone piezas en distintas formas (2.3), para seleccionar una figura que funciona como unidad (3.2), señala la necesidad de uso de una convencional (3.4). Estos indicadores, que durante la resolución de la secuencia operaron como indicadores *derivados*, los explicita directamente para resolverla.

Así, del uso de algunos de los indicadores especiales definidos (3.1, 3.2 y 3.4), Cecilia logra acotar de manera aproximada el valor del área de una superficie irregular (3.5) y de ese modo alcanzar la capa *formalización*.

En general, los *folding back* detectados posibilitaron el crecimiento de la comprensión en Cecilia. Fueron inducidos por la maestra y/o sus compañeras Mirta o Patricia, por lo que podemos destacar que el diálogo determinó las acciones de dicha comprensión matemática, poniendo en evidencia que la comprensión de nociones matemáticas es un proceso individual sujeto a condiciones del entorno (como sucede en Codes *et al.* [2013] en el caso de la serie numérica).

REFLEXIONES FINALES

La resolución de los problemas le proporcionó a Cecilia un desafío, pues existieron momentos en que quedó atascada, tomó conciencia de sus limitaciones y, gracias a la intervención de la maestra y/o de sus compañeras, retrocedió en su proceso de comprensión a una capa interior según el modelo de Pirie y Kieren (1994, 1999), con la intención de revisar los conocimientos e ideas existentes acerca del concepto que se ha de construir, o bien de reconocer dónde estaba el error, para avanzar en una comprensión más profunda, adoptando nuevos procedimientos en la resolución del problema. De esta forma, el *folding back* se mostró eficaz para promover el crecimiento en la comprensión del concepto en la niña.

El *folding back* nos permitió detectar, para esta niña en particular, indicadores especiales (*generadores*, *impulsores* y *derivados*) y el papel que estos desempeñaron en el proceso. Es decir, no solo promovió la comprensión de un concepto en la niña, sino que evidenció los diferentes papeles que tienen los indicadores involucrados en dicha construcción. Hemos manifestado que este estudio corresponde a otro más extenso (García-Amadeo, 2013) donde hemos puesto de relieve que, al tratarse de un proceso natural, el *folding back* es diferente en otros niños. Por ejemplo, en Patricia, que contaba con conocimientos primitivos significativos y un compromiso manifiesto con la resolución de las actividades, el *folding back* le permitió avanzar hacia procedimientos más formales desde una perspectiva matemática. En cambio, en Mirta, sus conocimientos primitivos le resultaban insuficientes, por lo que la adopción de un nuevo procedimiento matemático, viabilizado por el *folding back*, no le supuso necesariamente la resolución correcta del problema.

Sin embargo, podríamos aventurarnos a manifestar que los indicadores especiales, fundamentalmente los *impulsores* y los *derivados* que hemos detectado, podrían ser considerados medulares a la hora de incursionar en la construcción del concepto.

A través de estas consideraciones intentamos demostrar que el *folding back* resultó una herramienta de acción significativa para comprender cómo evolucionó el proceso de comprensión del concepto de área en una niña en particular.

La detección de indicadores especiales asociados a la construcción de conceptos matemáticos podría ser objeto de atención de futuros estudios, pues podrían ser elementos relevantes para la formación inicial y continua de profesores de Educación Primaria, con el fin de otorgar sentido a su enseñanza y recapacitar acerca de sus propuestas de acción.

En otro nivel de enseñanza los niños podrán acceder a las siguientes capas del modelo, que para este trabajo hemos descartado, y proveer la necesaria estructura axiomática con vistas a completar la comprensión del concepto y dejar al alumno la libertad de alterar y continuar construyendo este.

REFERENCIAS

- ARCAVI, A., & FRIEDLANDER, A. (2007). Curriculum developers and problem solving the case of Israeli elementary school projects. *ZDM*, 39(5), 355-364.
<https://doi.org/10.1007/s11858-007-0050-3>.
- BASSEY, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham, Open University Press.
- BONOTTO, C. (2003). About students' understanding and learning of the concept of surface area. En D. H. Clements & G. Bright (eds.), *Learning and teaching measurement: 2003 yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (157-167). Reston, V.A., NCTM.
- CHAMORRO, M. (2001). Las dificultades en la enseñanza aprendizaje de las magnitudes en Educación Primaria y E.S.O. En E. Fernández (coord.), *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas* (81-124). Madrid, MEC.
- CODES, M., DELGADO, M. L., GONZÁLEZ, M. T., & MONTERRUBIO, M. C. (2013). Comprensión del concepto de serie numérica a través del modelo de Pirie y Kieren. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(3), 135-154.
<https://doi.org/10.5565/rev/ec/v31n3.963>.
- COLÁS, M. P., & BUENDÍA, L. (1998). *Investigación educativa*. Sevilla, Alfar.
- DEL OLMO, M., MORENO, M. F., & GIL, F. (1993). *Superficie y volumen ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid, Síntesis.
- DICKSON, L., BROWN, M., & GIBSON, O. (1991). *El Aprendizaje de las Matemáticas*. Barcelona, Labor /MEC.
- DOUADY, R., & PERRIN, M. J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, 20(4), 387-424.
<https://doi.org/10.1007/bf00315608>.
- GARCÍA-AMADEO, G. (2013). *La construcción del concepto de área a través de la resolución de problemas: las interacciones y el análisis cognitivo*, tesis doctoral inédita. Huelva, Universidad de Huelva. <http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/7517>.
- KAMII, C., & KYSH, J. (2006). The difficulty of «length x width»: Is a square the unit of measurement? *Journal of Mathematical Behavior*, 25(2), 105-115.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.02.001>.
- KVALE, S. (1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing*. Thousand Oaks, CA, Sage Publications.

