ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 34.3 (2016): 161-182
Investigaciones didácticas
http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2041
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Comprensión de los sistemas de numeración. Modelos y tareas

Understanding number systems. Models and tasks

Antonio Luis Ortiz Villarejo, José Luis González Marí
Didáctica de la Matemática. Universidad de Málaga
alortiz@uma.es, gmari@uma.es

RESUMEN • En el presente artículo se exponen los aspectos fundamentales de un estudio realizado con alumnos del grado de Maestro de Educación Primaria, en el que se utiliza un modelo para la interpretación y valoración de la comprensión del conocimiento matemático de los sistemas de representación numérica. Los resultados ponen de manifiesto que los alumnos inician los estudios con un dominio meramente técnico, limitado y con lagunas de comprensión que mejoran significativamente a lo largo del proceso formativo.

PALABRAS CLAVE: comprensión del conocimiento matemático; sistema de numeración decimal; sistemas de representación numérica; formación inicial de profesores de primaria.

ABSTRACT • This article describes the fundamentals of a research with students for primary education teacher, in which a model for interpretation and assessment of understanding of mathematical knowledge to the particular case of numerical representation systems is applied. The results show that students begin their studies with a limited and purely technical domain and with important understanding gaps that are significantly improved along the development of specific didactical contents.

KEYWORDS: understanding of mathematical knowledge; decimal numbering system; systems of numerical representation; math teachers training.

Recepción: febrero 2016 • Aceptación: junio 2016 • Publicación: noviembre 2016

Ortiz Villarejo, A. L., González Marí, J.L., (2016) Comprensión de los sistemas de numeración. Modelos y tareas. *Enseñanza de las Ciencias*, 34.3, pp. 161-182

INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente se ha considerado que la «buena formación matemática» es una condición *necesaria*, aunque no suficiente, para el desarrollo de una educación matemática de calidad (Shulman, 1986). También se reconoce que el maestro de primaria debe ser un profesional reflexivo para favorecer la comprensión y las destrezas cognitivas y metacognitivas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas elementales (Llinares y Sánchez, 1990).

Teniendo en cuenta estas consideraciones, nuestro grupo viene desarrollando una investigación encaminada a averiguar el estado relativo de la comprensión que manifiestan, los errores que cometen y las estrategias y razonamientos que utilizan los alumnos del nuevo grado de Maestro en Educación Primaria sobre el sistema de numeración usual para los números naturales. Con la hipótesis de que la comprensión al iniciar los estudios en la Universidad es eminentemente técnica y memorística, basada en fórmulas y procedimientos aprendidos, y presenta lagunas importantes que se pueden subsanar a lo largo de la carrera, desarrollamos una herramienta analítica para determinar la situación de dicha comprensión en distintos momentos del proceso de formación inicial, comparar los resultados y establecer consecuencias fundadas para orientar el diseño y desarrollo de estos contenidos y su didáctica en los planes de estudios de los nuevos grados.

Fundamentos teóricos

Esta herramienta utiliza y pone a prueba un modelo operativo para la interpretación de la comprensión del conocimiento matemático, del que ya se ha dado cuenta en trabajos precedentes (Gallardo, 2004; Gallardo y González, 2006*a*, 2006*c*, 2007, 2011; González, Ortiz y Gallardo, 2012, 2013; Ortiz, 2014; Ortiz y González, 2016) y que se sustenta en tres componentes básicas: cognitiva, semiótica y hermenéutica, y en un modelo general asociado basado en:

- *a*) Una concepción operativa sobre la comprensión del conocimiento matemático y su valoración.
- *b*) Una concepción relativa y no acumulativa de la comprensión, que evoluciona en función de la situación, las condiciones y los factores que intervienen.
- *c*) Una concepción del conocimiento matemático basada en las dos estructuras básicas (epistemológica y fenomenológica) y en las diferentes categorías del conocimiento que proporciona el cruce de ambas estructuras.
- *d*) Un método o proceso secuenciado en torno a tres dimensiones:
  - *d*1) *Dimensión fenómeno-epistemológica*, en la que se inicia el estudio con el siguiente procedimiento operativo:
    1. Análisis didáctico (González, 1998; Gallardo y González, 2006*b*);
    2. Delimitación del conjunto genérico de situaciones;
    3. Estructuración fenómeno-epistemológica del conjunto de situaciones;
    4. Construcción de un modelo local;
    5. Selección de tareas y construcción de instrumentos;
    6. Análisis de resultados y primeras conclusiones.
  - *d*2) *Dimensión semiótica*, en la que se realiza un estudio de las estrategias utilizadas y de los errores cometidos en la realización de las pruebas escritas.
  - *d*3) *Dimensión hermenéutica*, en la que se realiza un análisis cualitativo y más fino de la información determinando rastros de comprensión y usos del conocimiento matemático y se completan los resultados y las conclusiones anteriores mediante lo que denominamos «círculo interpretativo o método hermenéutico» (Gallardo y González, 2011).

La aplicación del modelo al caso que nos ocupa parte del análisis epistemológico y fenomenológico de los sistemas de representación (Rico, 1991, 1997; Rico, Castro y Romero, 1996; Salinas, 2003*a*, 2003*b*, 2007) y la elaboración de diversos instrumentos de recogida de datos con los que establecer, en una primera fase, pautas generales sobre la comprensión y el dominio del conocimiento matemático. Esta *aproximación cognitiva global inicial* se orienta a delimitar patrones y comportamientos muestrales generales mediante la construcción de un modelo local adaptado al conocimiento matemático objeto del estudio y a las características de los sujetos y de los escenarios en los que se van a analizar las respuestas de los sujetos. El modelo permite la elaboración de los instrumentos de recogida de datos y la preparación y desarrollo de la primera fase de los estudios empíricos, consistente en la aplicación de las pruebas escritas, el análisis de resultados, fundamentalmente de tipo cuantitativo, y la determinación de las consecuencias para la continuación del estudio.

Pero la aproximación cognitiva global basada en pruebas escritas no es suficiente para dar cuenta de la complejidad del fenómeno de la comprensión; antes bien, es necesario desarrollar, en una nueva fase, una *segunda aproximación semiótica* (significados de las respuestas, análisis sintáctico de estas, errores y estrategias, entre otros) y una *tercera aproximación hermenéutica* (identificación de rastros de comprensión y usos del conocimiento, análisis de la posible influencia de los escenarios de valoración y acuerdo sobre el propio proceso de valoración) orientadas a obtener nueva información y confirmar si los resultados globales, los significados, los errores cometidos y las estrategias utilizadas constituyen buenos indicadores de las capacidades, destrezas, maneras de razonar y niveles de comprensión del conocimiento matemático.

En los apartados que siguen se presenta un breve resumen del modelo local que sirve de base para el diseño y la organización de las tareas utilizadas en el estudio así como para la construcción de los cuestionarios y las entrevistas, una relación detallada de las tareas seleccionadas para las distintas fases y aproximaciones, y algunos resultados y conclusiones.

MODELO OPERATIVO LOCAL PARA LA INTERPRETACIÓN Y VALORACIÓN DE LA COMPRENSIÓN DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

El modelo se caracteriza por una doble dimensión fenomenológica y epistemológica que permite identificar y organizar los tipos de tareas en 24 categorías y preparar la elaboración de los cuestionarios y el protocolo de las entrevistas.

En la componente fenomenológica, teniendo en cuenta las consideraciones de Puig (1997); Rico, Marín, Lupiañez y Gómez (2008); Sánchez (2012) y Castro-Rodríguez, Castro y Torralbo (2013), hemos identificado las siguientes categorías o fenómenos, ordenadas en un sentido acumulativo, que caracterizan los tipos de situaciones que dotan de sentido funcional a los sistemas de numeración:

1. *Estructurar/organizar cantidades* para su representación, para lo que se emplean los conceptos de unidad, agrupamiento y orden de agrupamiento, los principios aditivo y multiplicativo y los conceptos de posición y orden.
2. *Numerar y contar para cuantificar o medir* y representar el resultado (cardinal de una colección), para lo que se emplea la secuencia verbal, las estrategias de estructuración y disposición de la cantidad (fenómeno 1) para contar y cuantificar, el sentido acumulativo del conteo y el concepto de cardinal (número asociado a la última palabra utilizada) (disposición lineal) o resultado de combinar aditivamente las partes.
3. *Representar/traducir cantidades y números* para averiguar el cardinal (fenómeno 2); el uso de distintos sistemas de representación: sistemas icónicos, sistema de «numeración hablado/verbal», sistemas de «numeración escrito/cifrado», decimales o no, y un conjunto de reglas de traducción.

