http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1575
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto

Reasoning based on the concept of finite limit of a function at a point

José Antonio Fernández-Plaza, Juan Francisco Ruiz-Hidalgo, Luis Rico
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada
joseanfplaza@ugr.es, jfruiz@ugr.es, lrico@ugr.es

RESUMEN • Este artículo analiza las concepciones de los estudiantes de bachillerato acerca del concepto de límite finito de una función en un punto a partir de su representación gráfica. Las concepciones emergen de los argumentos que los estudiantes expresan cuando aplican sus definiciones individuales a una selección de modelos gráficos del concepto. La bondad de los razonamientos observados se caracteriza en términos de tres niveles de coherencia entre los argumentos de cada estudiante y una definición individual elaborada previamente. Los resultados muestran concepciones reconocidas en estudios previos. También este estudio detecta concepciones particulares, tales como la necesidad de que exista la imagen de una función en un punto para discutir acerca de su límite en dicho punto. Asimismo, detectamos un equilibrio entre argumentos plenamente coherentes y los incoherentes con la definición individual.

PALABRAS CLAVE: concepción; definición; límite finito de una función en un punto; coherencia de una argumentación.

ABSTRACT • This article analyses the students' conceptions in Non-Compulsory Secondary Education about the concept of finite limit of a function at a point from its graphical representation. Conceptions emerge from the arguments students express when applying their individual definitions to a selection of graphical models of the concept. The goodness of observed students' argumentations is characterized in terms of three levels of coherence between single student's arguments and his individual definition previously developed. The results show conceptions recognized in previous studies. This study also detects particular conceptions, such as, necessity for image existence of a function at a point to discuss on its limit at that point. Likewise, we detect a balance between fully coherent arguments and incoherent ones with the individual definition.

KEYWORDS: conception; definition; finite limit of a function at a point; consistency of an argument.

Fecha de recepción: octubre 2014 • Aceptado: marzo 2015

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L. (2015) Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. *Enseñanza de las Ciencias*, 33.2, pp. 211-229

INTRODUCCIÓN

Abordar el aprendizaje del concepto de límite y el dominio de su definición sitúan a este estudio en la agenda de investigación del Pensamiento Matemático Avanzado (Gutiérrez y Boero, 2006: 147-172). Concretamente, el papel de las definiciones es un criterio importante para diferenciar entre el pensamiento matemático elemental y el pensamiento matemático avanzado (Azcárate y Camacho, 2003; Edwards, Dubinsky y McDonald, 2005; Tall, 1992). Se trata, este último, de un extenso ámbito de investigación que provoca diferentes interpretaciones y modos de abordar su estudio (Harel y Sowder, 2005; Selden y Selden, 2005).

Al interrogarnos sobre la concepción que los estudiantes de bachillerato tienen de la noción de límite finito de una función en un punto, se plantean cuestiones como ¿qué significado le atribuyen a esa noción? Las descripciones que los estudiantes realizan del concepto ¿son «definiciones»? ¿Son coherentes las respuestas ante determinadas tareas respecto a la descripción que los estudiantes hacen del concepto?

Para analizar las definiciones de un concepto matemático aportadas por los estudiantes, requerimos distinguir adecuadamente entre las nociones de definición y de concepción. En este sentido, Von Glasersfeld (1987) prescribió la pertinencia de describir la noción de concepción desde dos puntos de vista: uno interno al sujeto, como elementos que moviliza para dar una determinada respuesta (gestual, simbólica, gráfica, etc.), y otro externo, entendido como la interpretación de los investigadores acerca de lo que comunica el sujeto de estudio (p. 13).

Con la intención de establecer un vínculo entre la deducción formal y la intuición, mostramos que el trabajo de los estudiantes con tareas analíticas/diagnóstico, que tratan propiedades específicas del concepto de límite finito de una función en un punto, incentiva la tarea de sintetizar una definición individual, lo cual atenúa notablemente la tendencia a reproducir la definición del profesor o del libro de texto de referencia (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, Rico y Castro, 2013).

Para explorar la relación entre las concepciones y la definición de un estudiante acerca de un determinado concepto matemático, se implementaron tareas de aplicación de la definición, que implicaron diversas relaciones entre sistemas de representación. La noción de representación juega aquí un papel fundamental. Esta noción surge del interés por comprender la naturaleza del conocimiento matemático, la comprensión de conceptos y modos de pensamiento y las diversas formas de expresión y comunicación de las ideas matemáticas (Janvier, 1987; Rico, 2009).

Son varios los antecedentes encontrados de investigaciones que han estudiado las concepciones de estudiantes y profesores según distintos sistemas de representación del concepto de límite finito de una función en un punto (Blázquez, 2000; Blázquez y Ortega, 1998; Swinyard, 2011; Valls, Pons y Llinares, 2013; Ward, Inzunsa, Hernández y López, 2013).

En un estudio más amplio, encaminado a describir los significados que los estudiantes atribuyen al concepto de límite finito de una función en un punto, caracterizamos las definiciones individuales de los estudiantes participantes en términos de aspectos estructurales basados en las dicotomías objeto/proceso, proceso finito/infinito potencial, carácter exacto/aproximado del límite, su rebasabilidad y su alcanzabilidad (Fernández-Plaza *et al.*, 2013).

En este trabajo se constata la capacidad de los estudiantes para relacionar las representaciones verbales con las que expresan su definición de límite y cómo la aplican para justificar la existencia o no de límite de funciones definidas gráficamente. Fijamos los siguientes objetivos específicos de este estudio:

– O.1. Describir las concepciones de los estudiantes manifestadas por la aplicación de su definición individual en una tarea de interpretación de gráficas de funciones relacionadas con el concepto de límite finito en un punto.

– O.2. Valorar la coherencia entre la definición individual sobre límite finito de una función y los argumentos aportados acerca de su existencia en un punto, a partir de la información contenida en las gráficas.

En la siguiente sección describiremos nociones generales teóricas que sustentan el trabajo, entre ellas, las nociones de concepción, definición, significado de un concepto matemático, representación y la noción específica de coherencia entre un argumento y una definición.

MARCO CONCEPTUAL Y PROCEDIMENTAL

Como se expresa en la introducción, el trabajo se sustenta en las nociones de definición y concepción que diferenciamos claramente; en los procedimientos para detectar las concepciones de los estudiantes; en una caracterización semántica del significado de un concepto matemático escolar; en las funciones de los sistemas de representación matemáticos, y, por último, en una caracterización de la coherencia entre distintas propiedades junto con un método para su valoración.

Concepciones y definiciones

Aunque las nociones de concepción y definición se refieren a descripciones de una entidad y cada definición se puede considerar como variante de una concepción, durante el trabajo consideramos ambas nociones con significados diferenciados.

Un primer dato diferenciador entre ambas nociones es que la definición ha de poseer un carácter formal, inequívoco, conciso y exacto; peculiaridades que no tienen por qué exigirse para una concepción. Las definiciones son la expresión verbal de los conceptos utilizados por una comunidad lingüística, de un grupo científico e incluso de un equipo de investigación particular, mientras que las concepciones son individuales, dado que existen diferencias entre concepciones de una persona a otra en referencia al mismo objeto. Por tanto, la definición tiene un papel distintivo del uso técnico de un constructo en contraste con sus usos intuitivos y coloquiales (Vinner, 1991).

