ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 36.1 (2018): 99-115
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2277
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática

Math modeling knowledge from reflection in math teachers initial training

Jaime Huincahue[1]
Vicerrectoría de Investigación y Postgrado, Universidad Católica del Maule, Talca, Chile.
jhuincahue@ucm.cl

Rita Borromeo-Ferri
Instituto de Matemática, Universidad de Kassel, Kassel, Alemania.
borromeo@mathematik.uni-kassel.de

Jaime Mena-Lorca[2]
Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.
jaime.mena@pucv.cl

RESUMEN • La introducción de la modelación matemática en el currículo de enseñanza media chileno, hace ya una decena de años, ha relevado la necesidad de estudios relativos a las prácticas de su enseñanza en la formación inicial de profesores en el país. Este trabajo presenta los resultados de una investigación que utiliza el marco conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés) para analizar los conocimientos y la reflexión sobre modelación puestos en juego por estudiantes en formación inicial durante un ciclo de 14 sesiones de 90 minutos cada una. Los resultados muestran un progreso en el conocimiento matemático y en el conocimiento pedagógico del contenido. El trabajo discute posibles maneras de establecer modelos de enseñanza de la modelación y un momento propicio para hacer uso de una propuesta sobre la materia.

PALABRAS CLAVE: modelación matemática; formación inicial de profesores de matemática; modelo de enseñanza de la modelación; reflexión; conocimiento del profesor de matemáticas en formación.

ABSTRACT • The introduction of mathematical modelling in the Chilean secondary education curriculum, some ten years ago, has highlighted the need for studies concerning the teaching practices on modelling in the initial training of teachers in the country. This paper presents the results of a research that uses the theoretical frame for the understanding of the Mathematics Teacher Specialized Knowledge, MTSK, to analyze the knowledge and reflection about modelling put into play by trainee teachers during a cycle of 14 sessions of 90 minutes each. The results show a progress in the mathematical knowledge and in the pedagogical content knowledge. The paper discusses possible ways to establish models for the teaching of modelling and anappropriate moment to use a proposal on the subject.

KEYWORDS: Mathematical modelling; mathematics initial teacher training; teaching of modeling model; reflection; trainee teachers mathematics knowledge.

Recepción: enero 2017 • Aceptación: enero 2018 • Publicación: marzo 2018

1. Estudios doctorales financiados por CONICYT-PCHA/Doctorado Nacional/2015-21151169.
2. Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Fondo Nacional Desarrollo Científico y Tecnológico FONDECYT 1151093.

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

La modelación matemática y su aprendizaje y enseñanza, en todos los niveles escolares, ha ido adquiriendo cada vez mayor relevancia en los sistemas educativos a nivel internacional.

En el aula, la modelación matemática ha sido considerada de diversas maneras, desde una herramienta didáctica centrada en un objeto matemático, hasta el motor de una construcción social de conocimiento matemático, pero, sin duda, es utilizada para que el aprendizaje se realice a partir de la realidad del estudiante y sea dirigido hacia el conocimiento matemático.

Grupos de investigación que adquieren visibilidad en RELME, ICMI o ICTMA son ejemplos de la comunidad científica que existe en torno a la modelación y/o modelación matemática, la cual ha propuesto concepciones de modelación desde saberes sociales, culturales, cognitivos, matemáticos y didácticos, siendo posicionada como un elemento en uso en las prácticas docentes en todos los niveles escolares. Tal situación genera un trabajo sistémico sobre los estados del saber de modelación matemática.

En el caso del currículo chileno, la modelación ha sido considerada principalmente una habilidad que permite la comprensión del conocimiento y diversas situaciones a las que los estudiantes se ven expuestos (Mineduc, 2016), ligada más bien al «saber hacer» para la integración del conocimiento en situaciones conocidas por el estudiante, en su realidad. El Ministerio de Educación de Chile (Mineduc) recomienda que las estrategias de enseñanza estén centradas en el aprendizaje para el desarrollo de habilidades, lo que releva tal habilidad para el uso de la matemática en un contexto cercano al estudiante. Por tal motivo, la inclusión de la modelación matemática en el currículo tiene un carácter transversal e integrador del conocimiento en todos los niveles escolares, mostrando, aplicando o construyendo conceptos matemáticos; esto pone de relieve, a su vez, la necesidad de incluir esa modelación en la formación inicial docente en matemáticas (FIPM) en Chile.

El currículo, en el nivel donde ejercerán los titulados de la FIPM (jóvenes entre 12 y 18 años), es guiado por los estándares pedagógicos y disciplinares. El Mineduc define los estándares pedagógicos como «los conocimientos, habilidades y actitudes profesionales necesarias para el desarrollo del proceso de enseñanza, que debe poseer un egresado de pedagogía» (2012a: 31). Es decir, son estándares que deben ser alcanzados por todas las escuelas de FIPM del país, sin diferencia disciplinar, generando un trenzado con los estándares disciplinares; tal paradigma produce tensión, ya que, a pesar de la relevancia de la aportación pedagógica, parte importante de la problemática académica del profesor de matemática es de una naturaleza más bien epistemológica, relativa al conocimiento matemático. Ahora bien, los estándares disciplinares asumen dos dimensiones en su caracterización: una centrada en los contenidos matemáticos y otra en el fortalecimiento de las actitudes y habilidades que es posible desarrollar en tales contenidos –argumentar y comunicar, modelar, representar y resolver problemas–. Esto indica que en todos los temas matemáticos y niveles es posible modelar, actividad que el Mineduc entiende como «una habilidad que permite resolver problemas reales mediante la construcción de modelos, que pueden ser físicos, computacionales o simbólicos, y que sirven para poner a prueba el objeto real y ver cómo responde frente a diferentes factores o variantes» (Mineduc, 2016: 41).

La FIPM en Chile dura 9 o 10 semestres, dependiendo de la escuela de formación, e incluye prácticas en colegios en distintos momentos; una vez finalizada, el egresado adquiere un título que certifica la posibilidad del ejercicio de su profesión con estudiantes de séptimo básico a cuarto medio. Actualmente, existe una prueba que se realiza dos semestres antes de la graduación en la Universidad con propósito de diagnóstico, con la intención –a medio plazo– de que sea una prueba vinculante para el ejercicio profesional del profesor de matemáticas en colegios financiados por el Estado.

Tapia (2016) muestra un estado de la modelación en las estructuras curriculares de la FIPM en dos universidades chilenas, y describe que las concepciones de los formadores de profesores varían entre un uso de la modelación en un estatus de aplicación de algún concepto matemático, construcción matemática, como lo es en la práctica del matemático, y una ejemplificación de algún contenido en ambientes extramatemáticos. Esto no significa que los profesores universitarios no modelen, ya que en las entrevistas explicitan que realizan actividades de modelación matemática, pero no existe dentro de la estructura curricular la preocupación por cómo guiar ciertas prácticas de enseñanza vía modelación. Una pregunta natural, entonces, es si acaso tales prácticas serán suficientes en la FIPM para que los estudiantes de esos académicos sean capaces de liderar procesos de modelación en sus futuros alumnos.

