ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 35.1 (2017): 89-110
Investigaciones didácticas
http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1927
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Sucesión de sumas parciales como proceso iterativo infinito: un paso hacia la comprensión de las series numéricas desde el modelo APOS

Sequence of partial sums as an infinite iterative process: a step towards the understanding of numerical series from an APOS perspective

Myriam Codes Valcarce
Universidad de Salamanca
mcodes@usal.es

Alejandro S. González-Martín
Université de Montréal
a.gonzalez-martin@umontreal.ca

RESUMEN • A la luz de las dificultades que conlleva el aprendizaje de las series numéricas, en este artículo nos centramos en uno de sus componentes que aparecen explícitamente en su definición como límite de una sucesión de sumas parciales: la sucesión de sumas parciales como proceso iterativo infinito. A partir de la descomposición genética de este concepto, se han analizado las respuestas de dos grupos de alumnos de primer año universitario y se han encontrado manifestaciones de distintas concepciones acción y proceso en los dos grupos. Las diferencias entre los modos de conocer las sucesiones de sumas parciales de estos grupos revelan la importancia de algunos elementos matemáticos clave para la comprensión de las series numéricas.

PALABRAS CLAVE: sucesión de sumas parciales; serie numérica; proceso iterativo infinito; límite; infinito.

ABSTRACT • Learning infinite series entails many difficulties. In this paper, we focus on how students learn one aspect of the concept of infinite series: the sequence of partial sums as an infinite iterative process. The learning process of two groups of first-year university students was analysed using the genetic decomposition of the sequence of partial sums as an infinite iterative process. Different manifestations of action and process conceptions were observed in both groups. The differences in the ways the students grasped the sequence of partial sums reveal the importance of some key mathematical elements for understanding infinite series.

KEYWORDS: sequence of partial sums; infinite series; infinite iterative process; limit; infinity.

Recepción: septiembre 2015 • Aceptación: mayo 2016 • Publicación: marzo 2017

INTRODUCCIÓN

Una de las cuestiones que preocupa a los docentes e investigadores en didáctica de la matemática está relacionada con ayudar a los estudiantes a superar las dificultades que encuentran cuando abordan cualquier concepto matemático. En el caso particular de los conceptos propios de la matemática superior, uno de los escollos principales que se manifiestan en el aula universitaria deriva del nivel de abstracción que requiere su comprensión respecto del demandado en los conceptos de la matemática elemental. Para Dreyfus (1991), la abstracción en matemáticas es ante todo un proceso de «construcción de estructuras mentales a partir de estructuras matemáticas, es decir, a partir de propiedades y relaciones entre objetos matemáticos» (p. 37). A raíz de esta reflexión, y teniendo en cuenta la complejidad del concepto de serie numérica, parece razonable que la búsqueda de una forma de intervenir frente a los problemas de comprensión de este concepto centre la atención en las relaciones que se pueden establecer (o activar) entre los distintos elementos matemáticos asociados a este.

En este sentido, McDonald, Mathews y Strobel (2000), analizando las construcciones mentales que llevan a cabo los estudiantes para comprender el concepto de sucesión numérica, describieron cómo las conexiones entre dos entidades cognitivas asociadas a este concepto, sucesión como lista (SEQLIST) y sucesión como función (SEQFUNC),[1] definen distintos niveles de desarrollo en la comprensión de este. Martínez-Planell, González, DiCristina y Acevedo (2012) adaptaron estas dos estructuras cognitivas de McDonald *et al.* (2000) para el caso de las series numéricas; entre sus observaciones, indican que algunas dificultades de los estudiantes para concebir una serie como una sucesión de sumas parciales pueden deberse, entre otros motivos, a una comprensión deficiente de otros conceptos relacionados (función, límite o sucesión). Esto parece ser confirmado por el trabajo de Codes (2010), donde varias concepciones de conceptos previos a las series numéricas fueron identificadas en el origen de algunas dificultades en la comprensión de estas y se consideraron como uno de los elementos que obstaculizan la creación de vínculos entre los elementos matemáticos asociados a su definición formal.

La investigación internacional ha identificado varias dificultades asociadas a diferentes conceptos ligados a las series infinitas, como el de sucesión, límite o infinito. En este párrafo, resumimos algunas de estas dificultades. Para Roh (2008), el significado que le dan los estudiantes a que una sucesión tienda a un determinado valor depende de la imagen que posean de límite y, si esta no es adecuada, puede producir bloqueos para comprender la definición ε-*N* del límite de una sucesión. Según sus resultados, es muy importante que los profesores fomenten una imagen que sea compatible con la definición formal de límite, pues facilitará la comprensión de la definición ε-*N*. Además, también se ha señalado que el uso abusivo de ejemplos en los que la función o la sucesión de la que se obtiene el límite siempre están definidas por una expresión que nunca toma el valor del límite, fomenta la idea de límite inalcanzable (Schwarzenberger y Tall, 1978; Tall y Vinner, 1981). Esta visión de que el límite

1. Una imagen de sucesión como lista está asociada a la lista de sus términos; por ejemplo $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$, mientras que una imagen de sucesión como función está asociada a su expresión funcional; en el ejemplo anterior $a_n = \frac{1}{n}$. McDonald *et al.* (2000) afirman que para comprender las sucesiones numéricas no solo se necesitan ambas entidades cognitivas, sino que también es necesario que se establezcan relaciones entre ellas para construir un esquema maduro de sucesión. En el ejemplo, cuando un individuo interioriza la acción de evaluar la expresión cerrada $\frac{1}{n}$ en un proceso, se genera el objeto $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$, por tanto un vínculo sencillo de construir por parte del alumno es considerar el objeto SEQLIST como resultado de una concepción proceso de SEQFUNC. La concepción SEQLIST es más asequible porque se apoya en el número natural y en enumerar, y además con ella se pueden resolver muchos problemas. Por su parte, la concepción SEQFUNC es más compleja porque requiere un esquema maduro de la noción de función.

no es alcanzable y no se puede rebasar, ha sido estudiada también por Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico (2015) y Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, Rico y Castro (2013) en el contexto de límites puntuales finitos. Fernández-Plaza *et al.* (2013), trabajando con estudiantes de bachillerato, encontraron que estos aspectos de la noción de límite están presentes en la mayoría de las definiciones de límite de una función en un punto que los estudiantes generan y, en la misma línea que Schwarzenberger y Tall (1978) y Tall y Vinner (1981), conjeturan que los ejemplos que han recibido los estudiantes en el registro gráfico sobre la noción de límite fomentan estas imágenes. Otra dificultad viene dada por la idea que desarrollan muchos estudiantes de que una sucesión posee un último término y este se corresponde con su límite, lo que lleva a adjudicar al límite las mismas características que a un término cualquiera de la sucesión (Kidron y Tall, 2015; Mamona-Downs, 2001; Przenioslo, 2004): de esta manera, una sucesión como {0,9; 0,99; 0,999; …} tendría como último término 0,999… y, de igual forma que cada término de esta, este último término sería inferior a 1. Esta imagen entra en conflicto con una concepción de infinito actual en la que el proceso dinámico de creación de términos de la sucesión da origen al objeto resultante de iterar indefinidamente dicho proceso (Brown, McDonald y Weller, 2008). En particular, el uso del infinito potencial (consistente en considerar cada una de las etapas de un proceso infinito, lo que hace que se considere este proceso como interminable) en lugar del infinito actual (consistente en considerar el resultado final de un proceso infinito, sin pasar necesariamente por cada una de las etapas) ha sido identificado por la literatura como una de las dificultades para la comprensión de la series (Kidron, 2002).

Los resultados anteriores nos muestran un amplio abanico de conceptos cuya comprensión se sospecha influyente en la de las series numéricas, que de por sí ofrecen un grado importante de complejidad dada, entre otros, por el grado de abstracción que requiere su concepción. Como dijimos al comienzo, la abstracción toma en consideración la construcción de relaciones entre elementos matemáticos. Por tanto, conocer las relaciones que establecen los estudiantes entre estos elementos involucrados en la comprensión de las series numéricas podrá ser de ayuda para generar un patrón de posibles relaciones que se deberían tener en cuenta a la hora de planificar estrategias efectivas de aprendizaje. En el caso de las series numéricas, el elemento matemático sucesión de sumas parciales se ha mostrado clave para su comprensión (Codes, 2010) por ser un elemento integrante de estas en el que confluyen la noción de recursividad y dos sucesiones (véase más adelante la definición formal de serie).

Por tanto, con el objetivo último de avanzar en el conocimiento sobre la comprensión de la noción de serie numérica, nos fijamos en uno de sus elementos matemáticos involucrados: la sucesión de sumas parciales, y nos preguntamos cómo estudiantes de primer año universitario aprenden este concepto (las sucesiones de sumas parciales). Para dar unos primeros elementos de respuesta a esta pregunta, se ha decidido hacer un estudio de casos con estudiantes de ingeniería informática sobre el desempeño de estudiantes universitarios frente a tareas que implican las sucesiones de sumas parciales. Para ello, se han analizado las respuestas de dos grupos de estudiantes de primer curso a una serie de tareas diseñadas ad hoc. La herramienta utilizada para este análisis, la descomposición genética, proviene de la teoría conocida por las siglas APOS y de la propuesta de Brown *et al.* (2008) sobre los modos de conocer un proceso iterativo infinito. Esperamos que nuestros resultados sean útiles para reflexionar y plantear estrategias de enseñanza que persigan mejorar el aprendizaje y avalen la pertinencia de la herramienta teórica diseñada para el análisis.