Una *definición* en matemáticas es un conjunto de propiedades lógicamente consistente (sin circularidad ni contradicciones internas) de un concepto matemático, a partir de las cuales se deducen otras propiedades de este, la veracidad o falsedad de afirmaciones acerca de dicho concepto, o se identifican ejemplos (al menos uno) y contraejemplos del objeto matemático (Harel, Selden y Selden, 2006: 151).

Existen características de un concepto matemático que no están prefijadas por su definición, pero pueden venir condicionadas por el contexto en el que se emplean (Pecharromán, 2013: 129), por ejemplo, la definición formal de límite no prefija aspectos como la no rebasabilidad del límite, el valor que toma la función en el punto o la alcanzabilidad del objeto límite; propiedades que los estudiantes sí manipulan y asocian a su idea de límite, alterando así el campo de ejemplos que abarca la definición del profesor o del libro de texto. En la matemática formal, la definición se puede considerar como la mejor representación de un determinado concepto, en el sentido de ser sintética y completa, pues todas las propiedades del concepto se deducen lógicamente de ella. A la caracterización o descripción de un concepto en la que un estudiante se propone interpretar y sintetizar las propiedades *definitorias* se le denominará «definición individual», con el fin de distinguirlas de aquellas otras propuestas por el profesor o el libro de texto.

Son varias las investigaciones centradas en el rol de la definición durante el proceso de aprendizaje de los estudiantes (Blázquez, Gatica y Ortega, 2009; De Villiers, 1998; Swinyard, 2011; Zandieh, Roh y Knapp, 2014; Zaslavsky y Shir, 2005).

La noción de *concepción* la consideraremos desde dos puntos de vista siguiendo a Von Glasersfeld (1987: 13). El primero de ellos desde el estudiante, como la descripción interna e individual de aspectos particulares del concepto. Desde el punto de vista del investigador, la concepción del estudiante se define como la interpretación fundada de un conjunto de respuestas (verbal, gráfico, simbólico, gestual, etc.) que proporciona un estudiante a una serie de estímulos para lo cual moviliza aspectos de su concepción interna, inobservable directamente. Asimismo, compartimos elementos de Roth y Thom (2009: 186-187) que modelan una concepción como una red de experiencias de un estudiante acerca de un concepto y postulan que el conocimiento de un concepto se identifica con la interconexión adecuada entre los diferentes nodos de experiencia. Las concepciones evolucionan cuando existen condiciones que las contradicen o evocan un nuevo punto de vista e incluso pueden recoger matices del desarrollo epistemológico del concepto (Sierra, González y López, 2000).

Modelo para detectar concepciones

Una concepción se puede generar a partir de concepciones elementales que proceden de la respuesta del estudiante frente a estímulos específicos. Es un hecho observable que las concepciones elementales puedan ser contradictorias entre sí, porque un estudiante es capaz de reaccionar de manera diferente a estímulos equivalentes salvo cambios de representación (Garbín y Azcárate, 2002; Dufour-Janvier, Bednarz y Belanger, 1987: 114; Tirosh, 1990). Para interpretar y organizar las concepciones elementales se elabora un modelo que recoge inevitablemente elementos conceptuales de los propios investigadores, no del estudiante (Von Glasersfeld: 13). Para detectar las concepciones de los estudiantes empleamos dos tipos de tareas, para cuya respuesta los estudiantes emplean dos tipos de procedimientos:

- *Sintético/definidor*. Se le demanda al estudiante que sintetice una serie de propiedades del concepto en un enunciado o *definición*, bien directamente, bien de forma indirecta mediante discusión de ejemplos del concepto. Por tanto, toda definición individual es una concepción del estudiante.
- *Analítico/diagnóstico*. Se le demanda al estudiante la identificación, uso de ciertas propiedades de un concepto dado o aplicación de su definición individual.

La reflexión sobre qué tipo de información proporciona o no cada variante de tarea para estudiar las concepciones de los estudiantes sobre un determinado concepto se detalla en la tabla 1. Esa tabla muestra la complementariedad de los dos tipos de tarea, de modo que la interpretación de las concepciones de los estudiantes provocadas por estímulos analíticos/diagnóstico se debe acompañar de la interpretación de las definiciones de los estudiantes mediante estímulos sintéticos que establecerán los pilares o puntos de anclaje en los que se apoya el estudiante.

Podemos concluir que la noción de concepción está generalmente condicionada por situaciones específicas que la evocan e involucra diversas relaciones entre representaciones del concepto; mientras que la definición individual se caracteriza por un nivel superior de abstracción y estabilidad, aunque las inferencias de los estudiantes pueden contradecir su definición individual; sobre todo si surgen nuevas situaciones a las que la definición individual no puede dar respuesta.

Extendemos así la relación entre los constructos *Concepto imagen/Concepto definición* (Tall y Vinner, 1981), postulando un eslabón intermedio entre la definición de referencia (concepto definición) y las *concepciones analíticas* (concepto imagen), que denominamos *concepciones sintéticas* o *definiciones individuales*.

Tabla 1.
Información que proporcionan o no las tareas

Tipo de tarea	Proporciona información	No proporciona información
Sintético/ definidor	– Recoge información general del conocimiento del estudiante sobre el concepto, sobre todo de sus propiedades más relevantes. – La definición de un estudiante, siempre y cuando sea adecuada, es un criterio de valoración «intrasujeto» de otras respuestas.	– Escasez de relaciones entre sistemas de representación. – Riesgo de reproducción de la propuesta por el profesor y/o el libro de texto. – Posibles imprecisiones o inconsistencias. – Restricción del campo de propiedades que los estudiantes pueden incorporar de otras situaciones.
Analítico/ diagnóstico	– Recoge información específica sobre algún aspecto destacable del concepto. – Conectan informaciones procedentes de diferentes sistemas de representación. – Permite detectar y corregir errores en la aplicación de la definición individual, sobre todo si es imprecisa o reproduce la definición de referencia.	– Desconocimiento del punto de anclaje que pudiera adoptar el estudiante para elaborar su respuesta. – Criterios de valoración de errores «externos» al sujeto, sin contraste con la definición individual.

Significado de un concepto matemático

La noción de significado de un concepto matemático (Rico, 2012) se concibe como un marco interpretativo del conocimiento de los estudiantes que responde a preguntas básicas como: ¿sobre qué conceptos, propiedades, definiciones o relaciones los estudiantes argumentan y comunican sus ideas matemáticas?, ¿qué signos emplean para ello?, ¿qué modos de uso se identifican en el concepto? o ¿qué situaciones o contextos enmarcan sus ideas matemáticas o están en su origen? Como respuesta a estas preguntas, describimos tres componentes de significado.

– Los *sistemas de representación*, definidos por los conjuntos de signos, gráficos y reglas que hacen presente el concepto, muestran sus propiedades y lo relacionan con otros.
– La *estructura conceptual*, que comprende la red de conceptos, definiciones y propiedades, junto con aquellos argumentos, normas y otros procedimientos de los que derivan sus reglas de razonamiento y sus criterios de veracidad. La referencia sobre la cual los estudiantes construyen su conocimiento viene sintetizada mediante su definición individual.
– Los *sentidos*, que incluye aquellos modos de uso, contextos, situaciones y problemas que están en el origen del concepto y lo dotan de carácter funcional.