Existen ejemplos de la incorporación explícita de la enseñanza de la modelación en la FIPM, siendo referentes entre estas investigaciones aquellas que provienen de escuelas alemanas.

Alemania obtuvo malos resultados en la prueba PISA de 2003, especialmente en la escala final de logro, por lo que el Ministerio de Educación de ese país decidió establecer estándares educacionales en matemáticas en función de la investigación (Haines, Galbraith, Blum y Khan, 2007) y posteriormente implementados al final de la escuela primaria (cuarto grado), final del «Hauptschule» (‘noveno grado’), final de la escuela secundaria normal (décimo grado) y final del *High School* («Gymnasium»).

El diseño de los estándares de educación en matemáticas en Alemania es un modelo pragmático tridimensional, que consiste en seis competencias matemáticas generales, cinco ideas directrices (competencias referidas según un ordenamiento del contenido matemático) y tres ámbitos de exigencia (planteamiento de requerimientos cognitivos) (Blum, Drüke-Noe, Hartung, y Köller, 2015: 23).Una de estas competencias matemáticas generales es modelar matemáticamente, siendo una parte obligatoria en los estándares para todos los profesores de matemáticas en Alemania, como también para el resto del currículo de formación. Así, los profesores de matemáticas tienen que enseñar modelación matemática en la escuela, aunque esto no forma parte obligatoria de su formación en las universidades germanas, pero en su mayoría lo han incorporado en la primera fase de la educación del profesor (universidad), la segunda fase («Refendariat») y/o en la formación del profesor en servicio.

En el currículo alemán existe un examen para graduarse en la Universidad en la formación de profesores. Sin embargo, ese examen no es vinculante para el ejercicio profesional del profesor de matemáticas. Para ello, es necesario realizar prácticas de enseñanza en la escuela durante dos años, en combinación con cursos y seminarios según el modelo universitario, como parte de la FIPM, ya sea en el nivel primario o secundario. Al final de este periodo, es necesario aprobar un segundo examen para ser profesor certificado de matemáticas. De esta forma, en comparación con el sistema chileno, el sistema alemán muestra un tipo de inclusión en el campo laboral, ya que en las primeras experiencias es cuando surgen inquietudes y cuestionamientos, para los cuales, más que ser abordarlos previamente, es requerida la reflexión y conducción en conjunto de pares y expertos para finalizar una primera etapa de formación: la inicial.

Una ruta clara y directa para abordar la problemática de la modelación en la FIPM para Chile es mediante la introducción explícita de la modelación. En esta situación, los profesores de matemática chilenos deben ser capaces de generar prácticas de modelación, manteniendo claridad, por ejemplo, acerca de qué es modelación matemática, cómo abordar situaciones de modelación (resolución y reconocimiento de complejidades al modelar) y cómo se promueve la modelación en un ambiente escolar (crear actividades, conocer qué competencias desarrolla y cómo se evalúan). Para el análisis de tales capacidades esperadas, estudiamos los conocimientos que surgen en una propuesta de curso de modelación, experimentado en dos entornos y momentos distintos de la FIPM, para así caracterizar la planificación del curso en cuanto a los conocimientos y el uso de instrumentos hechos para la experiencia (descritos en la sección 3). Para ello, las preguntas que guiaron nuestra investigación fueron: ¿Cómo evoluciona el conocimiento de la enseñanza de la modelación desde la reflexión de un participante a lo largo de un curso de FIPM?, ¿cómo afecta el momento en que se propone el curso de modelación en la FIPM? De este modo, el objetivo de la investigación es identificar debilidades y fortalezas del curso propuesto, según los objetivos descritos más adelante.

MARCO DE REFERENCIA

Los constructos teóricos utilizados aquí son principalmente tres.

El primero es el conocimiento disciplinar de la modelación matemática, que ha sido usado para la planificación en un curso de FIPM, cimentado en una concepción de modelación matemática en el sentido de Blum (Blum, 2002; Blum y Niss, 1991), profundización del ciclo de Blum desde una visión cognitiva (Borromeo Ferri, 2010), tipificación de tareas desde perspectivas de modelación (Kaiser y Sriraman, 2006) y elementos evaluativos a partir de competencias de modelación (Maaß, 2006). De esta manera, el participante del curso tiene una visión sobre el significado de modelar, descripción cognitiva de las tareas de modelación desde el estudiante y herramientas sobre cómo crear y evaluar las tareas de modelación. El diseño de los elementos teóricos de la experimentación del marco es el modelo de competencias requeridas para la enseñanza de la modelación (Borromeo Ferri, 2014a), aunque con variaciones en la experimentación documentada por Borromeo Ferri y Blum (2010) bajo el contexto chileno.

El segundo es el marco teórico para realizar el análisis de la experimentación, el que tiene lugar en la comprensión del conocimiento especializado del profesor en formación mediante el modelo MTSK (Carrillo, Contreras, Climent, Escudero-Ávila, Flores-Medrano y Montes, 2016; Aguilar *et al.*, 2013), describiendo el conocimiento matemático y pedagógico reflejado en los datos.

Finalmente, el tercero es la reflexión, la cual metodológicamente adquiere relevancia para su identificación en la recopilación de datos; los trabajos de Schön (1987) y Mcduffie (2004) ofrecen una base respecto al significado de una reflexión.

Conocimiento disciplinar de la modelación matemática

Un modelo para la funcionalidad de la propuesta

Los conocimientos anteriormente descritos son enmarcados en el modelo para la enseñanza de la modelación de Borromeo Ferri y Blum (2010) y Borromeo Ferri (2014a) (figura 1). Tal propuesta teórica considera las competencias requeridas por un profesor de matemáticas (Borromeo Ferri, 2010). Se espera del modelo que evidencie una adecuada o efectiva enseñanza de la modelación en la FIPM.

El modelo se muestra en la figura 1, y cada dimensión es descrita en Borromeo Ferri (2014b). Sin embargo, consideramos que es necesaria la contextualización del modelo según donde sea aplicado. En este sentido habría que atender una demanda del sistema educacional chileno, resultando una propuesta desde tal contextualización, que incorpora ciertos conocimientos que son descritos a continuación.

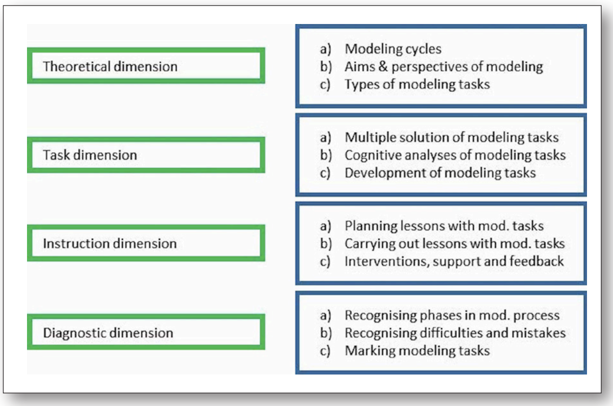

Fig. 1. Modelo para la enseñanza de la modelación matemática (Borromeo Ferri, 2014b).