En la siguiente sección se presentan los elementos principales de la teoría APOS que sustentan esta investigación y a continuación se propone una descomposición genética para la noción de sucesión de suma parcial atendiendo a su naturaleza de proceso iterativo infinito. Posteriormente se describe cómo se llevó a cabo la recogida de datos y se muestra y analiza la actividad que realizaron los alumnos. Para finalizar, se exponen las conclusiones y se plantean cuestiones en relación con las series numéricas que podrán ser abordadas en futuras investigaciones.

MARCO TEÓRICO

La teoría de aprendizaje conocida con las siglas APOS (Action, Process, Object, Schema; APOE en su traducción al castellano) es una adaptación de la teoría piagetiana al aprendizaje de la matemática avanzada que parte de la hipótesis de que «el conocimiento matemático consiste en la tendencia de un individuo a enfrentarse, en un contexto social, a lo que es percibido como situaciones matemáticas problemáticas construyendo acciones, procesos y objetos y organizándolos en esquemas para dar sentido a estas situaciones y resolver los problemas» (Dubinsky y McDonald, 2001: 276). Según esta teoría, los conceptos matemáticos se construyen aplicando transformaciones sobre objetos (matemáticos) para obtener otros objetos, en un continuo devenir entre tres formas de conocer: como acción, proceso u objeto.

Cuando en el contexto de la teoría APOS se habla de acciones, se hace referencia a transformaciones de objetos matemáticos percibidas por el individuo como algo externo a él. Una acción, por ejemplo, puede ser la aplicación de un algoritmo, la ejecución mecánica de unos pasos que no conllevan una reflexión sobre el significado y el alcance de estos. El hecho de que no haya una reflexión no tiene una connotación negativa, simplemente es la característica de este estado que de manera natural ocurre cuando se construye el conocimiento. Se dice, por tanto, que un individuo tiene una concepción acción en relación con un objeto matemático, o que su modo de conocer dicho concepto está en el nivel de acción, cuando realiza tareas relacionadas con ese objeto que no derivan de una introversión, al margen de la dificultad que conlleven.

El paso de una concepción acción a una concepción proceso se produce cuando el individuo se desliga parcialmente de los sentidos y entra en juego un pensamiento más profundo a través de la abstracción. Esto se produce tras la repetición de la acción que lleva al individuo a reflexionar sobre ella y a extraer algunas cualidades invariantes de dicha transformación. Se dice entonces que la acción se ha interiorizado en un proceso. Cuando esto ocurre, el individuo puede, sin necesidad de ejecutar explícitamente todos los pasos de la transformación, construir en su mente el resultado de estos, reflexionar sobre ellos y describirlos.

En un nivel superior de abstracción el individuo percibe los procesos que ha construido mentalmente como un todo y es capaz de ejecutar transformaciones sobre ellos. Cuando esto ocurre se dice que se ha encapsulado el proceso en un objeto. Un individuo con una concepción objeto de una noción matemática tiene capacidad para recuperar los procesos que subyacen y aplicar acciones sobre ellos, a la vez que ejecutar mecánicamente algoritmos; se dice entonces que ha desencapsulado el objeto. Lo que diferencia a un individuo con una concepción objeto de otro con una concepción acción o proceso es que no está limitado a ejecutar una serie de pasos guiados o a trabajar solo a nivel procedimental.

Estas formas de conocer como objetos, procesos y acciones se organizan en la mente del individuo creando esquemas no estáticos que evolucionan conforme se construye el conocimiento. En la teoría APOS, la idea de esquema para una noción específica matemática es la de «la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas» (Trigueros, 2003: 11). Las relaciones constituyen un aspecto esencial de los esquemas ya que estas son las que marcan la diferencia entre diferentes niveles de comprensión, entendiendo que comprender es conocer algo de una determinada manera.

Una herramienta potente para analizar los modos de conocer de un individuo en relación con una noción matemática consiste en describir las construcciones mentales que este pone en juego, en términos de acciones, procesos, objetos y esquemas, cuando se enfrenta a una situación en la que debe resolver un problema relacionado con esa noción matemática (Asiala *et al.*, 1996). Este análisis teórico, que recibe el nombre de descomposición genética, es un instrumento de referencia tanto para analizar la comprensión de los estudiantes como para el diseño de materiales didácticos. Es importante destacar que no es única, ya que depende de las observaciones y experiencia en el aula de los investigadores que la plantean, y no es estática porque puede modificarse a la luz de los resultados de las investigaciones.

DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE SUCESIÓN DE SUMAS PARCIALES COMO PROCESO ITERATIVO INFINITO

Definición formal de serie numérica

Dada la sucesión $\{a_n\}$, Knopp (1956: 44) utiliza la expresión abreviada

$$\sum a_n \quad \text{o} \quad \sum_n a_n$$

para indicar la sucesión $\{S_n\}$ cuyo término general se puede expresar como

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

Cuando esta sucesión de sumas parciales (SSP en lo que sigue) $\{S_n\}$ es convergente, escribimos

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

y llamamos «suma de la serie» a este límite finito. El carácter de este tipo particular de sucesiones depende de la naturaleza de la sucesión $\{a_n\}$.

La escritura del término general de una SSP admite siempre al menos dos formatos, como un sumatorio o de forma recursiva, y en ambos queda patente su naturaleza iterativa y la coexistencia de otro elemento de naturaleza también iterativa, la sucesión $\{a_n\}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \begin{cases} S_0 = a_0 \\ S_n = S_{n-1} + a_n, \ \ n \geq 1 \end{cases}$$

Propuesta de descomposición genética

A partir de la definición de serie emergen varios elementos matemáticos complejos, de los cuales nos centraremos en dos: por un lado, la SSP, que a su vez engloba la noción de sucesión; por otro lado, los procesos iterativos a los que en este contexto se les puede añadir el adjetivo *infinito* dada la naturaleza de las sucesiones. Tal como se indicó en la introducción, la SSP parece ser un elemento clave para la comprensión de las series numéricas, lo que nos lleva a querer estudiar con más precisión su papel. Realizaremos este estudio utilizando las herramientas de la teoría APOS y nuestros resultados supondrán un avance en la investigación sobre la comprensión de las series numéricas. La elección de la teoría APOS se debe a que esta nos proporciona una herramienta para estudiar cómo un individuo aprende las SSP, dado que Brown *et al.* (2008) definen un proceso iterativo infinito (Pii) como «la aplicación repetida y sin fin de una trasformación mental o física de objetos, que involucra la variación de uno o más parámetros en cada repetición» (p. 118), y que requiere un «tipo de construcción mental que se ajusta a la categoría de proceso según la teoría APOS» (p. 125).

Para Brown *et al.* (2008) un Pii se construye mentalmente coordinando dos esquemas, el de la iteración en el conjunto de los números naturales , y el de una transformación que puede aplicarse reiteradas veces y cuyo resultado depende de un número natural. Un individuo manifiesta una concepción acción de un Pii cuando ejecuta la transformación para un número determinado de naturales, centrándose en la variable contador de la transformación, que solo toma valores naturales, y asignándole valores concretos para obtener el resultado. Por ejemplo, comenzando en $n = 1$, el individuo obtiene el resultado de la transformación para ese valor de la variable n; luego tiene que añadirle 1 para pasar al paso siguiente ($n = 2$) y obtener el siguiente resultado de la transformación, y así sucesivamente: iterando la acción de añadir 1 a la variable contador (iteración en los naturales), va obteniendo los resultados de la transformación para cada uno de esos naturales. Para ilustrarlo, considérese la sucesión de números reales $\left\{a_n = \frac{1}{n}\right\}$. Para $n = 1$, se obtiene $a_1 = 1$; para el siguiente natural, $n = 2$, se obtiene $a_2 = \frac{1}{2}$; y así sucesivamente. La transformación consiste en evaluar la expresión general de la sucesión para cada valor de la variable n.

Cuando estas acciones se repiten para distintas secuencias de números naturales, coordinando un proceso de iteración en un segmento finito de $\mathbb{N}$ con la transformación, el individuo puede imaginar cómo es el resultado de la transformación para un natural cualquiera n sin necesidad de ejecutar la acción para los anteriores, $n = 1$, $n = 2$, es decir, interioriza las acciones en un proceso que ve como una totalidad: una sola transformación que asocia un objeto a cada natural en orden. Se dirá entonces que ha construido el Pii. En el ejemplo anterior, esto ocurre cuando el individuo es capaz de imaginar cómo es un término cualquiera de la sucesión y apreciar algunas características del objeto resultante de la transformación, como ser siempre positivo, ser el inverso de un natural o pertenecer al intervalo (0,1].

