ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 33.1 (2015): 151-165
Investigaciones didácticas
http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1479
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos

Mathematical objects, semiotic representations and senses

pedro Javier Rojas Garzón
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá-Colombia
pedroedumat@udistrital.edu.co

RESUMEN • En este documento presentamos los resultados de un estudio sobre la emergencia de objetos matemáticos a partir de sus representaciones y las dificultades que encuentran algunos estudiantes para articular los sentidos asignados por ellos a las representaciones semióticas de un mismo objeto matemático, obtenidas mediante transformaciones de tratamiento. Describimos y analizamos algunos procesos de asignación de sentidos logrados por los estudiantes de los grados 9.º y 11.º de educación básica y media (Colombia), en relación con tareas específicas en las que se requiere realizar dichos tratamientos entre representaciones, y se reportan algunas dificultades asociadas. En este estudio incluimos aspectos relacionados con la actividad matemática, la comunicación sobre objetos matemáticos emergentes y la construcción cognitiva de los objetos matemáticos.

PALABRAS CLAVE: objeto matemático; representación semiótica; tratamiento; significado; articulación de sentidos.

ABSTRACT • In this paper we present results of a study on the emergence of mathematical objects from their representations and the difficulties encountered by some students to articulate the senses assigned by them to semiotic representations of the same mathematical object, obtained by transformations of treatment. We describe and analyze some processes of assigning senses achieved by students in grades 9 and 11 of the secondary education (Colombia) in relation to specific tasks that require such treatments performed between representations, and report some associated difficulties. In this study we include aspects of mathematical activity, communication on emerging mathematical objects and cognitive construction of mathematical objects.

KEY WORDS: mathematical object; semiotic representation; treatment; meaning; articulation of senses.

Fecha de recepción: mayo 2014 • Aceptado: noviembre 2014

Rojas, P. J. (2015) Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos. *Enseñanza de las Ciencias*, 33.1, pp. 151-165

INTRODUCCIÓN

Algunos estudiantes, frente a una representación simbólica de un objeto matemático, le asignan un cierto sentido, realizan de manera adecuada transformaciones a dicha representación, en el interior del respectivo sistema semiótico de representación, obteniendo otra representación del objeto, a la cual le asignan un nuevo sentido, pero este no lo articulan con el anterior. En este escrito se documenta el fenómeno relacionado con las dificultades que encuentran algunos estudiantes para articular los sentidos asignados a diversas representaciones semióticas de un mismo objeto matemático,[1] obtenidas mediante transformaciones de *tratamiento* (Duval, 1999).

Las situaciones que presentamos a continuación están orientadas a contextualizar algunas complejidades asociadas con las transformaciones semióticas de tratamiento, relacionadas con un posible «cambio de sentido» asignado a un objeto matemático (D'Amore, 2006):

> *Situación 1.* Propuesta a estudiantes de 5.º grado de educación básica (en Italia). Calcular la probabilidad del siguiente evento: *lanzando un dado, se obtenga un número par*.
>
> Después de trabajar en pequeños grupos, con la orientación del profesor, los estudiantes comparten que, en tanto los resultados posibles al lanzar un dado son 6 y los que hacen verdadero el evento son 3, la respuesta es 3/6. También reconocen que dicha probabilidad se puede expresar como 50%, en tanto aceptan la equivalencia entre 3/6 y 50/100, propuesta por el profesor. Incluso, algunos de los alumnos reconocen que hablar del 50% significa que *se tiene la mitad de la probabilidad de verificarse el evento respecto al conjunto de los eventos posibles* y que, por lo tanto, debe ser válida como respuesta la expresión ½, la cual es aceptada y validada por los demás compañeros y por el profesor; es decir, los sentidos asignados a los objetos matemáticos son compartidos.
>
> Al concluir la sesión de clase, el investigador plantea a los estudiantes que la fracción 4/8 también sería una respuesta adecuada, si se tiene en cuenta que es equivalente a 3/6. Los estudiantes y el profesor manifiestan que no y, por su parte, el profesor del curso afirma que la fracción 4/8 *no puede representar el evento porque las caras de un dado son 6 y no 8*.

En esta situación, 4/8 es un resultado de tratamiento de 3/6, equivalencia dominada por estudiantes y profesor, ¿por qué el sentido del objeto matemático «probabilidad de obtener un resultado par lanzando un dado» no se «conserva» con 4/8?, ¿qué explica este «cambio» de sentido con respecto a las representaciones encontradas?, o mejor, ¿por qué no «articulan» los sentidos asignados a las diferentes representaciones del objeto matemático?