Modelación matemática

La modelación matemática se entenderá simplificadamente como un proceso de traducción entre el mundo real y las matemáticas, en ambas direcciones (Borromeo Ferri, 2010; Blum, 2015), siendo puesta en uso para la práctica del investigador y profesor como una herramienta didáctica, metodológica o como una fuente de construcción de conocimiento matemático. En este sentido, la modelación matemática es vista como un proceso que epistemológicamente conecta elementos de naturaleza «no matemática» (en el sentido de Pollak, 1979) con el conocimiento matemático, siendo descrito desde lo cognitivo (Borromeo Ferri, 2010) durante el transcurso del ciclo de modelación, como aparece en la figura 2.

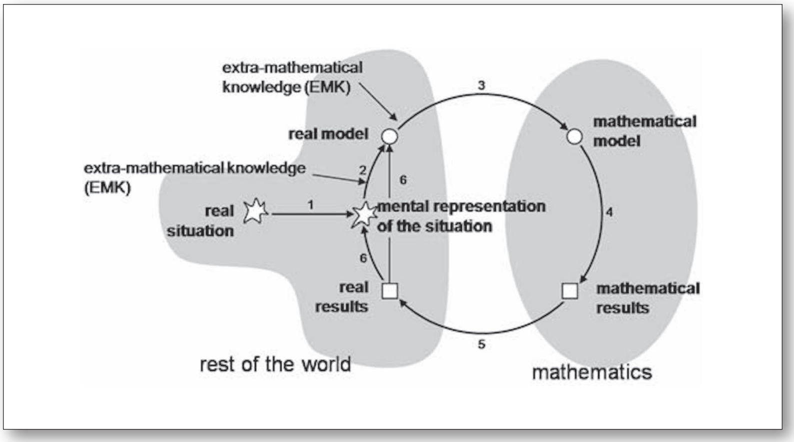

Fig. 2. Ciclo de modelación (Borromeo Ferri, 2010).

El ciclo se inicia con una situación real, la cual puede ser representada por una imagen, un texto o ambos; luego la persona entiende la tarea para crear una representación mental de la situación, para focalizar y filtrar la información de la situación real de manera consciente o no y acorde con sus preferencias de pensamiento. Posteriormente se produce una transición que simplifica e idealiza el problema para llegar a un modelo real, un proceso más consciente e interno por parte de la persona, y, dependiendo del problema, es incluido el conocimiento extramatemático. A continuación, existe un proceso de matematización muy influenciado por el conocimiento extramatemático para la obtención de un modelo matemático, momento en el que las afirmaciones y/o argumentos provienen sobre todo de una conceptuación matemática. Finalmente se obtienen resultados matemáticos e interpretación en la situación de la tarea y obtención de resultados reales, siendo validados en la representación mental de la situación o en el modelo real.

Perspectivas de modelación

Al considerar que la modelación matemática es una actividad de la persona cuando resuelve problemas de la realidad utilizando matemática, se vislumbra una extensión en los objetivos de interés y características para el investigador. Kaiser (2005) y Kaiser y Sriraman (2006) han reconocido y clasificado tareas que pueden ser de naturaleza educacional, cognitiva, social o epistemológica, y han establecido diferencias entre la naturaleza de los objetivos y/o tipos de tareas. Tal clasificación puede ser realista, contextual, educacional, sociocrítica, epistemológica o cognitiva. Cabe señalar que no es clara la categorización de una tarea de modelación en una única perspectiva, pero sí es posible reconocer mayor protagonismo de alguna perspectiva (Kaiser y Sriraman, 2006).

Competencias de modelación

Una de las caracterizaciones de competencias matemáticas y que asumiremos emana de PISA, que declara que la competencia matemática es «... la capacidad de un individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos que presenten necesidades para su vida individual como ciudadano» (Rico, 2006). Tal caracterización requiere la práctica matemática del estudiante, y es concordante con la visión de modelación matemática de Blum y Leiß (2006) y Borromeo Ferri (2010). Al especificar las competencias de modelación, Maaß (2006) describe las siguientes: 1) competencias relacionadas con comprender el problema real y la creación de un modelo basado en la realidad, 2) competencia para construir un modelo matemático desde el modelo real, 3) competencia para resolver preguntas matemáticas con este modelo matemático, 4) competencia para interpretar el resultado matemático en una situación real y 5) competencia para validar la solución.

Los modelos asociados a la evaluación de competencias de modelación considerados provienen de estudios anglosajones (Kaiser, Blum, Borromeo Ferri y Stillman, 2011), los cuales ofrecen alternativas para la creación de mediciones de evaluación para las tareas de modelación.

El modelo MTSK

El modelo MTSK representa un segundo aspecto en nuestro estudio, focalizado en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Este modelo es necesario para analizar el progreso de los estudiantes en FIPM en sus competencias de enseñanza y aprendizaje de la modelación matemática.

En el modelo MTSK, el conocimiento se divide en dos dominios de conocimiento que, a su vez, constan de tres subdominios (figura 3).

El dominio llamado conocimiento matemático (MK, por sus siglas en inglés) es el conocimiento que tiene el profesor de las matemáticas como disciplina científica en un contexto escolar, y tiene tres subdominios. El conocimiento de los temas matemáticos (KoT) incluye aspectos fenomenológicos, significados, definiciones y ejemplos que caracterizan aspectos del tema matemático abordado; se refiere al contenido disciplinar de las matemáticas que figura en manuales y textos matemáticos. Otro es el conocimiento de la estructura matemática (KSM), el conocimiento de las relaciones que el profesor realiza entre distintos contenidos, ya sea del curso que está impartiendo o con contenidos de otros cursos o niveles educativos, siendo específicamente conexiones entre temas matemáticos. Finalmente, se define el conocimiento de la práctica matemática como un conocimiento sobre las formas de proceder a los resultados matemáticos, asociado al modo en que se explora y genera conocimiento por las matemáticas, y al modo en que se establecen relaciones, desde lo argumentativo, el razonamiento o la generalización. En este subdominio se deduce que existe un reconocimiento del modelar, ya que la naturaleza de la actividad de modelación es también observada en la práctica del matemático.