Sistemas de representación. Modelos gráficos del concepto de límite

Existen diferentes alternativas conceptuales de la noción de representación recogidas en trabajos de Janvier (1987) y Rico (2009). Todas ellas sostienen, entre otros supuestos, que todo concepto matemático requiere de una variedad de representaciones para su captación, comprensión y estructuración, de ahí la necesidad de establecer relaciones entre distintos sistemas de representación. Todo sistema de representación enfatiza unas propiedades del concepto y dificulta la percepción/comprensión de otras, es decir, no agota el concepto (Janvier, 1987: 69).

El sistema gráfico de representación para las funciones se sustenta en un sistema de coordenadas cartesiano y ortogonal; una asignación de los valores de la variable independiente al eje horizontal o de abscisas; una asignación de los valores de la variable dependiente al eje vertical o de ordenadas; una interpretación de cada punto del plano dado mediante un valor de la abscisa, y el correspondiente valor de su ordenada. Este es el sistema gráfico de representación usual en el nivel curricular de bachillerato para el concepto analítico de función (Rey Pastor, 1952: 22-23).

Con las siguientes particularidades para representar el límite de una función en un punto:

– La gráfica de la función es continua en un entorno reducido del punto x_0, en el que se aborda el estudio del límite.
– El comportamiento de la función en x_0 se considera irrelevante, es decir, cómo está definida en el punto, o si no lo está.
– El concepto de límite involucra un proceso dinámico para el cual el sistema de representación gráfico es limitado y usualmente necesita otros signos externos complementarios, tales como señales y movimientos de dedo, flechas, *software* dinámico, etc., para dotarle de carácter dinámico.

La figura 1 muestra diversos modelos gráficos de límite (Apostol, 1985: 155, 166 y 171). Entre estos modelos, el de oscilación se suele excluir por su excesiva complejidad para el nivel de bachillerato, asumiendo la existencia de ambos límites laterales (finitos o infinito).

El sistema de representación gráfico enfatiza aspectos topológicos de la tendencia, «entornos del límite se corresponden con entornos reducidos de x_0», con la limitación de que pudiera enfatizar otras propiedades no relevantes como monotonía, acotación y no alcanzabilidad; propiedades intuitivas para los estudiantes.

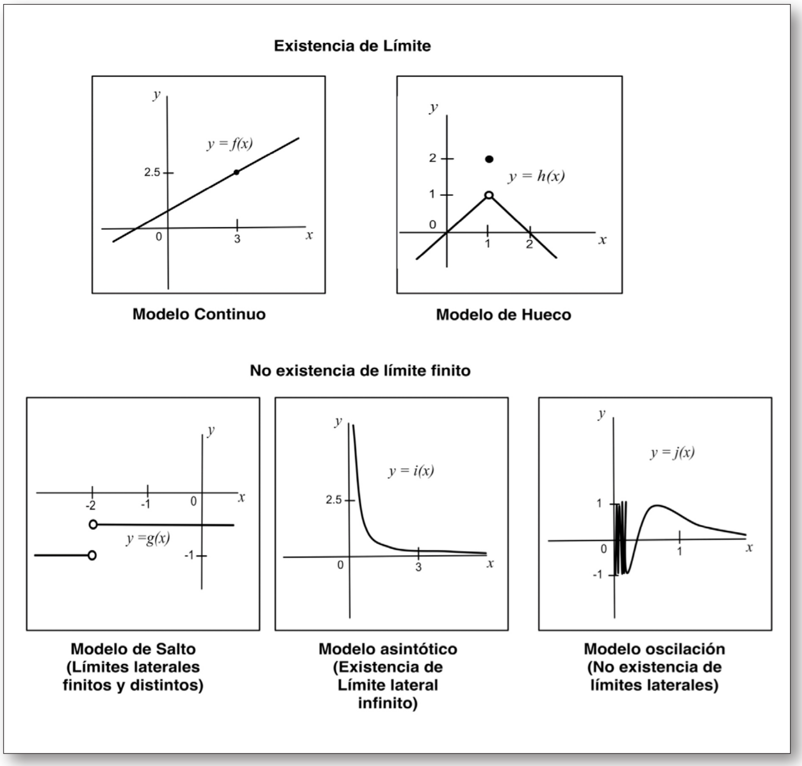


Fig. 1. Modelos gráficos de límite de una función en un punto (elaboración propia).

Bajo los supuestos anteriormente descritos, podemos describir las concepciones de los estudiantes en términos de la relación que estos establecen entre dos o más sistemas de representación (Duval 2006: 111). En este estudio, establecemos tres tipos de relaciones entre sistemas de representación:

– *Definición individual (Verbal)-Gráficas (Gráfico).* Esta relación está mediada por la verbalización de los argumentos correspondientes que formulan los estudiantes.
– *Definición individual (Verbal)-Argumento (Verbal).* Adquiere especial importancia plantear si el argumento correspondiente es una aplicación «coherente» de la definición. Describiremos la noción de coherencia en el siguiente apartado.
– *Argumento (Verbal)-Gráficas (Gráfico).* Esta relación tiene importancia cuando se carece de la definición individual del estudiante.

Coherencia entre concepciones y definiciones, tipos y análisis

Vamos a precisar la noción de coherencia que se emplea en la interpretación de los resultados de esta investigación. En primer lugar, esta noción será específica para el siguiente contexto:

> Describir la coordinación entre diferentes concepciones elementales; por un lado, la que emerge de la definición individual de un estudiante en respuesta a una tarea sintética, y por otro las concepciones que emergen de los argumentos que este plantea al decidir la existencia o no existencia de límite a partir de la interpretación de gráficas. Planteamos la cuestión sobre la pertinencia del constructo coherencia argumento-definición mediante la revisión de fuentes de información sobre la delimitación semántica del término *coherencia*.

Con carácter general, el sentido que más conviene para el contexto específico descrito anteriormente es «actitud lógica y consecuente con una posición anterior» (RAE, 2001), es decir, caracterizar si el argumento de un estudiante se deriva lógica y consecuentemente de la posición anterior determinada por su definición individual.

Garbín y Azcárate (2002) emplean el término *incoherencia* para expresar que un estudiante responde de manera diferente a tareas equivalentes, salvo cambios de representación. Ese sentido de *coherencia* no se ajusta a nuestro contexto.

Vamos a definir el constructo coherencia argumento-definición basándonos en la noción de *coherencia referencial* (Alturo, 2010), mediante la cual dos fragmentos de texto son coherentes si comparten la misma referencia.

Los argumentos empleados en una deducción formal y la definición de la cual se derivan no tienen que ser lógicamente equivalentes, sino que existe una relación de subordinación. Considerando que la propiedad característica de la definición es *D* (necesaria y suficiente), la propiedad característica de un argumento existencial es *P* y la propiedad característica de un argumento no existencial es *no P'*, expresamos en términos de relaciones de subordinación la noción de coherencia argumento-definición:

– *Uso coherente de condiciones suficientes de existencia*. Responde a la estructura lógica «f(x) verifica *P*, luego f(x) verifica *D*» es verdadera para toda función f(x) que satisfaga *P*.
– *Uso coherente de condiciones necesarias de existencia*. Responde a la estructura lógica «f(x) verifica *no P'*, luego f(x) verifica *no D*» es verdadera para toda función f(x) que no satisface *P'*.