Cuando la iteración en los naturales trasciende a cualquier conjunto finito de naturales y se determina cuál es el estado del proceso iterativo en el infinito, el objeto que resulta no siempre es como los objetos obtenidos de la transformación para un natural cualquiera, de hecho no se evalúa el proceso en ningún número natural específico y por tanto no tiene por qué conservar algunas de sus características. Por ejemplo, en el caso anterior cuando se responde a cuál es el comportamiento de la sucesión cuando n tiende a infinito, es decir, cuando se calcula el límite en el infinito, el resultado es un número natural que no es negativo, pero no es el inverso de ningún número natural, es el número 0. El resultado de encapsular el proceso como respuesta a una transformación sobre él es el objeto que Brown *et al.* (2008) denominan «objeto trascendente para el proceso» (p. 126).

Lo que sigue se mostró en Codes (2010) como parte de la descomposición genética de la noción de convergencia de una serie numérica. En ella se adapta la descomposición genética de Pii de Brown *et al.* (2008) al caso de la SSP.

Comprensión de la sucesión de sumas parciales

Para el caso de las sucesiones de sumas parciales, considerando su expresión general como sumatorio, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, el Pii involucrado posee una doble naturaleza recursiva, la de S_n y la de a_k, que le añade cierto nivel de complejidad (Codes, 2010). A esto se añade el hecho de que se trate de una función con dominio discreto, $S_n = f(\text{n})$ con $Dom(f) = \mathbb{N}$, de la cual normalmente interesará conocer su carácter, es decir, si es o no convergente. Diremos entonces que poseer una concepción acción de la SSP consiste en obtener los primeros valores de la sucesión $\{S_n\}$ aplicando sucesivamente la transformación consistente en añadir al término anterior de la sucesión un nuevo sumando. Este sumando es a su vez el resultado de la trasformación consistente en obtener un término de la sucesión $\{a_n\}$, para lo cual suele ser necesario conocer el valor de a_n para un natural dado.

Por tanto, la acción de obtener un término de la sucesión $\{S_n\}$ a partir de su expresión como sumatorio o de forma recursiva es, en general, el resultado de dos evaluaciones: una primera para obtener el valor del nuevo término de a_n, que en los casos más sencillos consistirá únicamente en sustituir el valor de la variable n en una expresión algebraica, y una segunda en general más compleja porque involucra al término anterior de la sucesión $\{S_n\}$ y al nuevo sumando resultante de la evaluación anterior; la complejidad resulta de tener que realizar dos evaluaciones en vez de una. Estas transformaciones encadenadas provocan que, en ocasiones, cuando la primera es más sencilla, el individuo se fije solamente en ella.

Ejemplo de concepción acción de la SSP como Pii para $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$				
PRIMERA EVALUACIÓN	$a_1 = \frac{1}{2}$	$a_2 = \frac{1}{4}$	$a_3 = \frac{1}{8}$	$a_4 = \frac{1}{16}$
	$a_1 = 0{,}5$	$a_2 = 0{,}25$	$a_3 = 0{,}125$	$a_4 = 0{,}0625$
SEGUNDA EVALUACIÓN	$S_1 = \frac{1}{2}$	$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$
	$S_1 = 0{,}5$	$S_2 = 0{,}75$	$S_3 = 0{,}875$	$S_4 = 0{,}9395$

Cuando el individuo repite varias veces la transformación consistente en obtener nuevos términos de la sucesión $\{S_n\}$, coordinando un proceso de iteración en un segmento finito de $\mathbb{N}$ con la transformación consistente en obtener un nuevo término de la sucesión $\{S_n\}$, se considerará que se construye el *proceso iterativo infinito* (Brown *et al.*, 2008). Con una concepción proceso de una SSP, el individuo puede imaginarse la repetición de la transformación de manera indefinida y reconocer algunas características del resultado del proceso, que en este caso pueden ser el que cada término es mayor que el anterior o que para un valor avanzado de la variable n el resultado es un número decimal menor que 1 cuyas primeras cifras son 0,999.

Ejemplo de concepción proceso de la SSP como Pii para $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$					
$S_1 = \frac{1}{2}$	$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$	$\dots$	$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$
$S_1 = 0{,}5$	$S_2 = 0{,}75$	$S_3 = 0{,}875$	$S_4 = 0{,}9395$	$\dots$	$S_n \sim 0{,}999X$ [2]

2. Dado que no hay un patrón sencillo para expresar las cifras decimales de los sucesivos términos de la sucesión, se ha optado por representar el aspecto que tiene para un valor de n mayor o igual a 10: las primeras cifras decimales son tres nueves y después siguen otros decimales. Cuanto mayor es el valor de n, más nueves consecutivos aparecen después de la coma decimal.

Para poseer una concepción objeto de la SSP, se ha de encapsular el proceso iterativo infinito aplicando una trasformación sobre él. En este punto es donde entra en juego el esquema de límite de una sucesión, ya que dicha transformación está encaminada a obtener el límite de la SSP. Sin embargo, no basta con el mero empleo de algoritmos y reglas para obtener ese límite, sino que se requiere una imagen de límite madura y libre de conflictos (en el sentido de Tall y Vinner, 1981).

Ejemplo de concepción objeto de la SSP como Pii para $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$
$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$

En el caso de las series numéricas convergentes, el objeto trascendente (la suma de la serie) es finito. En este artículo no se ha profundizado en el caso de que la serie no sea convergente, bien porque diverja o porque el límite no exista, dado que en la literatura se trabaja normalmente con el caso de límite convergente.

Las transformaciones que se deben llevar a cabo en cada una de las etapas descritas involucran otros esquemas cuyo desarrollo incide directamente en la construcción de la SSP. Por un lado, conocer el valor de cada término de $\{a_n\}$ requiere a menudo (en el caso en que a_n venga dado por un término general) destrezas algebraicas que no siempre se han adquirido para evaluar una expresión con números naturales (Herscovics, 1989). Por otro lado, el estudio del carácter de la sucesión a través del cálculo del límite conlleva también dificultades asociadas al cálculo algebraico, así como a la comprensión de lo que significa un límite en el infinito (Earles, 2000; Mamona-Downs, 2001; Monaghan, 1991; Monaghan, Sun y Tall, 1994; Roh, 2008; Tall y Vinner, 1981; Williams, 2001) y la concepción de infinito (Dubinsky, Weller, McDonald y Brown, 2005; Fischbein, Tirosh y Hess, 1979; Garbín y Azcárate, 2002; Weller, Brown, Dubinsky, McDonald y Stenger, 2004).

Tal como dijimos en la introducción, la pregunta que guía el trabajo presentado en este artículo es cómo los estudiantes de primer año universitario aprenden el concepto de SSP, dado que este elemento se ha mostrado clave para la comprensión de las series numéricas (Codes, 2010). Para aportar elementos de respuesta, se ha desarrollado este análisis teórico sobre las SSP y este instrumento ha sido empleado para analizar el trabajo y los diferentes estadios atravesados por dos grupos de estudiantes con diferentes niveles de comprensión (Codes, 2010). De este modo, nuestro objetivo es doble: además de responder a nuestra pregunta, buscamos validar la descomposición genética presentada y su utilidad para estudiar el trabajo de estudiantes que comienzan a trabajar con series numéricas. Respondiendo a esta pregunta comprobaremos que las concepciones previas de algunas nociones implicadas en las series numéricas influyen en su comprensión y de ese modo avanzaremos en su conocimiento.

METODOLOGÍA

Para este artículo se han empleado los datos provenientes de una investigación más amplia (Codes, 2010) en la que se grabaron todas las sesiones de clase, tanto las clases magistrales como las clases en las que los alumnos resolvían ejercicios, mientras se trabajaba el tema de series numéricas con alumnos de primer curso de Ingeniería Informática. Se emplearon tres fuentes distintas: los apuntes de los alumnos, las grabaciones de las conversaciones de los alumnos en la clase habitual mientras resolvían las tareas correspondientes a ese día (en el aula de ordenadores o en la clase de pizarra) y la captura de todo lo que acontecía en la pantalla del ordenador mientras trabajaban en el aula de ordenadores con el software de cálculo simbólico *Maple* (Codes, Sierra y Raboso, 2007). La profesora, durante la experimentación, es el primer autor de este artículo, por lo que se grabaron en vídeo todas las sesiones de aula para triangular los datos y asegurar que en las sesiones de clase la investigadora solo cumplía con su papel de docente.

Todos los alumnos participantes, catorce en total, aceptaron voluntariamente que se les grabara en clase mientras resolvían los ejercicios que se proponían para realizar en el aula. Se distribuyeron en un total de seis pequeños grupos formados por dos o tres alumnos (cuatro grupos de dos y dos grupos de tres), por cuestiones técnicas y para garantizar la intervención de todos los participantes. Los ejercicios trabajados durante la experimentación fueron básicamente de dos tipos: los habituales de estudio del carácter de alguna serie, y otros diseñados por la profesora, como el que se muestra en este artículo, ideado para introducir el concepto de serie numérica. De los seis grupos que participaron en las grabaciones, en este artículo se muestran las intervenciones de dos de ellos, los grupos S1 y S3, mientras resuelven en el aula esta actividad introductoria (Codes, 2010). Tal como especificamos en la introducción, para arrojar elementos de respuesta a la pregunta de investigación enunciada en este artículo, proponemos un estudio de casos y los dos grupos S1 y S3 tuvieron momentos de discusión que nos permiten ver diferentes momentos y etapas de la construcción de la SSP.