> *Situación 2.* El sentido asignado por un grupo de estudiantes universitarios (en Italia) a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ es de «una circunferencia» y al de la ecuación $x + y = \frac{1}{x + y}$ el de «una suma que tiene el mismo valor que su recíproca».[2] Reconocen que, mediante transformaciones de tratamiento, pueden pasar de la primera ecuación a la segunda, pero la pregunta: ¿la segunda ecuación representa o no una circunferencia?, encuentra respuestas como las siguientes:
>
> *Estudiante A: Absolutamente no, una circunferencia debe tener x^2+y^2.*
> *Estudiante B: Si se simplifica, ¡sí!*

1. En principio, el *sentido* es asumido aquí como un *significado parcial* (Font y Ramos, 2005), asociado más a lo contextual e incluso a lo temporal. Cada contexto ayuda a generar sentido, aunque no todos los posibles sentidos. El *significado de un objeto* (institucional/personal), siguiendo ideas de Godino y Batanero (1994), es el sistema de prácticas (institucionales/personales) asociadas al campo de problemas de las que emerge dicho objeto en un momento dado.

2. La primera ecuación no corresponde a una circunferencia; lo importante aquí, desde nuestro punto de vista, es que en el primer caso, «ser circunferencia» está asociado a una cierta expresión, la cual es vista como icono; en el segundo, la transformación semiótica es la que da o no cierto sentido a la expresión; al realizar la transformación (tratamiento) se genera un «cambio de sentido». Resulta interesante aquí que el objeto matemático «circunferencia» es aceptado y relacionado con la primera ecuación, pero no con la segunda, la cual es obtenida mediante tratamiento de la primera.

Desde lo descrito en las situaciones anteriores, la investigación que aquí se presenta muestra que los *sentidos* asignados por algunos estudiantes a cada una de las representaciones semióticas específicas de un objeto matemático parecen no tener vínculo entre sí que posibilite su articulación. Se trata de un resultado coincidente con los obtenidos por otros autores (D'Amore, 2006; D'Amore y Fandiño, 2008), que han hallado evidencias, en una variedad de situaciones y en diversos niveles de escolaridad, respecto a un posible «cambio de sentido» cuando una representación semiótica se transforma en otra, en el interior de un mismo sistema de representación semiótica. No obstante, este fenómeno requería ser documentado y sistematizado.

En el marco de un enfoque cualitativo, realizamos un análisis de tipo descriptivo-interpretativo, asumiendo referentes teóricos desde una perspectiva ontosemiótica (Godino, 2003; Godino, Batanero y Font, 2007), con el propósito de describir y analizar los procesos de asignación de sentidos de estudiantes de los grados 9.º y 11.º, sobre la base del trabajo efectuado por ellos en pequeños grupos en relación con tareas específicas[3] en las que indagamos por el sentido asignado a ciertas representaciones semióticas, obtenidas mediante transformaciones de tratamiento.

REFERENTES TEÓRICOS

Asumimos un enfoque pragmatista, en el que necesariamente debemos aludir a la experiencia y reconocer que las *ideas* no solo son asumidas como orientadoras de la *acción*, sino que su validez e importancia se derivan de la utilidad y eficacia en una situación o problema dado, que satisfaga las necesidades o requerimientos de un sujeto o sociedad (Rorty, 1991). En los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se hace fundamental la apropiación y uso de representaciones de los objetos en una variedad de sistemas de representación semiótica. En especial, se hace necesario apropiarse de posibilidades para transformar una representación semiótica (RS) de un objeto matemático en otra RS del mismo objeto, ya sea en el interior del propio sistema –tratamiento– o entre diferentes sistemas –conversión– (Duval, 1999). Es usual considerar que los problemas cognitivos para la construcción de objetos matemáticos están relacionados más con la transformación de conversión que con la de tratamiento (Duval, 2004).