En tal caso, consideramos que existe *coherencia de primer nivel o plena* entre argumento y definición. Si no se satisfacen ninguna de las condiciones anteriores, puede ocurrir que los argumentos sean válidos en casos específicos, por lo que añadimos dos niveles más de coherencia:

– *Coherencia de 2.º nivel*. Se caracteriza por el uso lógicamente inadecuado de propiedades necesarias o suficientes de existencia.
– *Coherencia de 3.er nivel*. Se caracteriza por el uso lógicamente inadecuado de propiedades de existencia que no son necesarias ni suficientes.

Si un argumento contradice la definición individual en un caso específico, es *incoherente* respecto a esta.

MÉTODO

Se trata de un estudio descriptivo e interpretativo, basado en el método de encuesta con reactivos abiertos y cerrados. El cuestionario completo y las condiciones de su aplicación se encuentran detallados en Fernández-Plaza (2011).

Instrumento y aplicación

La recogida de información se realizó mediante una batería de 10 tareas repartidas en dos cuestionarios de 5 tareas (cuestionarios A y B). Todos los sujetos realizaron la tarea común siguiente, si bien únicamente los del cuestionario A serán los que la apliquen en la discusión de las gráficas:

> Escribe una definición personal, con tus propias palabras, para límite finito de una función en un punto.

Seleccionamos para este artículo la tarea número 2 del cuestionario A (figura 2), que explicamos a continuación:

> Aplica tu definición personal de límite finito de una función en un punto a las funciones definidas por las siguientes gráficas y explica en cada caso si existe el límite en el punto indicado:

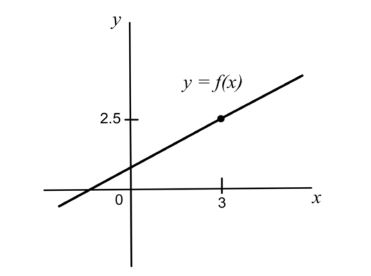
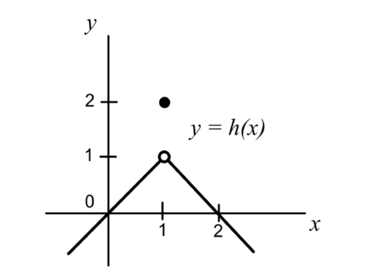
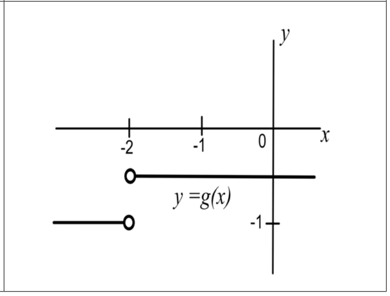
G1. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$	G2. $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$	G3. $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$
		

Fig. 2. Enunciado de la tarea número 2 (Cuestionario A).

La estructura de esta pregunta responde a una serie de consideraciones y de variables. Así, en la tabla 2 se recoge una caracterización de las gráficas propuestas en términos de la definición en el punto, el modelo de límite que representa y propiedades del valor del límite como la rebasabilidad y alcanzabilidad.

Tabla 2.
Caracterización de la tarea

Tarea/gráfica	*Definición en el punto*	*Modelo de límite/continuidad*	*Propiedades*
G1	Definida f(3) = 2,5	Continuo	Alcanzable/Rebasable
G2	Definida f(1) = 2	Hueco	No alcanzable/No rebasable
G3	No definida	Salto	No existe límite

Sostenemos que una definición individual es más accesible para el estudiante que otra de referencia, noción que podría resultar incomprensible (Tall y Vinner, 1981). También facilita manifestar otras concepciones relacionadas, sin olvidar que la aplicación rigurosa de una definición requiere un mayor esfuerzo cognitivo.

Según la anterior caracterización de concepciones y definiciones, esta tarea es analítico/diagnóstica porque explora relaciones entre el sistema de representación gráfico y el verbal, en el que se expresan los argumentos y la definición del estudiante. Disponer de las definiciones individuales previas permite caracterizar los errores de los estudiantes en confrontación con su definición individual.

Contexto y participantes

Seleccionamos de manera intencional y por disponibilidad a 36 estudiantes de la provincia de Granada de primer curso de bachillerato, con edades comprendidas entre los 16 y 17 años, matriculados en un mismo grupo académico de la asignatura «Matemáticas» de la modalidad de Ciencias y Tecnología. Estos estudiantes recibieron instrucción previa ordinaria por parte de su profesor sobre la aproximación numérica intuitiva y la interpretación gráfica del concepto de límite, salvo las técnicas específicas de cálculo. Como guía de ejercicios y referencia utilizaron el libro de texto *Matemáticas 1 Bachillerato (Ciencias y Tecnología)* (Vizmanos *et al.*, 2008) y los apuntes propios del profesor.

La recogida de datos se llevó a cabo a mediados del curso académico 2010-2011 por el método de encuesta. El cuestionario se aplicó durante una sesión ordinaria de trabajo en la clase de matemáticas. 18 estudiantes del grupo seleccionados aleatoriamente realizaron el cuestionario A, que incluyó la tarea objeto de este estudio y los 18 restantes realizaron el cuestionario B, que no incluía dicha tarea y cuyo análisis no forma parte de este estudio.

ORGANIZACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS DATOS

Las unidades de análisis fueron los argumentos explicativos formulados por los estudiantes de manera independiente. Los datos se recogieron de los cuestionarios y se organizaron según el procedimiento que a continuación presentamos.

Por cada uno de los participantes se obtuvo una cuaterna formada por su definición, y los argumentos a favor de la existencia o no existencia de límite por cada una de las gráficas G1, G2 y G3. La información se organizó en forma de tabla de 18 filas, incluyendo en ellas las cuaternas de cada uno de los 18 estudiantes participantes en este estudio.

El análisis de los datos se realizó de forma cualitativa y cuantitativa en las siguientes fases.

- *Caracterización exhaustiva de los argumentos formulados por los estudiantes sin tener en cuenta su definición individual*.
- Nos centramos después en el *análisis de las ternas de argumentos*, con el fin de establecer perfiles. Un análisis clúster permite resumir la información disponible.
- Con el fin de confrontar los argumentos de los estudiantes con su definición individual, analizamos el *grado de coherencia entre la definición y el argumento*, registrando además si la definición no es válida para su aplicación por ser inconsistente.

Pasamos a describir el modo en que se obtuvieron los resultados del estudio.

DISCUSIÓN

Describimos el proceso seguido para obtener las categorías con las que organizar los argumentos identificados y recogidos en las respuestas de los estudiantes. Este proceso se hizo en cuatro pasos.

Interpretaciones gráficas generales. Concepciones elementales

Por el carácter exhaustivo de este análisis, las categorías empleadas emergen directamente de los datos y conjeturas sobre qué puede originar tales argumentos. Este análisis se realiza para identificar las concepciones elementales de los estudiantes, sobre todo las de aquellos que no han proporcionado una definición o esta carece de aplicabilidad.