4. *Comparar y ordenar números y cantidades estructuradas*, involucrando el concepto de comparación de «tamaños» o cardinales de cantidades (más o menos) (fenómeno 2), los conceptos de anterior, posterior, primero, etc., entre cantidades estructuradas (fenómeno 1) y números (fenómenos 2 y 3), los procedimientos para comparar cantidades y números (fenómenos 1, 2 y 3), el concepto de orden y los procedimientos para ordenar cantidades y números.
5. *Componer/descomponer/combinar/transformar cantidades estructuradas y operar aritméticamente con números* mediante los algoritmos usuales, para lo que se emplean los conceptos y procedimientos involucrados en las acciones de composición/descomposición/combinación/transformación de cantidades estructuradas (juntar, añadir, separar, etc.) (fenómenos 1, 2, 3 y 4), los conceptos de las operaciones aritméticas (fenómenos 1, 2, 3 y 4), de agrupamiento y transferencia entre unidades y los algoritmos de las operaciones aritméticas.

Por otro lado, la componente epistemológica se configura a partir del modelo utilizado en la memoria de tercer ciclo (Ortiz, 1999), de los análisis sobre la comprensión matemática realizados por nuestro grupo y de los modelos cognitivos secuenciales definidos por niveles de comprensión, como el modelo de comprensión geométrica de Van Hiele, la teoría dinámica de Pirie-Kieren (Kieren, Pirie y Calvert, 1999; Pirie y Kieren, 1989, 1994) o el modelo de proceso de dos ejes desarrollado por Koyama (1993, 1997, 2000), adaptados, todos ellos, a las condiciones del estudio y a las características generales de los sujetos. Desde este punto de vista definimos los cuatro niveles o categorías epistemológicas de comprensión siguientes, que formulamos en términos de capacidades o competencias específicas asociadas a los tipos de actividades del mismo nombre:

1. Nivel/categoría de *reproducción o técnico*, caracterizado por el uso de los sistemas de numeración como meras herramientas en tareas relacionadas con la cardinación y el cálculo, sin necesidad de que intervengan la toma de conciencia y el dominio de los principios y las nociones que lo determinan ni de la justificación de las aplicaciones o de las características de los mecanismos utilizados.
2. Nivel/categoría de *análisis*, caracterizado por el uso de los sistemas de numeración en situaciones que requieren la toma de conciencia y el dominio de los principios y las nociones que determinan su estructura y funcionamiento (que llamaremos análisis estructural), de la justificación de las aplicaciones o de las características y propiedades de los mecanismos utilizados en los algoritmos usuales (que llamaremos análisis funcional); por el contrario, no se requiere ni la generalización ni el traslado de los procedimientos utilizados a otros sistemas de numeración isomorfos al decimal.
3. Nivel/categoría de *síntesis*, caracterizado por el uso de los sistemas de numeración en situaciones en las que, además de los requisitos de las dos categorías anteriores, se requiere la toma de conciencia y el dominio de los conocimientos y habilidades necesarias para trasladar las estructuras y propiedades de un sistema de numeración (que llamaremos síntesis estructural), así como los procedimientos utilizados y las aplicaciones (que llamaremos síntesis funcional), a otros sistemas de numeración posicionales. Este nivel de síntesis, a su vez, lo separamos en dos subniveles: bases determinadas y bases indeterminadas, lo que supondrá el salto a la generalización completa del siguiente nivel epistemológico.
4. Nivel/categoría *formal*. Como nivel más elevado o de experto, se caracteriza por el uso de los sistemas de numeración en situaciones en las que, además de los requisitos de las tres categorías anteriores, se requiere la toma de conciencia y el dominio de la estructura de relaciones y de la formalización de los conocimientos, la generación de teorías o la propuesta y demostración de teoremas.

Ambas categorizaciones configuran el modelo que se ajusta al esquema de la figura 1, en el que se prescinde del nivel formal debido a las características generales, constatadas previamente, de la formación de los alumnos futuros maestros de educación primaria. Igualmente se excluyen las dos categorías epistemológicas de síntesis I y II relacionadas con la categoría fenomenológica de estructurar y organizar cantidades para su representación, en la medida en que en esta categoría, por su carácter elemental, no se considera ni la generalización ni el trabajo simultáneo en sistemas isomorfos al decimal, aspectos que sí intervienen en las cuatro categorías fenomenológicas restantes.

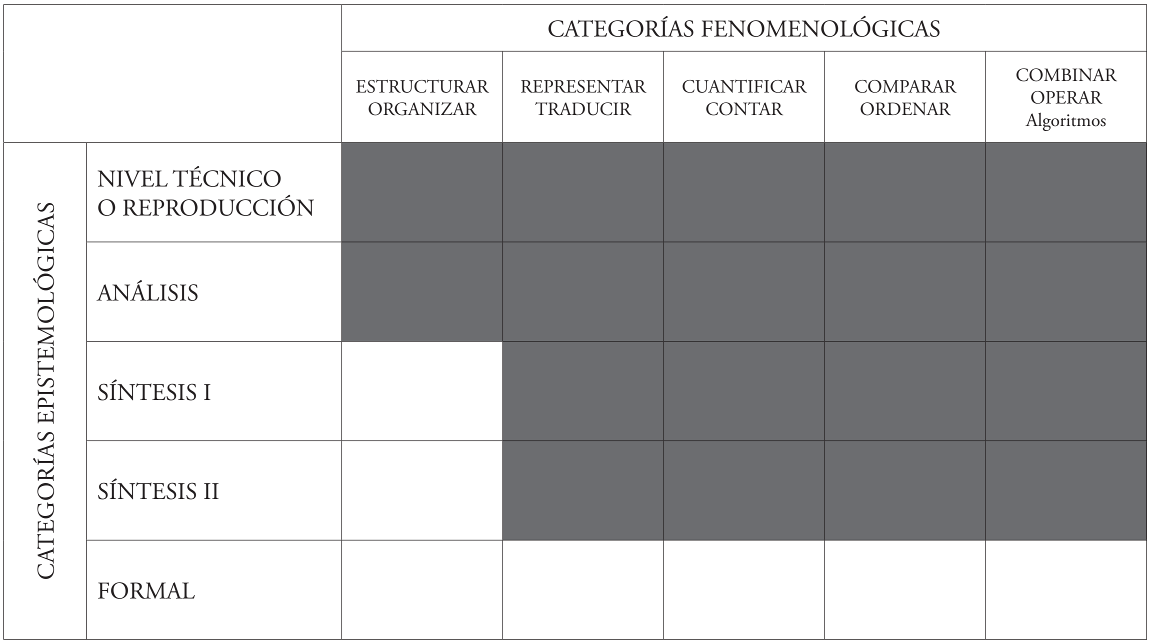


Fig. 1. Modelo operativo local.

METODOLOGÍA

Para la fase empírica del trabajo se ha diseñado un primer conjunto de tareas organizadas por niveles de acuerdo con el modelo local descrito. A partir de dichas tareas y mediante procesos de ajustes empíricos sucesivos, se han construido tres pruebas escritas que han sido implementadas en otras tantas fases del estudio a un total de 328 estudiantes del grado de Educación Primaria. Finalmente, para profundizar en la interpretación de los datos obtenidos mediante las tres pruebas mencionadas, se han llevado a cabo entrevistas individuales basadas en tareas extraídas de dichas pruebas.

Diseño de las pruebas escritas

En las tres pruebas escritas se han considerado las categorías fenomenológicas relativas al conocimiento básico del sistema de numeración (categoría de estructurar y organizar), a las traducciones, a la cuantificación y al conocimiento sobre los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales. La categoría fenomenológica de «comparar y ordenar» se tuvo en cuenta en las pruebas PCN1 y la PCN2, y desapareció en la PCN3 al comprobarse que las tareas correspondientes eran respondidas correctamente por todos los sujetos y no resultaban útiles para discriminar niveles de comprensión en la población estudiada (González, Ortiz y Gallardo, 2012, 2013). Esta categoría se deberá analizar con más detalle en posteriores investigaciones.

El proceso de diseño comenzó con la determinación de la estructura epistemológica y fenomenológica del conjunto de situaciones y las categorías y niveles del modelo 1 (1.ª aproximación). Se establecieron cuatro niveles o categorías para la estructura epistemológica y cinco niveles o categorías para la estructura fenomenológica. Las combinaciones de dichas categorías constituyen la estructura básica del «universo de tareas/situaciones» del campo en estudio para las que se eligen dos o tres tareas representativas provisionales y sujetas a estudios exploratorios en sucesivas fases. En cada fase se realiza un análisis de las pruebas así como de las respuestas a estas, lo que permite ir reduciendo el número de tareas propuestas en cada caso sin perder la validez ni la equivalencia de las pruebas; así, de las 46 cuestiones planteadas en la primera prueba (PCN1), cuya selección se explica con detalle en Ortiz (1999; 2014) y en González, Ortiz y Gallardo (2012, 2013), se ha pasado a 33 en la PCN2 y a 22 en la PCN3. Para la modificación y reducción de los ítems se han utilizado los índices de dificultad (IF) y de discriminación (ID) y los coeficientes de homogeneidad (ρ) de las tareas; al mismo tiempo se ha cuidado la racionalidad en la elección de las cuestiones, la simplicidad de los factores no esenciales, buscando la disminución o eliminación de posibles influencias no deseadas, y la eliminación de las tareas redundantes y/o equivalentes. Con dichos criterios, la composición final de la última prueba escrita (PCN3), de la que se incluye a continuación la relación de tareas agrupadas por categorías, es la siguiente: 3 tareas del nivel técnico o de reproducción, 10 tareas del nivel de análisis y 9 tareas del nivel de síntesis, 6 del subnivel síntesis I y 3 del subnivel síntesis II. De las 22 tareas de la prueba 3 solo se han utilizado las 19 comunes para efectuar la comparación de respuestas a los tres cuestionarios comparados.

