ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 33.3 (2015): 43-58
Investigaciones didácticas
http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1454
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Aprendizajes de las interpolaciones gráficas y algebraicas. Análisis comparativo

Learning of graphical and algebraic interpolations. Comparative analysis

Ainhoa Berciano
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea
ainhoa.berciano@ehu.eus

Tomás Ortega del Rincón, Milagros Puerta Rebuel
Universidad de Valladolid
ortega@am.uva.es, mila71@ole.com

RESUMEN • En este artículo presentamos un estudio empírico sobre la interpolación/extrapolación gráfica y algebraica con alumnado de bachillerato de Ciencias Sociales. A la hora de abordar el problema de la interpolación/extrapolación de una función hemos probado que con una instrucción específica con las plantillas gráficas adecuadas, la interpolación y extrapolación gráficas son más sencillas para el alumnado que las algebraicas, obteniéndose una diferencia significativa positiva en los resultados académicos con el método gráfico. Además, al interpolar/extrapolar algebraicamente, la dificultad de la resolución depende del tipo de función y del número y tipo de parámetros, mientras que en el caso de la interpolación/extrapolación gráfica no existe tal dependencia.

PALABRAS CLAVE: interpolación/extrapolación gráfica; interpolación/extrapolación algebraica; funciones; bachillerato.

ABSTRACT • In this paper we present an empirical study on the Graphical and Algebraic interpolation/extrapolation with students of High School of Social Sciences. We prove that, if the problem of the interpolation/extrapolation of a function is addressed with specific instructions and the appropriate graphical templates, the graphical interpolation and extrapolation are easier for students than the algebraic, obtaining a positive meaningful difference in the academic results with the graphic method. Furthermore, when students interpolate/extrapolate algebraically, the difficulty of the resolution depends on function type and the number and type of parameters, while in the case of graphical interpolation/extrapolation this dependency doesn't happen.

KEYWORDS: graphical interpolation/extrapolation; algebraic interpolation/extrapolation; functions; high school.

Recepción: marzo 2014 • Aceptación: junio 2015 • Publicación: octubre 2015

Berciano, A., Ortega del Rincón, T., Puerta Rebuel, M., (2015) Aprendizajes de las interpolaciones gráficas y algebraicas. Análisis comparativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 33.3 pp. 43-58

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

En el mundo actual, el lenguaje gráfico, en general, constituye una forma de transmisión de la información que, sin duda, está muy extendida. Si nos centramos en el mundo matemático, es claro que las gráficas cartesianas son un excelente instrumento para expresar la dependencia entre dos variables.

Al interpretar una gráfica cartesiana, el lector (el/la estudiante) tiene que tratar de identificar las variables, la unidad de medida, los ejes, su graduación y discernir si un punto dado pertenece o no a la gráfica representada y, sobre todo, saber leer la covariación que permite obtener la ordenada a partir de la abscisa conocida. Esta interpretación no es evidente para el alumnado y tiene una problemática asociada que es el objeto de esta investigación.

Acerca de la interpretación del lenguaje gráfico, en Azcárate y Deulofeu (1990) se hace referencia a investigaciones previas en las que se ha demostrado que las ideas del alumnado no son siempre correctas y los errores más frecuentes se producen en concepciones muy diversas, de las que destacan la graduación errónea de los ejes y la inversión en el orden de las coordenadas; también se producen errores en la lectura y representación de puntos de coordenadas racionales y en la concepción discreta de los puntos de una recta.

Janvier (1978) afirma que el alumnado suele hacer una lectura icónica de la gráfica, que consiste en interpretarla como un dibujo, alterando el significado de las variables y, a menudo, tendiendo a dar un punto como respuesta a cuestiones referidas a intervalos y confundiendo «mayor o menor incremento» con «mayor o menor valor».

Con respecto a las relaciones funcionales, es claro que estas se pueden representar de forma verbal, algebraica, tabular y gráfica, y son muchos los autores que, desde una perspectiva cognitiva, recomiendan el uso de los cuatro sistemas de representación y proponen que se instruya al alumnado en tareas de traducción (Vinner, 1991; Dubinsky y Harel, 1992; Duval, 1998; Dreyfus, 1991; Eisenberg, 1991; Castro y Castro, 1997; Ortega del Rincón, 1998). Sin embargo, aquí, como se trata de contrastar las interpolaciones algebraica y gráfica, se consideran estos dos sistemas junto con el verbal (oral y escrito), pero no el tabular.

De manera general, la gráfica permite ver las características globales de la función y la ecuación permite determinar valores de ambas variables con precisión, pero la representación gráfica también permite el reconocimiento de pares de valores funcionales (Pecharromán, 2008). En el caso de la enseñanza y aprendizaje de funciones y gráficas, Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) realizan un análisis sobre las funciones y sus gráficas a través de su interpretación y su construcción. Con las tareas de interpretación, el alumnado debe estudiar las propiedades locales o globales de una función, mientras que las tareas de construcción se refieren a la elaboración de una gráfica a partir de una tabla de datos o de una función algebraica, o a la construcción de una función algebraica a partir de una gráfica.

Estos autores mencionan que las tareas asociadas a la construcción/interpretación de una gráfica se pueden clasificar en cuatro tipos: *predicción* (requiere conjeturar a partir de una gráfica dada, dónde deberían estar otros puntos o parte de la gráfica que se desconoce), *clasificación* (requiere entender la definición formal de función o distinguir características propias de familias de funciones), *traslación* (precisa reconocer una misma función dada en una forma de representación u otra) y *escalas* (precisa atención a los ejes y sus escalas y a las unidades de medida usadas).

Dentro de las tareas referidas a la construcción de funciones, destacan diversos estudios sobre interpolación. Así, en Karplus (1979) se presentan tareas de predicción en las que el alumnado debe realizar un dibujo de una gráfica basándose en unos puntos dados y después dibujar puntos que pertenezcan a esta. Los resultados revelan que la mayoría de los sujetos más jóvenes realizan una interpolación «intuitiva» (a través de estimaciones, conjeturas, cálculos erróneos o no sistemáticos), mientras que la mayoría de los sujetos de mayor edad utilizan una interpolación lineal (cuando la más adecuada, en este caso, es la curvilínea). Además, Karplus indica que un número alto de estudiantes están imitando los procedimientos que habían visto en sus clases, pero que no entienden las razones que subyacen a los procesos seguidos por ellos.

