ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 35.1 (2017): 157-174
Investigaciones didácticas
http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2075
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Formas de aproximar el área bajo una curva: un estudio con estudiantes de bachillerato

Ways to approach the area under a curve: A study with high school students

Carmen Aranda
I.E.S. Número 3, La Vila Joiosa (España)
carmen.arlo@gmail.com

Maria Luz Callejo
Universidad de Alicante (España)
luz.callejo@ua.es

RESUMEN • En este trabajo caracterizamos cómo estudiantes de bachillerato construyen la idea de aproximación al área de la superficie bajo una curva en un experimento de enseñanza utilizando applets. Las tareas fueron diseñadas atendiendo a una trayectoria hipotética de aprendizaje del concepto de integral definida, considerando las fases de construcción de un concepto apoyadas en la abstracción reflexiva. El análisis de las interacciones entre los estudiantes y sus respuestas permitió identificar tres características en el proceso de construcción de la idea de aproximación al área bajo una curva: sin considerar la idea de aproximación al área como límite de una sucesión; comprensión de la aproximación al área mediante la concepción dinámica y métrica del límite de las sumas superiores e inferiores, pero no de la conexión entre ambas concepciones; y construcción de la idea de cota del error de la aproximación con relación al número de subintervalos de la partición, generada al coordinar las concepciones dinámica y métrica del límite.

PALABRAS CLAVE: aproximación al área; integral definida; trayectoria hipotética de aprendizaje; experimento de enseñanza.

ABSTRACT • In this paper, we characterize how high school students build the idea of approaching the surface area under a curve in a teaching experiment using applets. Tasks were designed taking into account a hypothetical learning trajectory of the definite integral concept, particularly considering the phases of the concept construction supported by reflective abstraction. The analysis of the interactions between students and their answers allow us to identify three characteristics of the construction process of the idea of approaching the area under a curve: not considering the idea of approaching the area as a limit of a sequence; understanding the approaching to the area by the dynamic and metric conceptions of the limit of upper and lower sums, but not considering the connection between both conceptions; and the construction of the idea of approximation error bound in relation to the number of subintervals of the partition generated by the coordination of the dynamic and metric conceptions of the limit.

KEYWORDS: approach to the area; definite integral; hypothetical learning trajectory; teaching experiment.

Recepción: marzo 2016 • Aceptación: noviembre 2016 • Publicación: marzo 2017

Aranda, C., Callejo, M. L., (2017) Formas de aproximar el área bajo una curva: un estudio con estudiantes de bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 35.1, pp. 157-174

INTRODUCCIÓN

La enseñanza del Cálculo constituye una parte importante de los programas en la enseñanza postobligatoria (16-18 años) y de algunos estudios universitarios. Se considera que su estudio debe centrarse en la comprensión de los conceptos más que en aspectos procedimentales como el manejo de reglas para calcular límites, derivadas o integrales (Azcárate, Casadevall, Casella y Bosch, 1996; Berry y Nyman, 2003). Las investigaciones sobre el aprendizaje de las nociones del Cálculo han generado en los últimos años diversas perspectivas con el objetivo de ayudar a entender los procesos de comprensión (Azcárate, Camacho-Machín, González y Moreno, 2015).

Uno de los conceptos fundamentales del Cálculo es el de integral. Algunas investigaciones han puesto de manifiesto las dificultades de los estudiantes para comprender la integral definida como límite de una suma debido a una comprensión no adecuada del proceso de límite (Boigues, Llinares y Estruch, 2010; Orton, 1983), o a no saber relacionar las aproximaciones gráficas y analíticas del concepto (Ferrini-Mundy y Graham, 1994). Por otra parte, algunos autores sugieren que la secuencia de enseñanza debería reflejar su génesis histórica considerando el problema del cálculo del área bajo una curva (Turégano, 1998). Desde esta perspectiva, cuando se introduce la integral mediante las sumas de Riemann o de Darboux, es importante que los estudiantes vean la sucesión de las sumas inferiores/superiores no solo como un listado de números, sino como una función cuyo dominio pertenece al conjunto de los números naturales (McDonald, Mathews y Strobel, 2000). Esta aproximación se apoya en la comprensión de la idea de límite que se convierte así en un prerrequisito para la comprensión de la integral definida.

En relación con este último aspecto, el primer encuentro de los estudiantes con la idea de límite de una función es a través de la idea de aproximación (Cornu, 1991) mediante la concepción dinámica del límite: «Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a […] si cuando x se acerca al número a más que cualquier aproximación, sus imágenes $f(x)$ se acercan a L más que cualquier otra aproximación fijada» (Blázquez y Ortega, 2002: 79). Esta concepción influye en la comprensión de la concepción métrica, aunque Cottrill *et al.* (1996) indican que la concepción dinámica del límite es relativamente complicada para los estudiantes.

Por otra parte, la comprensión de los conceptos del Cálculo tiene que ver con la habilidad para usar el pensamiento visual y el analítico (Zazkis, Dubisnky y Dautermann, 1996), aunque los estudiantes tienen una fuerte tendencia a pensar analíticamente más que visualmente (Eisenberg y Dreyfus, 1991). Por ello, algunos estudios han indicado la necesidad de usar múltiples representaciones (geométricas, numéricas y algebraicas) y de enfatizar las conexiones entre ellas para desarrollar una mejor comprensión del concepto de integral (Berry y Nyman, 2003; Ferrini-Mundi y Graham, 1994; Tall, Smith y Piez, 2008).

En esta línea, y gracias a las posibilidades de interacción y dinamismo que ofrecen las tecnologías, se han hecho propuestas didácticas para introducir los conceptos básicos del Cálculo a partir de herramientas tecnológicas, con objeto de liberar a los estudiantes de realizar manipulaciones algebraicas y cálculos tediosos y centrarse en la construcción de los significados. En particular, Ferrara, Pratt y Robutti (2006) sugieren usar la tecnología para utilizar representaciones equivalentes del mismo concepto, tratando la integral primero a nivel numérico y gráfico, como sumas de rectángulos de base cada vez más pequeña, y después a nivel algebraico.

En cuanto a las investigaciones sobre propuestas didácticas que introducen el concepto de integral presentando simultáneamente múltiples representaciones usando tecnologías, Hong y Thomas (1997) subrayaron el potencial de usar hojas de cálculo y programas de cálculo simbólico; Camacho, Depool y Santos-Trigo (2010) mostraron que la utilización de actividades programadas con las utilidades que ofrecen algunos recursos tecnológicos como el programa *Derive* permite un cierto progreso en el uso de aspectos gráficos y numéricos del concepto de integral definida; sin embargo, aunque algunos alumnos manejaban varias representaciones semióticas, la mayoría tendía a utilizar un único sistema de representación (Camacho y Depool, 2003).

Los resultados de estas investigaciones señalan que la comprensión de la integral definida va más allá de la definición formal, y que es preciso tener en cuenta la necesidad de distinguir un objeto de sus formas de representación en distintos registros semióticos, así como potenciar una comprensión que vaya más allá del aspecto puramente procedimental (Azcárate *et al.*, 1996).