El segundo dominio de conocimiento es el conocimiento pedagógico del contenido (PCK, por sus siglas en inglés). Un dominio característico del desarrollo profesional del profesor de matemáticas, fecundado por la necesidad de las prácticas de enseñanza que posee naturalmente la profesión y su relación con la disciplina (Carrillo *et al.*, 2016). Está dividido en tres subdominios de conocimiento: el conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM), que es el conocimiento basado en las características del aprendizaje inherentes al conocimiento matemático. En este caso, no son consideradas las características del estudiante en sí mismo, sino las características del aprendizaje derivadas de su interacción con el conocimiento matemático. Otro subdominio es el conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT), el conocimiento que condiciona el aprendizaje, donde se incluyen recursos, materiales, modos de representar el contenido o ejemplos adecuados según el propósito que se persiga;

finalmente, se define el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), que no es tan solo el conocimiento de los materiales y programas que son una herramienta para la labor docente del profesor de matemáticas, sino que incluye niveles de capacidad de estudiantes para entender, construir y saber matemáticas en un determinado momento escolar, lo que puede ser información extraída de fuentes de estudio o no.

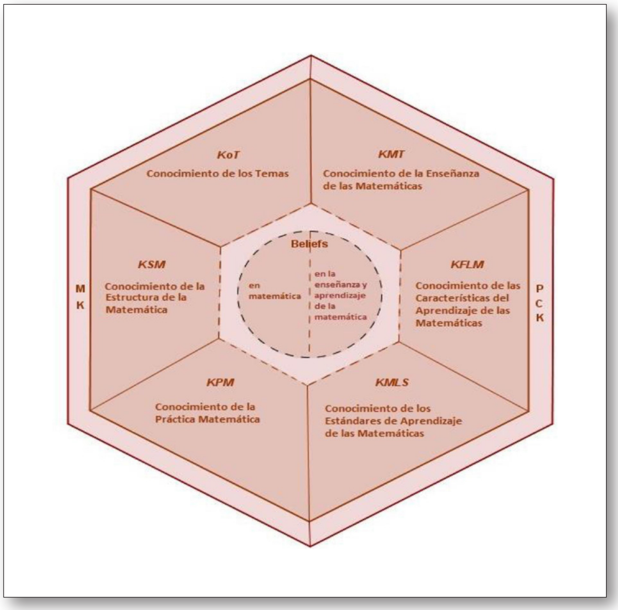

Fig. 3. El Modelo MTSK (Carrillo *et al.*, 2016).

El modelo no considera una visión del conocimiento como una partición de este en el profesor, sino que desde una posición analítica se pretende realizar una comprensión del conocimiento.

La reflexión

Se considerará que existe una reflexión cuando se cumplan ciertas fases de un ciclo reflexivo (Schön, 1987; Mcduffie, 2004). El inicio es cuando la persona pretende abordar un evento problemático; luego, la problematización analiza y enfoca las opciones de resolver el problema, pudiendo ocurrir en el momento de la acción educativa o posteriormente a esta. A continuación, la persona considera una postura para resolver la problemática desde su enfoque y análisis, para que finalmente la postura sea validada mediante una o varias fuentes, como por ejemplo la práctica, los conocimientos teóricos e incluso las creencias de la persona. Esta última parte es diferenciada de la postura de Mcduffie (2004), ya que sitúa la fase de validación del ciclo reflexivo mediante la práctica. No obstante, las posibilidades de construir conocimiento en el curso propuesto no radican solo en la práctica, sino que se amplía hacia el conocimiento teórico y creencias.

ASPECTOS METODOLÓGICOS Y EL CURSO DE MODELACIÓN

Esta investigación propone para el estudio del conocimiento el análisis cualitativo del contenido (Varguillas, 2006) para establecer una descripción objetiva del conocimiento de la modelación y de su enseñanza para el caso elegido en el transcurso de la experimentación.

El curso se dirige a estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemáticas para analizar las reflexiones de sus estudiantes y concepciones en cuanto a la práctica, enseñanza y aprendizaje de la modelación matemática. La propuesta tuvo un pilotaje con estudiantes del tercer semestre en la carrera de Pedagogía en Matemáticas de otra universidad chilena, que realizan paralelamente una práctica de observación (visitas semanales al aula para observar y analizar globalmente la clase). Se mantuvo la diferencia de una semana entre el pilotaje y la experimentación, logrando ajustar tiempos y formulaciones menores en la planificación. Además, la diferencia de niveles permitirá reconocer posibles variaciones que sucedan en la experimentación e inferencias respecto a su implementación.

El acceso a la información es de naturaleza audiovisual y documental. Se toman datos de campo en cada sesión con el fin de comprender cómo el conocimiento teórico y el práctico actúan recíprocamente en favor del aprendizaje del estudiante. Tal información es recopilada con cuatro instrumentos que son detallados a continuación:

1. Diario de reflexión (DR). Instrumento virtual con el que el estudiante debe evidenciar su conocimiento de los temas tratados en clase. Tanto el estudiante como el profesor pueden visualizar y editar las reflexiones, donde la función del profesor es incitar a que el estudiante forme el ciclo reflexivo (Mcduffie, 2004) en función de preguntas al estudiante o puntos de discusión de la reflexión. En este no se espera que el estudiante escriba un resumen del conocimiento desarrollado en las actividades presenciales, sino que las reflexiones del estudiante tengan su génesis en las problemáticas o en las ideas desarrolladas en el curso. El rol del profesor en tal instrumento no es hacer un juicio de valor sobre las reflexiones, sino generar lineamientos hacia qué tipo de preguntas o problemáticas el estudiante puede abordar en sus próximas reflexiones mediante la devolución de preguntas y/o sugerencias. Es un documento que se solicita al estudiante para que desarrolle al menos una vez entre sesiones.
2. Reporte de investigación (RI). Se trata de un instrumento mediante el cual el estudiante construye y perfecciona una propuesta didáctica preliminar que articule los conocimientos de la modelación matemática tratados en el curso, experimente en el aula y analice esta como tal. Se solicita realizar el reporte en instancias finales, según planificación. El reporte se centra en un objeto matemático tratado en el currículo escolar chileno abordado mediante un proceso de modelación matemática, y en esta propuesta se deben identificar las competencias de modelación en la experimentación de este en un ambiente real.
3. Portafolio (PO). Instrumento donde el estudiante documenta y reflexiona sobre las actividades realizadas en el curso, considerando además la resolución y creación de tareas de modelación matemática realizadas en todas las sesiones.
4. Entrevista individual (EI). En el caso elegido, Diego fue entrevistado cuando el curso ya había terminado. Mediante una entrevista semiestructurada se plantean preguntas sobre la relevancia de la modelación para un profesor de matemáticas, el uso que haría de ella y los conocimientos que pone en juego un profesor en el aula cuando se ponen en práctica tareas de modelación. La EI fue transcrita y utilizada como documento para analizar.

El curso de modelación

Los objetivos del curso propuesto son los siguientes:

- Educar a los futuros profesores de matemáticas sobre la enseñanza de la modelación matemática.
- Reflexionar y crear prácticas didácticas sobre cómo el uso del conocimiento matemático es aprendido y enseñado vía modelación matemática.