I. Nivel técnico o de reproducción

IN. Categoría fenomenológica de estructurar y organizar

Completa	
IN5.1, IN5.2 y IN5.3	
	Rodea con un círculo
La cifra de las centenas	4 5 6 2
La cifra de las decenas	3 8 9 1
La cifra de las centenas de millar	2 3 4 4 0 0 9

II. Nivel de análisis

IIN. Categoría fenomenológica de estructurar y organizar

IIN9.1 y IIN9.2	
	Escribe con cifras el número que corresponde
tres decenas de mil, cuatro centenas y cinco unidades	_______________
siete unidades de millar, trece centenas, dieciséis decenas y diecisiete unidades	_______________
IIN8.1 y IIN8.2	
el número 8 2 3 4 . . .	… contiene __________ centenas
el número 2 1 0 0 0 4 . . .	… contiene __________ decenas de millar

IIN11	
	Escribe el número (con cifras):
Mi amigo Roberto juega conmigo un décimo de un número de la lotería del niño. Para adivinarlo, me da las siguientes pistas: – La cifra de las centenas es el doble de la cifra de las unidades. – El número contiene 16 centenas. – La cifra de las decenas es la suma de las cifras de las unidades y las de las unidades de millar	Respuesta: __________

IIC. Categoría fenomenológica de contar

IIC16	
Una manzana (🍎) equivale a 10 corazones (♥), un corazón (♥) equivale a 10 rombos (♦) un ♦ equivale a 10 asteriscos (∗). ¿A cuántos asteriscos equivale la cantidad representada en el cuadro de la derecha?	🍎 🍎 🍎 🍎 🍎 ♥ ♥ ♥ ♥ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗ ∗
Respuesta: ______________	
Explica aquí cómo obtienes al resultado	

IIA. Categoría fenomenológica de operar

IIA13
Para hacer la suma: $\begin{array}{r} 368 \\ +\ 457 \\ \hline 825 \end{array}$ hacemos lo siguiente: - 8 + 7 = 15 (escribo 5) y me llevo 1 - 6 + 5 = 11, (a) 11 + **<u>1</u>** (que llevo) = 12, escribo 2, me llevo 1 - 3 + 4 = 7, (b) 7 + **<u>1</u>** (que llevo) = 8, escribo 8
¿Qué significa el uno (**<u>1</u>**) en (b)?
IIA14
En la siguiente resta: $\begin{array}{r} 562 \\ -\ 36 \\ \hline 526 \end{array}$ Operamos así: (a) - De 6 a 12 van 6 y me llevo 1 (b) - 3 + **<u>1</u>** = 4, de 4 a 6 van 2 (c) - De 0 a 5 = 5
¿Por qué sumo **<u>1</u>** en (b)?

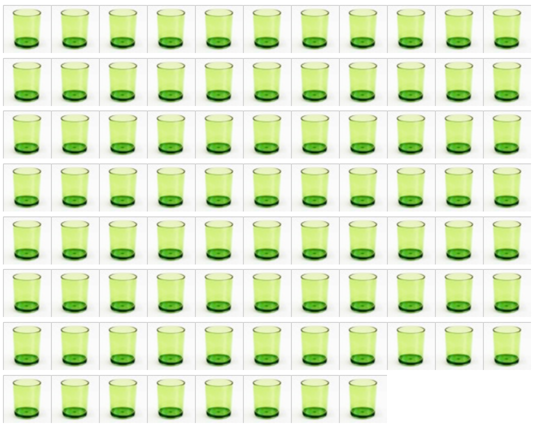
<table>
<tr><td>IIA15.1 y IIA15.2</td></tr>
<tr><td>Al hacer la multiplicación:
2 5 8
x 2 6
____
1 5 4 8
5 1 6
____
6 7 0 8

Decimos: (a) 6 x 8= 48, escribo 8 y me llevo 4.
(b) 6 x 5 = 30, 30 + 4 (que me llevaba) = 34, escribo 4 y me llevo 3
(c) 6 x 2 = 12, 12 + 3 (que me llevaba) = 15 ….</td></tr>
<tr><td>15.1. ¿Qué significa el 3 que se suma a 12 en (c)?</td></tr>
<tr><td>15.2. ¿Por qué colocamos el 6 de la segunda fila debajo del 4 de la primera?</td></tr>
</table>

III. Nivel de síntesis

IIIC. Síntesis 1. Categoría fenomenológica de contar

<table>
<tr><td colspan="2">IIIC17</td></tr>
<tr><td>La fábrica de vasos La Universal vende su producción en unidades sueltas, en paquetes de 8 vasos cada uno, en cajas de 8 paquetes y en palés de 8 cajas cada una.

En la figura se representan los vasos del pedido del Restaurante Los Claveles; ayúdanos a organizarlos indicando las cajas, paquetes y vasos sueltos que se enviarán.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Por grupos separados:
Número de cajas: ________ Número de paquetes: ________ Número de vasos sueltos: ________

De forma abreviada: $\square\square\square_{\square}$ ← Subíndice
(Número que indica el tamaño de los agrupamientos)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Explica aquí cómo obtienes el resultado:</td></tr>
</table>

IIIN.25
En unas notas de pedidos de la fábrica La Universal aparecen las anotaciones siguientes. Indica en cada caso si son correctas o erróneas explicando por qué y añadiendo la expresión correcta en su caso.
Por grupos separados (de 8 en 8): cajas paquetes vasos sueltos __2___ ___8___ ____4_____ __1___ ___0___ ____9_____
De forma abreviada: $\boxed{9}\boxed{3}\boxed{0}_{\boxed{8}}$ $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{9}_{\boxed{8}}$

IIIC. Síntesis 1. Categoría fenomenológica de operar (bases determinadas)

IIIA18.1 y IIIA18.2						
Las ventas de vasos en los dos últimos años se recogen en la tabla de la derecha		Palés	Cajas	Paquetes	Vasos	FORMA ABREVIADA
	2010	2	6	7	5	2675_8
	2011	3	4	5	6	3456_8
18.1. Expresa en forma abreviada el total de ventas en los dos años y explica cómo haces los cálculos.						
18.2. Expresa el incremento producido en el año 2011 y explica cómo haces los cálculos.						

IIIA20.1 y IIIA20.2			
En la siguiente tabla están reflejados, en forma abreviada, los pedidos de vasos de los hoteles Málaga Palacio y Los Naranjos en los años 2010 y 2011		2010	2011
	Málaga Palacio	756_8	2026_8
	Los Naranjos	2503_8	1404_8
20.1. Indica el pedido global en ambos años de cada uno de los hoteles.			
20.2. Indica la diferencia entre los pedidos globales de ambos hoteles en dichos años.			

III.IIC. Síntesis 2. Categoría fenomenológica de operar (bases indeterminadas)

III.II.A24.1 y III.IIA24.2				
La Universal quiere organizar los pedidos en diferentes formatos, para lo que introduce el agrupamiento indeterminado «x» (x vasos en cada paquetes, x paquetes en cada caja y x cajas en cada palé). En la tabla adjunta están registradas las cantidades vendidas en diferentes meses.	Junio	Julio	Agosto	Septiembre
	$x\text{-}1\ \ x\text{-}1\ \ x\text{-}1_{(x}$	$1\ \ 1\ \ 1_{(x}$	$x\text{-}2\ \ x\text{-}1\ \ x\text{-}1_{(x}$	$x\text{-}1\ \ 2\ \ 2_{(x}$
	Donde $x\text{-}1\ x\text{-}1\ x\text{-}1_{(x}$ representa una venta de x-1 cajas, x-1 paquetes y x-1 vasos con agrupamientos de x en x			
24.1. ¿Cuál será la cantidad vendida en los meses de junio y julio? 24.2. ¿Cuál ha sido el incremento de ventas entre los meses de agosto y septiembre?				
III.IIA.26				
Si los vasos vendidos en el mes de octubre son $x\text{-}1\ \ x\text{-}1\ \ x\text{-}8\ (x$ y se ha distribuido por igual entre x-2 hoteles, ¿cuántos corresponden a cada uno de ellos?				