En este contexto el objetivo de esta investigación es:

> Caracterizar cómo estudiantes de bachillerato (16-18 años) construyen la idea de la aproximación al área de la superficie bajo una curva en un experimento de enseñanza utilizando *applets* que potencian la relación entre diferentes modos de representación.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico de nuestra investigación para la construcción de un nuevo concepto es el *mecanismo reflexión sobre la relación actividad-efecto* (Simon, Tzur, Heinz y Kinzel, 2004) y *las trayectorias hipotéticas de aprendizaje* (Simon y Tzur, 2004) ya utilizadas en otros trabajos (Aranda y Callejo, 2010). Este mecanismo fue elaborado por Simon *et al.* (2004) a partir de la idea de *abstracción reflexiva* de Piaget (1977), y describe la construcción de un nuevo concepto haciendo operativas las ideas de «transposición del conocimiento a un plano superior» y «reconstrucción», que Piaget usa para explicar el proceso de abstracción, ofreciendo «lentes teóricas» para analizar cómo los estudiantes utilizan el conocimiento para construir nuevos conceptos (Tzur, Hagevik y Watson, 2004). Tzur y Simon (2004) han identificado dos fases en la elaboración de un nuevo concepto: la de *participación*, entendida como el proceso donde el alumno abstrae una regularidad en la relación entre la actividad realizada y el efecto producido, y la de *anticipación*, cuando el estudiante usa la regularidad abstraída en situaciones distintas a aquellas en las que se llevó a cabo la abstracción.

En un estudio sobre el proceso de abstracción matemática que se llevó a cabo con una muestra amplia de estudiantes de secundaria, Roig (Roig, 2008; Roig, Llinares y Penalva, 2012) identificó tres momentos en la transición de la fase de participación a la fase de anticipación: *proyección*, *reflexión* y *anticipación local*. En el momento de *proyección* los alumnos construyen un conjunto de registros o unidades de experiencia –reconocen y clasifican las relaciones entre la actividad y el efecto–, en el momento de *reflexión* abstraen la regularidad a partir de la información procedente del conjunto de registros –coordinando y comparando los diferentes registros–, y en el momento de *anticipación local* aplican la regularidad identificada (la concepción matemática que organiza la situación) a nuevos casos particulares. Roig considera, en términos del mecanismo *reflexión sobre la relación actividad-efecto*, que las acciones propias de estos momentos de transición están anidadas mediante la coordinación de información que caracteriza la reflexión, pues se produce en forma paralela a la generación de casos particulares.

Por otra parte, para generar una *trayectoria hipotética de aprendizaje* es necesario conocer los conceptos previos de los estudiantes y tener presentes los objetivos de aprendizaje, las tareas matemáticas que se usan para fomentar el aprendizaje y las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje en el contexto de un conjunto particular de tareas. Estos dos últimos puntos son interdependientes y no necesariamente conllevan un orden, ya que las tareas se seleccionan a partir de la hipótesis sobre el proceso de aprendizaje, mientras que las hipótesis están basadas en las tareas que se han de realizar. Aquí, señalan Simon y Tzur (2004), entra en juego la manera como se caracteriza el mecanismo *reflexión sobre la relación actividad-efecto*, porque se plantea la necesidad de seleccionar aquellas tareas que, desde las *actividades* disponibles para los alumnos, sean la base del aprendizaje pretendido. «El mecanismo ofrece un marco para pensar sobre cómo las tareas pueden fomentar el proceso de aprendizaje» (p. 101).

Por último, para favorecer la construcción de los conceptos del Cálculo se propone el uso de la tecnología como instrumento de mediación semiótica (Ferrara, Pratt y Robutti, 2006) para representar estos conceptos usando distintos sistemas de representación: en forma numérica, gráfica y algebraica. Estas representaciones no son meras ilustraciones de los conceptos, pues la tecnología permite «actuar» sobre ellas. Entre estas tecnologías se encuentra el uso de *applets* diseñados ad hoc, que se manejan con facilidad y realizan tareas específicas como, por ejemplo, visualizar la aproximación al área bajo una curva mediante rectángulos inscritos o circunscritos, donde la base de los rectángulos se puede modificar mediante un deslizador. En pantalla se puede ver la representación gráfica y el valor de la aproximación por exceso o por defecto, así como la diferencia entre ambas aproximaciones. En este sentido, los experimentos de enseñanza constructivista (Gravemeijer, 2004) contemplan ciclos de enseñanza de las matemáticas (Simon, 1995) donde intervienen: el conocimiento del profesor, las *trayectorias hipotéticas de aprendizaje* y la evaluación del conocimiento de los estudiantes. La evaluación del experimento de enseñanza proporciona nuevo conocimiento al profesor, con lo que se cierra un ciclo de enseñanza.

Considerando el problema de investigación identificado y los referentes teóricos descritos nos planteamos la siguiente pregunta:

¿Cómo caracterizar el proceso de construcción del significado de la idea de aproximación al área de la superficie bajo una curva mediante los tres momentos de la transición de la fase de participación a la fase de anticipación en el proceso de abstracción reflexiva?

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes en esta investigación fueron 15 estudiantes de 2.º de bachillerato (17-18 años) de la modalidad de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. Estos estudiantes participaron en un experimento de enseñanza en el que se introducía la idea de integral definida. Los participantes habían estudiado en 1.^{er} curso el concepto de límite de una función en un punto con un enfoque procedimental y en 2.º curso el concepto de derivada usando *applets* diseñados *ad hoc*.

Diseñamos una secuencia didáctica para la introducción de la integral definida a partir del cálculo del área de una superficie bajo una curva (Turégano, 1998) articulada de la siguiente manera:

- Cálculo del área del círculo por el método de «agotamiento».
- Aproximación del área de una superficie bajo una curva mediante suma de áreas de rectángulos de igual base.
- Diferencia entre área bajo una curva en un intervalo y la integral definida de la función definida por la curva en dicho intervalo: definición de la integral definida.
- Propiedades de la integral.
- Introducción de la función integral, del teorema fundamental del Cálculo y la regla de Barrow.

A los estudiantes se les propusieron once tareas con sus correspondientes guías de trabajo. Con ellas se pretendía que construyeran el concepto de integral como límite de las sumas de Darboux, estudiaran sus propiedades, construyeran el concepto de función integral, el teorema fundamental del Cálculo y la regla de Barrow. Los estudiantes podían apoyarse en *applets* para responder a ocho tareas, las demás debían realizarlas con lápiz y papel. Siempre se les pedía redactar sus respuestas a las preguntas planteadas.

Los estudiantes se agruparon en seis parejas y un trío de similar nivel académico. El papel de la profesora era hacer de guía durante las sesiones, aclarar dudas y moderar una puesta en común al final de cada sesión.

En este artículo nos centramos en el proceso de construcción del significado de la aproximación del área de una superficie bajo una curva. Esta parte comprende tres tareas: aproximación al área bajo un cuadrante de circunferencia, expresión algebraica de las sumas superiores e inferiores de la aproximación al área bajo un arco de parábola y, por último, cálculo del error de aproximación bajo un arco de parábola. La primera tarea –objeto de este trabajo– fue la aproximación al área bajo un cuadrante de circunferencia, porque previamente los estudiantes habían calculado el área de un círculo por el método de «agotamiento», y se pretendía que viesen otra forma de calcular el área. La segunda y tercera tareas abordan una problemática diferente a la de la primera: las relaciones entre las representaciones gráficas y analíticas del concepto de integral. Estas dos últimas son complementarias de la primera.