La planificación posee cuatro dimensiones: dos desde el conocimiento del estudiante, emanadas de creencias y concepciones teóricas y experimentales, teniendo la intencionalidad de confrontación y complementación entre las creencias y el conocimiento teórico; y otras dos desde las acciones del estudiante, que establecen la necesidad del «saber hacer» para el fortalecimiento práctico de los elementos didácticos. Las cuatro dimensiones permean cada una de las 14 sesiones de 90 minutos del curso, adquiriendo distinto protagonismo en el tránsito de las sesiones según las planificaciones clase a clase (detallada en Huincahue [2017]) y siendo retroalimentadas a través del curso. Estas son:

Creencias y concepciones de la modelación matemática

Considera el conocimiento que posee el estudiante relativo a la modelación matemática desde su formación antes de la propuesta, así como lo que dicta el currículo nacional. Principalmente formado por las creencias y concepciones de lo que es modelación matemática, sus usos e implicaciones tanto en la vida cotidiana como en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Tales conocimientos evolucionan constantemente a través de las sesiones, ya sea por prácticas directas o indirectas del curso.

Elementos de la investigación en modelación matemática

Conocimiento desde el marco teórico presentado. Principalmente referido al ciclo de modelación de Blum, visión epistemológica del ciclo de modelación (Pollak, 1979), visión cognitiva del ciclo de modelación matemática (Borromeo Ferri, 2010), perspectivas de modelación (Kaiser y Sriraman, 2006), competencias de modelación (Maaß, 2006) y evaluación en modelación (Borromeo Ferri, 2010).

Resolución de tareas de modelación matemática

Confrontación y análisis de tareas de modelación provenientes de diferentes investigaciones (Borromeo Ferri, 2010 y 2006; Morales, Mena-Lorca, Vera y Rivera, 2012; Guerrero-Ortiz y Mena-Lorca, 2015; Huincahue, 2015, por ejemplo), entre las que el grupo MyT-PUCV es considerado para la ejecución de criterio de validación científica de las tareas propuestas.

Creación de tareas de modelación

Instancia para que los estudiantes propongan situaciones de modelación que puedan ser analizadas y puestas en práctica entre ellos o en la escuela desde ciertos objetivos; además, es una ruta para evaluar conceptos vistos en el curso, generar un enriquecimiento teórico de las tareas y su perfeccionamiento frente a la interacción intra e intergrupal.

El rol del estudiante del curso

Se pretende que los estudiantes desarrollen inicialmente competencias de modelación, y posteriormente se enfrenten a reflexionar, poniéndose en los roles de profesor y estudiante de la FIPM, sobre cómo desarrollar en sus futuros alumnos tales competencias de modelación. Cuando el estudiante asume explícitamente su rol, la modelación es vista como un conocimiento de la práctica de un matemático o un modelador matemático, debiendo el estudiante resolver tareas de modelación, reconocer tipos de resolución y fenómenos o situaciones que realiza, por ejemplo, uso de estrategias heurísticas, matematización de las tareas, resolución, interpretación y validación, desde una visión individualizada del análisis. El estudiante, en su rol de profesor, concibe a la modelación como una práctica dada en la vida, como una manera de reconocer el conocimiento matemático desde la realidad del alumno, siendo válido entender la modelación como una fuente de estudio en su formación. En este sentido, ambos roles se traslapan, propiciando un aprendizaje integrador en el estudiante.

Experimentación

La experimentación es realizada en una carrera de Pedagogía en Matemática y Computación en una universidad pública chilena entre marzo y julio del año 2015. Participaron trece estudiantes en el séptimo semestre de una extensión de nueve, en donde han aprobado cursos de conocimiento matemático y didáctico. Paralelamente, los estudiantes realizaban su práctica profesional en distintos colegios del sistema educativo con la misma duración de la experimentación, un ambiente utilizado como laboratorio para las experimentaciones creadas según las prácticas y conocimientos desarrollados en el curso.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Ahora veremos cuáles son los alcances de los instrumentos utilizados en la experimentación para propiciar prácticas de enseñanza de modelación matemática, mediante un análisis para observar cómo evoluciona el conocimiento de la enseñanza de la modelación, desde ciclos reflexivos a lo largo de un curso de FIPM.

El proceso es combinado con el software ATLAS.ti para favorecer la práctica analítica del proceso. Se ha codificado el DR, PO y RI, logrando la identificación de los ciclos reflexivos, para a continuación realizar una codificación específica con un dinamismo recursivo en todos los datos respecto a los dominios y subdominios del modelo MTSK, siendo este utilizado como modelo conceptual del análisis (Noguero, 2002). Esto permite trazar para cada uno los datos de Diego, qué dominios o subdominios fueron reconocidos y cómo fue la evolución del conocimiento de la enseñanza de la modelación en el DR según lo ofrecido por la experiencia, lo que Noguero denomina un «análisis externo» (2002: 172), es decir, el análisis de los documentos en un contexto específico (en este caso el curso propuesto) que permita su explicación. En general, todos los estudiantes tuvieron una evolución significativa; esta se manifestó inicialmente en el PO y posteriormente con mayor fuerza en el RI.

Diego, en el RI, utiliza la tarea que se ha modificado desde el Mineduc (2012b) para explicar el ciclo de modelación de Blum *et al.* (2006), mostrando las implicaciones del ciclo de modelación para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, destacando las demandas curriculares y visiones sobre su utilización en distintos niveles escolares del sistema educacional chileno: «... además, el problema podría ser abordado en diferentes cursos, modificando las preguntas y exigiendo diferentes cosas a los alumnos...» (Diego). Lo anterior corresponde a la categoría «secuenciación con temas anteriores y posteriores» del subdominio KMLS.[3]

En el RI se reporta la siguiente tarea de modelación (cuadro 1):

3. Ningún otro estudiante presentó una situación didáctica adaptable a distintos niveles. En general lo trabajado fueron adaptaciones de situaciones presentadas en el curso o que se encuentran en la literatura.

Cuadro 1.
La tarea de modelación propuesta en el RI.
Es una tarea modificada de otra que propone el currículo nacional (Mineduc, 2012b)

Una constructora tiene un diseño para un tipo de edificio, en el cual cada piso, al mirarlo desde arriba, tiene forma cuadrada y en cada pared hay un gran ventanal, para que los trabajadores cuenten con la iluminación natural apropiada. Además, en el diseño se incluye que en el último piso, al mismo tiempo que los cuatro ventanales, se coloque un tragaluz, para dar una sensación de amplitud a quienes allí trabajen. Dado que la constructora tiene diferentes demandas, debe tener una forma rápida de calcular cuántos ventanales debe mandar fabricar según la cantidad de pisos que sus clientes le exijan.