Ciñéndonos al caso de la interpolación y extrapolación gráfica de funciones, cabe mencionar que ni en el currículo de enseñanza secundaria ni en el de bachillerato aparece (Decreto 70/2002, Real Decreto 3473/2000), por lo que el alumnado de bachillerato no es instruido en la interpolación gráfica y normalmente no se dispone de elementos gráficos para que puedan ser aplicados. Además, solo el currículo de 1.º de bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales menciona la interpolación exclusivamente en los casos de interpolación lineal y cuadrática algebraicas.

A este respecto, no se conocen trabajos de investigación acerca de la enseñanza-aprendizaje de la interpolación/extrapolación gráfica previos a esta investigación; mientras que en el caso de interpolación/extrapolación algebraica, solo podemos referenciar el trabajo de Lacasta (1995). En él, el autor trata de analizar por qué el alumnado de diferentes niveles fracasa en la interpretación de las gráficas de funciones. El estudio está limitado a gráficas cartesianas de funciones explícitas reales de variable real y la primera cuestión que se plantea es determinar si las gráficas de las funciones juegan un papel importante en el estudio de estas (descomposición de funciones en funciones más simples, estudio de propiedades de funciones, estudio de derivadas...), o son solamente un método de comunicación o una presentación. Además, concluye que la interpolación y extrapolación gráficas son más difíciles de resolver para el alumnado y que, por esta razón, él no las lleva a cabo.

En este artículo se pretenden hacer sendos análisis de la resolución de tareas de interpolación/extrapolación gráfica y algebraica con alumnado de bachillerato y contrastar los resultados que se alcancen en ambos procedimientos.

OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo de esta investigación es evaluar el desempeño del alumnado a través de los resultados académicos obtenidos en la realización de tareas de interpolación/extrapolación gráfica y algebraica mediante: (1) el análisis de las respuestas que emite el alumnado en las tareas de interpolación/extrapolación gráfica propuestas, después de haber recibido una instrucción adecuada (similar en ambas modalidades) y utilizando material didáctico apropiado, (2) el contraste con la interpolación/extrapolación algebraica y, por último, (3) el estudio de las dificultades de interpolación/extrapolación algebraicas y gráficas asociadas al tipo de funciones y al número y tipo de parámetros.

El tipo de problema planteado al alumnado en un contexto de resolución de problemas verbales es el siguiente: «dados los puntos (x_0,y_0), (x_1,y_1),..., (x_n, y_n), calcular el valor de la ordenada de la función que pasa por ellos en un punto $x=a$, distinto de los anteriores o bien determinar el valor de la abscisa del punto para un valor de la ordenada $y=b$».

Aunque no es necesario determinar la función de forma explícita para obtener el valor de la ordenada, lo más usual en estos niveles educativos es obtener dicha función y a continuación calcular la imagen de $x=a$. En suma, se halla una función $y=f(x)$, que para $x=x_0$, $x=x_1$,..., $x=x_n$ tome los valores $y=y_0$, $y=y_1$,..., $y=y_n$, respectivamente. En caso de que el punto $x=a$ esté comprendido entre el menor y el mayor de los valores x_0, x_1,..., x_n, este proceso se llama *interpolación*; por el contrario, si $x=a$ es más pequeño que el menor valor de los x_0, x_1,..., x_n o más grande que el mayor de ellos, se conoce como *extrapolación*.

METODOLOGÍA

La metodología usada ha sido la investigación-acción por su compatibilidad con la práctica educativa y porque el propio desarrollo de la investigación puede mejorar la praxis al aprovechar los resultados obtenidos en los ciclos experimentales previos para programar los siguientes. Esta metodología se ha aplicado con éxito en numerosas investigaciones, de entre las que destacamos: Blázquez (1999), Ibañes (2001), García (2008) y Pecharromán (2008). En cada uno de estos trabajos de investigación se han planificado tres ciclos y estos se han tomado como modelo para este, debido a que en todos ellos se ha desarrollado una investigación de tipo práctico en la que se indaga sobre un problema cuyo origen está en la práctica docente, que se ha detectado reflexionando sobre la acción y con la que se pretende obtener alguna ventaja en la práctica educativa.

En este trabajo se han diseñado 5 ciclos de 4-5 sesiones de 50 minutos cada una, en los que se han desarrollado las cuatro fases de la investigación-acción: planificación (de la puesta en práctica y desarrollo del ciclo), acción (puesta en práctica de la experimentación), observación (recopilación de datos y análisis de estos) y reflexión (determinación de pautas de comportamiento de los alumnos). La implementación de ciclos se da por concluida cuando se produce una saturación de datos; esto es, el equipo investigador interpreta que sucesivos ciclos ya no aportarían datos nuevos.

Cada ciclo ha sido implementado con un grupo de estudiantes distinto (en total se ha contado con la colaboración de 83 estudiantes de diversos institutos de enseñanza secundaria de Zamora y Valladolid). En la primera sesión de docencia del tópico que nos ocupa, la profesora-investigadora ha explicado al alumnado cómo se realiza una interpolación/extrapolación (I/E) mediante el método algebraico y el método gráfico* y en las siguiente sesiones el alumnado, individualmente, ha realizado los ejercicios de I/E propuestos (*para el método gráfico la explicación ha sido la siguiente: como se trata de encontrar los valores solicitados utilizando las plantillas gráficas correspondientes, primeramente, los alumnos tienen que representar los datos en un sistema cartesiano a la misma escala que la plantilla correspondiente, localizar la gráfica que pasa por los puntos facilitados e interpolar y extrapolar los puntos en esa gráfica trazando paralelas al eje de ordenadas sobre las coordenadas dadas hasta cortar la gráfica y encontrar los valores de las ordenadas solicitadas trazando otra paralela al eje de las abscisas; posteriormente deben deshacer la escala usada).

El paso de los ciclos ha venido marcado, a tenor de las respuestas de los alumnos, por el incremento de la dificultad en los enunciados de las tareas y el control de los tiempos dedicados en su resolución, esto es, en el ciclo 1 se ha implementado por primera vez la propuesta didáctica (descrita más abajo); en el ciclo 2 se han confirmado los resultados obtenidos en el ciclo 1; en el ciclo 3 se han introducido ejercicios de cambios de escala y se ha incrementado la dificultad de los enunciados haciendo uso de enunciados histórico-narrativos; en el ciclo 4 se ha vuelto a aumentar la dificultad en la resolución de las tareas planteadas introduciendo coeficientes fraccionarios sencillos en las tareas, y, por último, en el ciclo 5 se ha aumentado la dificultad haciendo uso tanto de coeficientes decimales como de fraccionarios.