El objetivo de esta tarea era que los estudiantes generaran un conjunto de registros de la relación entre una acción (modificar el número de subintervalos de la partición) y el efecto producido (a mayor número de intervalos de la partición mejor aproximación del área). Los estudiantes disponían de una guía y podían apoyarse en un *applet* (figura 1; <https://www.geogebra.org/m/zYgruzB6>) que les permitía variar el número de subintervalos de la partición, todos de la misma longitud, mediante un deslizador, dando valores enteros desde 0 hasta 100. En la pantalla aparecían los rectángulos que recubrían la superficie por exceso y por defecto, y el valor de las sumas superiores e inferiores.

Características de las tareas en el experimento de enseñanza organizadas según la hipótesis sobre el proceso de aprendizaje

Las cuestiones que organizaron las acciones de los estudiantes fueron (figura 1): familiarizarse con el *applet* (cuestión I); identificar el efecto que produce aumentar el número n de subintervalos de la partición y el valor de las sumas superiores e inferiores (cuestiones II y III); calcular el valor de n para aproximar el área con un error menor que un número dado (cuestión IV); relacionar el valor de n con las aproximaciones y el error de estas (cuestión V).

Esta secuencia de cuestiones viene determinada por la *hipótesis sobre el proceso de aprendizaje* (figura 2), generada considerando los tres momentos de la transición de la fase de participación a la fase de anticipación: la *experimentación* aumentando el valor de n permite incrementar el número de subintervalos de la partición, favoreciendo la observación de lo que ocurre con los valores de *las sumas inferiores y superiores* (cuestiones II y III). El registro de estas acciones y de los efectos producidos permitirá que los estudiantes puedan *relacionar* el incremento del número de subintervalos, el valor de las sumas superiores e inferiores, el recubrimiento del cuadrante de círculo por rectángulos y una cota del error de aproximación (momento de proyección). La relación establecida entre la acción realizada y sus efectos producidos puede llevarle a *inferir* que al aumentar el valor de n se obtiene una mejor aproximación del área del cuadrante de círculo, y que el error se mantiene por debajo de un valor dado al aumentar el valor de n. Inferir este nuevo conocimiento favorece poder *coordinar* los procesos de aproximación en el dominio y en el rango y los sistemas de representación numéricos y geométricos (momento de reflexión). La cuestión IV, en la que se pide el valor del área con un error menor que dos valores dados, está dirigida a favorecer las *coordinaciones* necesarias para construir la concepción métrica del límite. Por último, la cuestión V tiene como objetivo que los estudiantes lleguen a *coordinar* las concepciones métrica y dinámica del límite de las sucesiones generadas, como una evidencia de construcción de la idea de integral definida en este contexto particular, en la transición de la fase de participación a la fase de anticipación del proceso de abstracción.

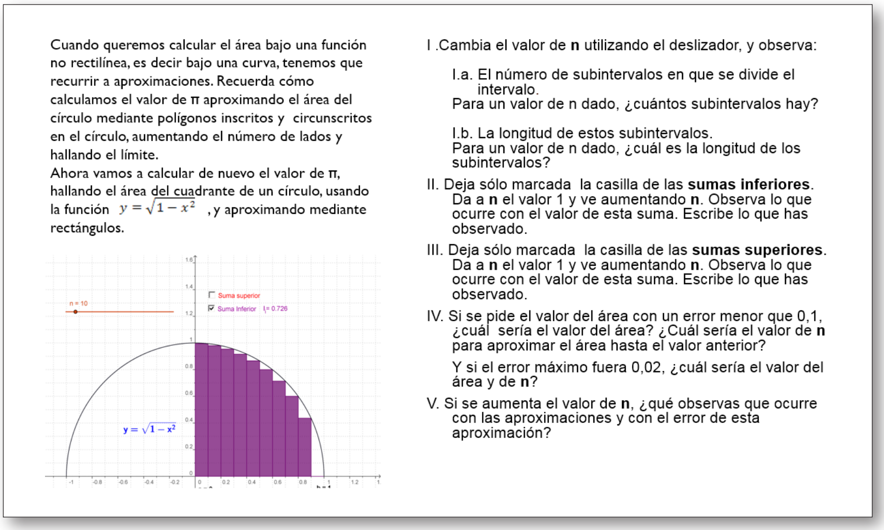

Fig. 1. Tarea de aproximación del área de la superficie bajo un arco de circunferencia y *applet* de apoyo.

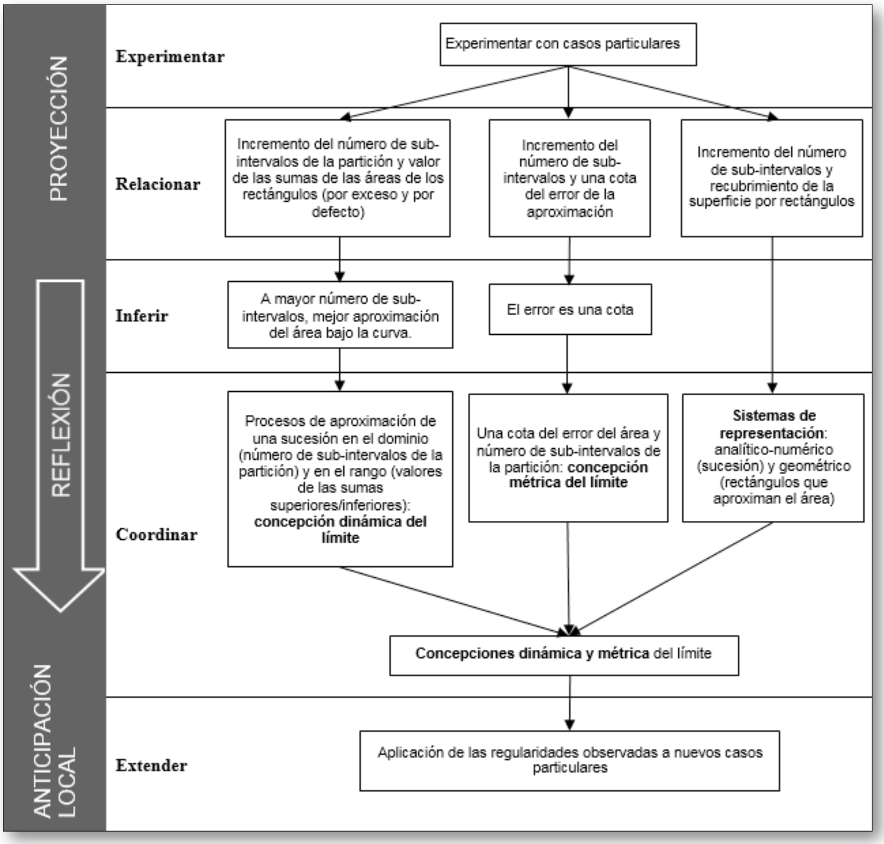

Fig. 2. Momentos de la fase de participación en el proceso de abstracción reflexiva para construir la aproximación al área bajo una curva.

Recogida y análisis de datos

Los datos son el registro de las acciones que efectuaron los alumnos con el *applet* en la resolución de la tarea de aproximar el área de la superficie bajo un arco de circunferencia (figura 1) y las declaraciones orales, que fueron registradas en archivos digitales mediante el sistema CamStudio (<http://camstudio.es/>) (Codes, Sierra y Raboso, 2007), y sus hojas de respuesta, es decir, lo que los estudiantes hacían, lo que decían y lo que escribían como conclusión de su proceso. Estos datos nos permitieron caracterizar distintas formas mediante las que los estudiantes de bachillerato construían la aproximación al área de la superficie bajo una curva.