Enfoque ontosemiótico (EOS). Los objetos matemáticos son emergentes de un sistema de prácticas, como entidades complejas construidas progresivamente, que se enriquecen y completan en la resolución de campos de problemas a partir de la actividad reflexiva (Font, Godino y Gallardo, 2013), es decir, son fruto de la construcción humana, evolucionan y pueden ser dotados de diversos significados dependiendo de las personas o de las instituciones; se desplaza así el centro de atención de la mente a la acción de los sujetos en contextos,[4] mediada por instrumentos. Las nociones teóricas *sistema de prácticas* y las categorías funcionales de *entidades primarias* o tipos de objetos (lenguaje, situaciones, procedimientos, definiciones, propiedades y argumentos), las cinco *facetas duales* (personal/institucional, ostensiva/no ostensiva, ejemplar/tipo, elemental/sistémica, expresión/contenido) desde las cuales pueden considerarse dichas entidades, así como la noción de *función semiótica* (toda expresión remite a un contenido), constituyen una adecuada posibilidad para el análisis de la cognición humana. Para el presente trabajo, focalizamos el análisis en la faceta *expresión/contenido*. Las transformaciones semióticas, por tanto, son el aspecto emergente de una función semiótica que relaciona una representación

3. En Colombia la escolaridad previa a los estudios universitarios está organizada en once grados, agrupados en 3 niveles: educación básica primaria (5 grados, edades entre 6-7 y 10-11 años), educación básica secundaria (4 grados, entre 11-12 y 14-15 años) y educación media vocacional (2 grados, entre 15-16 y 16-18 años).

4. El *contexto* visto como conjunto de factores extra/interlingüísticos que soportan o determinan la actividad matemática y, por tanto, la forma, la adecuación y el significado de los objetos puestos en juego en esta.

(antecedente), en la pareja sistema de prácticas-configuración de objetos, con otra representación, en otra pareja sistema de prácticas-configuración de objetos.

En la realización de toda *práctica matemática*,[5] los sujetos hacen uso de conocimientos básicos y en ella activan un conjunto de relaciones entre diferentes tipos de objetos (entidades primarias); en otras palabras, las prácticas matemáticas personales activan una red de objetos intervinientes y emergentes (diagrama 1), es decir, la *configuración cognitiva* puesta en juego (Godino, Batanero y Font, 2007).

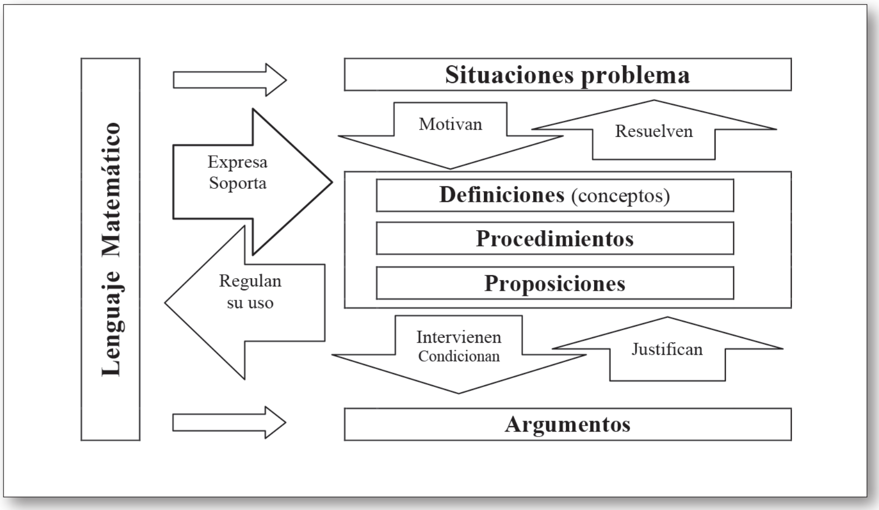

Diagrama 1. Configuración de objetos primarios.

Objetos, significado y sentido. En toda actividad matemática se recurre a la transformación de signos dentro de sistemas semióticos culturalmente dados, por tanto, el aprendizaje de las matemáticas intrínsecamente es, ante todo, una actividad semiótica. Para comprender el uso de los signos se debe tener en cuenta la actividad reflexiva mediada que subyace a la coordinación de sistemas semióticos, esto es, a las configuraciones cognitivas que son activadas por dichos sistemas de prácticas. El significado de un objeto es atribuido por la cultura y tiene una existencia que trasciende al sujeto (Radford, 2006), es más estable, más descontextualizado y general, está más asociado a la semántica cultural; mientras que el sentido atribuido a un objeto matemático depende tanto del sujeto como del contexto en el que lo aborde,[6] se trata entonces de algo flexible, dinámico, en movimiento, y es relativo a varias modalidades sensoriales y semióticas, asociado más a la pragmática. En términos operativos, planteamos que el *sentido* de un objeto matemático primario dado es el contenido de la función semiótica que asume dicho objeto primario como expresión (diagrama 2).