Antes de comenzar con las series numéricas, los alumnos habían estudiado la definición de sucesión numérica y algunas propiedades y criterios de convergencia. También habían comenzado a trabajar con el software *Maple*, para lo que se les proporcionó unas líneas de comandos que ejecutaban algunas instrucciones útiles para listar los primeros términos de una sucesión, representarlos en el plano cartesiano o calcular su límite. De ese modo, para realizar estas acciones con la SSP durante la experimentación solo tendrían que modificar la expresión general de la sucesión. La actividad descrita en este artículo se realizó a lo largo de dos sesiones y media de clases de 50 minutos, en el aula de ordenadores. Después se siguió el mismo esquema que para las sucesiones: definición, propiedades y algunos criterios de convergencia.

El grupo S3 estaba compuesto por tres estudiantes que pertenecían al mismo grupo de amigos de clase; habitualmente quedaban fuera de clase para estudiar y realizar las prácticas de otras asignaturas de la titulación. Se pensó que el hecho de que el grupo ya funcionara trabajando en equipo garantizaba su participación mientras se les grababa en clase. Para los tres era su primer año en la universidad. Los dos miembros del grupo S1 no eran compañeros habituales en clase, pero accedieron con agrado a trabajar juntos para que se les grabara. Para uno de ellos era su primer año en la universidad, pero el otro ya había cursado dos veces un primer curso de Ingeniería Informática en otra universidad sin aprobar la asignatura donde se introducen las series numéricas. En general, en el análisis de los datos se hará referencia al grupo de manera global; así, cuando se muestran las producciones de un sujeto concreto, se hacen extensivas al grupo bien porque sean representativas de este, bien porque el resto del grupo no se plantee refutarla.

La actividad Rectángulos

La actividad Rectángulos introduce el concepto de serie numérica a través de tareas en las que aumenta paulatinamente el nivel de abstracción: se comienza con el cálculo de áreas de figuras familiares para los estudiantes (rectángulos), para pasar paulatinamente al registro numérico y gráfico y finalizar con cuestiones sobre un número infinito de términos y el estudio de la condición para la convergencia de la serie geométrica (Codes, 2010). El nivel de abstracción viene dado, además de por el cambio de registro, por los elementos matemáticos implicados en cada una de las tareas y las relaciones que se pueden establecer entre ellos.

Inicialmente se pide al alumno que calcule el área de un rectángulo de dimensiones 2x1 y posteriormente se suceden cinco apartados, de los que solo mostraremos aquellos en los que están más en juego las concepciones de los estudiantes sobre la SSP y el Pii:

– Enfoque geométrico: se pide al alumno que observe cómo, a partir de un cuadrado de lado 1, se va generando una figura a través de varios pasos: en cada paso se añade a la figura anterior un nuevo rectángulo cuya área es la mitad del área del anterior rectángulo generado (figura 1).

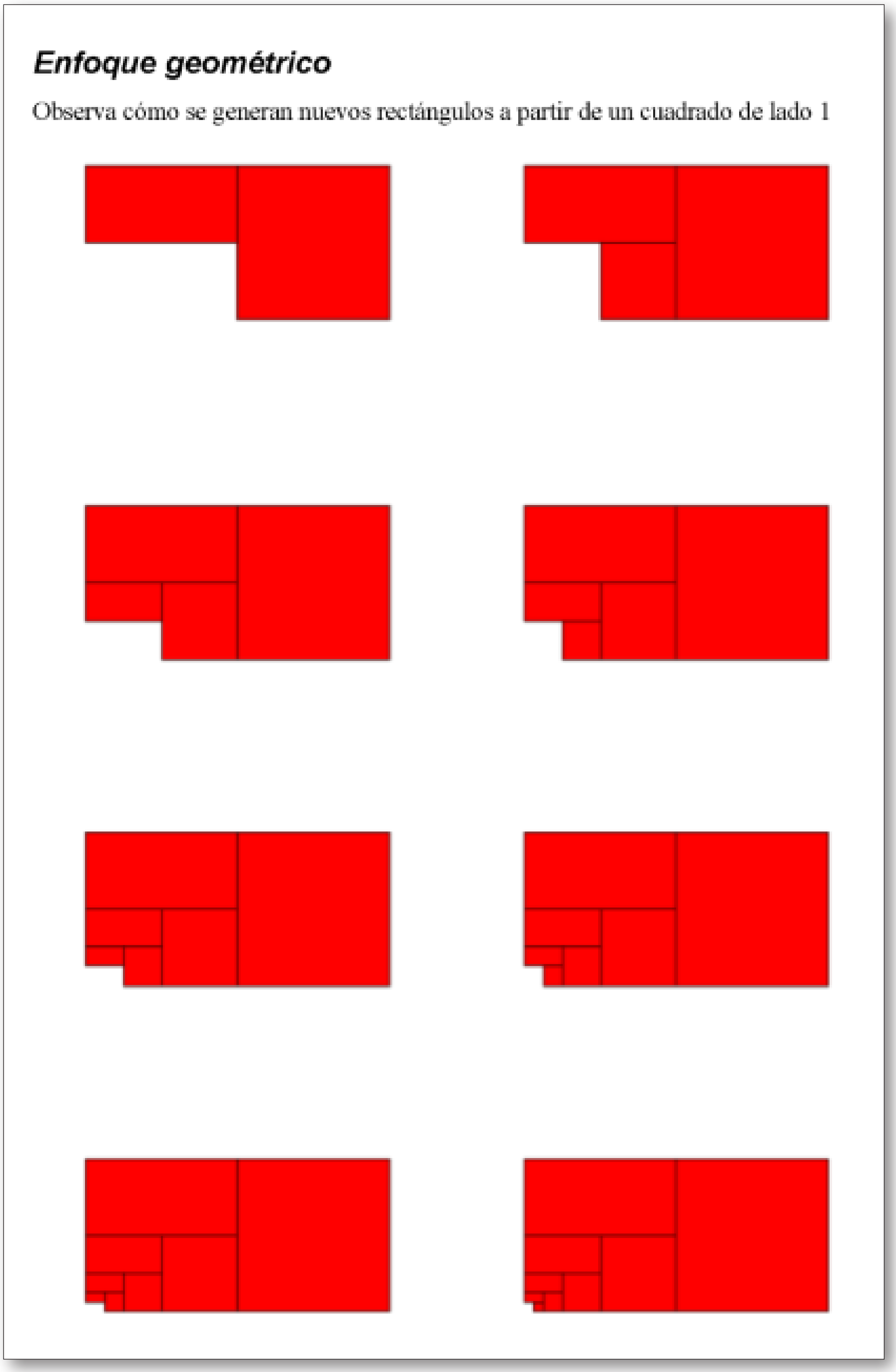


Fig. 1. Primer apartado de la actividad Rectángulos.

– Calcula: se solicita el cálculo de las áreas de los nuevos rectángulos generados en cada paso del apartado anterior, así como de la figura resultante de añadir el nuevo rectángulo a la figura anterior.

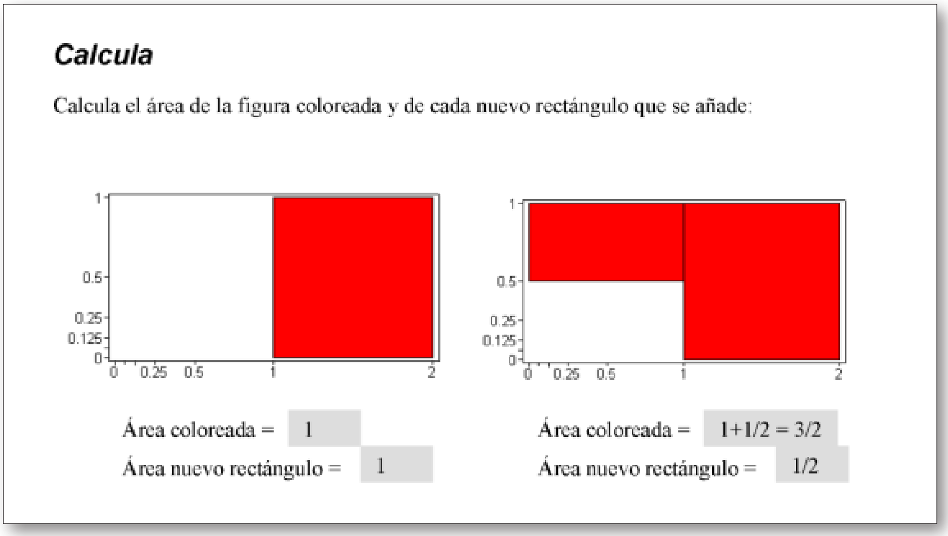
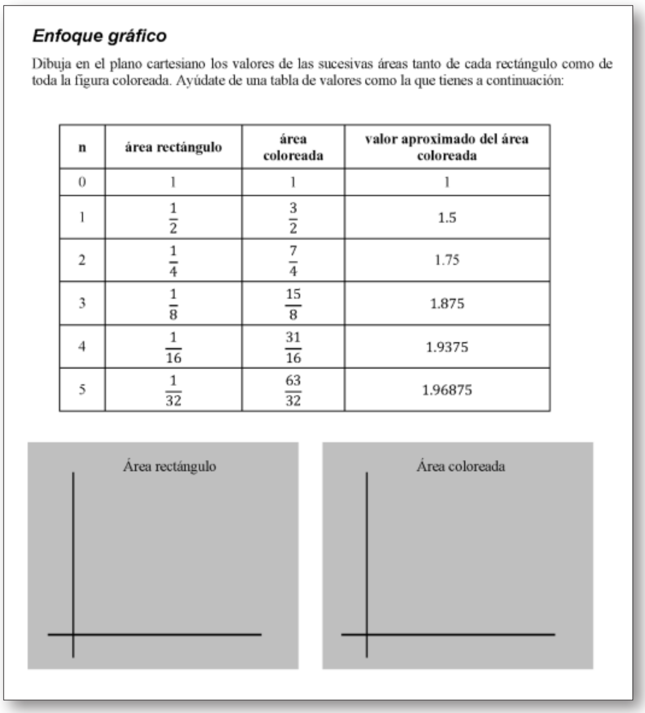


Fig. 2. Enunciado y primeros casos resueltos a modo de ejemplo del apartado Calcula.