Para el análisis de los datos, en primer lugar se trascribieron las comunicaciones orales de las sesiones, se ilustraron con las capturas de las pantallas y se indicaron las acciones realizadas con el *applet*. Se consideró como unidad de análisis cada una de las acciones o declaraciones –orales o escritas– de los estudiantes. En segundo lugar se asociaron a cada unidad de análisis los distintos momentos de la fase de participación en el proceso de abstracción reflexiva (figura 2). Para ello previamente se habían especificado los distintos momentos de la transición de la fase de participación a la fase de anticipación en la tarea propuesta, según se indica en la hipótesis sobre el proceso de aprendizaje, en términos del *mecanismo reflexión sobre la relación actividad-efecto*. Para asegurar la validez y fiabilidad del análisis, dos investigadores codificaron por separado las declaraciones y acciones y discutieron las discrepancias, lo cual permitió identificar el proceso de construcción de aproximación al área bajo una curva en un intervalo mediante los *registros de experiencia* de los estudiantes, las *inferencias* realizadas, las *coordinaciones* entre elementos matemáticos o entre modos de representación y la *anticipación local*, generados en esta tarea. En tercer lugar, describimos las trayectorias de aprendizaje de cada una de las parejas o trío a través de los distintos momentos de la fase de participación. Estas trayectorias de aprendizaje se agruparon en función del momento en que se encontraban los estudiantes en la fase de participación.

RESULTADOS

El análisis de las interacciones entre los estudiantes y sus respuestas permitió caracterizar tres formas de comprender el proceso de aproximación: sin considerar la idea de aproximación al área como límite de una sucesión (momento de proyección, 9 estudiantes); comprensión de la aproximación al área mediante la concepción dinámica y métrica del límite de las sumas superiores e inferiores, pero no de la conexión entre ambas (momento de reflexión; 4 estudiantes); y construcción de la idea de cota del error de la aproximación en relación con el número de subintervalos de la partición, generada al coordinar las concepciones dinámica y métrica del límite (momento de proyección avanzado; 2 estudiantes).

Describimos a continuación estas diferentes características del proceso de construcción de la idea de aproximación al área bajo una curva, con protocolos procedentes de parejas de estudiantes situados en cada uno de estos grupos. Las parejas han sido seleccionadas atendiendo a la riqueza de sus interacciones con objeto de ilustrar mejor las tres caracterizaciones.

Sin considerar la idea de aproximación al área como límite de una sucesión (momento de proyección)

Los estudiantes con estas características experimentaron con el *applet* para responder a las cuestiones que se les plantearon y generaron casos particulares incrementando el número de subintervalos de la participación y estableciendo su relación con la variación de la suma de las áreas de los rectángulos; sin embargo no presentaban evidencias de que pudieran establecer la relación entre este incremento del número de subintervalos y que ambas sucesiones convergen en el mismo valor.

Por ejemplo la pareja A-J, al ir aumentando el valor de *n* (cuestiones II y III), observó que «cada vez hay más subdivisiones» y que el valor de las sumas inferiores «aumenta pero cada vez más lento», reconociendo la monotonía de la sucesión de las sumas inferiores y que este crecimiento no es lineal. Esta relación también la estableció en el caso de las sumas superiores reconociendo el efecto que producía la acción de aumentar el valor de *n*: «la suma superior va disminuyendo cada vez más lentamente» (tabla 1). Esta forma de relacionar la actividad de aumentar el número de subintervalos y los efectos producidos en las sumas superiores e inferiores se apoya en la coordinación de la información gráfica y numérica. Sin embargo, no hay evidencias de que constataran que a mayor valor de *n*, mejor aproximación del área bajo la curva, y que ambas sucesiones convergen en el mismo valor. Como consecuencia los estudiantes en este grupo tuvieron dificultad para entender que el error es una cota. Por ejemplo, cuando se le pidió a la pareja A-J el valor del área con un error menor que 0,1 necesitó que la profesora (P) les aclarara lo que se pedía (tabla 2).

Tabla 1
Pareja A-J resolviendo la cuestión III

III. Deja solo marcada la casilla de las sumas superiores. Da a n el valor 1 y ve aumentando n. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.	
Lo que hacen	Lo que dicen
Dejan marcada solo la casilla de la suma superior. Aumentan n poco a poco hasta llegar a n=100, 97, 100.	[22] J: Podemos comprobar que la suma superior va disminuyendo cada vez más lentamente, hasta llegar a suma superior n=100, que queda suma superior, S=0,790. Empieza de 1 y baja a 0,790. La progresión cada vez que n aumenta, la disminución es más lenta debido al número de intervalos que hay.

Tabla 2
Pareja A-J resolviendo la cuestión IVa

IVa. Si se pide el valor del área con un error menor que 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ¿Cuál sería el valor de n para aproximar el área hasta el valor anterior?	
Lo que hacen	Lo que dicen
Marcaron la suma superior e inferior y aumentaron n poco a poco, desde n=1 hasta 10.	[56] P: Entonces, por ejemplo aquí la suma inferior, voy a marcar las dos. La superior me da 0,793 y la inferior me da 0,776 ¿Me podríais dar una aproximación al área? [57] A: Pues, sumas las dos y la mitad ¿no? [58] P: Por ejemplo… [59] J: O restando la superior y la inferior, también. [60] P: Si restas la superior y la inferior, ¿qué es lo que obtienes? Obtienes el error máximo. [61] A: El margen de error. [62] J: El error máximo. … [65] P: Vosotros tenéis que llegar a un valor de n en el que esa diferencia sea inferior a 0,1. [66] A: n=100 [67] J: En n=100, que si son casi calcados. [68] P: En n=100 la diferencia es mucho menor. [69] A: 0,1. En n igual a… claro. Se pide el valor del área con un error menor que 0,1. ¿Menor? menor no puede ser, tiene que ser igual a 0,1 … [94] A: Pues ya está. El error máximo es el de la suma superior y el error mínimo el de la suma inferior, porque la diferencia de la suma superior y de la suma inferior es de 1 décima.

Cuando se le pidió el valor del área con un error menor que 0,02 se apoyaron en que para n=100 el error era menor que 0,1 y relacionaron los valores 0,02 y 0,1. Parece que se dieron cuenta de que si el error era menor (0,02) el valor de *n* debía aumentar, pero pensaron que la relación era de proporcionalidad inversa diciendo: «Si el error máximo fuera 0,02, para que sea cinco veces más grande que 100, o sea 500. ¿Cuál sería el valor del área y de n? Lo que no sé es si está bien. Pero mira, si tenemos 0,02 y lo multiplicamos por 5, nos da 0,1, que 0,1 era 100».

Esta forma de proceder parece indicar que, aunque estos estudiantes fueron capaces de relacionar el número de subintervalos de la partición y las sumas de las áreas de los rectángulos (por exceso y por defecto), no pudieron establecer la relación entre este incremento del número de subintervalos y una cota del error de aproximación. Como consecuencia, estos estudiantes reflejaron algunas características del momento de proyección pero no todas, por lo que no pudieron avanzar en su proceso de construcción del significado de integral definida.