Los argumentos acerca de la existencia y no existencia del límite de las funciones definidas por las gráficas G1, G2 y G3 se organizan en las siguientes categorías o concepciones elementales, que ejemplificamos:

– *Análisis y comparación de límites laterales* (Lim_Lat). Los argumentos describen la aproximación implícita o explícitamente lateral al punto en el que se realiza el estudio del límite, decidiendo la existencia o no existencia del límite por la igualdad o desigualdad de los límites laterales. Es el argumento característico de la instrucción recibida por los estudiantes y el del libro de texto (ejemplos 1 y 2, figura 3).

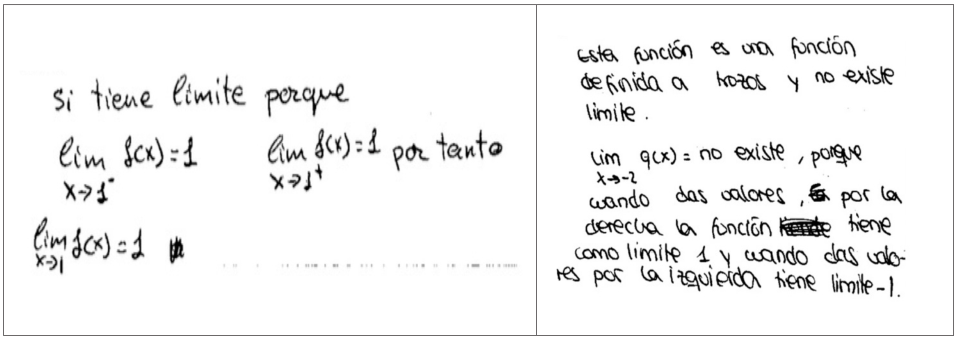


Fig. 3. Argumentos de existencia (ejemplo 1, izquierda) e inexistencia (ejemplo 2, derecha) de límite.

– *Por continuidad visual/alcanzabilidad* (Cont_visual). Existe una interferencia provocada por la continuidad visual consistente en que la existencia de límite únicamente se corresponde con un modelo «continuo» o de «hueco completado», es decir, límite alcanzable. Se excluye el modelo de hueco (límite no alcanzable) (ejemplo 3).
Ejemplo 3. [De no existencia, gráfica G2] «No existe límite, porque el número al que tiende el 1 *no está en la función*, sino que es un punto aparte».

– *Confusión del papel de las variables* (Var). Se considera que el límite es el valor de la variable independiente x, aunque el proceso puede involucrar ambas variables, afirmando sistemáticamente la existencia de límite con referencia a otras propiedades como la alcanzabilidad o la existencia de un salto (cambio brusco) (ejemplo 4).
Ejemplo 4. [De existencia, gráfica G3] «Sí existe el límite de esta función a trozos ya que hay un punto donde concluyen las dos rectas».

- *Rebasabilidad del candidato a límite* (Reb). Existen dos interpretaciones de esta propiedad:
  - *Rebasabilidad reducida*. Se busca la cota de la función en un entorno del punto excluyendo dicho punto (entorno reducido) y se comprueba si esa cota corresponde al punto. En tal caso existe el límite y es igual a dicha cota (ejemplo 5).
  - *Rebasabilidad no reducida*. Consiste en la anterior interpretación y, además, comparar ese candidato con la imagen del punto (ejemplo 6).

  Ejemplo 5. [De existencia, gráfica G2] «Existe límite porque al llegar al punto 1 cambia de dirección la línea» (su definición de límite es el número máximo que puede dar como resultado).

  Ejemplo 6. [De no existencia, gráfica G2] «No es límite ya que aunque la función llega y pasa $x = 1$ y no toca en ella en $y = 1$, en $y = 2$ un punto de la función aparece en $x = 1$, por lo que no sería límite».
- *No alcanzabilidad del candidato a límite* (No Alcanz). Los argumentos son exactamente opuestos al de continuidad visual, el límite existe si y solo si responde a un modelo de hueco, aunque se acompañan de una confusión de variables (ejemplo 7) o la propiedad de no rebasabilidad (ejemplo 8).

  Ejemplo 7. [De existencia, gráfica G3] «Sí es el punto $x = -2$, ya que nunca tocará o pasará por ese punto».

  Ejemplo 8. [De existencia, gráfica G2] «El límite sería 1 en esta función, ya que nunca llegaría a tocar o pasar por ese punto la función».
- *Necesidad de definición* (Img_Nec). Algunos argumentos ponen de manifiesto que es necesaria la definición en el punto para abordar la cuestión de límite (ejemplo 9). Esta categoría no está relacionada con la denominada *Identificación entre límite e imagen* (Img), definida por la clásica consideración de la imagen como valor del límite en el punto.

  Ejemplo 9. [De no existencia, gráfica G3] «No tiene límite porque para $x = -2$ no tiene imagen y por tanto no pertenece a $g(x)$» [*Este sujeto no atribuye el valor 2 al límite de la gráfica G2 sino su valor adecuado 1, por eso no interpretamos la identificación entre límite e imagen*].
- *Cambio de sentido en las aproximaciones laterales* (Tend), es decir, identifican tender por la izquierda como tendencia a $-\infty$ y tender por la derecha como tender a $+\infty$, así las funciones G1 y G3 no tienen límite, y la función (b) sí tiene límite $-\infty$ (ejemplos 10 y 11).

  Ejemplo 10. [De existencia, gráfica G2] «Tiende a $-\infty$».

  Ejemplo 11. [De no existencia, gráfica G1] «Por la izquierda es $-\infty$ y por la derecha es $+\infty$».

La tabla 3 resume las frecuencias de las categorías de argumentos identificados, relacionadas con cada una de las gráficas, teniendo en cuenta que algunas de ellas se pueden solapar.

Los datos ponen de manifiesto que el argumento basado en los límites laterales es mayoritariamente empleado para justificar la existencia de límite en las gráficas G1 y G2 (4 y 5 de 18, respectivamente), y poco utilizado (3 de 18) para discutir la no existencia de límite en la gráfica G3. La gráfica G3 ha provocado la mayor parte de los argumentos (6 de 18) que denotan una confusión de las variables (Categoría Var). El uso de la no rebasabilidad del límite (Categoría Reb) es relevante para justificar la no existencia de límite en la gráfica G1 (4 de 18). Las demás categorías de argumentos se dan con una baja frecuencia y constituyen casos singulares.

Tabla 3.
Frecuencia absoluta
de las categorías o concepciones elementales

Categorías	Gráficas		
	G1	G2	G3
Existencia			
Lim_Lat	4	5	0
Cont_visual	2	0	0
No Reb	0	2	1
No Alcanz	0	1	3
Var	1	0	6
Img	2	2	0
Tend	1	2	0
Total existencia	9	11	6
No existencia			
Lim_Lat	0	0	3
Reb	4	1	0
Tend	1	0	1
Cont_visual	0	2	0
Img_Nec	0	0	2
Img	0	0	2
Total no existencia	5	3	8
NS/NC	4	4	4

Perfiles de desempeño general de la tarea

Al considerar las distintas concepciones elementales que expresan cada uno de los estudiantes observamos la presencia de distintas ternas de argumentos. Procedemos a la clasificación y análisis de las ternas de argumentos que los estudiante han asignado a las gráficas G1, G2 y G3. Con la identificación de esas regularidades se obtienen los perfiles, observando qué categoría o categorías de argumentos descritos en el apartado anterior emplea cada estudiante en al menos dos de las gráficas propuestas, siendo tales categorías las que dan nombre al perfil.