En la primera fase de planificación, hemos elaborado todo el material didáctico, consistente en unas plantillas de familias de funciones y las tareas que se debían realizar, que más tarde hemos proporcionado al alumnado para la realización de los ejercicios de interpolación/extrapolación, tanto para el método algebraico como para el gráfico (en este sentido se han tenido en cuenta los cuatro tipos de tareas definidas por Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) y se ha hecho uso de todas ellas [predicción, clasificación, traslación y escalas]). En particular, dicho material didáctico es un cuadernillo de trabajo que consta de once tareas de análisis de respuestas sobre interpolación/extrapolación algebraica y gráfica, en las que se detalla qué método debe usarse para la resolución del ejercicio. El análisis de las respuestas de los alumnos nos permitirá verificar o no los objetivos planteados. A modo de ejemplo se transcriben dos pares de ellas:

Método algebraico:

Tarea 1.6. Calcula la ecuación de la función exponencial del tipo $y=ab^x$, que pase por los puntos $A(-3, 8)$ y $B(1, 1/2)$. Para esta función, halla las ordenadas correspondientes a las abscisas $x=2$ y $x=-2$.
Tarea 1.7. Calcula la ecuación de la función logarítmica del tipo $y=a+log_b x$, que pase por los puntos $A(2, 5/2)$ y $B(8, 3/2)$. Para esta función, halla las ordenadas correspondientes a las abscisas $x=1/2$ y $x=4$.

Método gráfico:

Tarea 2.6. Localiza la gráfica de la función exponencial que pase por los puntos $A(-3, 8)$ y $B(1, 1/2)$. Halla las ordenadas correspondientes a las abscisas $x=2$ y $x=-2$, cuyos puntos están en la gráfica determinada.
Tarea 2.7. Localiza la gráfica de la función logarítmica que pase por los puntos $A(2, 5/2)$ y $B(8, 3/2)$. Halla las ordenadas correspondientes a las abscisas $x=½$ y $x=4$, cuyos puntos están en la gráfica determinada.

Antes de pasar a la resolución de los ejercicios, en todos los ciclos se ha dado una instrucción previa algebraica y también gráfica para conocer el uso y manejo de las plantillas gráficas. Dichas plantillas han sido construidas teniendo en cuenta las familias de funciones que vamos a interpolar/extrapolar (lineal, cuadrática, circular, elíptica, hiperbólica, exponencial, logarítmica y trigonométrica); han sido elaboradas utilizando los programas informáticos DERIVE y CABRI, dibujadas sobre transparencias para que el alumnado las pueda colocar sobre su cuadernillo, ajustadas a los puntos y, así, poder localizar las funciones necesarias para realizar las interpolaciones y extrapolaciones.

EJEMPLO DE PLANTILLA DE FUNCIONES Y FUNCIONAMIENTO DE ESTA

En este apartado se describe el uso de las plantillas en la docencia, al igual que la justificación matemática de su elección. Ejemplo: se considera la plantilla siguiente que se ha diseñado para interpolar mediante la familia de funciones cuadráticas.

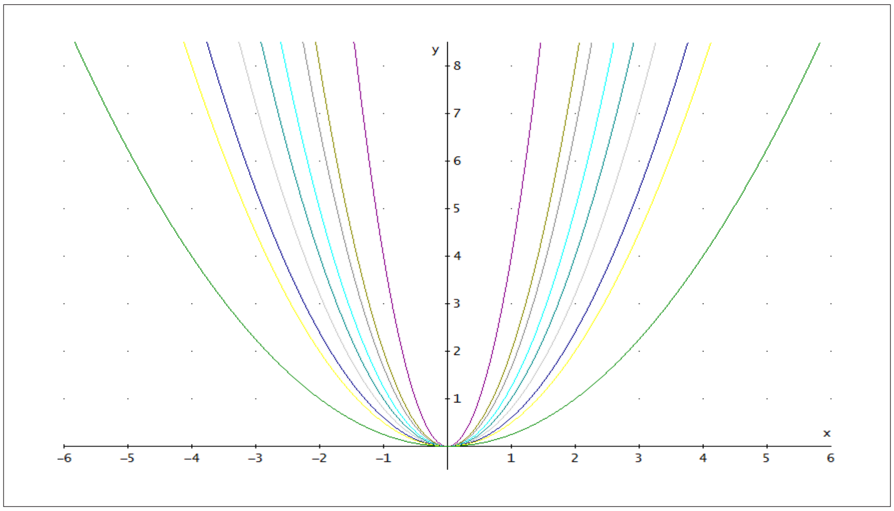


Fig. 1. Funciones cuadráticas: $x^2/4$, $x^2/3$, $x^2/2$, $3x^2/5$, $4x^2/5$, x^2, $5x^2/4$, $5x^2/4$, $2x^2$, $4x^2$

En este caso, solo se han considerado como plantilla las parábolas $f(x)=ax^2$ con a positiva, ya que para conseguir parábolas con la a negativa solo es necesario dar la vuelta a la plantilla (Blázquez Martín y Ortega del Rincón, 1999).

Teniendo en cuenta que cualquier *función cuadrática*, $C(x)=ax^2+bx+c$, está determinada por tres puntos, para encontrar la parábola que pasa por tres puntos dados, consideraremos la familia de funciones del tipo $f(x)= ax^2$ que, por traslación, nos dará la función buscada.

Es simple ver que cualquier parábola cuyo eje de simetría sea paralelo al eje de ordenadas podrá obtenerse por traslación de una parábola cuyo vértice sea el origen de coordenadas. Las parábolas cuya ecuación es del tipo $y=ax^2+c$ tienen la misma abertura y el mismo eje de simetría que $y=ax^2$, pero el vértice está desplazado al punto $(0, c)$. Si representamos ahora ecuaciones $y=a(x–p)^2$, las gráficas de estas funciones corresponden a parábolas trasladadas en la dirección del eje OX, cuyo vértice es el punto $(p, 0)$.