Comprensión de la aproximación al área mediante la concepción dinámica y métrica del límite de las sumas superiores e inferiores, pero no de la conexión entre ambas (momento de reflexión)

Los estudiantes que reflejaron estas características relacionaron los valores numéricos de la sucesión creciente (decreciente) de las sumas inferiores (superiores) con el límite de esta sucesión, coordinando la representación numérica (valores de la sucesión de las sumas inferiores/superiores) con la representación geométrica (recubrimiento de la superficie del cuadrante de círculo con rectángulos). Es decir, estos estudiantes reconocieron que a mayor número de subintervalos se obtenía una mejor aproximación bajo una curva, lo que les permitió inferir que el error es una cota. La generación de la idea de cota se vinculó a su capacidad de coordinar los procesos de aproximación de una sucesión en el dominio (número de subintervalos de la partición) y en el rango (valores de las sumas superiores e inferiores con la idea de cota del error).

Por ejemplo, la pareja K-MA, al ir disminuyendo y aumentando los valores de *n* (cuestión II) observó el comportamiento de las sumas inferiores, pues afirmó que «la suma va aumentando a… cuanto mayor es n y cada vez acercándose más al área… al área del cuadrante». Esta interacción indica que están coordinando la aproximación de la sucesión de las sumas inferiores en el dominio (número de subintervalos) y en el rango (área de la superficie que cubren los rectángulos), considerando los modos de representación numérico y geométrico.

Estos estudiantes también se dieron cuenta, al aumentar con el deslizador el valor de *n* dejando marcada no solo la casilla de las sumas superiores como indicaba la cuestión III sino también la de las inferiores, de la variación del error de ambas aproximaciones: «Aquí hay un error hacia menos [se refiere a las sumas inferiores] y aquí hay un error hacia más [se refiere a las sumas superiores]». Por otro lado, constataron que una sucesión «se va acercando desde arriba […] empieza desde un valor y va disminuyendo» y que las dos sucesiones se van aproximando al valor del área del cuadrante, una aumentando y otra disminuyendo: «aquí va aumentando [se refieren a las sumas inferiores] y aquí disminuyendo [se refieren a las sumas superiores]» (tabla 3). Esta manera de actuar muestra la coordinación de la monotonía de las sucesiones de sumas superiores e inferiores y de la aproximación al límite de ambas sucesiones.

Estos estudiantes relacionaron el incremento del número de subintervalos de una partición del intervalo [0,1] con el valor de la suma de las áreas de los rectángulos que recubren un cuadrante de círculo (sumas inferiores y superiores) (momento de proyección). Además, este hecho los llevó a *inferir* que a mayor número de subintervalos, mejor aproximación del área bajo la curva y a *coordinar* los procesos de aproximación de la sucesión en el dominio (número de subintervalos de una partición del intervalo

[0,1]) y en el rango (valores de las sumas inferiores). Sin embargo, la pareja K-MA no fue capaz de realizar una estimación aproximada del valor del límite a partir de los valores de las sumas superiores e inferiores, aunque puso de manifiesto que el incremento del número de subintervalos de una partición del intervalo [0,1] produce una mejor aproximación del valor del área. Por tanto, al encontrar un valor de *n* para el que se obtiene la aproximación buscada, esta aproximación se conserva para los valores mayores que *n*. Esta forma de proceder pone de manifiesto que estos estudiantes estaban usando una concepción métrica de límite de una sucesión para determinar una cota del error del área.

Por ejemplo, la pareja K-MA, cuando se le pidió el valor de *n* para obtener una aproximación del área menor que 0,1 (cuestión IV, tabla 4) utilizó una aproximación del área obtenida en la cuestión anterior (0,78). Con el *applet* comprobó que para *n*=5 no se obtenía la aproximación buscada (I_i=0,659 y S_i=0,859), pero sí para *n*=6 (I_i=0,682 y S_i=0,849). La afirmación: «Pues a partir de n=6 ¿no?» muestra la coordinación entre una cota del error (0,1) y el número de subintervalos de la partición, es decir, que a partir de un valor dado de *n*, en este caso n=6, el error de aproximación es menor que 0,1. Sin embargo, aunque estas expresiones se apoyan en la concepción métrica del límite no les permitieron indicar cuál podría ser la aproximación óptima.

Los estudiantes de este grupo no pusieron de manifiesto la conexión entre la concepción métrica (cota del error de aproximación) y la concepción dinámica del límite (idea de aproximación), que conlleva usar la idea de aproximación óptima, ya que no verbalizaron el hecho de que, a medida que las sumas superiores/inferiores se aproximan al valor del límite (área de la superficie), el error disminuye. Sus respuestas se limitaron a encontrar un valor de n que cumplía la condición pedida, sin indicar cuál podría ser la aproximación óptima, y no expresaron la vinculación entre las aproximaciones de las sumas superiores/inferiores con el valor del límite y la disminución del error.

Tabla 3
Pareja K-MA resolviendo la cuestión III

III. Deja solo marcada la casilla de las sumas superiores. Da a n el valor 1 y ve aumentando n. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.	
Lo que hacen	**Lo que dicen**
Dejan marcada la casilla de las sumas superiores. Aumentan n de 1 a 100.	[29] MA: Y con la siguiente [se refieren a esta tarea] pasa lo mismo, solo que esta es con la… [30] K: Solo que va disminuyendo… va disminuyendo esta.
Parten de n=1. Marcan también sumas inferiores n= 4, 6, ...100. Aplican el zoom para ampliar.	[31] MA: Ah mira, en esta lo que pasa… ponlo… un poco más… aumenta en un poco. Mira… aquí en estos, los de dentro, la esquina que está tocando el arco en la de la derecha… [32] K: Aquí hay un error hacia menos y aquí hay un error hacia más.
n=1, 13.	[33] MA: Esta se va acercando desde arriba, sabes, o sea, empieza desde un valor y va disminuyendo... [34] K: Eso digo, que aquí va aumentando [se refiere a las sumas inferiores] y aquí disminuyendo [se refiere a las sumas superiores].
n=100 Disminuyen el valor de n y luego vuelven al valor 100.	[35] MA: Aquí aumenta hasta π/4, claro. [36] MA: Pongo que aquí se aproxima aumentando.

Tabla 4
Pareja K-MA resolviendo la cuestión IV

IV. Si se pide el valor del área con un error menor que 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ¿Cuál sería el valor de n para aproximar el área hasta el valor anterior?	
Lo que hacen	Lo que dicen
n=100, Señalan en la imagen Si=0,790 Ii=0,780. Mueven el deslizador a n=47, 28, 30, 100.	[44] MA: Tiene que acercarse a esto [se refieren a 0,78] con menos de una décima de diferencia. [45] K: O sea, más de 0,68 y menos de 0,88.
n=1, 7, 6; Señalan que para n=6 Si=0,849 Ii=0,682 n=5 Si=0,859 Ii=0,659	[46] K: Pues a partir de n=6 ¿no?

Construcción de la idea de cota del error de la aproximación con relación al número de subintervalos de la partición, generada al coordinar las concepciones dinámica y métrica del límite (momento de proyección avanzado)

Estos estudiantes relacionaron los valores numéricos de la sucesión creciente (decreciente) de las sumas inferiores (superiores) con el límite de esta sucesión (valor del área bajo la curva) al coordinar la representación numérica (valores de la sucesión de las sumas inferiores/superiores) con la representación geométrica (superficie del cuadrante de círculo).