1. ¿Qué estrategia podría usar la empresa para determinar la cantidad de ventanales que utilizar en diferentes casos (un piso, dos pisos, tres pisos...)?
2. ¿Puedes proponer una forma general de calcular una cantidad cualquiera de ventanas, dados los pisos que un cliente requiera?
3. Si se dispone de una cierta cantidad de ventanas en stock, ¿se puede anticipar para cuántos pisos alcanzará?
4. ¿Qué pasará si quiero hacer un edificio de 1000 pisos? (Analizar en un contexto real).
5. ¿Cuáles son las variables que intervienen en la expresión que modela la situación?
6. ¿Cuál será la variable dependiente y la variable independiente en la situación de los edificios y las ventanas? ¿se pueden invertir?

La propuesta de Diego es una planificación didáctica que transita por los subdominios KMT, KFLM y MKLS. Las preguntas 1, 2 y 3 del cuadro exigen al estudiante generar prácticas de modelación, las que corresponden al subdominio KPM del dominio MK. Las preguntas 4, 5 y 6 adquieren de forma general un foco en el contenido matemático. Sin embargo, las cuatro primeras preguntas hacen movilizar al estudiante a la realidad como –al menos– una fuente de validación de sus avances, por lo que el centro no es el objeto matemático en sí, sino la modelación matemática. Esto permite reconocer una bivalencia del conocimiento especializado, en el sentido del tránsito entre los dominios del MTSK.

Diego afirma en su implementación (rol de profesor) que «un elemento clave para fomentar el acercamiento entre el mundo matemático y el mundo real fueron los cubos de madera utilizados». Es decir, los cubos de madera se transforman en recursos materiales que, como registro de representación, son utilizados simbólicamente para la práctica matemática, fomentando la construcción del modelo perseguido según los objetivos de aprendizaje, reconocido en los subdominios KMT, KoT y KPM, respectivamente.

Por otra parte, Diego reconoce además un elemento que no fue considerado en su análisis a priori, «... como por ejemplo determinar la función inversa de la expresión que calcula el número de ventanales, definiéndola de la siguiente manera» (figura 4):

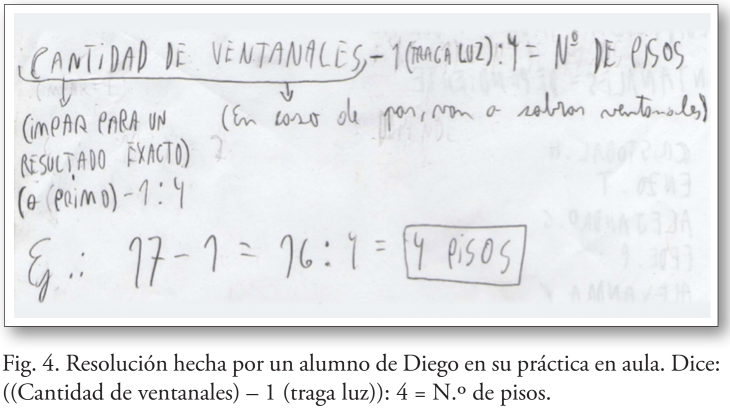

Fig. 4. Resolución hecha por un alumno de Diego en su práctica en aula. Dice: ((Cantidad de ventanales) – 1 (traga luz)): 4 = N.º de pisos.

Diego entiende esta información como un objeto matemático (la función inversa, ya que Diego esperaba como respuesta $4n+1=v$), pero, por otro lado, lo valida como un modelo de la situación. Esto evidencia en el conocimiento de Diego las dificultades y fortalezas que aborda un estudiante al modelar y los tipos de modelos, reconociendo que en su futuro quehacer debe reconocer los modelos en las múltiples formas que construye el estudiante. Esto es identificado en el subdominio KFLM.

En el DR, Diego establece constantemente comparaciones respecto al conocimiento generado en el curso y a las prácticas profesionales en las que participa, describiendo grandes diferencias con el tratamiento pedagógico de las clases de matemática y generando reflexiones que emergen a partir de la inclusión de prácticas de modelación matemática en el aula cuando el estudiante es un profesor en formación.

> ... los chicos eran desordenados y no hacían caso, que no participaban en las clases y se distraían con mucha facilidad, que no tenían la capacidad de trabajar en algo en conjunto [...] ¿Qué vi hoy [día de la experimentación]? Un grupo de niños enfocados en una tarea, motivados, inmersos en ese mundo matemático.

En este contexto, Diego inicia una reflexión sobre qué conocimientos permiten al profesor de matemáticas tener una mayor facilidad al construir el conocimiento matemático:

> Pienso que conocer la historia de un concepto puede servir de varias maneras a la ejecución de una clase: que se puede mezclar la historia con las matemáticas, para ver cómo un concepto matemático ha llegado a ser lo que es actualmente, ejemplificar el uso histórico de dicho concepto como la utilización elemental de las fracciones por parte de los egipcios y babilónicos, ver con qué herramientas contaban en la antigüedad para resolver sus problemas cotidianos, etc.

Impulsando a Diego en la EI a que se refiera a las virtudes de la modelación matemática (para esclarecer su comentario anterior), enuncia algo que llama «la-matemática-real», resaltando la funcionalidad del conocimiento matemático, su protagonismo en el desarrollo del conocimiento de la gente y cómo estos pueden impactar en la ejecución de una clase. En el DR se aprecia lo siguiente: «me he preguntado ¿cuál es el objetivo de la matemática en el nivel escolar? Simplemente entregar una maleta con herramientas y que el alumno diga: ¿cuál me sirve?, o ¿para qué sirven esas herramientas? [...] la-matemática-real»; refiriéndose a una construcción epistemológica de la matemática centrada en el uso, asignando un sentido al conocimiento matemático para que sea aprendido. Diego sintetiza su reflexión desde la EI, como una ruptura de la separación entre la realidad y las matemáticas: «en el ciclo de modelación [de Blum *et al.* (2006)] está diferenciado [realidad y matemáticas], pero yo no sé... no sé si la matemática es un mundo aparte, ajeno al mundo real». Diego se posiciona desde un conocimiento sobre la práctica docente que repercute en ambas dimensiones del MTSK. No obstante, en la última cita hace alusión a la modelación como contenido matemático, en particular en la categoría de «definición, propiedades y fundamentos» del subdominio KoT.

En el PO se reconocen múltiples subdominios y relaciones entre ellos. Este instrumento, a la vez, brinda información sobre la evolución del conocimiento de la enseñanza de la modelación. En la resolución de tareas de modelación propuestas en el curso, Diego desarrolla de distintas maneras cada una de ellas, surgiendo en las últimas tareas propuestas en el curso, el uso de objetos matemáticos, un ordenamiento del planteamiento matemático de los problemas y una práctica matemática que suele poner en evidencia el uso de estrategias heurísticas o validaciones de resultados vía demostraciones matemáticas. Tales características no eran vislumbrables al inicio, ya que en la resolución de las primeras tareas Diego se remite a una descripción de esta y las variables que influyen, sin generar un desarrollo.