Expresión	*Contenido*
Objeto primario	Sentido del objeto primario

Diagrama 2. Sentido asignado a un objeto matemático primario.

5. Desde el EOS, la práctica matemática es considerada como cualquier acción o manifestación, no solo de carácter lingüístico, realizada tanto en la resolución de problemas matemáticos como en la comunicación a otros de las soluciones encontradas, con el propósito de validarlas o de generalizarlas a otros contextos y situaciones o problemas (Godino, Batanero y Font, 2007; D'Amore, Font y Godino, 2007).

6. El sujeto puede ser un individuo, un grupo de individuos o una institución. El sentido puede ser asignado de manera individual, ser el resultado de una negociación en el interior de una comunidad de práctica, o una aceptación de carácter institucional.

Puede haber diferentes sentidos de un mismo objeto primario (diagrama 3). Por ejemplo:

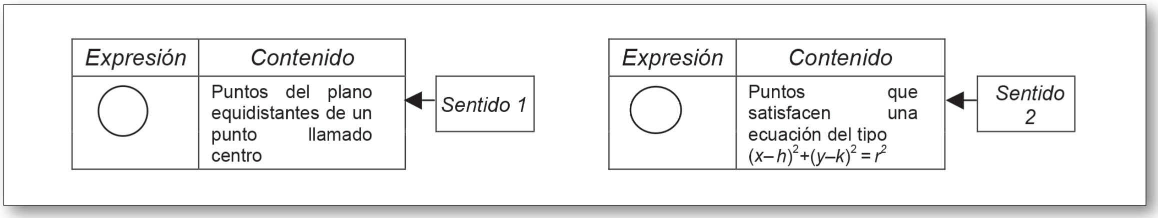

Diagrama 3. Diferentes sentidos de un objeto, que institucionalmente se espera construyan.

Cuando se establece una función semiótica entre dos sentidos diferentes de un mismo objeto matemático primario, diremos que se produce una *articulación de sentidos*, esto es, cuando uno de los sentidos (contenido) del objeto primario se convierte en expresión de una nueva función semiótica que tiene como contenido otro sentido de dicho objeto. Por ejemplo, una articulación producida a partir del diagrama 3 se puede sintetizar como sigue (diagrama 4):

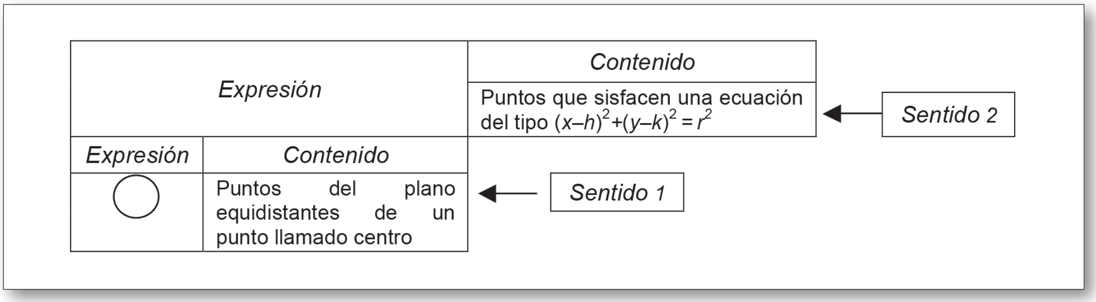

Diagrama 4. Articulación de sentidos.

Esta combinación se puede simplificar aún más, mediante una sola función semiótica que relaciona (articula) los dos sentidos (diagrama 5):

Expresión	*Contenido*
Puntos del plano equidistantes de un punto llamado centro	Puntos que satisfacen una ecuación del tipo $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Diagrama 5. Articulación de sentidos (simplificación).