Implementación de las pruebas escritas

Las pruebas escritas se aplicaron a dos poblaciones distintas; la primera, constituida por alumnado que iniciaba los estudios de grado y no había recibido formación en asignaturas de matemáticas o didáctica de las matemáticas; la segunda, formada por estudiantes que ya habían cursado la asignatura Didáctica de la Aritmética en dichos estudios de grado. Durante el mes de marzo del curso 2010/11 se aplicó la primera prueba (PCN1) a una muestra intencional extraída de la primera población y formada por 155 alumnas/os. Al principio del curso 2011/12 se aplicó el cuestionario PCN2 a una segunda muestra, extraída también de la primera población, compuesta por 95 alumnas/os. Por último, el cuestionario PCN3 se aplicó en el mes de junio del año 2012 a una muestra de 78 alumnas/os que habían recibido formación sobre los sistemas de numeración en la asignatura Didáctica de la Aritmética durante el primer cuatrimestre del curso 2011/12; de ellos, 44 estudiantes no habían realizado ninguna de las pruebas anteriores, mientras que 34 habían realizado la prueba PCN2.

Entrevistas

La información obtenida con las pruebas escritas nos ha permitido delimitar, en una primera fase, una *aproximación cognitiva global*, basada en datos cuantitativos que describen regularidades muestrales, y dos nuevas *aproximaciones semiótica y hermenéutica* con las que poder realizar una interpretación más completa y cercana a la realidad. Pero las respuestas escritas son limitadas y han de ser complementadas, en una fase posterior, con una nueva aproximación basada en *entrevistas individuales* a alumnos de características similares a los sujetos de las tres muestras estudiadas y a sujetos con una formación matemática elevada, cuyas respuestas constituirán referencias inestimables para comparar y complementar las interpretaciones.

El protocolo de las entrevistas está formado por catorce cuestiones seleccionadas de entre las presentadas en la prueba PCN3, además de tres tareas del nivel técnico, una del nivel de análisis del segundo cuestionario y dos tareas nuevas del nivel de síntesis II. Todas las tareas se presentan en una página-diapositiva de Smart Notebook y los resultados se registran en vídeo y se archivan las interacciones con la PDI. Describimos a continuación las tareas que se han añadido a las seleccionadas del cuestionario PCN3.

I. Nivel técnico. Categoría fenomenológica de traducción, orden y conocimiento de la numeración

IT.2: Lee en voz alta los siguientes números: 3059, 97029, 3100300, 12003005, 30001000.
IO.3: Escribe con cifras el siguiente de los números: ciento diez mil y tres mil veinte.
IN.5: Señala en los siguientes números:
La cifra que ocupa el lugar de las centenas: 2 0 3 4 5
La cifra que ocupa el lugar de las centenas de millar : 3 8 2 5 0 8

II. Nivel de análisis. Categoría fenomenológica de estructura de la numeración

IIN.8: El numero 8 2 3 4, ¿Cuántas centenas, unidades y decenas contiene?

III.IIC. Nivel de síntesis 2. Categoría fenomenológica de calcular

III.IIC.26: En la figura 2 se representan los vasos del pedido del hotel Aristóteles. Ayúdanos a organizarlos indicando con la notación abreviada y con los agrupamientos indeterminados x, el número de palés, de cajas, de paquetes y de vasos sueltos a enviar.

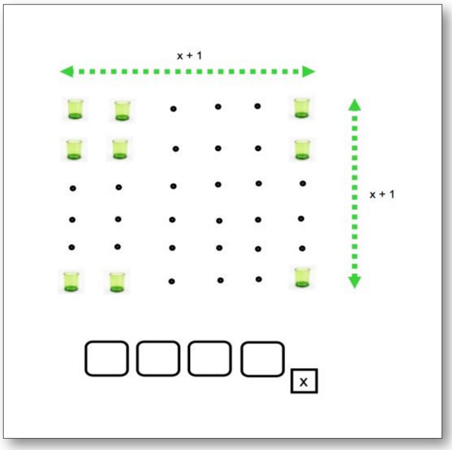


Fig. 2. Contenido gráfico de la tarea III.IIC.26.

ALGUNOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

De carácter cuantitativo

En la figura 3 se representan los polígonos de frecuencias de las ***respuestas correctas*** a las 19 tareas comunes a las tres pruebas. Se aprecian coincidencias en los niveles de reproducción y de síntesis II, y diferencias importantes en el nivel de análisis entre los resultados de las pruebas 1 y 2, por un lado, y entre los de estas y los de la prueba 3, por otro; se aprecia una mejora importante en estos niveles en los resultados de la prueba PCN3.

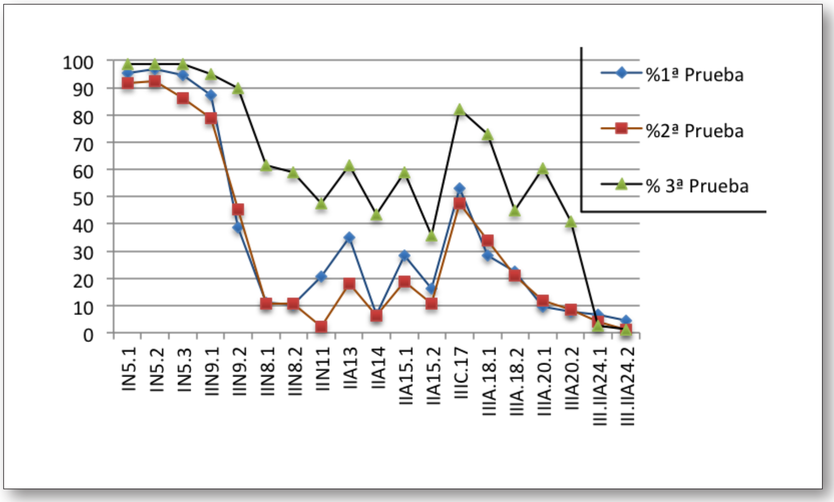


Fig. 3. Porcentajes de respuestas correctas en PCN1, PCN2 y PCN3.

De carácter cualitativo grupal

Las tendencias que se han puesto de manifiesto en la aproximación global permiten asegurar la pertinencia y validez del modelo, así como la equivalencia de las muestras que realizaron las dos primeras pruebas. Todo ello, unido a la existencia de diferencias apreciables en el dominio de los sistemas de numeración a favor de la muestra de los sujetos que realizaron la prueba PCN3, debido seguramente a la formación específica recibida, junto al proceso minucioso de configuración de las categorías de tareas y de selección y depuración de estas, nos permite afirmar que existen indicios sobre la validez de contenido, la validez empírica o de criterio y la validez de constructo de la prueba PCN3 y una cierta validez concurrente de las tres pruebas para medir el dominio y la comprensión de los sistemas de numeración en estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria. Por otra parte, con el propósito de confirmación de la tendencia global encontrada en los resultados de los estudios cuantitativos y para realizar un análisis más fino de las respuestas, se han estudiado los errores cometidos y las estrategias utilizadas, de las que se incluye a continuación una breve selección que ilustra el alcance y la complejidad del análisis realizado. En este sentido, hemos podido comprobar que las respuestas arrojan globalmente menos errores y reflejan estrategias más evolucionadas cuando la formación es más completa y se dan mayores niveles de comprensión, si bien no se ha realizado un seguimiento cualitativo de la evolución individual de los errores y las estrategias utilizadas, lo que puede ser objeto de un estudio posterior.

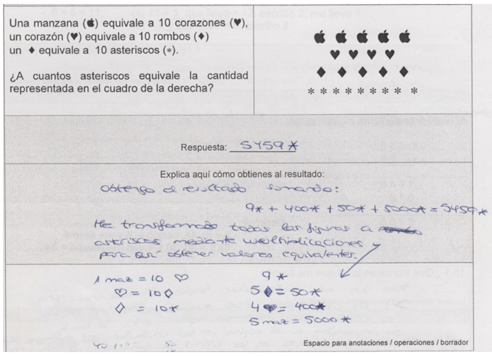
Algunas estrategias y usos del conocimiento

Las estrategias constituyen procedimientos que involucran un uso adecuado/correcto del conocimiento pertinente para resolver una situación. En dicho uso se identifican piezas de información a las que llamamos *rastros de comprensión*, que son indicadores del dominio del conocimiento y el alcance de la comprensión.

Algunas estrategias relacionadas con las situaciones de representar/traducir

Para expresar la cantidad de unidades en sistemas decimales se utilizan mayoritariamente las tres estrategias que se ilustran en la figura 4: una estrategia polinómica (ASr.1) con las dos variantes 4.1 y 4.2 y una estrategia de identificación de sistemas decimales (ASr.2) (estrategia 4.3).

4.1 Traducción desde sistemas diferentes al decimal: $5.a^3 + 4.a^2 + 5.a + 9$



Una manzana (🍎) equivale a 10 corazones (♥), un corazón (♥) equivale a 10 rombos (♦) un ♦ equivale a 10 asteriscos (*).

¿A cuantos asteriscos equivale la cantidad representada en el cuadro de la derecha?