Por otro lado, el proceso de pilotaje del curso, en general, tuvo regularidad en su transcurso. Ambos cursos (el pilotaje y la experimentación) esperaban una clase frontal, donde se presenten y expliquen resultados matemáticos, esperando preguntas matemáticas claras y tradicionales, que el contenido matemático sea explícito. Sin embargo, hubo reticencia a la propuesta en el pilotaje. La incomodidad en la experimentación se desvanece al transcurrir la experiencia, ya que desde la sesión cuatro o cinco existió un proceso de adaptación a la propuesta, logrando asumir las situaciones planteadas por la planificación generada. En el pilotaje, la experimentación no logró la adaptación esperada, lo que provocó la reducción del 20 % del número de estudiantes, y tras la cuarta sesión, los que continuaron se adaptaron en parte al sistema. Esto se debió a que los estudiantes estaban más preocupados del conocimiento matemático que del didáctico, ya que el plan de estudios de la Universidad propone que es más importante ser primero matemático para después preocuparse de su formación en didáctica y ramos de educación. En la experimentación no hubo disminución de asistencia a clase ni deserción.

Cerca del 50 % de estudiantes evidenciaron un aumento progresivo de la valoración del DR, incluyendo en sus reflexiones elementos que trascienden los tópicos abordados en la planificación de la propuesta, siempre relacionados con las prácticas docentes y la importancia del contexto del estudiante, para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas vía modelación matemática.

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Si bien se documentan solo los datos de Diego, podemos afirmar que los instrumentos creados para estudiar la evolución de la inducción de la modelación matemática en el curso (DR, RI, PO, EI) fueron apropiados para analizar las reflexiones de los estudiantes y su evolución. Asimismo, la metodología utilizada para comprender el conocimiento especializado del futuro profesor de matemáticas mediante el modelo MTSK nos permitió trazar y comprender un proceso reflexivo, el conocimiento de un profesor en formación sobre modelación matemática.

El caso de Diego

- Diego está en permanente oscilación entre su rol de estudiante y su rol de profesor en el momento de resolver tareas y construirlas, y el requerimiento del conocimiento matemático y didáctico en ellas, respectivamente.
- El conocimiento didáctico –en el uso de la modelación– mostrado por Diego evidenció un paulatino desarrollo desde los distintos tipos de tareas, evolucionando desde una ejercitación algorítmica hasta la preocupación por generar procesos de modelación matemática en sus propuestas (Huincahue y Guerra-Silva, 2016).
- Consecuentemente, la propuesta tuvo un impacto significativo en el PCK. Las actividades planificadas en el curso muestran relaciones de los conocimientos matemáticos (específicamente KPM) con todos los subdominios del PCK, estableciendo un conocimiento sobre cómo la actividad de crear modelos permite que el estudiante logre objetivos de aprendizaje. Además, la codificación en el RI y en el DR permitió la visualización de elementos que podrían guiar la confección de una tarea de modelación, su dependencia con los objetivos como profesor y qué herramientas evaluativas son reconocidas y puestas en uso.

La experimentación

La propuesta de formación inicial resultó positiva en términos prácticos y teóricos. Consideramos que un factor relevante en la propuesta es el momento adecuado en la formación inicial para su implementación.

En el caso de utilizar el modelo MTSK, consideramos de relevancia establecer cuándo definir que un estudiante de Pedagogía en Matemáticas es un profesor en formación, ya que los estudiantes del pilotaje no tuvieron la misma participación que en la experimentación. Esto se puede deber a múltiples factores:

– Entendiendo que los resultados de Tapia (2016) aluden a que la modelación matemática permanece únicamente como una práctica del matemático y no en su dimensión didáctica, se reconoce que los estudiantes del pilotaje poseen a esa altura de su formación únicamente cursos de matemática, por lo que la sensibilidad del rol profesional al que aspiran no ha sido parte de su formación hasta ese momento.
– Los estudiantes del pilotaje no son conscientes de las competencias de modelación fomentadas por el curso, lo que puede deberse también a la insuficiente preocupación del ejercicio profesional del profesor de matemáticas y las competencias que demanda.
– La escuela formadora del pilotaje, que es parte de un Instituto de Matemáticas, considera la formación del profesor como un matemático que posteriormente se hace responsable de la enseñanza de la matemática. Visión que asume implícitamente el estudiante, por lo tanto, las competencias pedagógicas planteadas por la experimentación se contraponen con las perseguidas hasta el momento en su formación. Por otra parte, la carrera de la experimentación, plantea sus objetivos pedagógicos desde el principio, siendo los cursos de matemática un aporte a la formación.

Una hipótesis o futura línea de desarrollo que propone la investigación es clarificar la ubicación de una vinculación de la modelación matemática de forma explícita en la FIPM en el sistema educacional chileno, la cual debería ocurrir cuando el profesor en formación ya desarrolle cierta sensibilidad respecto al rol profesional, y no se centre únicamente en la matemática, como se evidenció en el caso del pilotaje, sino que posea experiencia en prácticas profesionales como una actividad en paralelo y las problemáticas que surgen en cuanto a la construcción del conocimiento matemático cuando está pensado para el aprendizaje.

Lo anterior nos permite concluir que un programa de formación inicial que considere la reflexión, junto con una práctica pedagógica de mayor protagonismo, potencia la formación profesional; en este estudio, se desprende que el concepto «curso de modelación matemática» puede ser replicado según las demandas que surjan en la escuela formadora. Finalmente, la investigación nos da indicios de que una política apropiada para el desarrollo profesional es propender que los profesores nóveles posean instancias centradas en la reflexión, que les permitirán fortalecer los conocimientos especializados que el modelo MTSK define.

REFERENCIAS

Aguilar, A., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero, D., Flores, E., Flores, P., Montes, M. y Rojas, N. (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, VII CIBEM* (pp. 5063-5069). Montevideo: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education–Discussion document. *Educational studies in mathematics*, 51(1-2), pp. 149-171. https://doi.org/10.1023/A:1022435827400.

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? En *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96), New York, NY: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9.

Blum, W. y Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, 1(1), pp. 45-58.

Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R. y Köller, O. (2015). *Estándares de Aprendizaje de la Matemática. Articulación primaria-secundaria: orientaciones para las sesiones de aprendizaje, ideas para la capacitación docente, ejemplos de tareas* (Talía Guevara, trad.). Lima: Cornelsen.

Blum, W. y Leiss, D. (2006). «Filling up» – The Problem of Independence-Preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modelling Tasks. En: M. Bosch (ed.), *CERME-4 – Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Guixol.

Blum, W. y Niss, M. (1991).Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction.*Educational Studies in Mathematics*, 22(1), pp. 37-68.
https://doi.org/10.1007/bf00302716.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theorical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), pp. 86-95.
https://doi.org/10.1007/BF02655883.

Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behaviour. *Journal für Mathematik didaktik*, 31 (1), pp. 99-118.
https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8.