Los distintos perfiles detectados se muestran en la tabla 4 y los describimos a continuación.

– *Perfil «Límites laterales»*. Engloba a los sujetos que en la mayoría de sus argumentos hacen referencia al análisis de los límites laterales para decidir sobre la existencia del límite. Adicionalmente, introducen otros elementos de discusión como la rebasabilidad (gráfica G1), la necesidad de estar definida o reducción a la variable x para marcar un cambio de tendencia o corte en la gráfica (gráfica G3). Dentro de este perfil hemos encontrado 4 variedades de terna que organizan a 5 de los 18 estudiantes participantes.
– *Perfil «Continuidad visual».* Engloba a los sujetos que en relación con las gráficas G1 y G2 únicamente tiene límite la función «visualmente continua», correspondiente a la gráfica G1. Paradójicamente, la función dada por la gráfica G3 evoca otras concepciones erróneas ligadas a la atribución de un valor límite a $x = -2$, donde existe un salto de tendencia. Dentro de este perfil existen dos variedades de terna correspondientes a 2 de los 18 estudiantes participantes. Aunque la categoría «Confusión de variables» (Var) es también frecuente, esta concepción es transversal a varios perfiles.

– *Perfil «Límite-Imagen»*. Los argumentos se caracterizan por la atribución sistemática de la imagen del punto al valor del límite en este en las gráficas G1 y G2. Existe una única variedad de terna que organiza a 2 de los 18 estudiantes participantes.
– *Perfil «Rebasabilidad-Alcanzabilidad»*. Los argumentos se caracterizan por relacionar la existencia de límite con condiciones particulares de rebasabilidad y/o alcanzabilidad. Dentro de este perfil existen tres variedades de terna que corresponden a los 3 de los 18 estudiantes participantes. Es relevante que la categoría Var está presente en los argumentos de todos los estudiantes de este perfil correspondientes a la gráfica G3.
– *Perfil «Sentido de tendencia contrario»*. Singularmente, algunos sujetos consideran que la tendencia por la izquierda o por la derecha se corresponde con la tendencia a $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente. No encontramos una conjetura razonable que explique esta malinterpretación de las gráficas. Las dos variedades de terna que presentan este perfil se corresponde con 2 de 18 estudiantes.

Estos perfiles abarcan las respuestas de 14 estudiantes. Los 4 estudiantes restantes no han dado respuesta a ninguna de las gráficas. Los perfiles organizan la totalidad de los estudiantes que han respondido a los tres apartados de la tarea.

La tabla 4 consta de cinco columnas, la primera indica los nombres de los perfiles, la segunda numera las variedades de ternas de argumentos que incluye cada perfil y las tres últimas denotan cada una de las gráficas G1, G2 y G3. Cada fila muestra una terna de argumentos divididos por categorías (únicas o diversas) que abarcan las columnas (gráficas) en que se manifiestan, resaltando en gris las categorías predominantes, en función de las cuales se establecen los cinco perfiles resultantes que describimos. Esta tabla es similar a la obtenida mediante un análisis de conglomerados bietápico mediante el software estadístico IBM SPSS Statistics (v. 20)®.

Tabla 4.
Perfiles y variedades de perfiles

<table>
<tr><th rowspan="2">Perfil
(frecuencia/total)</th><th rowspan="2">Variedad
de terna</th><th colspan="3">Gráficas</th></tr>
<tr><th>G1</th><th>G2</th><th>G3</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Límites laterales
(5/18)</td><td>(1)</td><td colspan="3">Lim_Lat</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>Reb</td><td colspan="2">Lim_Lat</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td colspan="2">Lim_Lat</td><td>Img_Nec</td></tr>
<tr><td>(4)</td><td colspan="2">Lim_Lat</td><td>Var</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Continuidad visual
(2/18)</td><td>(5)</td><td colspan="2">Cont_visual</td><td>Img_Nec</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(6)</td><td colspan="2">Cont_visual</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Var</td></tr>
<tr><td>Límite-imagen
(2/18)</td><td>(7)</td><td colspan="3">Img</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Rebasabilidad/alcanzabilidad
(3/18)</td><td rowspan="3">(8)</td><td colspan="3">Reb</td></tr>
<tr><td colspan="3">Alcanz</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Var</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(9)</td><td colspan="2">Reb</td><td>Alcanz</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Var</td></tr>
<tr><td>(10)</td><td colspan="2">Reb</td><td>Var</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sentido de tendencia contrario
(2/18)</td><td>(11)</td><td colspan="3">Tend</td></tr>
<tr><td>(12)</td><td colspan="2">Tend</td><td>Var</td></tr>
</table>

RESULTADOS

Consideramos los resultados y destacamos la coherencia de los argumentos con las definiciones individuales.

Estudio de la coherencia de los argumentos

Hasta el momento no se ha tomado en consideración de qué manera las definiciones han sido aplicadas a cada una de las gráficas G1, G2 y G3. En este apartado analizamos la coherencia entre argumentos y definición, ya descrita en el marco del estudio.

Ejemplificamos tres grados de coherencia:

- *Coherencia de primer nivel o general*. Como se observa en el ejemplo 12, el argumento considera la negación adecuada de una condición necesaria de existencia de límite a la vista de la definición individual; en este caso la no rebasabilidad del límite.
  Ejemplo 12. [Definición] «Límite es el lugar del plano [asume que el límite puede ser x = 1 o y = 1] en el cual la función f(x) *no llega a tocar o pasar. Límite se averigua dándole valores a x*».
  [Gráfica G1] «No existe el límite ya que la función sigue hacia el infinito tras pasar por x = 3» [*Uso en negación coherente de la no rebasabilidad por condición necesaria*].
- *Coherencia de segundo nivel.* El ejemplo 13 muestra un argumento que es formalmente inadecuado al emplear una condición exclusivamente necesaria como suficiente de existencia, sin embargo, la gráfica no produce conflicto al aplicarse la definición individual.
  Ejemplo 13. [Definición] «Límite es el lugar del plano en el cual la función f(x) no llega a tocar o pasar. Límite se averigua dándole valores a x».
  [Gráfica G3] «Es límite ya que la función f(x) está en x = –2 pero no en –2 concretamente sino en los números cercanos a x = –2 como: –2,001 o –1,999» [*La no alcanzabilidad se emplea inadecuadamente como condición suficiente de existencia de límite, cuando además se requiere la no rebasabilidad del límite, aspecto que se contempla pues la función está acotada, por tanto, definición y argumento son coherentes en este caso*].
- *Coherencia de tercer nivel.* El ejemplo 14 muestra el énfasis de propiedades no necesarias ni suficientes para la veracidad de la definición individual, en concreto la no rebasabilidad del límite, que no se deriva lógicamente de la definición que solo trata la aproximación y la no alcanzabilidad de este, además la gráfica G1 no produce contradicción entre el argumento y la definición.
  Ejemplo 14. [Definición] «El límite de una función en un punto, es un número al cual la función se acerca pero nunca llega a tocar ese número».
  [Gráfica G1] «… No existe porque la función se extiende infinitamente» [*La rebasabilidad no es necesaria ni suficiente para que la definición sea cierta, sin embargo, en este caso definición y argumento justifican la no existencia de límite*].
- *Incoherencia*. El ejemplo 15 muestra que la gráfica G3 provoca una contradicción entre el argumento y la definición individual, dado que justifican hechos opuestos.
  Ejemplo 15. [Definición] «Límite de la función en un punto, es aquel punto al que tiende la función siendo sustituida en la función la x por un número dado ($x \to a$)».
  [Gráfica G3] «Es una función con desarrollo lineal discontinuo. Sí existe el límite ya que hay un punto donde concluyen las dos rectas» [*Incoherente, porque según la definición el límite no existe*].
- *Inconsistencia de la definición*. La cuestión sobre la coherencia argumento-definición no tiene lugar. Definiciones como «Cuando una función tiende a un número da su límite» (¿qué es tender?) y «El límite de una función en un punto es el número que limita la función al tender la x de un número» (límite es lo que limita, pero ¿es realmente lo que acota?) presentan debilidades lógicas, entre ellas circularidad y términos con ambigüedad de sentido.