En realidad, lo que hemos hecho con la introducción de estos parámetros no es más que un cambio de variable, que en el primer caso se corresponde con $y'=y–c$, quedando la ecuación $y'=ax^2$ donde la nueva variable y' no es más que la inicial, restándole el valor de la constante c. Análogamente, las funciones del tipo $y=a(x–p)^2$ pueden reducirse a la forma $y=ax'^2$ haciendo $x'=x–p$, por lo que tienen el mismo gráfico que $y=ax^2$, pero trasladado p unidades en el sentido positivo o negativo (según el signo del parámetro p) del eje de abscisas. El caso general de una parábola de vértice (p, q) puede obtenerse mediante una composición de traslaciones del tipo anterior. Si consideramos su ecuación genérica $y=ax^2+bx+c$, esta puede transformarse en la expresión equivalente $y=a(x-p)^2+q$, donde los parámetros p y q son las coordenadas del vértice.

Entonces, según se acaba de ver, partiendo de la parábola $y=ax^2+bx+c$, los parámetros c y b hacen que la parábola se traslade de arriba abajo y de derecha a izquierda, y, en nuestro caso, con el procedimiento gráfico, esto se puede hacer desplazando la plantilla y manteniendo el paralelismo de los ejes hasta que una de las parábolas pase por los puntos dados.

El trabajo con las plantillas se realiza de manera autónoma en grupos de trabajo. La profesora-investigadora solo interviene en aspectos puntuales. La docencia sigue las siguientes fases: 1. se proponen las tareas, 2. se reparten los juegos de las plantillas, 3. los alumnos eligen la plantilla correspondiente y realizan la interpolación-extrapolación. Se transcribe una brevísima grabación de una clase y tres comentarios del observador externo:

– Alicia: ¿Hay que dibujar la circunferencia?
– Profesora: No hace falta. Para eso tenemos la plantilla.
– Sonia: ¿Es la circunferencia rosa?
– Profesora: Sí.[1]
– Comentario: Los demás alumnos asienten.
– Jennifer: ¿Para x=1 la y=5?
– Profesora: No lo sé, compruébalo tú.
– Miriam: No me da lo mismo que con el método algebraico...

OE1. Los alumnos están atentos e interesados en las explicaciones del profesor.
OE2. Parece que lo entienden todo pero en algunos casos no es así porque posteriormente reclaman una atención particular.
OE3. El método gráfico sí que lo entienden muy bien porque ellos no plantean dudas. Se puede observar que el manejo de escalas y las plantillas lo dominan sin dificultad.

1. Asentimiento de la profesora.

INSTRUMENTOS DE MEDIDA

Los instrumentos de medida empleados en el presente trabajo han sido principalmente las producciones escritas por el alumnado. Para poder analizar los resultados obtenidos en la realización de los ejercicios con el método algebraico o método gráfico, hemos definido la siguiente escala de valoración, basada en el concepto de *cuadro* definido por Douady (1995).

Debemos recordar que un *cuadro* se define como un *marco* algebraico, geométrico, aritmético…, donde un *marco* está constituido por los objetos de una rama de las matemáticas, las relaciones entre los objetos, las formulaciones e imágenes mentales asociadas a estos objetos y estas relaciones. Dado que dos cuadros pueden implicar los mismos objetos y, sin embargo, producir diferentes imágenes mentales, esta autora introduce el concepto de *juego entre cuadros* como los cambios de marcos propuestos por el profesorado para obtener formulaciones diferentes de un mismo problema.

En nuestro caso, utilizaremos los *marcos* algebraico y geométrico para resolver cuestiones de interpolación y extrapolación lineal, cuadrática, circular, elíptica, hiperbólica, exponencial, logarítmica y trigonométrica, que serían nuestros *cuadros*, dando lugar a la tabla 1, que relaciona las unidades elementales de cada cuadro y las escalas de puntuación que hemos definido. Las unidades elementales de ambos cuadros que figuran en la misma fila son equivalentes entre sí y el proceso que describen las unidades de ambos cuadros, de arriba abajo, describen el proceso de resolución en ambos. En la misma tabla se muestran las escalas de puntuación para ambos cuadros (que es la misma), el flujo de ambas es creciente y la puntuación se establece según el progreso que se haya realizado en uno y otro cuadro.

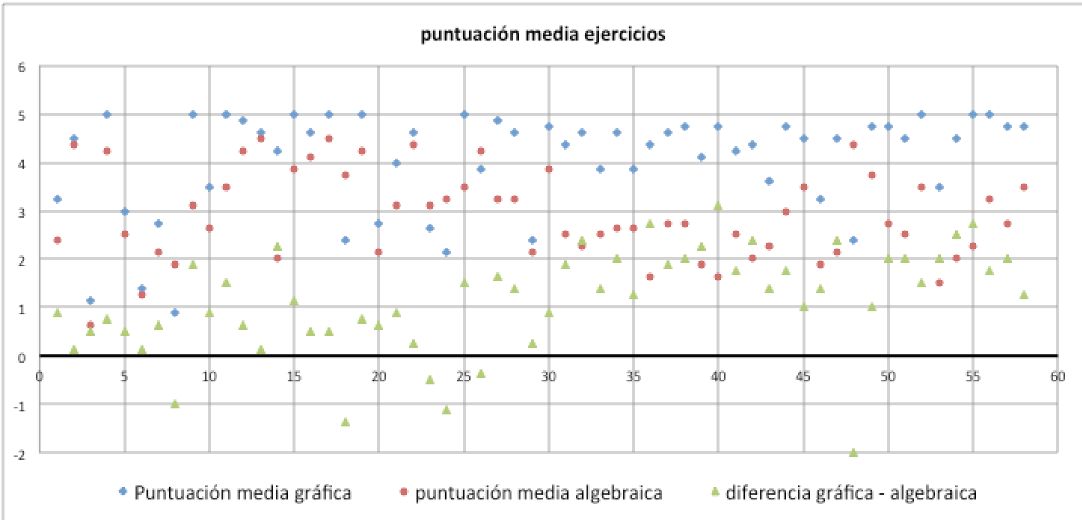
Tabla 1.
Unidades elementales y escalas de puntuación

Relaciones entre cuadros, unidades elementales de representación y escalas de puntuación			
Cuadro algebraico		*Cuadro gráfico*	
Plantea el sistema de ecuaciones	1	Representa los puntos dados	1
Intenta resolver	2	Dibuja un punto de I/E	2
Calcula parámetros y escribe la función	3	Dibuja dos puntos de I/E e identifica la gráfica de la función	3
Calcula uno de los valores de I/E	4	Lectura numérica de un punto de I/E	4
Calcula los dos valores de I/E	5	Lectura numérica de los dos puntos de I/E	5

RESULTADOS ACADÉMICOS OBTENIDOS POR EL ALUMNADO

Haciendo uso de los cuadros anteriormente mencionados, a lo largo de los cinco ciclos de la implementación, hemos comprobado que en más de un 90% de los casos la puntuación media obtenida con el método gráfico es superior que la puntuación media obtenida al aplicar el método algebraico (véase gráfica 1).