- LEHRER, R., JASLOW L., & CURTIS, C. (2003). Developing an understanding of measurement in the elementary grades. En D. H. Clements y G. Bright (eds.), *Learning Teaching Measurement* (100-121). Reston, V.A., NCTM.
- MARTIN, L. (2008). Folding back and the dynamical growth of mathematical understanding: Elaborating the Pirie-Kieren Theory. *The journal of Mathematical Behavior*, 27(1), 64-85.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2008.04.001>.
- OUTHRED, L., & MITCHELMORE, C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 144-167.
<https://doi.org/10.2307/749749>.
- PIRIE, S., & KIEREN, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 25(2-3), 165-190.
https://doi.org/10.1007/978-94-017-2057-1_3.
- PIRIE, S., KIEREN, T., & GORDON, C. (1999). Growing minds, growing mathematical understanding: Mathematical understanding, abstraction and interaction. En L. Burton (ed.), *Learning Mathematics. From Hierarchies to Networks* (209-231). Londres, Falmer Press.
- RICO, L., & SEGOVIA, I. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (83-104). Madrid, Síntesis.
- SANTOS TRIGO, L. (2008). La resolución de problemas matemáticos: Avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho & L. Blanco (eds.), *Investigación en educación Matemática XII* (157-187). Badajoz, SEIEM.
- STAKE, R. (2007). *Investigación con estudio de caso*. Madrid, Morata.
- VERGNAUD, G. (1996). The theory of conceptual fields. En L. P. Steffe (ed.), *Theories of mathematical learning* (219- 238). Mahwah, N.J., LEA.
- ZACHAROS, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(3), 224-239.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.003>.

The role of folding back in the process of understanding the concept of area: A case study

Graciela B. García-Amadeo

Instituto Superior de Formación Docente y Técnica N.º 25, Buenos Aires, Argentina
edugra@rnonline.com.ar

M. Cinta Muñoz-Catalán

Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla, Sevilla, España
mcmunozcatalan@us.es

José Carrillo

Didácticas Integradas, Universidad de Huelva, Huelva, España
carrillo@ddcc.uhu.es

This article is part of a larger study (García-Amadeo, 2013) in which the process of understanding the concept of area displayed by three fifth-year primary school girls is characterized, in the context of a teaching unit whose methodological strategy is consistent with problem solving. In this article we want to identify the meanings that one of the girls, Cecilia, assigns to the concept of area, in interaction with her classmates and with the teacher, as well as to identify the role of folding back (Martin, 2008) in that process.

We approach the construction of a concept in the school context from the notion of conceptual field (Vergnaud, 1996), which includes not only the definition of the concept, but the set of situations that this solves and gives meaning to. Looking at the concept of area from a learning perspective, we focus on: the recognition of the simple shapes that compose a plane surface; the perception of the area of plane surfaces as a quality that facilitates their comparison, mainly the equivalence; the conceptualization of area as a measure of covering, and, finally, the limits of the result between close values, since an early use of formulas, using linear measures, makes the process of measuring difficult. We consider the different relations between contents too.

The model of Pirie and Kieren (1994, 1999) is a core theoretical tool that allows us to observe and describe the growth process in the understanding of a mathematical concept at the school, simultaneously considering the specific actions that the subject develops and the more general conceptualization that is being built. This process is represented through a succession of layers of ellipsoidal shape arranged concentrically and joined by a point in the left margin. When the subject finds it difficult to solve an activity, he may go back to an inner layer in order to advance with a deeper understanding towards the same layer or another layer outside it. This process is called folding back (Pirie & Kieren, 1994; Martin, 2008).

We approach this study with an interpretive paradigm and through a case study design, in the sense that it is a «study of a singularity conducted in depth in natural environments» (Bassegy, 1999: 47). Cecilia presents a positive attitude towards mathematics, is respectful with unit instructions, and provides effective examples to understand the role of folding back in the process of understanding the concept of area.

We collect information during the implementation of the teaching unit in its natural environment. We assume the complex nature of the construction of a mathematical concept and the limitations to document what children do in interaction with themselves, their peers and the teacher. For collecting data we use: the video recording of the teaching unit –to observe the work of the girl as a group–, and the written production to give account of her individual work. Through the design of specific analysis instruments that relate the categories and indicators of the concept of area with the layers of the understanding of the model, we analyze the data in detail while highlighting the evolution of Cecilia's construction process of the concept of area through problem solving. In this process, we underline folding back as a powerful tool for promoting the dynamics of action in the growth of Cecilia's understanding, distinguishing indicators –*generators*, *drivers* and *derivative*– that seem to play different roles in the evolution of this process.