– Enfoque gráfico: se listan en una tabla los primeros términos de la sucesión de las áreas de los nuevos rectángulos y de las áreas de las figuras resultantes de añadir en cada paso el nuevo rectángulo, estos últimos con notación fraccionaria y decimal, y se pide representar esa información en el plano cartesiano (sobre papel, ya que no es necesario el uso del software).



Enfoque gráfico

Dibuja en el plano cartesiano los valores de las sucesivas áreas tanto de cada rectángulo como de toda la figura coloreada. Ayúdate de una tabla de valores como la que tienes a continuación:

n	área rectángulo	área coloreada	valor aproximado del área coloreada
0	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1.5
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$	1.75
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{15}{8}$	1.875
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{31}{16}$	1.9375
5	$\frac{1}{32}$	$\frac{63}{32}$	1.96875

Fig. 3. Enunciado del apartado Enfoque gráfico.

– Reflexiona: con lenguaje simbólico, se pide dar el valor de la suma de los infinitos sumandos de la sucesión de los nuevos rectángulos.

Reflexiona

¿Cuánto vale la suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$?

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=$

Acabas de comprobar que una suma de infinitos sumandos puede estar acotada y por tanto tener un valor finito.

Los términos $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ forman una progresión geométrica porque para obtener un término a partir del anterior hay que multiplicar por una cantidad constante llamada razón. Normalmente llamaremos a este valor r. En este proceso de construcción de rectángulos, la razón es $r=\frac{1}{2}$. En el apartado **Resultados** tienes más información acerca de las progresiones geométricas.

Fig. 4. Apartado Reflexiona.

A continuación se procede a analizar las respuestas de los alumnos a estos tres apartados.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Tal como se dijo en la introducción, es importante conocer qué tipo de relaciones establecen los estudiantes entre los elementos involucrados en la comprensión de las series numéricas; además, la SSP se ha mostrado clave para esta comprensión (Codes, 2010). Buscando tener elementos que nos permitan abordar nuestra pregunta, cómo los estudiantes aprenden esta SSP y el papel que esta juega para comprender las series numéricas, en esta sección se muestran las respuestas de los dos grupos S1 y S3 a los apartados Calcula, Enfoque gráfico y Reflexiona. Además de las razones de espacio, hemos escogido centrarnos en estos tres apartados, pues son en los que los alumnos tienen oportunidad de manipular elementos de la SSP y familiarizarse con su comportamiento. En lo que sigue, se identificará a cada alumno por un código que comienza por el grupo al que pertenece; por ejemplo, el alumno D del grupo S1 será identificado como S1D.

Dado el volumen de datos que se presentan en este artículo, se ha optado por mostrar los datos y realizar el análisis etapa por etapa para facilitar su lectura. De este modo, las trascripciones del trabajo realizado por los dos grupos y sus producciones en formato papel y con el ordenador, están seguidas de la interpretación, a la luz del marco teórico, de indicadores sobre el nivel de conceptualización y uso de la SSP.

Respuestas al apartado Calcula

El diseño de la actividad se propone introducir el concepto de serie numérica a través de una concepción acción de la SSP. De este modo, el apartado Calcula pide a los alumnos que obtengan el valor del área total sombreada y del nuevo rectángulo que se añade en cada paso. Para ello los alumnos deben coordinar el esquema de iteración en el conjunto de los naturales, con la doble transformación consistente en obtener un nuevo valor del área del nuevo rectángulo y sumarla a la anterior área coloreada.

Los alumnos de grupo S1 completan estas acciones correctamente:

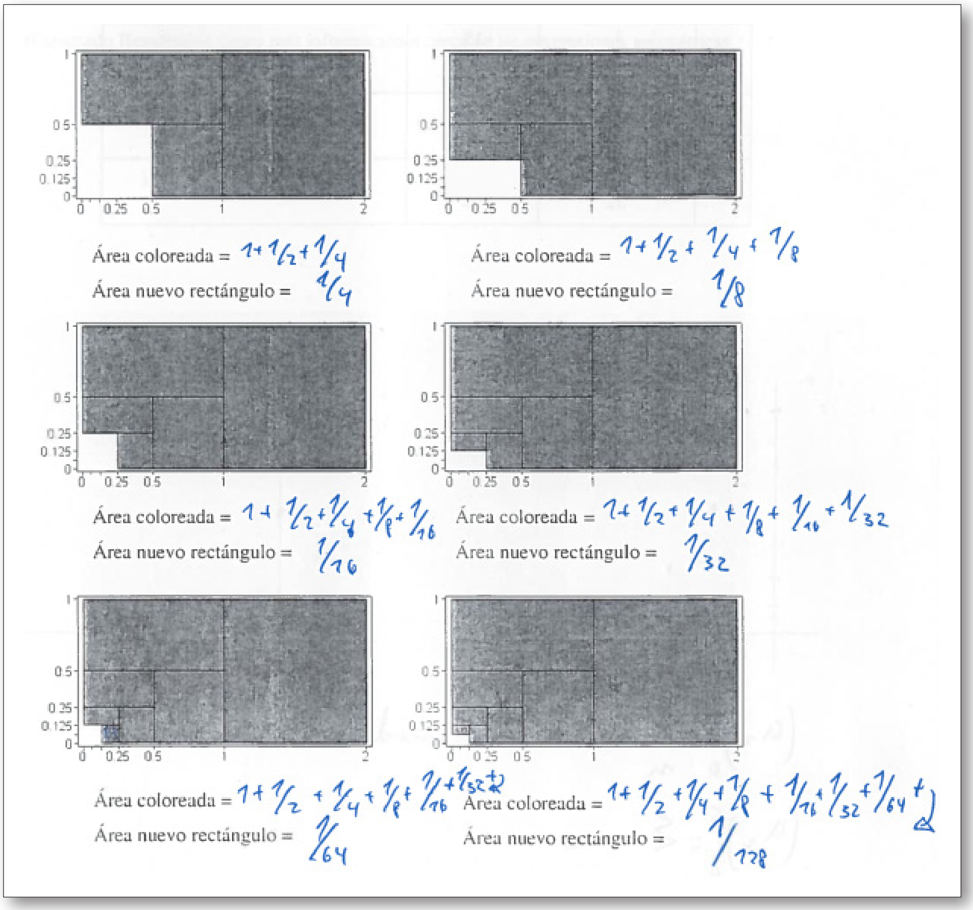


Fig. 5. Respuesta de S1JM al apartado Calcula.

En la trascripción del diálogo del grupo S1 se aprecia cómo S1D encuentra rápidamente el patrón general del nuevo rectángulo y lo expresa verbalmente con lenguaje matemático:

S1D: Bueno, vamos a… esto es dos a la… uno partido de dos a la ene, ¿no?
S1JM: ¿Qué? No. Un octavo, un dieciseisavo, un... claro.
S1D: Eso es dos a la ene.
S1JM: Sí, eso es.
[Los dos escriben]
S1D: Ciento veintiocho. Ahí está. Tres cuartos más cuatro cuartos… tres y cuatro.
S1JM: ¿Tres cuartos más cuatro…? ¡Ah, que quieres sumarlos!
S1D: Siete cuartos.
S1JM: Si no hace falta que los sumes.

A pesar de que en este apartado no se les pedía explícitamente el modo en que debían expresar los resultados, el grupo S1 mantiene la estructura de SSP para los sucesivos valores del área total coloreada, al escribir cada resultado con la suma de los primeros términos de la sucesión $\left\{a_n = \frac{1}{2^n}\right\}$. Los estudiantes comienzan a manifestar, de este modo, un vínculo entre las dos sucesiones que intervienen en la SSP, la propia $\{S_n\}$ y $\{a_n\}$. Además, se deja entrever una concepción proceso de Pii cuando S1D adelanta cómo es el término general de la sucesión $\{a_n\}$.

Los alumnos del grupo S3 también manifiestan una concepción acción de SSP, pero cometen un error al calcular las sucesivas sumas de fracciones; este tipo de error ya se había previsto en la descomposición genética (Herscovics, 1989). Esto les lleva a obtener valores incorrectos de las respectivas áreas que representan la SSP: el alumno S3M comienza realizando correctamente los cálculos pero se deja llevar por S3R, que se equivoca en la primera suma del área total coloreada, y los modifica haciendo eco de su error.