Respuesta: 5459 *

Explica aquí cómo obtienes al resultado:

obtengo el resultado sumando:

9* + 400* + 50* + 5000* = 5459*

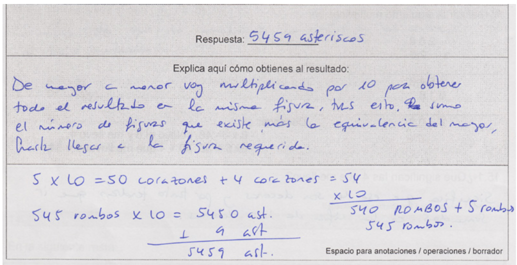
He transformado todas las figuras a asteriscos mediante multiplicaciones para así obtener valores equivalentes.

1 manz = 10 ♡ · ♡ = 10 ◇ · ◇ = 10 *

9 * · 5 ◆ = 50 * · 4 ♥ = 400 * · 5 manz = 5000 *

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

4.2 Transformación progresiva de las unidades de mayor a menor orden: $[(5.a + 4).a) + 5].a + 9$



Respuesta: 5459 asteriscos

Explica aquí cómo obtienes al resultado:

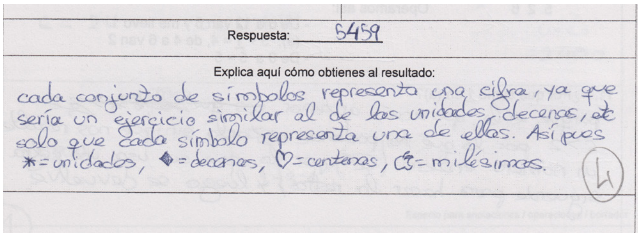
De mayor a menor voy multiplicando por 10 para obtener todo el resultado en la misma figura, tras esto, sumo el número de figuras que existe más la equivalencia del mayor, hasta llegar a la figura requerida.

5 x 10 = 50 corazones + 4 corazones = 54
x 10
540 ROMBOS + 5 rombos
545 rombos.

545 rombos x 10 = 5450 ast.
+ 9 ast
5459 ast.

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

4.3 Reconocimiento de la estructura decimal y traducción automática entre sistemas



Respuesta: 5459

Explica aquí cómo obtienes al resultado:

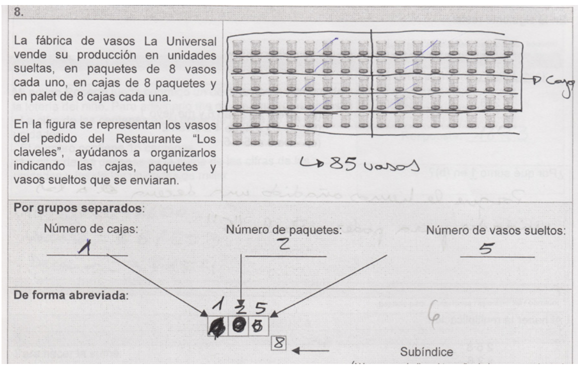
cada conjunto de símbolos representa una cifra, ya que sería un ejercicio similar al de las unidades, decenas, etc solo que cada símbolo representa una de ellas. Así pues *= unidades, ◆= decenas, ♡= centenas, 🍎= milésimas.

4

Fig. 4. Tres estrategias para la resolución de la tarea IIC.16.

Algunas estrategias relacionadas con las situaciones de cuantificar/contar y de combinar/operar/algoritmos

5.1 Resolución gráfica mediante la identificación de los distintos órdenes de unidades (estrategia ASc.1, tarea IIIC.17)



8.

La fábrica de vasos La Universal vende su producción en unidades sueltas, en paquetes de 8 vasos cada uno, en cajas de 8 paquetes y en palet de 8 cajas cada una.

En la figura se representan los vasos del pedido del Restaurante "Los claveles", ayúdanos a organizarlos indicando las cajas, paquetes y vasos sueltos que se enviaran.

→ Caja

↳ 85 vasos

Por grupos separados:

Número de cajas:	Número de paquetes:	Número de vasos sueltos:
1	2	5

De forma abreviada:

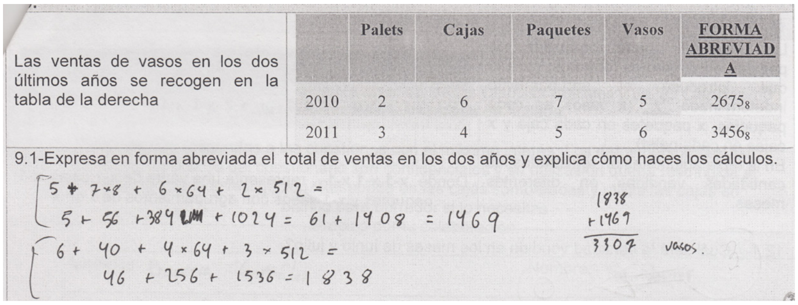
1 2 5

1 2 5

8

Subíndice

5.2 Para expresar el resultado de operaciones en bases distintas a la decimal, se traduce a base 10 y se opera a continuación (estrategia ASop.4, tarea IIIA.18).



Las ventas de vasos en los dos últimos años se recogen en la tabla de la derecha		Palets	Cajas	Paquetes	Vasos	FORMA ABREVIADA
	2010	2	6	7	5	2675_8
	2011	3	4	5	6	3456_8

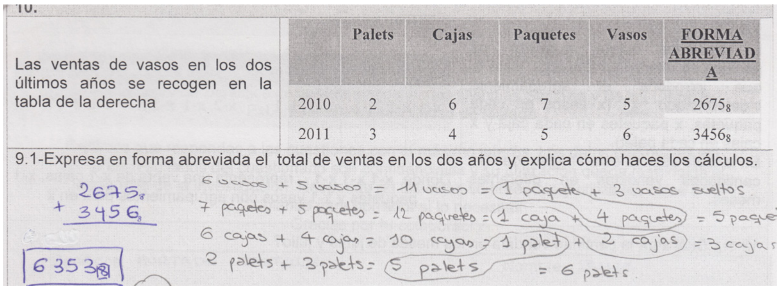
9.1-Expresa en forma abreviada el total de ventas en los dos años y explica cómo haces los cálculos.

$5 + 7\times 8 + 6\times 64 + 2\times 512 =$
$5 + 56 + 384 + 1024 = 61 + 1408 = 1469$

$6 + 40 + 4\times 64 + 3\times 512 =$
$46 + 256 + 1536 = 1838$

$1838 + 1469 = 3307$ vasos.

5.3 Para expresar el resultado de operaciones en bases distintas a la decimal, se opera en los agrupamientos correspondientes ofreciendo los resultados con transferencias de órdenes y expresiones canónicas (estrategia ASop.7, tarea IIIA.18).



Las ventas de vasos en los dos últimos años se recogen en la tabla de la derecha		Palets	Cajas	Paquetes	Vasos	FORMA ABREVIADA
	2010	2	6	7	5	2675_8
	2011	3	4	5	6	3456_8

9.1-Expresa en forma abreviada el total de ventas en los dos años y explica cómo haces los cálculos.

$2675_8 + 3456_8$

$\boxed{6353_8}$

6 vasos + 5 vasos = 11 vasos = 1 paquete + 3 vasos sueltos
7 paquetes + 5 paquetes = 12 paquetes = 1 caja + 4 paquetes = 5 paque
6 cajas + 4 cajas = 10 cajas = 1 palet + 2 cajas = 3 cajas
2 palets + 3 palets = 5 palets = 6 palets

Fig. 5. Estrategias para *cuantificar/contar y combinar/operar/algoritmos*.

Algunos errores

Los errores ponen de manifiesto las posibles limitaciones y dificultades (rastros negativos o ausencias de comprensión) o los conocimientos, capacidades y destrezas (rastros positivos de comprensión). En ambos casos, los errores se interpretan en términos positivos como usos dados al conocimiento en alguna de las dos circunstancias siguientes:

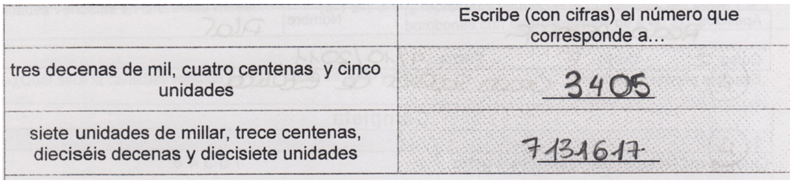
a) un uso inadecuado/defectuoso/incorrecto/intento de uso de un conocimiento pertinente para resolver una situación; en estos casos no es posible asegurar nada sobre la comprensión del sujeto, salvo que esta puede corresponder a niveles anteriores al de la situación analizada;

b) un uso correcto/adecuado de un conocimiento que es inadecuado/no pertinente para resolver una situación; en estos casos es posible identificar rastros de comprensión y utilizarlos para inferir alguna información acerca de la comprensión de los sujetos.

Veamos a continuación una selección de los errores encontrados en el estudio.