Por ejemplo, la pareja L-M, al ir aumentado hasta 100 el valor inicial de *n*, n=1, y disminuyéndolo de nuevo hasta 1, observó que las sumas inferiores se aproximan a π/4 (tabla 5).

Tabla 5
Pareja L-M resolviendo la cuestión II

II. Deja solo marcada la casilla de las sumas inferiores. Da a n el valor 1 y ve aumentando n. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.	
Lo que hacen	Lo que dicen
Marcan las sumas inferiores. Van moviendo el deslizador para aumentar el número de subintervalos, desde 1 hasta 100. Luego llevan n a 1 y van aumentando y disminuyendo, como si jugaran [2:00 a 2:53]	[12] L: Cuando aumentan los intervalos la suma se aproxima a 1… [13] M: A uno no, a eso. [14] L: Porque aquí no puede llegar a infinito. Ah, vale. [15] M: No, nunca es 1 porque sería el cuadrado. [16] L: Ah, vale, que la suma se aproxima a 0,78. [17] M: Se aproxima a π/4. Sí, a π/4 ¿Cuánto es π/4?
Abren la calculadora del ordenador. Calculan π/4=0,7853	[19] M: Olé, se aproxima a π/4.

El que la pareja L-M se diese cuenta de que «cuando aumentan los intervalos la suma se aproxima a […] *π/4*» (tabla V), que es el área de un cuadrante de círculo de radio 1, pone de manifiesto que ha coordinado las aproximaciones de la sucesión de las sumas inferiores en el dominio y en el rango. Para ello, estos estudiantes coordinaron los modos de representación numérico (valores de la sucesión de las sumas inferiores) y geométrico (recubrimiento de la superficie del cuadrante de círculo con rectángulos) al observar que, al mover el deslizador aumentando desde 1 hasta 100, aumentaba el valor de las sumas inferiores y el recubrimiento del cuadrante de círculo por rectángulos se aproximaba más a la superficie del cuadrante de círculo, lo que refleja una concepción dinámica del límite.

Los estudiantes de este grupo relacionaron el incremento del número de subintervalos de una partición del intervalo [0,1] y el valor de la sumas inferiores de las áreas de los rectángulos que recubren un cuadrante de círculo (momento de proyección), lo que les llevó a *inferir* que a mayor número de subintervalos, mejor aproximación del área bajo la curva y a *coordinar* los procesos de aproximación de una sucesión en el dominio (número de subintervalos de una partición del intervalo [0,1]) y en el rango (valores de las sumas inferiores) (momento de reflexión), lo que pone de manifiesto la concepción dinámica del límite.

También afirmaron que a partir de un determinado valor de *n* la diferencia entre el valor de las sumas superiores/inferiores y el límite es menor que un valor dado de antemano, lo que pone de manifiesto la concepción métrica del límite. Por ejemplo, cuando a la pareja L-M se le pidió que calculara el valor del área con un error menor de 0,1 y el valor de *n* para aproximar el área hasta el valor anterior, observó que para n=100 y para n=10 se cumplía la condición pedida y se dio cuenta de que «… le podríamos poner más cuadritos, rectángulos de esos y seguiría siendo menor de una décima» (tabla 6), esto es, que el error es una cota. A pesar de haber encontrado valores de *n* para los que el error es menor que una décima, continuaron buscando valores más pequeños de *n* hasta encontrar el valor n=3, lo que les llevó a decir: «A partir de n=3, con que sea más de n=3 ya lo tienes bien» (tabla 6). Esta idea la reafirmaron cuando la profesora les pidió que calcularan el valor de *n* para un error máximo de 0,02. Para ello buscaron si había una relación entre las cotas del error y el valor de *n*, y constataron de forma experimental que si *n* era el doble del caso anterior (n=6) entonces el error era la quinta parte, lo que justificaron con una relación numérica entre los valores del error en el caso anterior (0,1) y en este caso: 0,02=0,1/5, poniendo de manifiesto la construcción y uso de la idea de aproximación optima.

Tabla 6
Pareja L-M resolviendo la cuestión IVa

IVa. Si se pide el valor del área con un error menor de 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ¿Cuál sería el valor de n para aproximar el área hasta el valor anterior?	
Lo que hacen	Lo que dicen
Ponen n=73 y observan que Ii=0,778 y Si=0,792. Para n=100, Ii=0,780 y Si=0,790	[62] L: De 0,1… y sabemos que es 0,785 [la media de la suma para n=100] tiene que ser 0 coma… 68… 68, o, no 0,7 nos tiene que dar la media, para que nos dé 0,7 la media…
…	…
n=16, 10 y observan el valor de las sumas para n=10: Si=0,826, Ii=0,726.	[80] L: Pero en realidad les podríamos poner más cuadraditos, rectángulos de esos y seguiría siendo menor de una décima.
Abren la calculadora del ordenador y calculan (0,826+0,726)/2=0,776.	[81] M: Es que, a ver, menor de una décima quiere decir que tiene que ser 0… 0,685 o 0,885 y nos ha dado 0,7, ahora estamos… [82] L: … bueno.
n=7, 5, 1, 2 y van señalando los valores de Si y Ii,	[83] M: Vale, ah pues vamos a poner 5. Mira aquí la diferencia aún sigue siendo… aún está en 0,7. n=4 la diferencia… es que mira si cogemos n, n=1 no se puede coger, n=1 seguro que no. Esta y sumamos 0,933…
…	…
n=100, n=3 Calculan: (0,896+0,563)/2=1,459/2=0,7295	[97] M: A ver con n=3. Tenemos que [la suma superior] es 0,896. A partir de n=3 el error es menor que una décima. [98] L: Pero pongo un intervalo. [99] M: A partir de n=3, con que sea más de n=3 ya lo tienes bien.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo hemos caracterizado cómo estudiantes de bachillerato construyen la idea de aproximación al área de la superficie bajo una curva en un experimento de enseñanza utilizando *applets*. Los resultados indican tres características que definen dos momentos de la transición de la fase de participación a la de anticipación en el proceso de abstracción reflexiva: proyección y reflexión, que indican saltos cognitivos que deben producirse en dicha transición (figura 3).

La acción de experimentar moviendo el deslizador del *applet* como se indicaba, llevó a los estudiantes a explicitar registros de experiencia que son necesarios para la construcción del concepto de límite de una sucesión, pero no suficientes.