S3R: Área coloreada, uno. Vale. Área coloreada, uno más un medio. […] ¿Hay que poner todo, uno más un medio más un cuarto? Sí.
S3M: O sea, en el área coloreada lo que vamos a hacer es irle sumando todo el rato un medio, ¿no?
S3R: Claro, es una sucesión.
[…]
S3R: Área coloreada es uno más un medio más un cuarto más un octavo.
S3C: Calla, espérate un momento. [Susurrando]… más un medio… ¿Un octavo? Sí, sí, sí, sí.
S3M: ¿Quince octavos os da?
S3R: Pues es tres cuartos más un octavo. [Hace cuentas].
S3M: Y ahora es un octavo, ¿no? Lo que hay, del área del nuevo rectángulo. ¿No?
S3R: ¿Cuánto has dicho que te da?
S3M: Quince octavos.
S3R: Siete octavos. Porque si es tres cuartos lo anterior, todo esto, más un octavo.
S3M: […] sí que he puesto siete cuartos. Estoy bobo.
S3R: Y el área del nuevo rectángulo es un octavo, ¿no?
S3C: Siete octavos dijimos, ¿no?
[…]
S3M: Sí.

En vez de mantener la estructura de sumatorio, el grupo S3 calcula el valor de las diferentes sumas, obteniendo las fracciones resultantes de estas. Este hecho de forma aislada no significa que mentalmente no se establezca ningún vínculo entre las dos sucesiones que intervienen en una SSP, pero tampoco se tiene constancia de ello. Por otro lado, esta forma de proceder oculta la expresión general de la SSP como sumatorio, lo que puede dificultar el avance en los apartados siguientes.

Después de realizar unas cuantas sumas, S3R y S3M predicen cuál será el siguiente valor antes de calcularlo, por lo que sí dejan explícito, como hizo S1, una concepción proceso de Pii:

S3R: Me la juego, eso va a ser uno partido…
S3M: Uno partido sesenta y cuatro…
S3R: … sesenta y tres sesenta y cuatro
S3C: ¿Cómo sesenta y tres sesenta y cuatro?
S3R: Y esto va a ser… ciento veintisiete... ciento veintiocho. Y esto uno ciento veintiocho.
S3M: Sí, hijo.
S3R: Hago esta. No, hago esta y si está bien, está bien esta.
S3M: Ciento veintinueve partido de ciento veintiocho.
[S3R realiza operaciones a mano]
S3M: Yo ya la tengo. Ciento veintisiete… no, es ciento veintinueve. No, ciento veintisiete.
[…]
S3C: Que no, no lo hagas así a ojo, tío.
S3M: Que sí, que no es a ojo. Que es simplemente una sucesión, ¿no? Esto siempre va… el de arriba es uno menos que el de abajo, siempre, en el área coloreada. Siendo potencia de dos.
[S3R sigue haciendo cuentas y S3C parece que revisa las notas]

S3C: ¿Eh?
S3M: O sea, una potencia de dos menos uno partido una potencia de dos.
S3C: Ah, claro Sí, sí, sí, sí. De acuerdo. Si es verdad. Si es que lo miras en todas y es así. Menos en el de arriba.
[S3R sigue haciendo cuentas a mano]
S3C: En el de arriba no sale.
S3M: Es verdad, macho.
[…]
S3M: El de abajo sí. Sí, hijo, en todos sale.
[S3R comienza a leer el siguiente apartado]
S3C: ¿Sale el de abajo también? ¿No sale el de arriba en este? Tres medios sale otra vez.
S3R: Yo qué sé, si ese ya está hecho, tío.
S3C: Bue.

En esta última parte del diálogo se observa cómo S3C se percata de que las cuentas no son correctas pero el resto del grupo lo ignora y continúa con el siguiente apartado. El hecho de no corregir este error hace que se pierda una oportunidad para que se establezcan vínculos explícitos entre los elementos matemáticos $\{S_n\}$ y$\{a_n\}$

Respuestas al apartado Enfoque gráfico

El grupo S1 utiliza el espacio reservado en el papel para representar gráficamente las dos sucesiones.

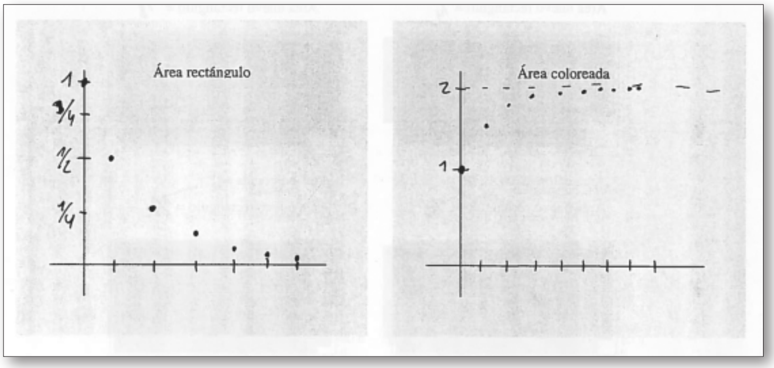


Fig. 6. Respuesta de S1D al apartado Enfoque gráfico.

S1D sugiere a su compañero una técnica para esbozar las gráficas sin mucho esfuerzo y con relativa exactitud:

S1D: La manera más fácil de dibujarlo… Dibujas este, luego la mitad, luego la mitad. No sé, cada uno la mitad del otro y ya está.
S1JM: […] la mitad y la mitad. Ya está, vale. Área coloreada.
S1D: Y ese es justo lo contr... lo mismo pero en dos.
[…]
S1D: Y ahora, cada vez la mitad de la distancia de aquí. […] Hazte una línea en el dos, ¿sabes? [se refiere a la asíntota $y = 2$, que traza en el papel –figura 6, derecha– de forma discontinua]… y vas haciendo la mitad y ya está.
S1JM: Ahí tiene una mitad. Ahí… la mitad. Ahí la mitad y ahí la mitad. Ya está. Que siempre va a más, pero nunca llega a dos. O sea, tiende a dos. La suma… casi dos.

La concepción proceso de la SSP del grupo S1 se manifiesta claramente en este apartado. Por un lado, la representación gráfica de los sucesivos valores de las áreas coloreadas muestra la idea que tiene el grupo sobre el proceso resultante de cada iteración para un natural cualquiera: partiendo de 1, un valor mayor que el anterior y menor que 2, con el matiz de que la diferencia entre dos valores consecutivos cada vez es menor (se observa en la altura de los sucesivos puntos). Estas características también se manifiestan en la marca de la línea discontinua que ejerce de asíntota de la función discreta correspondiente a la sucesión de sumas parciales. Estas acciones del grupo S1 indican que han construido el proceso mental infinito al que Brown *et al.* (2008) llaman *proceso iterativo infinito*. Además, en la última intervención de S1JM que se muestra, este informa sobre la acción de evaluación que ejecuta sobre el proceso iterativo que le podría llevar al objeto trascendente; su afirmación de que «siempre va a más», independiente del valor de *n*, revela una concepción proceso. Sin embargo, al añadir «nunca llega a dos. […] La suma… casi dos», demuestra que en su concepción de proceso está presente el uso del infinito potencial, tal como la literatura lo prevé (Kidron, 2002).

El grupo S3 recurre al *Maple* para obtener sus representaciones gráficas. Este apartado lo realizaron en la sesión de clase siguiente a la del apartado anterior y, en vez de reutilizar las expresiones que obtuvieron, vuelven a calcular la expresión general de la SSP con una fracción algebraica:

S3M: El de abajo, o sea el de arriba es el doble del de abajo menos uno. Más uno. Menos uno, menos uno.

[…]

S3R: Ya, pero esa expresión no la puedes poner así tampoco. ¿Cómo pones que es el doble del de abajo?

S3M: Simplemente poniendo el mismo de abajo pero multiplicado por dos.

S3R: ¿Y cómo llamas a lo de abajo?

S3M: Dos a la ene. ¿Cómo lo voy a llamar? Dos a la ene por dos, menos uno.

S3R: Es decir, cuatro elevado a la ene menos uno. Que no es.

Una vez más muestran indicios de haber construido una concepción proceso de la SSP, al obtener la expresión general de la sucesión de sumas parciales que emplearán para dibujar la gráfica con *Maple*:

$$S_n = \frac{2 \cdot 2^n - 1}{2^n}$$

Esta expresión la obtienen a partir de los datos de la tabla del enunciado. Al obtener una expresión para cualquier valor de *n*, el grupo muestra conocer cómo realizar cada paso y cuál es el resultado de la repetición de la transformación un número indefinido de veces. Sin embargo, tal como dijimos en el apartado anterior, el hecho de haber optado por calcular el resultado de cada suma parcial les lleva a no hacer explícita la relación entre las sucesiones $\{S_n\}$ y$\{a_n\}$.