La tabla 5 incluye el análisis descriptivo de frecuencias de los diversos tipos de coherencia y definiciones inconsistentes encontrados.

Tabla 5.
Tipos de coherencia desglosados por apartados de la tarea

Tipo de coherencia	Gráfica G1	Gráfica G2	Gráfica G3
Coherencia de 1.^{er} nivel	5	6	4
Coherencia de 2.º nivel	0	0	1
Coherencia de 3.^{er} nivel	2	0	2
Incoherencia	5	6	5
Definición inconsistente	5		
No definición	1		

A la vista de las tablas 4 y 5 formulamos que aquellos estudiantes que han planteado una definición inconsistente (5 de 18) (no expresan adecuadamente la referencia), teóricamente han aportado argumentos a partir de su propia intuición o se apoyan en otros conocimientos previos.

Los argumentos con coherencia de 2.º nivel son escasos, al igual que los de 3.^{er} nivel. Sin embargo, ambos tipos de argumentos no contradicen la definición en ejemplos específicos, de ahí que reconozcamos su coherencia. Interpretamos que los estudiantes hacen uso de otras intuiciones que «se añaden» *ad hoc* a su definición individual.

Por otro lado, los argumentos incoherentes o contradictorios con la definición individual dan cuenta de interferencias en la relación entre el signo (gráficas) y la referencia (propiedades emergentes de la definición individual). Es posible que las gráficas propuestas hayan promovido otras intuiciones que la definición individual previa no ha podido controlar, por ejemplo, la confusión de las variables provocada por la función G3 contradice la definición individual de límite como «Límite es el valor que se obtiene de sustituir x por un número dado» (ejemplo 15).

CONCLUSIONES

Presentamos un balance del estudio según los objetivos de investigación propuestos.

O.1. Describir las concepciones de los estudiantes manifestadas por la aplicación de su definición individual en una tarea de interpretación de gráficas relacionadas con el concepto de límite finito de una función en un punto.

En la primera parte del análisis hemos definido 7 categorías de argumentos en las concepciones elementales que los estudiantes emplean para justificar la existencia, o no, de límite con las gráficas G1, G2 y G3 (tabla 3). Estas categorías no requieren la definición individual de los estudiantes, que podría no existir.

En la segunda parte del análisis de datos, las ternas de concepciones elementales (cada gráfica moviliza al menos una concepción elemental) se resumen en 5 perfiles de sujetos según las categorías predominantes (tabla 4), algunos de los cuales podemos expresar como pares antagónicos:

- Análisis y discusión de límites laterales (Perfil «Límites laterales»)-Alteración del sentido de la tendencia lateral (Perfil «Tendencia en sentido contrario»).
- Conexión entre límite e imagen (Perfil «Límite-Imagen»)-Conexión entre límite y continuidad de la gráfica (Perfil «Continuidad visual»).
- Propiedades de rebasabilidad o alcanzabilidad del candidato al límite (Perfil «Rebasabilidad-Alcanzabilidad»).

La descoordinación de variables, y la correspondiente identificación del valor del límite con la abscisa del punto en el cual se estudia el límite (Categoría Var), es transversal a casi todos los perfiles (tabla 4).

Planteamos las siguientes conjeturas como continuidad del estudio:

El perfil «Límite-Imagen» (ejemplo 9) puede venir fomentado por la malinterpretación de la relación entre los conceptos de límite finito de una función en un punto y su continuidad en el punto dada simbólicamente $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$, ya que puede derivarse erróneamente la regla de asignar a cualquier función la imagen como límite. Estos sujetos transforman en continua cualquier función definida en un punto.

Por otro lado, el perfil «Continuidad-Visual» (ejemplo 3) puede ser fruto de la malinterpretación de la relación entre los conceptos de límite finito de una función en un punto y su continuidad dada gráficamente, evocando las creencias «Límite es siempre alcanzable», «no existen huecos» y «siempre hay continuidad».

La tendencia en sentido contrario (ejemplos 10 y 11) pudiera deberse a malinterpretación del lenguaje simbólico empleado para los límites laterales o a la resistencia a aceptar la no existencia de límite (Blázquez y Ortega, 1998). Algunos estudiantes parecen asociar el significado de límite como «instante en el se produce un cambio brusco del comportamiento de un sistema o relación funcional», como se percibe en la gráfica G3.

O.2. Valorar la coherencia entre la definición individual sobre límite finito de una función y los argumentos aportados acerca de su existencia en un punto, a partir de la información contenida en las gráficas.

En la tercera parte del análisis de datos, profundizamos en la aplicación de la definición individual estableciendo diferentes niveles de coherencia entre argumento y definición. Los niveles de coherencia se caracterizan mediante las nociones lógicas de condición suficiente y necesaria, contradicción e inconsistencia de la definición. Es relevante que exista el mismo número de estudiantes que aplican coherentemente su definición individual (Coherencia de primer nivel) que de aquellos que la aplican con contradicción (Incoherencia) para cada una de las gráficas G1, G2 y G3, así como estudiantes que plantean una definición inconsistente (tabla 5).

La aplicación incoherente de la definición individual justifica la insuficiencia de dicha definición para sostener otras concepciones evocadas por la gráfica que la contradicen. Las aplicaciones con coherencia de segundo y tercer nivel también manifiestan otras concepciones, pero las gráficas particulares no provocan contradicción entre la definición individual (aplicada por los investigadores) y la concepción (la interpretación de la respuesta concreta del estudiante).

Como implicación práctica, consideramos que el procedimiento de definir debiera introducirse con tareas que involucren el análisis y discusión de propiedades de los conceptos en diversidad de sistemas de representación seguidas de tareas que obliguen a la síntesis de qué propiedades caracterizan el concepto y cuáles son superfluas. Evidencias de esta necesidad son las incoherencias entre los argumentos que planteaban los estudiantes (concepciones elementales) y su definición individual (concepción sintética), aparte de las debilidades lógicas de su definición individual que obligaron a los estudiantes a recurrir a otras intuiciones para construir sus argumentos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado con ayuda y financiación de la beca FPU (AP2010-0906), (MECFEDER) del proyecto «Procesos de Aprendizaje del Profesor de Matemáticas en Formación» (EDU2012-33030) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico). Es parte de la tesis doctoral *Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto*, realizada por J. A. Fernández-Plaza.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alturo, N. (2010). Coherencia Discursiva: Dimensiones Contextual, Conceptual y Gramatical. *Círculo de Lingüística Aplicada a la Comunicación*, 41, pp. 3-30.