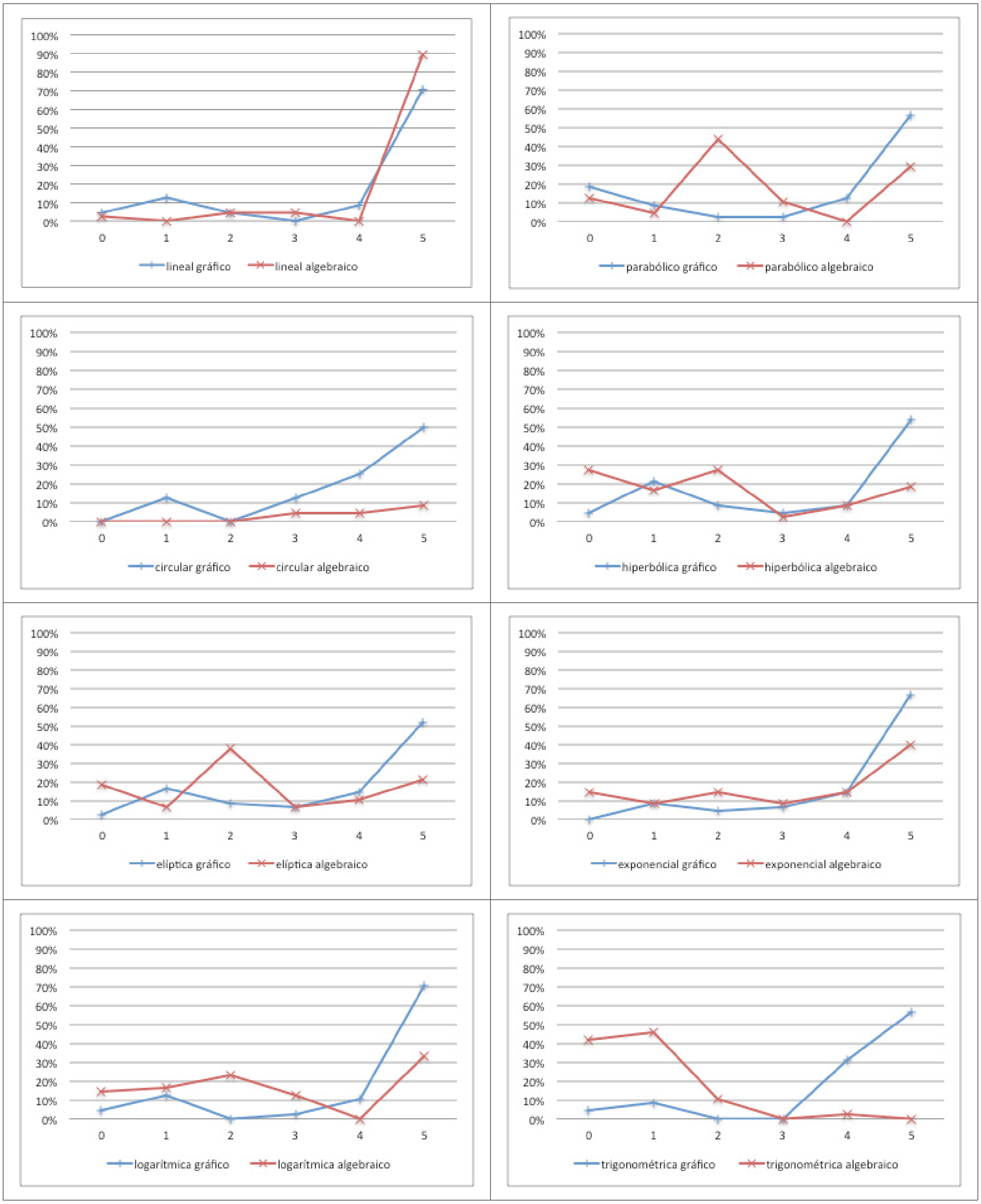
Gráfica 1.
Puntuación media obtenida por cada estudiante en los ejercicios/método aplicados



RESULTADOS OBTENIDOS DEPENDIENDO DEL TIPO DE FUNCIÓN Y MÉTODO ELEGIDO

A la hora de analizar los resultados obtenidos por el alumnado dependiendo del tipo de función y métodos elegidos, al igual que en el apartado anterior, hemos usado la tabla de cuadros para calcular los porcentajes de alumnado en la resolución gráfica/algebraica dependiendo de la puntuación obtenida en dichos ejercicios. Este estudio nos han proporcionado varias tablas de frecuencias que, convertidas a porcentajes, se representan en la gráfica 2.

Gráfica 2.
Porcentaje de alumnado/puntuación obtenida en cada ejercicio



Como se puede apreciar en las gráficas, excepto en la primera, en la que las ecuaciones son muy sencillas, en todas las demás, la gráfica de porcentajes de la interpolación gráfica está por encima de la que corresponde a las frecuencias algebraicas en los valores más altos de la variable. Comparando unas con otras, se constata que los resultados del método algebraico dependen mucho del tipo de función que queramos interpolar/extrapolar, pero apenas influye en los resultados del método gráfico y se concluye que los resultados algebraicos empeoran a medida que se va complicando la expresión de la función, aunque el sistema de ecuaciones que tienen que resolver en todos los casos es similar. Además, los resultados de este método dependen mucho de los conocimientos previos del alumnado en resolución de sistemas de ecuaciones y, por tanto, los resultados dependen de lo trabajado en años anteriores.

Como hemos apreciado en las tablas anteriores, las dificultades para interpolar y extrapolar una función por el método algebraico dependen del tipo de función, siendo las más sencillas las funciones lineales. Con el resto de funciones las dificultades mostradas por el alumnado aumentan considerablemente de forma gradual según la siguiente ordenación: circulares, cuadráticas, elípticas, hiperbólicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas; estas últimas son algebraicamente intratables para estos alumnos. Asimismo, la dificultad va aumentando con el número de parámetros y con la tipología numérica de los coeficientes.