Por tanto, al articular sentidos, los contenidos de funciones semióticas, antes vistos sin una relación explícita, son considerados ahora como equivalentes. Desde lo planteado anteriormente, dos representaciones simbólicas (objetos primarios), consideradas sintácticamente equivalentes en tanto una de ellas se obtiene de la otra a partir de un proceso de tratamiento, tienen el *mismo sentido* (el mismo contenido), conservan equivalencia semántica. Si un sentido asignado a una RS no se articula con un sentido asignado posteriormente a otra RS obtenida de esta mediante tratamiento, es decir, si se «abandona» el sentido inicialmente dado y se asume un nuevo sentido, se dirá que hay un *cambio de sentido*.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Este trabajo está enmarcado en un enfoque de investigación cualitativa, de tipo descriptivo-interpretativo, en el que realizamos un análisis en contexto real del fenómeno descrito, relacionado con el cambio de sentido. Se hizo uso de la entrevista estructurada basada en tareas (Goldin, 2000), con pequeños grupos de estudiantes de grado 9.º (educación básica) y de grado 11.º (educación media), de cinco instituciones educativas, dos de carácter oficial, ubicadas en la periferia de la ciudad de Bogotá, en sectores de estrato socioeconómico bajo considerados vulnerables, y tres de carácter privado, ubicadas en zonas no periféricas de la ciudad, a las cuales asisten estudiantes de estrato socioeconómico medio y alto.

Instrumentos. Diseñamos tres instrumentos de indagación semiabiertos, cada uno con una tarea asociada a una temática específica: probabilidad, equivalencia de expresiones y cónicas, basados en tareas propuestas por D'Amore (2006). Los dos primeros fueron propuestos a estudiantes de grado 9.º y 11.º, y el tercero solo a los de grado 11.º. Cada uno de ellos con tres ítems y un diseño similar al que presentamos a continuación.

Cuestionario 2 (equivalencia de expresiones):
En lo que sigue, asuma que n representa un número entero cualquiera. Por favor, conteste en el orden en que aparecen los puntos y solo continúe con el siguiente cuando haya respondido completamente al punto anterior.

1. Diga qué significa o qué interpretación le asigna usted a la expresión $3n$.
2. Diga si la siguiente igualdad es o no válida: $(n-1) + n + (n + 1) = 3n$
   a) Marque con una X la respuesta que considere correcta *Sí* ( ) *No* ( )
   b) En caso afirmativo compruebe la igualdad; en caso negativo dé razones por las cuales no se cumple.
3. ¿La expresión $(n-1) + n + (n + 1)$ puede interpretarse como *el triple de un número*?
   a) Marque con una X la respuesta que considere correcta *Sí* ( ) *No* ( )
   b) Explique o justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta:

Recolección de información. Además de la indagación mediante el desarrollo de tareas (propuestas en los cuestionarios) y del contenido de las notas del investigador, contamos con transcripciones de entrevistas grabadas en audio, las cuales fueron realizadas con cada uno de los pequeños grupos seleccionados con base en las respuestas dadas a la tarea propuesta en los diferentes cuestionarios. En tanto reconocíamos la importancia de que los estudiantes se involucraran en el desarrollo de las tareas, propusimos trabajarlas inicialmente de manera individual, y luego interactuar sobre estas en pequeños grupos (entre 2 y 4 estudiantes). Posteriormente, con la orientación del profesor de la institución a cargo del curso, realizaron una discusión de algunas de las respuestas dadas por los pequeños grupos,[7] los cuales fueron seleccionados por el profesor basándose en la observación realizada por él durante el tiempo de trabajo de los estudiantes.

La población inicial estuvo compuesta por cerca de 240 estudiantes de 5 instituciones educativas de la ciudad de Bogotá. La selección de los pequeños grupos para la entrevista fue realizada a partir de las respuestas dadas a las tareas –cada una de las cuales contenía tres ítems–, sobre la base de los siguientes criterios:

1. Que en el primer ítem la interpretación realizada por los estudiantes fuera compatible con el «significado institucional» (Godino y Batanero, 1994) asignado a dicho objeto.
2. Que en el segundo ítem al menos uno de los estudiantes pueda reconocer explícitamente la equivalencia sintáctica entre las expresiones dadas (aritméticas o algebraicas), esto es, que al

7. Reconocieron la importancia de que quien socialice una respuesta lo haga en representación del grupo; no solo para que dé cuenta del proceso del grupo, sino también para que su intervención pueda ser apoyada por los otros integrantes del grupo y se disminuya en parte la tensión que usualmente puede generarse cuando se defiende individualmente un resultado.

menos un estudiante pueda realizar un proceso de tratamiento que le permita obtener una de las expresiones a partir de la otra (haciendo uso de las propiedades al interior del registro aritmético o del algebraico).