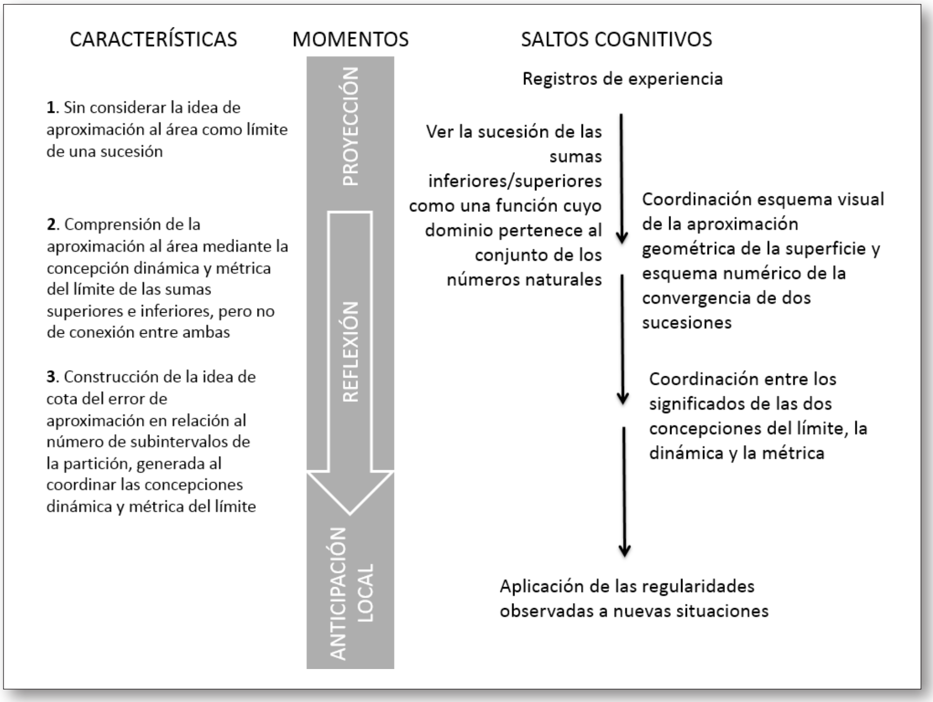

Fig. 3. Características, momentos de la fase de participación y saltos cognitivos en la construcción de la aproximación al área bajo una curva.

En primer lugar, los estudiantes relacionaron el número de subintervalos de la partición con el valor de las sumas superiores o inferiores, es decir n con S_n o I_n, haciendo notar que esta función es monótona y no lineal, lo que implica ver estas sucesiones no como una lista de números, sino como una función de variable natural. Este resultado difiere del de McDonald, Mathews y Strobel (2000) y Boigues, Llinares y Estruch (2010), que encontraron que los estudiantes construían dos objetos cognitivos diferentes en relación con las sucesiones de sumas inferiores y superiores: un listado de números (*seqlist*) y una función cuyo dominio pertenece al conjunto de los números naturales (*seqfunc*). Nuestros resultados indican que los estudiantes que participaron en el experimento de enseñanza emplearon el concepto de sucesión como función y no como sucesión de números. Esto puede deberse a que se les pidió experimentar con el *applet* cambiando el valor de n, número de subintervalos de la partición, y observar lo que ocurría con los valores de las sumas superiores e inferiores, lo que los condujo a relacionar el incremento del número de subintervalos de la partición con los valores de las sumas superiores e inferiores, viendo cómo estos cambian (disminuyendo o aumentando) así como la forma en que cambian. Pero solo los estudiantes que se encontraban en el momento de reflexión vincularon explícitamente estas sucesiones con las aproximaciones al valor del área y con el error cometido en la aproximación.

El salto cognitivo del momento de proyección al de reflexión se produce cuando los estudiantes coordinan el esquema visual que muestra cómo las sumas superiores e inferiores convergen, pues los rectángulos cada vez aproximan mejor la superficie bajo la curva, y el esquema numérico de la convergencia de dos sucesiones (Czarnocha, Loch, Prabhu y Vidakovic, 2001). La coordinación de ambos esquemas es la referencia al efecto que produce el incremento de *n* sobre los rectángulos que casi recubren la superficie y sobre el valor del área. Los estudiantes usan expresiones que hacen referencia al esquema numérico de la convergencia de las sucesiones de las sumas superiores e inferiores como «acercarse» o «aproximar», propios de la concepción dinámica del límite, y al esquema visual del recubrimiento de la superficie por rectángulos con deícticos espaciales como «por arriba». En este momento de la fase de participación los estudiantes llegan a coordinar los procesos de aproximación de las sucesiones de sumas inferiores y superiores en el dominio y en el rango, relacionando las representaciones geométricas y numéricas.

La coordinación entre los dos esquemas también se puso de relieve al relacionar el número de subintervalos de la partición y el error cometido en la aproximación. Esta relación se traduce en constatar que la acción de aumentar el valor de *n* produce como efecto una mejor aproximación del valor del área y, por tanto, que al encontrar un valor de *n* para el que se obtiene la aproximación buscada, esta aproximación se conserva para los valores de *n* mayores que este. Esto implica la coordinación entre una cota del error del área y el número de subintervalos de la partición, que pone de manifiesto una concepción métrica del límite, buscando en algunos casos la aproximación óptima.

Finalmente, el siguiente salto se produce dentro del momento de reflexión, cuando los estudiantes son capaces de coordinar las concepciones dinámica y métrica del límite al relacionar el aumento del valor de *n*, las aproximaciones y el error de esta aproximación. Esto es un paso previo a la expresión analítica de las sumas superiores e inferiores y la definición de la integral como límite.

El paso del momento de reflexión al de anticipación local tiene lugar cuando los estudiantes son capaces de aplicar las regularidades observadas a nuevas situaciones. En este sentido, se podría interpretar que la no utilización del recurso tecnológico por parte de los estudiantes que se encuentran en el momento de reflexión avanzada para responder a la última cuestión, es una evidencia de que apoyaron sus reflexiones sobre los significados construidos; sin embargo sería necesario proponer nuevas tareas para confirmar que estos estudiantes están en el momento de anticipación local.

Por otra parte, nuestra investigación indica que el uso de la tecnología como instrumento de mediación semiótica, que posibilita trabajar simultáneamente con representaciones numéricas y gráficas, dinámicas e interactivas, ayuda a avanzar en la construcción del concepto de integral definida (Berry y Nyman, 2003; Camacho, Deppol y Santos-Trigo, 2010; Hong y Thomas, 1997). Pero la tecnología por ella misma no es la determinante del proceso de aprendizaje, sino que es la actividad cognitiva de los estudiantes la que cuenta, en la medida en que los estudiantes toman conciencia y reflexionan sobre la actividad matemática que realizan (Heid y Blume, 2008), como ponen de manifiesto las tres características que hemos identificado en el proceso de construcción de la idea de aproximación al área bajo una curva.

En cuanto a las limitaciones de este trabajo señalamos dos: en primer lugar, el hecho de que los estudiantes conocieran una fórmula para calcular el valor del área buscada (un cuadrante de círculo) ha podido influir en el proceso de búsqueda de la aproximación; en segundo lugar, los resultados aquí presentados se reducen al análisis de una sola tarea. Por ello apuntamos a futuras investigaciones donde se propongan otras tareas de aproximar el área bajo curvas en un intervalo; estas curvas delimitarían superficies para las cuales los estudiantes no conocen una fórmula que les permita calcular el valor del área de dicha superficie. Esto permitiría profundizar en las tres formas de aproximación que aquí se han apuntado y corroborar o no los resultados obtenidos.

Nota: una versión preliminar de este trabajo se presentó en el XIX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

REFERENCIAS

Aranda, C. y Callejo, M. L. (2010). Construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica: Un estudio de casos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. RELIME*, 13(2), pp. 129-158.

Azcárate, C., Camacho-Machín, M., González, M. T. y Moreno, M. (2015). *Didáctica del análisis matemático. Una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM*. La Laguna: Universidad de la Laguna.

Azcárate, C., Casadevall, M., Casella, E. y Bosch, D. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. Madrid: Síntesis.