En cambio, utilizando el método gráfico, los resultados del alumnado apenas dependen, o dependen menos, del tipo de familia de funciones, pero sí del número de ejercicios de este tipo que hayan resuelto hasta ese momento. Así, se ha comprobado que los primeros ejercicios de los cuadernillos de trabajo, aunque sean de familias de funciones más sencillas, en general, presentan más dificultades para ellos, porque con los primeros ejercicios propuestos utilizan el método gráfico por primera vez y lo van aprendiendo con la práctica educativa de la experiencia de la propia prueba de investigación. Asimismo, la profesora-investigadora, que desconocía el método gráfico de interpolación, se va afianzando en esta docencia con su puesta en práctica.

Igualmente, en los dos últimos ciclos hemos comprobado que la introducción de coeficientes fraccionarios o decimales y el aumento del número de parámetros en la expresión de la función a interpolar/extrapolar empeoran ostensiblemente los resultados del método algebraico; sin embargo, no afecta o afecta menos a los resultados del método gráfico.

Por último, con el fin de medir si las diferencias mostradas entre los métodos gráfico y algebraico en los resultados académicos son significativas, hemos comprobado primeramente si las distribuciones son normales. En este sentido la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov aplicada a las muestras nos ha revelado que dichas distribuciones no son normales (véanse tablas 2 y 3). Ciertamente, este análisis no es crucial para el artículo, ya que la muestra no permite extender resultados, pero será interesante comprobar que las diferencias entre ambos métodos son significativas.

Tabla 2.
Estudio de la normalidad del método algebraico según familia de funciones

Método algebraico	*Lineal*	*Parabólica*	*Circular*	*Hiperbólica*	*Elíptica*	*Exponencial*	*Logarítmica*	*Trigonométrica*
Media	4,69	2,69	4,88	2,04	2,46	3,19	2,67	,75
Des. Típ.	,993	1,69	,444	1,833	1,738	1,887	1,872	,812
Dif. Ab.	,519	,262	,528	,217	,229	,227	,227	,254
Z	3,598	1,816	3,655	1,506	1,587	1,576	1,573	1,761
Sig.	,000	,003	,000	,021	,013	,014	,014	,004

Tabla 3.
Estudio de la normalidad del método gráfico según familia de funciones

Método gráfico	*Lineal*	*Parabólica*	*Circular*	*Hiperbólica*	*Elíptica*	*Exponencial*	*Logarítmica*	*Trigonométrica*
Media	4,08	3,50	4,00	3,54	3,71	4,27	4,15	4,15
Des. Típ.	1,648	2,063	1,337	1,821	1,650	1,267	1,598	1,414
Dif. Ab.	,419	,329	,273	,330	,304	,384	,412	,334
Z	2,905	2,279	1,890	2,286	2,106	2,661	2,854	2,314
Sig.	,000	,000	,002	,000	,000	,000	,000	,000

El hecho de que las distribuciones no sean normales nos obliga a considerar la prueba de los rangos con signo de Wilcoxon que mide si las diferencias entre ambas distribuciones son significativas (tabla 4).

Tabla 4.
Prueba de rangos con signo de Wilcoxon

Gráfica -algebraica	*Lineal*	*Parabólica*	*Circular*	*Hiperbólica*
Z	-2,446[a]	-2,788[b]	-3,655[a]	-4,044[b]
Sig. asintót. (bilateral)	,014	,005	,000	,000

Gráfica -algebraica	*Elíptica*	*Exponencial*	*Logarítmica*	*Trigonométrica*
Z	-3,460[b]	-3,437[b]	-3,750[b]	-5,768[b]
Sig. asintót. (bilateral)	,001	,001	,000	,000

[a]Basado en los rangos positivos; [b]basado en los rangos negativos.

Dicha prueba muestra una diferencia significativa a favor del método algebraico en el caso de la familia de funciones lineales, mientras que en el resto de familias, la diferencia es significativa a favor del método gráfico (véase tabla 4). Este hecho pone de manifiesto que dicho método proporciona resultados académicos mucho más satisfactorios con independencia de la complejidad de la familia de funciones seleccionada.

Tal como hemos mencionado anteriormente, la excepción con la familia de funciones lineales es justificada por el hecho de ser la primera vez que el alumnado trabaja con plantillas en la resolución de este tipo de problemas, tal y como muestran los siguientes comentarios. Cuando pedimos al alumnado que elija su método preferido para cada tipo de interpolación/extrapolación y escriba libremente lo que les ha parecido cada método, se puede apreciar que la mayoría del alumnado prefiere el método gráfico, ya que les parece más entretenido, más rápido y más fácil para ellos. Se transcriben algunos comentarios de los alumnos sobre sus preferencias:

- Con el método gráfico no necesitas saber fórmulas ni despejar incógnitas (Sandra).
- El método gráfico es muy fácil porque solo tienes que buscar los puntos (Lidia).
- Prefiero el método gráfico porque es más fácil utilizar reglas de tres y puedes interpretar y ver los resultados (Sergio).
- El método gráfico es más dinámico y visual, se ven mejor los puntos y lo entiendo mejor (Alberto).

Sin embargo, en el caso de la interpolación/extrapolación lineal y cuadrática, el 52% de ellos eligen el método algebraico para la interpolación lineal y el 60% para la interpolación cuadrática, ya que les parece fácil resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

– Me gusta resolver sistemas de ecuaciones de primer grado (Teresa).
– Me parece más fácil con el método algebraico porque es lo que he utilizado siempre, solo es aplicar la fórmula y sustituir (Cristina).
– El método gráfico es más entretenido y más rápido, pero tienes que medir muy bien (Alba).
– El método gráfico es más fácil y más entretenido aunque es difícil medir con exactitud (María).

En cambio, para los demás tipos de interpolación/extrapolación, circular, hiperbólica, elíptica, exponencial y logarítmica, las preferencias por el método gráfico están entre un 67 y un 75%, ya que, según ellos, son incapaces de resolver estos problemas mediante el método algebraico.

– Utilizar el método gráfico es mucho más sencillo que resolver ecuaciones exponenciales (Aroa).
– Resolver estos dos casos de I/E (elíptica y exponencial) mediante el método algebraico es muy difícil porque las fórmulas son muy complicadas (Mercedes).