3. Que en el tercer ítem al menos uno de los estudiantes que ha reconocido la equivalencia sintáctica en el ítem anterior de las expresiones responda negativamente.

Si bien usamos un guion para el desarrollo de la entrevista, incorporamos algunas preguntas retrospectivas para complementar la indagación y estuvimos atentos a reconocer situaciones de interés, formulando preguntas específicas orientadas a obtener mayor información.

Análisis de los datos. Usando herramientas del enfoque ontosemiótico (EOS) se realizó un análisis de las producciones individuales de los estudiantes de la muestra seleccionada, conformada por 16 pequeños grupos (de grados 9.º y 11.º), en relación con la respectiva tarea, así como de las producciones grupales. El interés se centró en la producción que se generó durante la entrevista, en la cual se posibilitó la intervención de cada uno de los estudiantes, la interacción entre ellos y, en particular, la opción de aceptar o disentir de los planteamientos realizados por los integrantes de cada pequeño grupo en relación con los ítems de la(s) tarea(s) propuesta(s). Privilegiamos el trabajo grupal para posibilitar que los estudiantes pudieran tanto compartir puntos de vista, como reflexionar sobre los planteamientos realizados por los otros con respecto al trabajo realizado sobre la tarea propuesta. De las 16 entrevistas realizadas, en este escrito se describirán con cierto detalle dos de ellas, cada una en relación con uno de los cuestionarios.

Reconocemos la importancia de la información proporcionada al verbalizar los procesos de pensamiento y acción, a partir de la producción textual obtenida de la actividad desarrollada en relación con las tareas (cuestionarios), y la obtenida de los procesos de interacción, generada en las entrevistas con pequeños grupos en el contexto de una tarea propuesta. Dichas entrevistas grupales, a diferencia de las individuales, ofrecieron una mayor posibilidad de interactuar, de reconocer producciones y diversas interpretaciones realizadas por los estudiantes en relación con los objetos matemáticos involucrados en dicha tarea, así como identificar sentidos asignados a las expresiones simbólicas, reconociendo las razones de dicha asignación y la posibilidad de articular o no sentidos. El análisis de las producciones de los estudiantes se realizó usando herramientas del enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007).

DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL TRABAJO REALIZADO

Presentamos una síntesis del trabajo realizado por dos de los grupos de grado 9.º, de dos instituciones educativas, en relación con dos tareas diferentes, una sobre el tema de probabilidad y otra asociada a un tema algebraico. Describiremos con más detalle el trabajo realizado por el primer grupo.

Tarea sobre probabilidad. Reportamos el trabajo realizado por el grupo integrado por Pablo (E_4), Daniel (E_5) y Jonathan (E_6), en relación con la tarea sobre encontrar la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par. En su trabajo individual, cada uno de ellos estableció tres funciones semióticas, una entre la expresión 50% y el contenido «casos favorables sobre casos posibles», otra entre la expresión 50% y el contenido 3/6 y otra entre 3/6 y «casos favorables sobre casos posibles», es decir, pudieron articular estos sentidos asignados. Sin embargo, para ellos la probabilidad no puede ser 4/8, en tanto el dado solo tiene 6 caras; afirman que: «la información dada estaría mal y el dado tendría 8 caras» (Pablo), «el dado tiene tan solo 6 caras y no 8» (Jonathan), «el dado está divido en 6 y no en 8 fracciones» (Daniel). En el diagrama 6 presentamos la configuración cognitiva de objetos matemáticos primarios inicialmente lograda por Daniel, obtenida a partir del trabajo realizado tanto individualmente como en grupo.