Berry, J. S. y Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, pp. 481-497.
https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.006

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 30, pp. 67-82.

Boigues, F. J., Llinares, S. y Estruch, V. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. RELIME*, 13(3), pp. 255-282.

Camacho, M. y Depool, R. A. (2003). Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la integral definida utilizando el programa de cálculo simbólico (CAS) Derive. *Educación Matemática*, 15(3), pp. 119-140.

Camacho, M., Depool, R. y Santos-Trigo, M. (2010). Students' use of Derive software in comprehending and making sense of definite integral and area concepts. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 16, pp. 35-67.

Codes, M., Sierra, M. y Raboso, M. (2007). Innovación en la recogida de datos para una investigación de carácter cualitativo. Un ejemplo con alumnos universitarios en un entorno computacional. In M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 261-271). Tenerife, España: SEIEM.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwinngendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, pp. 167-192.
https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90015-2

Czarnocha, B., Loch, S., Prabhu; V. y Vidakovic, D. (2001). The concept of definite integral: coordination of two schemas. In M. van den Heuvel-Panhuizen, (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 297-304). Utrecht, The Netherlands.

Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 127-138). Washington, DC: MAA.

Ferrara, F., Pratt, D. y Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. In A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 237-273). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Ferrini-Mundy, J. y Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives, and integrals. En E. Dubinsky y J. J. Kaput (Eds.) *Research issues in undergraduate mathematics learning: Preliminary analyses and results* (pp. 31-45). Washington D.C.: MAA.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), pp. 105-128.
https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_3

Heid, M. K. y Blume, G. W. (2008). Algebra and function development. In M. K. Heid y G. W. Blume (Eds), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics*. *Research Syntheses*, 1 (pp. 55-108). Charlotte N. C.: NCTM-IAP.

Hong, Y. y Thomas, M. (1997). Using the computer to improve conceptual thinking in integration. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Vol. 3, pp. 81-88). Lahti, Finland: University of Helsinki.

McDonald, M. A., Mathews, D. y Strobel, K. (2000). Understanding sequences: a tale of two objects. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV* (pp. 77-102). Providence: American Mathematical Society.

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14(1), pp. 1-18.
https://doi.org/10.1007/BF00704699

Piaget, J. (1977). *Studies in reflecting abstraction*. Sussex: Psychology Press.

Roig, A. I. (2008). *Análisis de las fases del proceso de abstracción matemática en estudiantes de secundaria* (Tesis de doctorado inédita). Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante.

Roig, A. I., Llinares, S. y Penalva, M. C. (2012). Different moments in the participatory stage of the secondary students' abstraction of mathematical conceptions. *BOLEMA*, 26(44), pp. 1345-1366.
https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000400011

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, pp. 114-145.
https://doi.org/10.2307/749205

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An Elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6 (2), pp. 91-104.
https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_2

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K. y Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35 (5), pp. 305-329.
https://doi.org/10.2307/30034818

Tall, D., Smith, D. y Piez, C. (2008). Technology and calculus. In M. K. Heid y G.W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics*. *Research Syntheses*. (Vol. 1, pp. 207-258). Charlotte N.C.: NCTM-IAP.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(2), pp. 233-249.

TZUR, R., HAGEVIK, A. y WATSON, M. E. (2004). Fostering mathematical meaning via scientific inquiry: A case study. In M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference for the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 345-352). Bergen: PME.

TZUR, R. y SIMON, M. A. (2004). Distinguishing two stages of mathematics conceptual learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2(2), pp. 287-304. https://doi.org/10.1007/s10763-004-7479-4

ZAZKIS, R., DUBINSKY, E. y DAUTERMANN, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D_4. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(1), pp. 435-457. https://doi.org/10.2307/749876

Ways to approach the area under a curve: A study with high school students

Carmen Aranda
I.E.S. Número 3, La Vila Joiosa (España)
carmen.arlo@gmail.com

Maria Luz Callejo
Universidad de Alicante (España)
luz.callejo@ua.es

In this paper, we characterize how high school students (16-18 years old) build the idea of approaching the surface area under a curve in a teaching experiment using applets. These applets were used as a tool of semiotic mediation, to promote the relationship between different ways of representation (numerical and graphical).

The framework of this research, in order to build a new concept, is the mechanism reflection on activity-effect relationships. This mechanism is an elaboration of Piaget's reflective abstraction and is potentially useful for addressing some of the more intractable problems in teaching mathematics. Tasks of the teaching experiment were designed taking into account a hypothetical learning trajectory of the definite integral concept, particularly considering the phases of the concept construction supported by reflective abstraction: projection, reflection and local anticipation.

This paper focused on the first part of the teaching experiment: approaching the surface area under a curve, and a task: approaching the area under a quadrant of a circle. The aim of this task was that students generate a set of records of experiences of the relationship between an action (modifying the number of intervals of the partition) and the produced effect (a major number of intervals of partition generates a best area approximation). Students had a guide and could rely on an applet (<https://www.geogebra.org/m/zYgruzB6>). This applet allowed them to change the number of subintervals of the partition, all of the same length, with a slider, giving entire values from 0 up to 100. Screen showed the rectangles covering the surface for excess and for default, and the value of the upper and lower sums.

Fifteen students took part in the teaching experiment. Five questions about approaching the area under a quadrant of circle were proposed to them. The purpose of these questions is the coordination of the dynamic and metric conceptions of the limit. Questions are focused on: researching with the applet (question I); identifying the effect of increasing the number n of subintervals of the partition and the value of the upper and lower sums (questions II and III); calculating the value of n to approach the area with a minor error than a given number (question IV); relating the value of n with the approximations of the area and with the error of this approximation (question V). This sequence of questions was determined by the hypothesis on the learning process.

Data were the records of the actions that students did with the applet in the resolution of the task and the oral declarations, which were registered in digital files using the system CamStudio, and their writing answers to the questions. In other words, what the students were doing and saying in the process of resolution, and what they wrote as conclusion of this process.

The analysis of this information allowed us to identify three characteristics of the construction of the idea of approaching the area under a curve: (1) not considering the idea of approaching the area as a limit of a sequence; (2) understanding the approaching to the area by the dynamic and metric conceptions of the limit of upper and lower sums, but not considering the connection between both conceptions; (3) and the construction of the idea of approximation error bound in relation to the number of subintervals of the partition generated by the coordination of the dynamic and metric conceptions of the limit.

These characteristics have allowed us to identify the cognitive jumps from one to another phase: In the projection phase students saw the succession of the lower / upper sums as a function which domain belongs to the set of the natural numbers. The cognitive jump from the projection phase to the reflection phase took place when students coordinated the visual scheme that shows how the upper and lower sums converge and the numerical scheme of the convergence of two successions. The coordination between both schemes was also emphasised when the students related the number of subintervals of the partition and the error of the approximation. Finally, the following jump took place when the students were able to coordinate the dynamic and metric conceptions of the limit, i.e., when students related the increase of the value of n, the approximation value and the error of this approximation.

On the other hand, our investigation indicates that the use of the technology as an instrument of semiotic mediation helps students progress in the construction of the definite integral concept, because it makes possible to work with numerical and graphical, and with dynamic and interactive representations, simultaneously. However, technology by itself is not the determinant of the learning process, but it is the cognitive activity in which students are aware and think about the mathematical activity that they carry out.