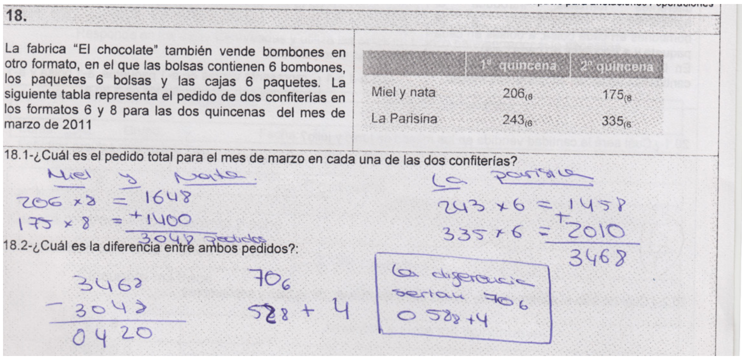
Algunos errores relacionados con las situaciones de representar/traducir

6.1. Construir el número mediante la yuxtaposición de las cantidades expresadas en el sistema verbal (error EAr.2, tarea IIN.9)



	Escribe (con cifras) el número que corresponde a…
tres decenas de mil, cuatro centenas y cinco unidades	3405
siete unidades de millar, trece centenas, dieciséis decenas y diecisiete unidades	7131617

6.2. Intento de cambio a base 10 realizando transformaciones erróneas. Es frecuente en este caso multiplicar la cantidad por la base para obtener cantidades en nuestro sistema (error ESr.3, tarea prueba PCN2).



18.

La fabrica "El chocolate" también vende bombones en otro formato, en el que las bolsas contienen 6 bombones, los paquetes 6 bolsas y las cajas 6 paquetes. La siguiente tabla representa el pedido de dos confiterías en los formatos 6 y 8 para las dos quincenas del mes de marzo de 2011

	1ª quincena	2ª quincena
Miel y nata	$206_{(8}$	$175_{(8}$
La Parisina	$243_{(6}$	$335_{(6}$

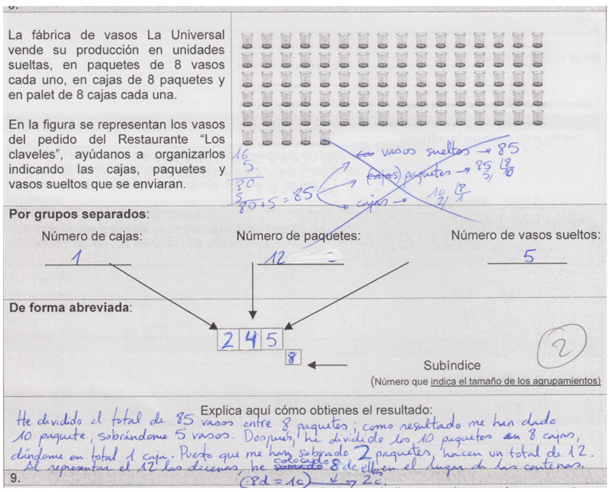
18.1-¿Cuál es el pedido total para el mes de marzo en cada una de las dos confiterías?

18.2-¿Cuál es la diferencia entre ambos pedidos?:

Fig. 6. Errores en situaciones de representar/traducir.

2. Algunos errores relacionados con las situaciones de cuantificar/contar

7.1. Cuenta el total de objetos, los agrupa en la base del sistema mediante divisiones, pero repite órdenes (error ESc.1, tarea IIIC.17)



La fábrica de vasos La Universal vende su producción en unidades sueltas, en paquetes de 8 vasos cada uno, en cajas de 8 paquetes y en palet de 8 cajas cada una.

En la figura se representan los vasos del pedido del Restaurante "Los claveles", ayúdanos a organizarlos indicando las cajas, paquetes y vasos sueltos que se enviaran.

Por grupos separados:

Número de cajas: 1

Número de paquetes: 12

Número de vasos sueltos: 5

De forma abreviada:

245_{8}

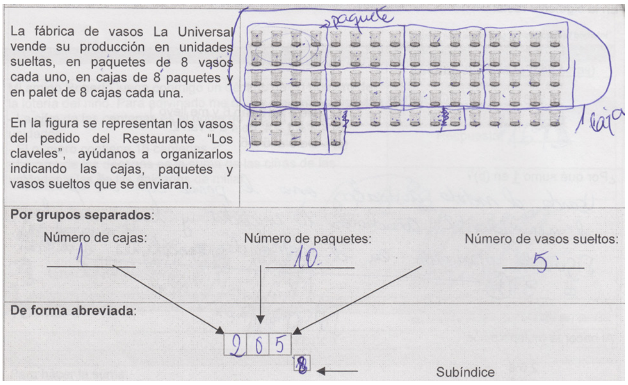
Subíndice (Número que indica el tamaño de los agrupamientos)

Explica aquí cómo obtienes el resultado:

He dividido el total de 85 vasos entre 8 paquetes; como resultado me han dado 10 paquete, sobrándome 5 vasos. Después, he dividido los 10 paquetes en 8 cajas, dándome en total 1 caja. Puesto que me han sobrado 2 paquetes, hacen un total de 12. Al representar el 12 las decenas, he ~~sumado~~ colocado 8 de ellos en el lugar de las centenas. (8d = 1c) → 2c.

9.

7.2. Error idéntico al anterior, en cuanto a resultados, pero donde se actúa solo con agrupamiento gráficos, sin realizar operaciones (error ESc.2, tarea IIIC.17)


La fábrica de vasos La Universal vende su producción en unidades sueltas, en paquetes de 8 vasos y cada uno, en cajas de 8 paquetes y en palet de 8 cajas cada una.

En la figura se representan los vasos del pedido del Restaurante "Los claveles", ayúdanos a organizarlos indicando las cajas, paquetes y vasos sueltos que se enviaran.

paquete

1 caja

Por grupos separados:

Número de cajas: 1

Número de paquetes: 10.

Número de vasos sueltos: 5.

De forma abreviada:

2 0 5

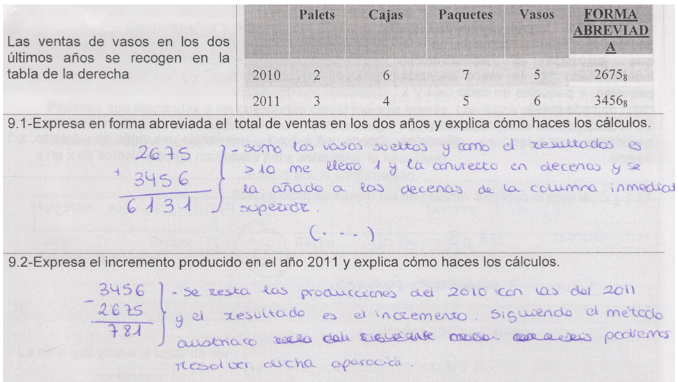
8

Subíndice

Fig. 7. Errores en las situaciones de *cuantificar/contar*.

3. Algunos errores relacionados con las situaciones de combinar/operar/algoritmos

8.1. Operan sin tener en cuenta la base del sistema (error ESop.5, tarea IIIA.18)


Las ventas de vasos en los dos últimos años se recogen en la tabla de la derecha

	Palets	Cajas	Paquetes	Vasos	FORMA ABREVIADA
2010	2	6	7	5	2675_8
2011	3	4	5	6	3456_8

9.1-Expresa en forma abreviada el total de ventas en los dos años y explica cómo haces los cálculos.

2675 + 3456 = 6131

- sumo los vasos sueltos y como el resultado es >10 me llevo 1 y lo convierto en decenas y se lo añado a las decenas de la columna inmediata superior.

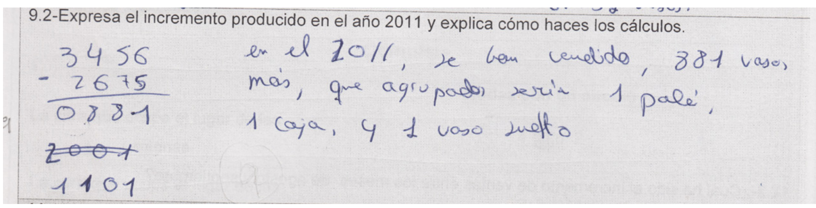
(...)

9.2-Expresa el incremento producido en el año 2011 y explica cómo haces los cálculos.

3456 − 2675 = 781

- se resta las producciones del 2010 con las del 2011 y el resultado es el incremento. Siguiendo el método anterior podremos resolver dicha operación.

8.2. Variante de ESop.5. El sujeto opera en base 10, pero una vez resueltas las operaciones realiza un reagrupamiento para evitar que en algunos de los órdenes aparezcan valores superiores a la base (error ESop.7, tarea IIIA.18)


9.2-Expresa el incremento producido en el año 2011 y explica cómo haces los cálculos.

3456 − 2675 = 0881

~~2001~~

1101

en el 2011, se han vendido, 881 vasos más, que agrupados sería 1 palé, 1 caja, y 1 vaso suelto

Fig. 8. Errores en las situaciones de *combinar/operar/algoritmos*.