Apostol, T. M. (1985). *Calculus* (2.ª ed.). Barcelona: Reverté.

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003) Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), pp. 135-149.

Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. Tesis doctoral. Valladolid: Universidad de Valladolid.

Blázquez, S.; Gatica, N. y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 12(1), pp. 145-168.

Blázquez, S. y Ortega, T. (1998). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *Aula*, 10, pp. 119-135.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or to teach to define? En A. Olivier y K. Newstead (eds.). *Proceedings of the 22th PME International Conference*, vol. 2. Stellenbosch, South Africa: PME, pp. 248-255.

Dufour-Janvier, B.; Bednarz, N. y Belanger, M. (1987). Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation. En C. Janvier (ed.). *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated, pp. 109-122.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, pp. 103-131.
http://dx.doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Edwards, B.S.; Dubinsky, E. y Mcdonald, M.A. (2005). Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), pp. 15-25.
http://dx.doi.org/10.1207/s15327833mtl0701_2

Fernández-Plaza, J.A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Estudio Exploratorio*. Trabajo de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada.

Fernández-Plaza, J.A.; Ruiz-Hidalgo, J.F.; Rico, L. y Castro, E. (2013). Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto. *PNA*, 7(3), pp. 117-131.

Garbín, S. y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: Acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las Ciencias*, 20(1), pp. 87-113.

Gutiérrez, A. y Boero, P. (eds.) (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education*. Rotterdam: Sense Publishers.

Harel, G.; Selden, A. y Selden, J. (2006). Advanced Mathematical Thinking: Some PME Perspectives. En A. Gutiérrez y P. Boero (eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Rotterdam, Holanda: Sense Publishers, pp. 147-172.
http://dx.doi.org/10.1207/s15327833mtl0701_3

Harel, G. y Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical thinking and learning*, 7(1), pp. 27-50.

Janvier, C. (ed.) (1987). *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Pecharromán, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: Representación y significado. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(3), pp. 121-134.

Real Academia Española (2001). *Diccionario de la lengua española* (22.ª ed). Madrid: Autor. Disponible en línea: <http://www.rae.es>.

Rey Pastor, J. (1952). *Elementos de la teoría de funciones*. Madrid: Autor.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), pp. 1-14.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1(1), pp. 39-63.

Roth, W.M. y Thom, J.S. (2009). Bodily experience and mathematical conceptions: From classical views to a phenomenological reconceptualization. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), pp. 175-189.
http://dx.doi.org/10.1007/s10649-008-9138-0

Selden, A. y Selden, J. (2005). Perspectives on Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), pp. 1-13.
http://dx.doi.org/10.1207/s15327833mtl0701_1

Sierra, M.; González, M.T. y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(1), pp. 71-75.

Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. *The Journal of Mathematical Behavior*, 7(4), pp. 765-790.
http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.01.001

Tall, D.O. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. En D.A. Grouws (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan, pp. 495-511.

Tall, D.O. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), pp. 151-169.
http://dx.doi.org/10.1007/BF00305619

Tirosh, D. (1990). Inconsistencies in students' mathematical constructs. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, pp. 111-129.

Valls, J.; Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(3), pp. 325-338.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D.O. Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, pp. 65- 81.

Vizmanos, J.R.; Alcaide, F.; Hernández, J.; Moreno, M. y Serrano, E. (2008). *Matemáticas.1 Bachillerato (Ciencias y Tecnología)*. Madrid, España: Editorial SM.

Von Glasersfeld, E. (1987). Learning as a Constructive Activity. En C. Janvier (ed.). *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated, pp. 3-17.

Ward, E.; Inzunsa, S.; Hernández, S. y López, F. (2013). Conceptualización y uso de representaciones sobre el concepto de límite en docentes de Bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII*. Bilbao: SEIEM, pp. 523-533.

Zandieh, M.; Roh, K.H. y Knapp, J. (2014). Conceptual blending: Student reasoning when proving «conditional implies conditional» statements. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33, pp. 209-229.
http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.11.007

Zaslavsky, O. y Shir, K. (2005). Students' Conceptions of a Mathematical Definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4), pp. 317-346.

Reasoning based on the concept of finite limit of a function at a point

José Antonio Fernández-Plaza, Juan Francisco Ruiz-Hidalgo, Luis Rico
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada
joseanfplaza@ugr.es, jfruiz@ugr.es, lrico@ugr.es

This article analyses the students' conceptions in Non-Compulsory Secondary Education about the concept of finite limit of a function at a point from its graphical representation. Conceptions emerge from the arguments students express when applying their individual definitions to a selection of graphical models of the concept.

In this paper we establish the ability of students to relate different verbal representations of limit concept provided by them. Furthermore, we study how they apply these relations to justify the existence of limit in several graphical tasks. Specifically, we establish the following goals:

O.1. Describe the students' conceptions expressed when they apply its individual definition in a task of graphical interpretation.
O.2. From the information contained in the graphs, value the coherence among individual definition of finite limit of a function and arguments given about the existence of limit at one point.

The theoretical framework consists of the notion of the meaning of a school mathematical concept, in which, we consider its conceptual structure, systems of representations and phenomena. What these components allow us to describe are concepts, properties, definitions and relationships students' conceptions refer to (conceptual structure), how they express them (signs) and what contexts and phenomena (senses) are used to provide meaning to their conceptions.

Within this broad theoretical framework, we consider a careful distinction between conceptions and individual definitions. *Conceptions* are the founded interpretation of a set of reactions (answers) that a student makes to any stimulus (verbal, graphical, symbolic, gestural, etc.), but as *individual definition* we understand the particular conception which emerges from a stimulus that is intended to obtain the student's general idea about a concept. The notion of *coherence* among conceptions and individual definition is the extent to which a conception is logically consistent with the individual definition.

Data were collected from 36 Spanish students from the same group by means of a questionnaire. The questionnaire included among other tasks, an open-ended task requiring the individual definition of limit and another open-ended task which requires an application of thereof to three graphs corresponding to different models (continuous, hole and jump).

Their analysis combines qualitative and quantitative methods and provides a diversity of elemental conceptions, which were fused in «cluster conceptions», namely, *one-sided limits characterization*, *visual continuity* (limit existence is only compatible with a continuous graph), *limit as image, exceedability-reachability, countertendency* (tendency from left side and right side are interpreted as tendency to $-\infty$ and $+\infty$ respectively).

The goodness of students' argumentations is characterized in terms of three levels of coherence between single student's arguments and his reference definition previously developed. The second and third levels of coherence are related to difficulties in deductive reasoning, but no graph from the given provoked contradiction, so we recognize coherence. Incoherence is related to a contradiction between argumentation and individual definition in the case of a particular graph, which establishes the need of revision of the individual definition.

The results show conceptions recognized in previous studies as well as detect particular conceptions, such as necessity for image existence of a function at a point to discuss on its limit at that point. Likewise, we detect a balance between fully coherent arguments and incoherent ones with the individual definition.