Cuando se disponen a introducir la expresión anterior en la línea de comandos de *Maple*, cometen diversos errores, como escribir incorrectamente un paréntesis o utilizar la misma letra como parámetro y como variable, con lo que obtienen resultados incorrectos. Esto les lleva a replantearse la expresión general de la SSP, pero no son capaces de obtenerla correctamente porque, además de los errores anteriores, hay que tener en cuenta que parten de los resultados erróneos que obtuvieron en el apartado Calcula. No siendo capaces de corregir sus errores, piden ayuda a la profesora (P) y esta les induce a encontrar una expresión con un sumatorio para el término general de la sucesión de sumas parciales:

P Ahora a ver qué expresión habéis metido. Dos por dos a la *k*. Pues hombre, para eso poned dos a la *k* más uno, ¿no? […] Pero bueno, aparte de eso, menos uno partido de dos a la *k*. ¿Qué habéis puesto ahí?

S3M: El doble del de abajo menos uno.
S3R: Yo tenía otra, yo tenía dos a la ene. Bueno, dos a la *k* más uno partido de dos a la *k*. No.
P: ¿Por qué tanto follón? […] A ver, un segundo, ¿qué habéis hecho aquí, en la página anterior? ¿Qué habéis hecho aquí?
S3R: Ir sumando lo anterior.
[…]
P: […] En cada paso, ¿qué era el área coloreada?
S3R: La mitad de la anterior.
P: ¿La mitad de la anterior?
S3R: No, la…
P: La anterior más un nuevo sumando, ¿no? ¿Sí o no?
S3R: Sí.
[S3M asiente]
S3C: Sí, sí, sí.
[…]
P: Para ene uno. Para ene dos [señala los sucesivos dibujos de los rectángulos]: esta, más esta, más esta. Para ene tres: esta, más esta, más esta, más esta. Para ene cuatro: esta, más esta, más esta, más esta, más esta. Para ene, ene.
[…]
P: El rectángulo enésimo, su área es uno partido de dos a la ene. ¿Y el área coloreada total?
[…]
S3R: Pues el área del nuevo más lo que ya había del anterior. [Sonríe].
P: Pues eso, y entonces al final qué tienes.
S3M: Un sumatorio.

Con la nueva expresión, el grupo mantiene una concepción proceso de la SSP, pero ahora el vínculo entre los dos elementos matemáticos $\{S_n\}$ y $\{a_n\}$ es explícito. Sin embargo, al utilizar de nuevo el software para representar gráficamente los términos de $\{S_n\}$ a partir de su expresión general como sumatorio, no son capaces de recuperar las líneas de comandos que la profesora les había proporcionado para las sucesiones de sumas parciales y tampoco son capaces de escribirlas ellos mismos. Tras varios intentos en los que al menos sí son capaces de reconocer el error de los resultados que van obteniendo, piden ayuda a la profesora que finalmente les dicta la expresión que deben escribir en el ordenador. En el caso de estos alumnos, las dificultades con los cálculos algebraicos se suman al uso del software y estos van a dificultar el avance en el apartado siguiente.

Respuestas del apartado Reflexiona

En este apartado el grupo S1 momentáneamente mantiene dos posturas: la de S1D es firme con relación a que el valor de la suma «tiende» pero no llega a ser dos, mientras que S1JM se cuestiona que el valor de la suma sea dos:

S1D: Nunca llega a dos, o sea que… tiende a dos pero nunca es dos.
S1JM: Sí, pero aquí… es que sería dos.
S1D: Mmm
S1JM: ¿Sería dos o no?

Tras este corto diálogo, S1JM cambia de idea y piensa que no se alcanzará el valor 2:

S1D: No.
S1JM: No, nunca llega a dos.
S1D: Nunca llega a dos, o sea que… Tiende a dos pero nunca es dos.

Puede verse cómo, de nuevo, el grupo S1 ejecuta la acción de evaluación sobre el Pii, consistente en obtener el límite, que da paso al objeto trascendente (Brown *et al.*, 2008). Sin embargo, para estos estudiantes el resultado de esta evaluación no alcanza dicho objeto por la concepción de límite inalcanzable que reiteradamente manifiestan: en su hoja de trabajo, S1D escribe con letras «tiende a 2» como respuesta a la suma de los infinitos sumandos. La literatura identifica esta concepción de infinito potencial como una concepción a nivel de proceso (Dubinsky *et al.*, 2005), pero en el contexto de las series numéricas se puede considerar que esta acción va más allá de una concepción proceso porque el motivo para no alcanzar el objeto trascendente se debe solo a una concepción de límite inalcanzable que los estudiantes han construido en cursos anteriores (Codes, 2010).

El grupo S3 no se plantea dar un valor para la suma y se limita, en su lugar, a reescribir la suma infinita con un sumatorio. Antes de escribirla, S3R enuncia correctamente el sumatorio:

S3R: ¿Cuánto vale la suma uno más…? Es igual a uno partido dos a la ene, desde cero hasta infinito, ¿no? ¿Se pone así?

Sin embargo, a la hora de escribirlo comete de nuevo un error relacionado con el uso de las variables y los parámetros:

S3R: Sumatorio de uno partido dos a la *k* desde ene igual a cero hasta *k*.
S3C: Claro, si a *k* le das un valor fijo, está acotada y… Yo creo, vamos, que es así.

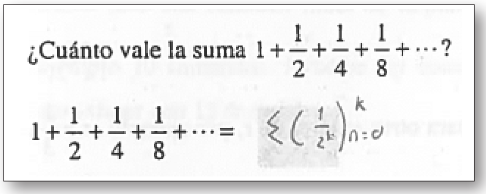


Fig. 7. Respuesta de S3R al apartado Reflexiona.

Como se aprecia en la figura 9, la suma que escribe S3R utilizando la expresión de sumatorio no es una suma infinita porque solo suma $k + 1$ términos de la sucesión $\left\{a_n = \frac{1}{2^n}\right\}$, a pesar de haber comenzado enunciando correctamente el sumatorio. Formulando solo la suma infinita, no llega a completarse la acción de evaluación sobre el Pii que es necesaria para obtener el objeto trascendente.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los datos recogidos con los dos grupos de estudiantes nos permiten dar algunos elementos de respuesta a la pregunta formulada en la introducción. A lo largo de estos tres apartados de la actividad, se ha comprobado cómo los dos grupos van ejecutando acciones para obtener términos de una sucesión, con las que construyen una concepción acción de SSP, e interiorizan esas acciones en un proceso cuando obtienen una expresión general de dicha sucesión. Sin embargo, hay dos aspectos que diferencian a ambos grupos. Por un lado, que el grupo S1 exteriorice de manera autónoma el vínculo entre las dos sucesiones $\{S_n\}$ y $\{a_n\}$, frente al grupo S3 que requiere la intervención de la profesora. Aunque en algunos casos una expresión directa del término general de $\{S_n\}$ pueda ser útil, en esta actividad introductoria una expresión directa ocultaría justamente la SSP, que se conjeturó ser un elemento clave para la compresión de las series numéricas. Efectivamente, en el caso de S3, se ve que sus acciones se dirigen más a operar con este término general y se alejan de la posibilidad de construir una concepción de objeto para $\{S_n\}$.

Por otro lado, el grupo S3 comete reiteradamente errores de cálculo y de tipo algebraico, que frenan su avance en la construcción de la SSP. Los errores que comenten con el lenguaje de *Maple* no los consideramos de distinta naturaleza y no deben confundirse con los derivados de las dificultades técnicas que puede añadir el empleo de la tecnología. Más bien se trata de la manifestación de las dificultades de estos alumnos debidas a la complejidad del álgebra. A partir de estos errores, agravados por la aparente ausencia de la estructura de la SSP como suma parcial de términos de otra sucesión, los estudiantes llegan a una sucesión que no tiene las características de la SSP que describe el proceso iterativo y por tanto su comportamiento, en cuanto a la convergencia, entra en conflicto con el proceso que la ha originado. Además, las dificultades producidas por el álgebra demandan toda la atención de los alumnos y por consiguiente, las relaciones entre los elementos matemáticos ligados al concepto de serie numérica quedan en un segundo plano. Esto es coherente con los resultados de la literatura en cuanto al impacto de las dificultades algebraicas para la comprensión de los procesos límite (Herscovics, 1989).

El grupo S1 va más allá del Pii, llegando incluso a efectuar en varias ocasiones una acción de evaluación sobre dicho proceso encaminada a obtener el objeto trascendente (Brown *et al.*, 2008). Esto ocurre al prever cuál sería el límite de la SSP; sin embargo, en este caso, la idiosincrasia del concepto de límite y el uso del infinito potencial dificultan la encapsulación del proceso por la concepción de límite inalcanzable que han adquirido.

Tal como se dijo en la introducción, el concepto de serie numérica se revela, en la literatura en didáctica, como un concepto complejo por su nivel de abstracción y la cantidad y complejidad de elementos matemáticos que engendra y que están relacionados en él. En este artículo se ha focalizado en uno de sus componentes que aparecen explícitamente en la definición de serie como límite de una sucesión de sumas parciales: la sucesión de sumas parciales como proceso iterativo infinito. A partir del trabajo de Brown *et al.* (2008) se ha diseñado una descomposición genética de este concepto que ha resultado útil para mostrar manifestaciones de distintas concepciones acción y proceso en dos grupos de alumnos. En las producciones de cada grupo se han encontrado matices que diferencian el modo de conocer este concepto y que revelan la importancia de algunos elementos matemáticos para la comprensión de las series numéricas, tal como se había conjeturado, lo que parece validar la utilidad de la descomposición genética propuesta. Además, uno de los grupos se acerca a una concepción objeto de SSP, que no alcanza por la noción preconcebida de límite inalcanzable.