De carácter cualitativo individual

El análisis semiótico y hermenéutico realizado a partir de las respuestas a las entrevistas individuales constituye la tercera aproximación al fenómeno en estudio. Su estructura está determinada tanto por el modelo local como por las pruebas escritas y los resultados obtenidos. Una vez registrada y codificada la información, hemos centrado la atención en detectar los *rastros de comprensión* asociados a los niveles epistemológicos del modelo, fundamentalmente a los niveles de análisis y de síntesis, de los que hemos seleccionado los cuatro grupos de tareas siguientes; los tres primeros han estado presentes en las pruebas escritas y el cuarto recoge nuevas tareas del nivel sintético y fronterizo con el nivel formal:

– Primer grupo: tareas 4 y 5 del nivel de análisis estructural correspondiente a los ítems IIN8 y IIN12 de las pruebas escritas.
– Segundo grupo: tareas 7, 8 y 9 del nivel de análisis funcional y de la categoría fenomenológica de calcular, algoritmos y operaciones, que corresponden, respectivamente, a los ítems IIA13, IIA14 y IIA15 de las pruebas escritas.
– Tercer grupo: tareas 12 y 13 del nivel de síntesis funcional y la categoría relativa a los algoritmos en agrupamientos distintos al decimal; se corresponden con los ítems III.IA18 y III.IIA24 de las pruebas escritas.
– Cuarto grupo: tarea 14 (ítem III.IIC26) de síntesis funcional, asociada a la obtención del cardinal de colecciones en agrupamientos indeterminados.

En cada una de estas tareas señalamos las unidades de análisis en las que detectamos rastros de comprensión asociados a algunos de los niveles epistemológicos definidos en el modelo. De entre los más significativos hemos elegido las siguientes unidades de análisis, que servirán para identificar los fragmentos que contienen los rastros de comprensión señalados en cada uno de ellos:

– Unidad 1: Distinción entre el número de órdenes presentes en un número y la cifra del orden correspondiente: valor de posición, relación y transferencia entre los distintos órdenes.
– Unidad 2: Traducción a decimal de un número expresado como conglomerado de distintos órdenes (expresión polinómica no canónica): relaciones y transferencias entre los distintos órdenes.
– Unidad 3: Justificación de las llevadas en el algoritmo de la suma: valor de posición y transferencias entre los distintos órdenes de unidades en el sistema decimal.
– Unidad 4: Justificación de las llevadas en el algoritmo de la resta: valor de posición y transferencias entre los distintos órdenes de unidades en el sistema decimal.
– Unidad 5: Justificación de la disposición de los sumandos en el algoritmo de la multiplicación: descomposición polinómica del multiplicador y aplicación de la propiedad distributiva.
– Unidad 6: Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos distintos al decimal: valor de posición y transferencias entre los distintos órdenes de unidades en sistemas posicionales distintos al decimal.
– Unidad 7: Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos distintos al decimal: valor de posición y transferencias entre los distintos órdenes de unidades en sistemas posicionales distintos al decimal.
– Unidad 8: Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos indeterminados: valor de posición y transferencias entre los distintos órdenes de unidades en sistemas posicionales indeterminados.
– Unidad 9: Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos indeterminados: valor de posición y transferencias entre los distintos órdenes de unidades en sistemas posicionales indeterminados.
– Unidad 10: Cálculo del cardinal de colecciones en agrupamientos indeterminados: aplicación del principio aditivo o de agrupamientos múltiples y del principio posicional en sistemas de base indeterminada.

Con respecto a cada unidad de análisis, se identifican los fragmentos que incluyen los rastros de comprensión, el grado de complicidad/empatía entre entrevistador y entrevistado, los errores cometidos, las estrategias utilizadas, los usos del conocimiento y las relaciones/ interferencias entre niveles. Dicha información nos permite completar, para cada sujeto, una tabla de doble entrada en la que se resumen las principales características y relaciones acerca de la comprensión que manifiesta. Como ejemplo del análisis realizado, la tabla 1 ilustra los resultados obtenidos en la entrevista a la alumna A5-1º.

Tabla 1.
Resumen del análisis semiótico y hermenéutico de la entrevista a la alumna A5-1º

Tareas	*Fragmentos*	*Rastros de comprensión*	*Rastros de complicidad/ empatía*	*Estrategias*	*Errores*	*Uso del conocimiento*	*Relaciones/ interferencias entre niveles*
IIN8	Fragmento 1	-			Eae1 Eae4	Técnico	
IIN12	Fragmento 2	Traduce del polinómico al decimal.				Analítico	Resuelve la tarea IIN8, como consecuencia de la resolución de la IIN12.
IIA13	Fragmento 3	Justificación de las llevadas en la adición.				Analítico	
IIA14	Fragmento 4	No justificación de las llevadas en la sustracción.	Reconoce la necesidad de conocer la justificación.			Técnico	
IIA15	Fragmento 5	Justificación de la posición de los sumandos		AAop.1		Analítico	
III.IA18	Fragmento 6.1	Opera en base 10.			ESop.5	Técnico	
	Fragmento 6.2	Opera parcialmente en base 10 y realiza transferencia de órdenes.		ASop.7		Analítico-Sintético	
III.IA18	Fragmento 7.1	Opera en base 10.			ESop.5	Técnico	Herencia del nivel técnico de nuestro sistema.
	Fragmento 7.2				ESop.8	Analítico	
III.IIA24	Fragmento 8	Opera en los distintos órdenes y realiza transferencias para obtener la expresión canónica.		ASop.6		Analítico/ Sintético	
III.IIA24	Fragmento 9	Realiza sin ninguna dificultad la resta con expresiones algebraicas				Analítico/ Sintético	Herencia del nivel técnico de nuestro sistema.
III.IIC26	Fragmento 10	El carácter indeterminado de la cantidad, caracterizada por los puntos suspensivos, supone un obstáculo insalvable.		ASc.2		Analítico/ Sintético	

La alumna A5-1º manifiesta una comprensión y un dominio de los sistemas de numeración intermedio entre los niveles técnico y analítico, con las destrezas que se citan, aunque todavía anclada en algunas facetas técnicas y meramente instrumentales, algunas heredadas del aprendizaje realizado en los niveles inferiores, con dificultades relacionadas con la generalización y con algunos errores persistentes (ESop).

CONCLUSIÓN

En este documento se presentan el modelo teórico y algunos resultados de la investigación realizada sobre la comprensión de los sistemas de numeración en alumnos futuros maestros de educación primaria. Hemos constatado que la formación matemática sobre los sistemas de numeración con la que los estudiantes inician los estudios de grado es insuficiente para gestionar con garantías los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación primaria. Las respuestas a tareas específicas, así como los errores detectados y las estrategias utilizadas, muestran que la mayoría de los alumnos tienen un conocimiento de tipo instrumental, técnico en el mejor de los casos, memorístico, basado en fórmulas y procedimientos aprendidos y una comprensión limitada y de bajo nivel sobre la representación usual para los números naturales. Asimismo, desconocen la organización interna de los sistemas de numeración, no son conscientes de los principios que lo caracterizan ni de las justificaciones de los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales y, por tanto, son incapaces de resolver tareas equivalentes en sistemas con agrupamientos distintos al usual. Muchos de ellos conciben que el aprendizaje matemático se realiza de forma memorística mediante el mero aprendizaje de técnicas y procedimientos: «Esto es así de toda la vida» , «Las matemáticas yo no las entiendo, yo las hago», «es así como me lo enseñaron», «es pura mecánica que te enseñaron en el colegio y no nos paramos a cuestionarnos el porqué de eso», o también, lo que es más preocupante desde nuestro punto de vista, «esto te lo aprendes porque te va a caer en el examen, tú apréndetelo aunque sea de memoria, quítatelo de en medio y a otra cosa». Desmontar estas concepciones es una tarea prioritaria para evitar que este currículum oculto emerja en las futuras prácticas escolares profesionales.

Pero el estudio realizado también pone de manifiesto que la comprensión y el dominio de los sistemas de numeración puede mejorar significativamente con un tratamiento didáctico específico; tratamiento que nunca se ha desarrollado anteriormente en primaria, secundaria o bachillerato en el sentido que recomendamos y que se centra en experiencias prácticas relacionadas con los tipos de actividades que se recogen en el estudio. Sostenemos que la orientación del proceso formativo se debe ajustar a la propia estructura del modelo teórico y a las fases más evolucionadas de este; el enfoque de las tareas y los tipos de tareas de cada categoría constituyen una guía clara sobre el sentido en el que se debe intervenir en el proceso formativo profesional. A partir de aquí son necesarios nuevos estudios que completen la información que se aporta en esta investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Castro-Rodríguez, E., Castro, E. y Torralbo, M. (2013). El análisis fenomenológico en la formación inicial de maestros. En L. Rico, J. L. Lupiañez y M. Molina (Eds.), Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular (pp. 142-160). Granada, España: Editorial Comares.

Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación. Actas del VIII Simposio de la SEIEM. La Laguna (Tenerife).

Gallardo, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales*. Tesis doctoral. Málaga: Universidad de Málaga.

Gallardo, J. y González, J. L. (2006*a*). El Análisis Didáctico como metodología de investigación en Educación Matemática. En P. Bolea, M.ª J. González y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 57-77). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses- Universidad de Zaragoza.

Gallardo, J. y González, J. L. (2006*b*). Assessing understanding in mathematics: steps towards an operative model. *For the Learning of Mathematics*, 26(2), 10-15.

Gallardo, J. y González, J. L. (2006*c*). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. *PNA*, 1(1), 21-31.

Gallardo, J. y González, J. L. (2007*a*). Fronteras en la investigación sobre comprensión en Educación Matemática. *Números*, 66.

Gallardo, J.; González, J. L. (2007*b*). Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático: el caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. En E. Castro y J. L. Lupiañez (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico* (pp. 157-184). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Gallardo, J. y González, J. L. (2011). On understanding and interpretation in mathematics: An integrative overview. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 26.

González, J. L. (1998). Didactical Analysis: A non empirical qualitative method for research in mathematics education. En I. Schwank (Ed.), *Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education*, vol. II (pp. 245-256). Osnabrück, Germany.

González, J. L., Ortiz, A. L. y Gallardo, J. (2012). Avances en el estudio de la comprensión de los sistemas de numeración en estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria. En A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XVI Simposio de la SEIEM* (pp. 303-316). Baeza, España: SEIEM.

González, J. L., Ortiz, A. L. y Gallardo, J. (2013). Limitaciones en la comprensión de los sistemas de numeración al inicio de los estudios del grado de Maestro de Educación Primaria. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación* Castro (pp. 67-75). Granada, España: Editorial Comares.

Kieren, T., Pirie, S. y Calvert, L. G. (1999). Growing minds, growing mathematical understanding: mathematical understanding, abstraction and interaction. En L. Burton (Ed.), *Learning mathematics: from hierarchies to networks* (pp. 209-231). London: Routledge.

Koyama, M. (1993). Building a two axes process model of understanding mathematics. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 1, 63-73.

Koyama, M. (1997). Research on the complementarity of intuition and logical thinking in the process of understanding mathematics: an examination of the two-axes process model by analyzing an elementary school mathematics class. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 5, 21-33.

Koyama, M. (2000). A research on the validity and efectiveness of «two-axes process model» of understanding mathematics at elementary school level. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 3 (pp. 159-166). Hiroshima, Japan, 23-27 julio.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1990). Las creencias epistemológicas sobre la naturaleza de las Matemáticas y su enseñanza y el proceso de llegar a ser un profesor. Enseñanza. Anuario interuniversitario de Didáctica, 8, pp. 165-180.

Ortiz, A. L. (1999). *Comprensión del Sistema de Numeración Decimal: un análisis de la coordinación entre los sistemas de representación escrito y hablado*. Memoria de tercer ciclo. Programa de Doctorado 1996-1998. Didáctica de la Matemática. Universidad de Málaga.

Ortiz, A. L. (2014). Comprensión de los sistemas de numeración. Un estudio en el grado de Maestro en Educación Primaria. Tesis doctoral. Universidad de Málaga.

Ortiz, A. L. y González, J. L. (2016). Rastros de comprensión, estrategias y errores sobre el sistema de numeración decimal. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiañez, J. F. Ruiz y M. Torralvo (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 273-283). Granada: Comares.

Ortiz, A. L., González, J. L. y Gallardo, J. (2011). Comprensión del sistema de numeración en estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria. En M. Marín y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 309-378). Ciudad Real, España: SEIEM.

Pirie, S. y Kieren, T. (1989). A Recursive Theory of Mathematical Understanding. For the Learning of Mathematics, 9(3), pp. 7-11.

Pirie, S. y Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? Educational Studies in Mathematics, 26, pp. 165-190.
http://dx.doi.org/10.1007/BF01273662

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 61-94). Barcelona: Horsori.

Rico, L. (1991). La Comunidad de Educadores Matemáticos. En A. Gutiérrez (Ed.), Área de conocimientos Didáctica de la Matemática. Madrid: Síntesis.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria (pp. 39-59). Barcelona: Horsori.

Rico, L., Castro, E. y Romero, I. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. En A. Gutiérrez y L. Puig (Eds.), Proceedings of the 20th conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education (vol. 1, pp. 87-102). Valencia, España: PME.

Rico, L., Marín, A., Lupiañez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las Matemáticas Escolares en Secundaria. El caso de los Números Naturales. Suma, 58, pp. 7-23.

Salinas, M. J. (2003a). Comprensión de los algoritmos de las operaciones aritméticas en estudiantes de Magisterio. En E. Castro (Ed.), Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación Matemática (pp. 339-348). Granada: Universidad de Granada.

Salinas, M. J. (2003b). Competencia matemática al finalizar los estudios de Magisterio. Explicación mediante un modelo casual. Tesis doctoral. Universidad de Santiago de Compostela.

Salinas, M. J. (2007). Errores sobre el sistema de numeración decimal en estudiantes de Magisterio. En: M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y M.ª T. González (Eds.), *Actas del XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM. Comunicaciones de los Grupos de Investigación* (pp. 381-390). Tenerife: Canarias SEIEM.

Sanchez, M. T. (2012). Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2), pp. 4-14.
http://dx.doi.org/10.3102/0013189X015002004

Understanding number systems. Models and tasks

Antonio Luis Ortiz Villarejo, José Luis González Marí
Didáctica de la Matemática. Universidad de Málaga
alortiz@uma.es, gmari@uma.es

The article describes the basics and some results of a research conducted with students of the new Degree in Primary Education about the mastery and understanding of numbering systems for natural numbers. The study tested the hypothesis that future teachers begin the studies at the University with a highly technical and mechanical understanding, based on formulas and learned procedures and with significant gaps that can be overcome throughout the formation process. To do this, a model is constructed and an analytical tool is developed to determine the level of understanding at different times of the training process, to compare results and to establish consequences founded to guide the design and development of the curricula of new teacher training degrees. The tool is based on three basic components: cognitive, semiotic, and hermeneutic, and in a general model associated and based on:

(*a*) An operational conception of the understanding of mathematical knowledge and its valuation.

(*b*) A relative and not cumulative conception of the understanding that evolves depending on the situation, the conditions and factors involved.

(*c*) A conception of mathematical knowledge based on the two basic structures (epistemological and phenomenological) and the different categories of knowledge that the intersection of both structures provide.

(*d*) A method or sequenced process with three dimensions:

- (*d*1) *Phenomenological-epistemological dimension,* in which the study starts with the following operating procedure:
  1. Didactic Analysis (González, 1998; Gallardo y González, 2006*b*);
  2. Delimitation of the generic set of situations;
  3. Determination of the phenomenological-epistemological structure of the generic set of situations;
  4. Construction of a local model;
  5. Tasks selection and construction of instruments;
  6. Analysis of results and initial findings.
- (*d*2) *Semiotic dimension*, in which we study the meanings involved, the strategies used and errors detected in the written tests.
- (*d*3) *Hermeneutic dimension*, in which a finer qualitative analysis is carried out and the results and previous findings are supplemented by what we call «interpretive or hermeneutical circle method» (Gallardo and González, 2011).

The application of the model to numbering systems starts with the determination of the epistemological-phenomenological structure of the conceptual field under study and the construction of a local model based on these two structures: a phenomenological component composed of five categories and an epistemological component which consists of four categories. The intersection of both sets of categories allows the development of instruments for data collection and the preparation and development of the first phase of empirical studies (global cognitive approach), comprising the application of the written tests, the analysis of results, mainly quantitative, and determining the consequences for further studies.

But the global cognitive approach based on written evidences is not sufficient to cover the complexity of the phenomenon of understanding; rather, it is necessary to develop a second semiotic approach (meanings, syntax, errors and strategies) and a third hermeneutical approach (traces of understanding, uses of knowledge, analysis of the valuation scenarios and agreement on assessment) aimed to confirm whether overall results, the meanings, mistakes made and the strategies used are good indicators of capabilities, skills, ways of reasoning and understanding levels.

The research results show that the mathematical formation with which students begin the graduate studies is insufficient for a proper professional development. Most of the students have an instrumental knowledge, technical at most, memorized, based on formulas and learned procedures, which is limited and of a low level of understanding. Also, they do not understand the internal organization of the numbering systems, are unaware of the principles that characterize those systems or the justifications of the algorithms of elementary arithmetic operations and therefore are unable to solve equivalent tasks on systems with groupings different than usual ones.

The study also provides evidence to say that the mentioned situation can improve significantly with a training process based on a specific educational treatment, never developed so far in any educative level, focused on the practical experiences about the types of activities included in the study, according with the structure of the local model and with the approach and the types of tasks that we propose in each category.