La interpolación/extrapolación trigonométrica es un caso especial, ya que el alumnado no sabe resolver sistemas de ecuaciones trigonométricas y, por tanto, todos han elegido el método gráfico como el más idóneo para resolver este tipo de I/E. Así lo explica una de las alumnas:

– Con el método algebraico no sé resolver el sistema y con el método gráfico no te hace falta saber mucho, solo reglas de tres (Miriam).

DIFERENCIAS ENTRE INTERPOLACIÓN O EXTRAPOLACIÓN SEGÚN EL MÉTODO USADO

Por último, hemos analizado el comportamiento de los alumnos ante problemas de interpolación o extrapolación dependiendo del método usado, si la variable dada para el cálculo influye en la resolución, o si en el proceso de resolución gráfica el tener que usar una regla de tres supone alguna diferencia.

Con respecto a la posible diferencia entre la interpolación y la extrapolación según el método usado, hemos constatado que mediante el método algebraico el alumnado resuelve mejor los ejercicios de interpolación que los de extrapolación; además, cuando estos ejercicios contienen resultados enteros, estos se resuelven mejor que cuando los resultados involucran enteros y decimales. Sin embargo, mediante el método gráfico, el alumnado resuelve de forma similar los ejercicios de interpolación y de extrapolación, aunque también son mejores los resultados de los ejercicios cuyos resultados son números enteros.

Por otro lado, tanto en el método algebraico como en el gráfico (véanse tablas 5 y 6), cuando al alumnado se le proponen ejercicios de interpolación donde se le facilita el valor de la variable independiente, interpolar o extrapolar un valor de x, resuelve el problema bastante mejor que cuando se le facilita el valor de la ordenada (42 frente 28) y no hay alumnos que interpolen el valor de la ordenada sin interpolar el de la abscisa; de hecho, ningún alumno interpola valores de y sin interpolar valores de x. Las actividades de extrapolación son realizadas por muy pocos alumnos, pero siempre extrapolan ambas variables. Con el método gráfico (tabla 6) los resultados son mejores: realizan la interpolación de las dos variables 16 alumnos, interpolan solo los valores de x 34 alumnos, y solo los valores de y 2 alumnos. En cuanto a la extrapolación, hay 13 estudiantes que realizan la extrapolación de las dos variables, 14 exclusivamente los valores de x y 13 los de y.

Comparando ambas tablas vemos que cuando aplican el método gráfico no hay tanta diferencia entre interpolación y extrapolación; sí que hay gran diferencia en la interpolación de valores de *x* frente a valores de *y*, pero en el caso de extrapolación los resultados son muy parecidos. En todo ello hay que tener muy presente que los enunciados de las actividades son totalmente equivalentes.

En las tablas 5 y 6 se ha utilizado esta codificación: *nxy* indica que interpolan o extrapolan los valores de las dos variables *n* veces, *nx* que interpolan o extrapolan *n* veces los valores de *x*, *ny* que interpolan o extrapolan *n* veces los valores de *y*.

Tabla 5.
Número acumulado de estudiantes que solo realizan uno
de los dos apartados por el método algebraico: interpolación o extrapolación

Problema	*Lineal*	*Parabólica*	*Circular*	*Hiperbólica*	*Elíptica*	*Exponencial*	*Logarítmica*	*Trigonométrica*	*Total*
Interpolación	1x	5x	1xy+1x	4xy	4xy	2xy+3x	0	0	11xy+10x
Extrapolación	0	0	0	0	1xy	2xy	0	0	3xy
Total	1x	5x	1xy+1x	4xy	5xy	4xy+3x	0	0	14xy+10x

Tabla 6.
Número acumulado de estudiantes que solo realizan uno
de los dos apartados por el método gráfico: interpolación o extrapolación

Problema	*Lineal*	*Parabólica*	*Circular*	*Hiperbólica*	*Elíptica*	*Exponencial*	*Loga rítmica*	*Trigonométrica*	*Total*
Interpolación	6xy+4x	7x	1xy+1x	1xy+2y	0	6xy+3x	1xy+4x	1xy+15x	16xy+ 34x+2y
Extrapolación	2xy	1xy+3y	1xy+7x+10y	1x	4xy+6x	5xy	0	0	13xy+ 14x+13y
Total	8xy+4x	1xy+7x+3y	2xy+8x+10y	1xy+1x+2y	4xy+6x	11xy+3x	1xy+4x	1xy+15x	29xy+ 48x+15y

Finalmente, nos hemos centrado en estudiar si en el método gráfico, los ejercicios resueltos estaban relacionados con el método resolutor para encontrar la coordenada del punto pedido, haciendo la distinción entre el uso de una regla de tres y la determinación directa (los puntos se pueden leer directamente sobre la propia gráfica si coinciden con divisiones enteras, pero si esto no ocurre deben calcular su valor aproximado), comprobando que el éxito en la resolución de los ejercicios depende de si la interpretación del punto es directa o calculada y no de que se trate de una interpolación o de una extrapolación, pero sí que se nota cierta influencia de la tipología numérica, aunque en ambos casos son más abundantes las soluciones directas.

Tabla 7.
Número de estudiantes que solo realizan uno
de los dos apartados por el método gráfico: interpolación o extrapolación

	Interpolación		*Extrapolación*		*Total*	
Metodología	*Directa*	*Regla de tres*	*Directa*	*Regla de tres*	*Directa*	*Regla de tres*
Entero	31	12	16	5	47	17
Decimal	1	8	17	2	18	10
Total	32	20	33	7	65	27

Sobre el uso del método algebraico utilizando reglas de tres o determinaciones directas, los alumnos manifiestan sus sentimientos a través de sus afirmaciones:

– El método gráfico ha sido divertido y entretenido, ya que haciendo reglas de tres se resuelve muy bien (Roberto).
– Con el método gráfico me ha costado un poco resolver lo de las escalas, aunque con la práctica, al final lo he cogido (Fátima).

Esta última alumna, Fátima, que es la que más puntuación ha obtenido al interpolar con el método algebraico, al referirse al uso de la regla de tres comenta:

– ... El método grafico me parece un lío con tanta regla de tres (Fátima).

CONCLUSIONES

Tras analizar con detenimiento los resultados mostrados anteriormente, podemos concluir que el método de interpolación gráfica resulta más sencillo que el método algebraico y el alumnado alcanza mejores resultados con la interpolación gráfica que con la algebraica, ya que aquella no depende tanto de conocimientos previos.