Atendiendo a la naturaleza del conocimiento matemático que, según Piaget y García (1982), se construye a partir de una estructura anidada de relaciones entre elementos matemáticos, cabe preguntarse cómo afectan las distintas concepciones de SSP como proceso iterativo infinito a la comprensión del concepto de serie numérica, y cómo debe ser esa concepción para que sea posible establecer vínculos consistentes entre este concepto y el de límite de una sucesión (LS). Según nuestros datos, parece que el nexo de unión de los elementos SSP y LS podría articularse a través de la concepción objeto de SSP, que requiere una concepción de infinito actual que no siempre poseen los alumnos universitarios (Brown *et al.*, 2008; Kidron, 2002).

Los resultados mostrados parecen indicar otro foco de atención al que deben dirigirse las miradas de futuras investigaciones en la comprensión de las series numéricas: los vínculos que se establecen entre los elementos matemáticos $\{S_n\}$ y $\{a_n\}$, que se hacen visibles cuando el alumno realiza la segunda evaluación que requiere la SSP. La riqueza de estos vínculos nos parece determinante para construir el concepto de serie numérica y será el foco de próximas investigaciones.

REFERENCIAS

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education II*, *Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS) Issues in Mathematics Education*, 6, Providence: American Mathematical Society, pp. 1-32.
https://doi.org/10.1090/cbmath/006/01

Brown, A., McDonald, M. y Weller, K. (2008). Step by step: iterative processes and actual infinity. *Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS) Issues in Mathematics Education*, 15, pp. 117-144.

Codes, M. (2010). *Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional*. Tesis doctoral. Salamanca: Universidad de Salamanca. Disponible en línea: <http://hdl.handle.net/10366/76452>.

Codes, M., Sierra, M. y Raboso, M. (2007). Innovación en la recogida de datos para una investigación de carácter cualitativo. Un ejemplo con alumnos universitarios en un entorno computacional. En M. Camacho, P. Flores, y P. Bolea (eds.). *Investigación en Educación Matemática XI*. San Cristóbal de La Laguna, Tenerife: SEIEM, pp. 261-271. Disponible en línea: <http://seiem.es/docs/actas/11/Actas11SEIEM.pdf>.

Dreyfus (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 25-41.

Dubinsky, E. y McDonald, M. A. (2001). APOS: a constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton (ed.). *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers, pp. 273-280.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A. y Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis: part II. *Educational Studies in Mathematics*, 60, pp. 253-266.
https://doi.org/10.1007/s10649-005-0473-0

Earles, J. S. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(3), pp. 258-276.
https://doi.org/10.2307/749807

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2015). Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), pp. 211-229. Disponible en línea: <http://ensciencias.uab.es/article/view/v33-n2-fernandez-ruiz-rico/1575-pdf-es>.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1575

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L. y Castro, E. (2013). Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto. *PNA*, 7(3), pp. 117-130. Disponible en línea: <http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/23475/1/PNA7%283%29-3.pdf>.

Fischbein, E., Tirosh, D. y Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 10, pp. 3-40.
https://doi.org/10.1007/BF00311173

Garbín, S. y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las Ciencias*, 20(1), pp. 87-113.

Herscovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (eds.). *Research issues in the learning and teaching of algebra*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, pp. 60-86.

Kidron, I. (2002). Concept definition, concept image, and the notion of infinite sum in old and new environments. En A. D. Cockburn y E. Nardi (eds.). *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 3. Norwich, UK: PME, pp. 209-216.

Kidron, I. y Tall, D. (2015). The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics*, 88(2), pp. 183-199. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9567-x

Knopp, K. (1956). *Infinite sequences and series*. New York: Dover Publications.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal, a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 48, p. 259. https://doi.org/10.1023/A:1016004822476

Martínez-Planell, R., González, A. C., DiCristina, G. y V. Acevedo (2012). Students' conception of infinite series. *Educational Studies in Mathematics*, 81(2), pp. 235-249. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9401-2

McDonald, M. A., Mathews, D. M. y Strobel, K. H. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects, En E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, y J. Kaput (eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education. IV. Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS) Issues in Mathematics Education*, 8. Providence: American Mathematical Society, pp. 77-102.

Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the Learning of Mathematics*, 11(3), pp. 20-24.

Monaghan, J., Sun, S. y Tall, D. (1994). Construction of the limit concept with a computer algebra system. En J. P. da Ponte y J. F. Matos (eds.). *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 3. Lisboa, Portugal: PME, pp. 279-286.

Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo veintiuno editores.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, 55, pp. 103-132. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000017667.70982.05

Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 69, pp. 217-233.
doi:10.1007/s10649-9128-2

Schwarzenberger, R. L. E. y Tall, D. O. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits, *Mathematics Teaching*, 82, pp. 44-49.

Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp. 151-169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Trigueros, M. (2003). El uso de la noción de esquema en el análisis de la solución de problemas complejos. *XIX Jornadas del SI-IDM*, Córdoba. Disponible en línea: <http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm> (consulta marzo de 2005).

Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonald, M. y Stenger, C. (2004). Intimations of infinity. *Notices of the American Mathematical Society*, 51(7), pp. 741-750.

Williams, S. R. (2001). Predications of the limit concept: An application of repertory grids. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(4), pp. 341-367. https://doi.org/10.2307/749699

Sequence of partial sums as an infinite iterative process: a step towards the understanding of numerical series from an APOS perspective

Myriam Codes Valcarce
Universidad de Salamanca
mcodes@usal.es

Alejandro S. González-Martín
Université de Montréal
a.gonzalez-martin@umontreal.ca

The notion of numerical series is difficult to grasp, both because of the complex mathematical elements related to it and because of the very nature of its definition. Research has identified certain difficulties encountered by students in learning notions such as limits, sequences, and infinity, which must first be grasped in order to understand numerical series. To better determine how the notion of series is absorbed by students, in this paper we focus on the learning process of first-year university students with respect to a specific mathematical element: the sequence of partial sums (SPS).

We developed a case study examining how computer engineering students carry out tasks involving sequences of partial sums. A sample of ad hoc tasks was designed, forming part of a larger activity aimed at introducing the concept of numerical series. We assigned tasks to two groups of students and analysed their answers. This activity was conceived based on a previous study that examined the development of the notion of numerical series throughout history and the mathematical elements that supported its evolution.

The tool we used for this analysis is the genetic decomposition of the notion of SPS, which comes from the theory known as APOS and from the proposal by Brown et al (2008) concerning the ways of knowing an infinite iterative process. The latter is a key element that, in addition to the recursive nature of the SPS, is at the core of the genetic decomposition. It describes certain hypothetical mental constructions that students can put into play when dealing with situations involving SPS. These constructions are described in terms of actions, processes, objects, and schemes that evolve in an individual's mind based on relations s/he establishes among the different mathematical elements linked to the notion of SPS and its modes of representation.

An action conception of SPS manifests when a student calculates the first terms of the sequence $\{S_n\}$. Each term is obtained, in general, after two transformations: a first transformation gets the new value $\{a_n\}$, and then a second adds $\{a_n\}$ to the previous term $\{S_{n-1}\}$. By repeating these calculations, students can envision carrying out this transformation indefinitely and identify certain characteristics of this iterative process without needing to calculate each and every step. At this point, we can state that a process conception of SPS has been attained. To attain an object conception, it is necessary to encapsulate the previous process by applying a transformation to it. Here, the scheme for the limit of a sequence comes into play, since such a transformation aims to find the limit of the SPS. In this paper we have only considered the case of convergent numerical series for which the transcendent object (the sum of the series) is finite, since the literature contains many cases of convergent limits.

Analysis of the students' work shows that the mathematical elements involved in these transformations and the connections established among them have an impact on the development of the notion of SPS. On the one hand, members of group S1 exteriorise the connections they establish between the mathematical elements $\{S_n\}$ and $\{a_n\}$, which are made visible as they perform the second evaluation required by SPS. On the other hand, group members frequently perform an action of evaluation to obtain the transcendent object, that is, the limit of SPS. However, because their previous education instilled in them the idea that a limit cannot be reached, they find it difficult to encapsulate the infinite iterative process they conceived as the result of the connections between $\{S_n\}$ and $\{a_n\}$.

We also observe that members of group S3 repeatedly make calculation and algebraic errors that impede their construction of SPS. The difficulties engendered by algebraic manipulation require students' full attention, and, as a consequence, the connections between the mathematical elements linked to the notion of numerical series are neglected. These results could be used to generate teaching strategies for improved learning and to assess the pertinence of the theoretical tool designed for the analyses.

We conclude by highlighting the importance of connecting the mathematical elements $\{S_n\}$ and $\{a_n\}$ to develop the notion of SPS. We also conjecture the need to find a way of conceiving SPS as an object and of building a mature scheme for the limit of a sequence, in order to construct the notion of numerical series.