Borromeo Ferri, R. (2014a). Mathematical Modeling Lesson Planning, Philosophy, and Execution. En *Handbook III on Mathmatical Modeling*, Boston: COMAP, S. pp. vii-x.

Borromeo Ferri, R. (2014b). Mathematical Modeling –The Teacher's Responsibility. En B. Dickman y A. Sanfratello (eds.), *Proceddings Conference on mathematical modeling* (pp. 26-31). New York, NY: Columbia University.

Borromeo-Ferri, R. y Blum, W. (2010). Mathematical Modelling in Teacher Education – Experiences from a Modelling Seminar. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y y F. Arzarello (eds.), CERME-6 – *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2046-2055). Lyon: INRP.

Carrillo, J., Contreras, L., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M. (2016). *Un Marco Teórico para el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Servicio de Publicaciones.

Guerrero-Ortiz, C. y Mena-Lorca, J. (2015). Modelación en la enseñanza de las matemáticas: Matemáticos y profesores de matemáticas, sus estrategias. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 1, pp. 1-14.

Haines, C., Galbraith, P., Blum, W. y Khan, S. (2007). *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics-ICTMA 12*. Chichester: Elsevier.

Huincahue, J. (2015). Tipos de representaciones externalizadas durante el proceso de modelación: el caso del ciclo de modelación Blum-Borromeo. *Premisa*, 17(67), pp. 29-40.
https://doi.org/10.13140/RG.2.1.4027.0167.

Huincahue, J. (2017). *Propuesta de Modelación Matemática en la Formación de Profesores y Bases para una Variedad de Modelación desde la Teoría Socioepistemológica*. (Tesis doctoral no publicada). Valparaíso, Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Huincahue, J. y Guerra-Silva, G. (2016). Propuesta didáctica en patrones: visión desde las competencias en modelación matemática. En C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandía y M. Parraguez (eds.), *Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX* (pp. 378-382). Villarrica: SOCHIEM.

Kaiser, G. (2005). Introduction to the Working Group «Applications and modeling» (G14). *Proceedings of the 4th European Congress of Mathematics Education* (pp. 1613-1622). SantFeliu de Guíxols: ERME.

Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 38(3), pp. 302-310.
https://doi.org/10.1007/BF02652813.

Maaß K. (2006). What are modelling competences? *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), pp. 113-142.
https://doi.org/10.1007/BF02655885.

Mcduffie, A. (2004). Mathematics teaching as a deliberate practice: an investigation of elementary pre-service teachers' reflective thinking during student teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7, pp. 33-61.
https://doi.org/10.1023/B:JMTE.0000009970.12529.f4.

Mineduc (2012a). *Estándares Orientadores para Carreras de Pedagogía en Educación Media*. Santiago: LOM Eds.

Mineduc (2012b). *Guías Didácticas para la Articulación de los Ejes Curriculares de Números, Álgebra, Geometría. Asignatura: Matemática*. Santiago: Maval.

Mineduc (2016). *Matemática. Programa de Estudio de Octavo Básico*. Santiago: Ministerio de Educación de Chile.

Morales, A., Mena-Lorca, J., Vera, F. y Rivera, R. (2012). El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos físicos. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(3), pp. 237-256. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n3.694.

Noguero, F. L. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI, Revista de Educación*, 4, pp. 167-179.

Pollak, H. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects, in UNESCO (ed.), *New Trends in Mathematics Teaching IV* (pp. 232-248), Paris: UNESCO.

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), pp. 47-66.

Schön, D. (1987). *Educating the reflexive practitioner*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Tapia, M. (2016). *Evidencias de la modelación en la formación inicial docente*. (Tesis de pregrado no publicada). San Felipe: Universidad de Playa Ancha, Campus San Felipe.

Varguillas, C. (2006). El uso de ATLAS.ti y la creatividad del investigador en el análisis cualitativo de contenido UPEL. Instituto Pedagógico Rural El Mácaro. *Laurus. Revista de Educación*, 12(Ext.), pp. 73-87.

Math modelling knowledge from reflection in math teachers initial training

Jaime Huincahue
Vicerrectoría de Investigación y Postgrado, Universidad Católica del Maule, Talca, Chile.
jhuincahue@ucm.cl

Rita Borromeo-Ferri
Instituto de Matemática, Universidad de Kassel, Kassel, Alemania.
borromeo@mathematik.uni-kassel.de

Jaime Mena-Lorca
Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.
jaime.mena@pucv.cl

There are several ways to consider mathematical modelling in Initial Education of Mathematics Teacher curriculum, IEMT, since there are different forms, meanings and uses in the relationships that exist between reality and mathematics. However, the knowledge breadth required for the mathematics teacher is not only a mathematical knowledge and its applications: didactic knowledge of the subject is required as well.

A clear and direct route to address the problem of modelling in IEMT is through its explicit introduction. In this situation, it is expected that future mathematics teachers will be able to generate modelling practices, maintaining clarity, for example, about what is mathematical modelling, how to approach such situations (resolution and recognition of complexities when modelling) and how modelling can be treated in classroom (creating activities, knowing which competences it develops and how are they evaluated). For the strengthening of such skills and abilities, a modelling course proposal is constructed which is clearly described in this paper, experimented in third and seventh semesters in different Chilean universities. For this, the questions that guided our research were: How does the knowledge of modelling teaching evolve from the reflection of a participant throughout an IEMT course? How does it affect the time at which the modelling course in the IEMT is proposed?

The course consisted of 15 sessions of 90 minutes each, and is positioned in the conceptual framework of mathematical modelling, which consists of: theoretical constructs regarding the conception of mathematical modelling, modelling cycle from an individualized approach to knowledge, modelling competences and modelling levels. The instruments for data collection are Reflection Diary, Research Report, Portfolio and an Individual Interview. The Qualitative Content Analysis is used as a methodological framework, considering reflexive cycles evidenced in the data and subdomains of MTSK model as analysis categories. Using the ATLAS.ti software, we find results that tend towards the reflective development of students during the experience, towards the knowledge that they have as students and as future teachers, strongly evidenced by the understanding of knowledge in all subdomains of MTSK model.

It is concluded that the chosen case presents a clear evolution of knowledge, initially proposing didactic work as an algorithmic workout until end the experience with the creation of modelling tasks and implementation in the classroom via professional practices, evidencing a didactic approach to problems of modelling according to what was proposed in the course. In addition, a powerful evolution of knowledge in the PCK domain is clarified through Reflection Diary and Research Report.

It is concluded that the proposal had positive results, although we consider that a relevant factor in the proposal is the appropriate moment in initial training for its implementation, since there are variables such how mature the teacher is in the role of training, that in the third semester of the training had not been considered, not being aware of the modelling competences of the proposal. Finally, the conceptual framework is proposed as an instrument to be used for other experiences as well as to replicate according to the demands of the training school.