En los problemas de interpolación, en ambos métodos se observa una diferencia acusada de resultados positivos según se interpolen valores de la variable x (mejores) o valores de la variable y (peores).

En los problemas de extrapolación apenas hay resultados positivos con el método algebraico. Sin embargo, sí que son abundantes con el método gráfico y, además, las extrapolaciones para valores de ambas variables son muy similares.

A medida que el alumnado resuelve ejercicios de interpolación/extrapolación mediante el método gráfico lo hacen mejor, hecho que se ve corroborado por los resultados que alcanzan en todos los ciclos de investigación, resultados que, en general, van siendo mejores a medida que la profesora-investigadora se va familiarizando con el método al avanzar en la resolución de los ejercicios de las pruebas.

Además, los resultados del método algebraico dependen en gran medida de los conocimientos en resolución de sistemas de ecuaciones que el alumnado tenga de años anteriores y, en consecuencia, de la familia de funciones que se vaya a interpolar/extrapolar. Sin embargo, con el método gráfico esto no sucede, ya que el alumnado alcanza mejores resultados sin que tengan conocimientos previos referidos a este tema porque es la primera vez que lo utilizan.

Todo ello nos lleva a plantear que, al contrario de lo expuesto por Lacasta (1995), la interpolación/extrapolación de funciones en bachillerato puede ser tratada con el método gráfico como una propuesta didáctica complementaria y/o alternativa al método algebraico, beneficiosa para la enseñanza-aprendizaje de la matemática, siempre y cuando se disponga de un material didáctico adecuado, plantillas gráficas, y se dé una pequeña instrucción sobre el uso de estas.

REFERENCIAS

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas. Matemáticas, cultura y aprendizaje*. Síntesis: Madrid.

Blázquez, S. (1999). Noción de límite en Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. En *Actas III Simposio SEIEM*. Valladolid: Universidad de Valladolid, pp. 167-184.

Blázquez Martín, S. y Ortega del Rincón, T. (1999). Didáctica del Análisis en las Matemáticas de Bachillerato. El cálculo diferencial. En T. Ortega del Rincón (ed.). *Temas Controvertidos en Educación Matemática ESO y Bachillerato*. Valladolid: Universidad de Valladolid, pp. 155-203.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. En L. Rico (coord.). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Orsori, pp. 95-122.

Decreto 70/2002, de 23 de mayo, por el que se establece el Currículo de Bachillerato de la Comunidad de Castilla y León.

Douady, R. (1995). La Ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (eds.). *Ingeniería Didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamericana, pp. 61-96.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. En D. Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, pp. 25-41.

Dubinsky, E. y Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. En G. Harel y E. Dubinsky (eds.). *The Concept of Function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Washington, DC: Mathematical Association of America, pp. 85-106.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Departamento de Matemática Educativa, México: Cinvestav, pp. 173-201.

Eisenberg, T. (1991). *Functions and associated learning difficulties*. En D. Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, pp. 140-152.

García, A. (2008). *Metodología de educación en la atención a la diversidad.* Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Ibañes, M. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de Bachillerato.* Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: Studies and teaching experiments*. Tesis doctoral, University of Nottingham.

Karplus, R. (1979). Continuous functions: Students'viewpoints. *European Journal of Science Education*, I (4), pp. 397-413. Disponible en línea: <http://dx.doi.org/10.1080/0140528790010404>.

Lacasta, E. (1995). *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques: illusions et contrôles*. Tesis doctoral, Université Bordeaux I.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning and Teaching. *Review of Research in Education*, 16 (1), pp. 1-64. Disponible en línea: <http://dx.doi.org/10.3102/00346543060001001>.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2001). Real Decreto 3473/2000 de 29 de diciembre por el que se establecen las Enseñanzas Mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. BOE de 16 de enero. Madrid: BOE.

Ortega del Rincón, T. (1998). Algunos apuntes sobre el uso de las gráficas cartesianas. En *Actas II Simposio SEIEM*. Pamplona, pp. 141-150.

Pecharromán, C. (2008). *Aprendizaje de las propiedades de las funciones a través de sus gráficas.* Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D. Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, pp. 65-81.

Learning of graphical and algebraic interpolations. Comparative analysis

Ainhoa Berciano
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea
ainhoa.berciano@ehu.eus

Tomás Ortega del Rincón, Milagros Puerta Rebuel
Universidad de Valladolid
ortega@am.uva.es, mila71@ole.com

One of the topics that students should normally learn at High School Education in the field of Numerical Analysis is how to interpolate or extrapolate functions. In general, they should know how to solve algebraically problems related with linear or quadratic interpolations/extrapolations, where they need to do some systems of equations. Concerning this point, some authors have shown the difficulties students have for learning the algebraic method, but there is nothing published about the difficulties that students have when facing the graphical method.

Taking into account the small number of previous investigations, in this paper we present an empirical study on the Graphical and Algebraic interpolation and extrapolation with High School students of Social Sciences.

The objective of our study is to evaluate the achievement of the students in the resolution of graphical and algebraic interpolation/extrapolation using: (1) the analysis of the answers given by the students in the resolution of the graphical interpolation/extrapolation, after a specific instruction and with the use of specific material created to this purpose, (2) the contrast with the results in the case of the algebraic interpolation/extrapolation, and, finally, (3) the study of the difficulties associated to the algebraic and graphical interpolations/extrapolations depending on the type of the functions and the number and type of the parameters.

For this purpose, the families of functions chosen have been: linear, quadratic, circular, elliptic, hyperbolic, exponential, logarithmic and trigonometric. The methodology used in this study has been the investigation-action. We have designed 5 cycles of 4-5 sessions of 50 minutes each, where all the phases of this methodology have been implemented: planning, action, observation and reflection.

For the first cycle, we have designed and created the graphical templates of the families of the functions and the activities that the students should solve using the algebraic and graphical methods. The change of cycle, determined by the answers of the students, has been defined by increasing the difficulty of the formulation of the activities and the control of the time used for solving the exercises.

Taking into account the results obtained, we prove that, if the problem of the interpolation/extrapolation of a function is addressed with specific instructions and the appropriate graphical templates, the graphical interpolation and extrapolation are easier for students than the algebraic, obtaining a positive meaningful difference in the academic results with the graphic method. Furthermore, when interpolating/extrapolating algebraically, the difficulty of the resolution depends on function type and the number and type of parameters, while in the case of graphical interpolation/extrapolation this dependency does not occur.