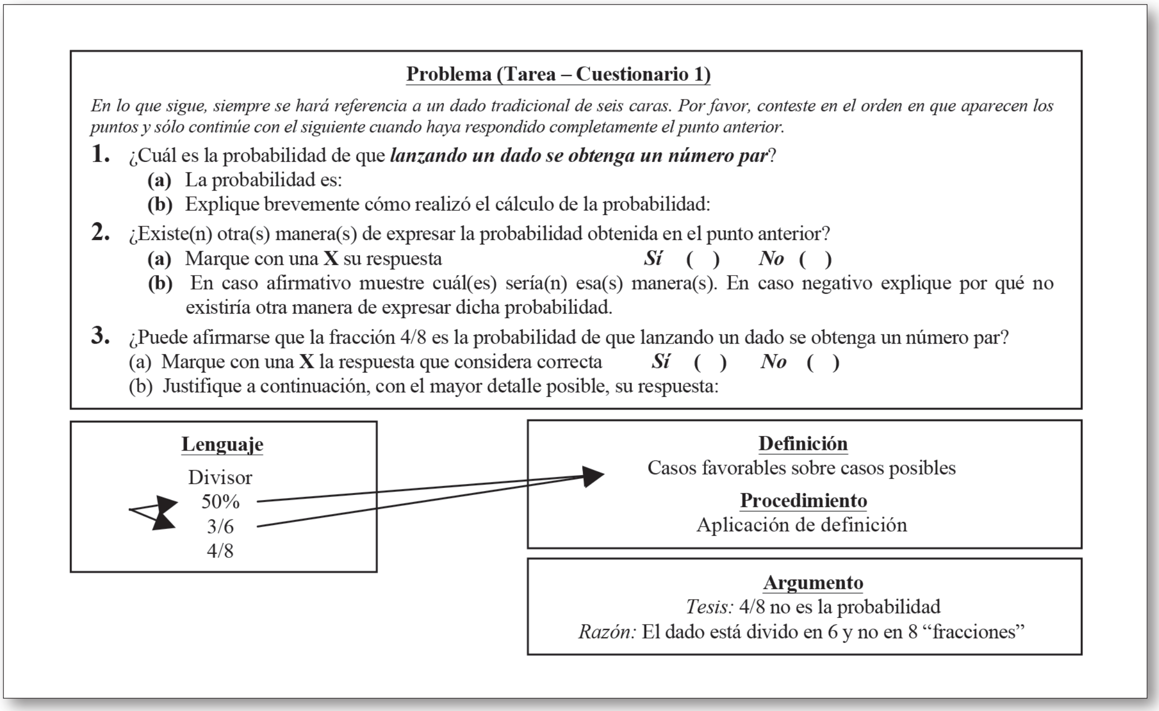

Diagrama 6. Configuración inicial de Daniel (E_5).

Como grupo, los estudiantes encontraron la probabilidad pedida, la cual representaron de dos maneras diferentes, mediante las expresiones 50% y 3/6; sin embargo, ninguno de ellos reconoce que la fracción 4/8 puede interpretarse como dicha probabilidad, es decir, no logran articular los sentidos asignados a las anteriores expresiones. La razón fundamental por la cual no aceptan que la fracción 4/8 sea la probabilidad solicitada es que *el número de caras del dado es 6 y no 8*. El sentido asignado a la fracción 4/8 está «anclado» al *dado*, al objeto concreto referido en la tarea. La información obtenida se resume en la tabla 1.

Tabla 1.
Rejilla síntesis (inicial) –Pablo, Daniel y Jonathan– grado 9.º, Colegio CHA

	Pablo (E_4)	*Daniel (E_5)*	*Jonathan (E_6)*	*Grupo*
Reconoce diversas maneras de representar la probabilidad	Sí	Sí	Sí	Sí
Articula sentidos asignados	No	No	No	No

Entrevista. Estos estudiantes, en sus cuestionarios individuales y en el cuestionario de pequeños grupos, reconocieron más de una manera de representar la probabilidad del evento referido, proponiendo expresiones como 50%, 3/6 y ½; sin embargo, todos ellos comenzaron afirmando que la fracción 4/8 no expresa la probabilidad de dicho evento.

E_6: Pues, … como el tema principal es un dado, se le reconoce que el dado tiene seis caras… Si, si sacamos los pares serían tres, … 4/8 pues no, no es tan representativo del dado, ya que el dado no tiene ni ocho caras, ni cuatro números pares. Mirándolo desde la forma en que yo lo veo, no es exacto el cuatro octavos.
E_5: Pues… si es un dado de 6 caras, la división da tres, tres de la probabilidad [se refiere a la fracción 3/6], no puede tomarse el número de referencia cuatro [se refiere a la fracción 4/8].
E_4: Pues a mí me parece que no está … no, no serviría porque me parece que la fracción estaría mal planteada, para como se debería resolver el problema, en base de las caras del dado.

Dichos estudiantes centran su atención en el *dado* como objeto físico. Si bien Jonathan (E_6) había reconocido que las fracciones 3/6, 1/2 y 4/8 eran equivalentes: «pueden dar lo mismo», plantea que 4/8 «no es exacto». Sin embargo, a medida que interactúan, van modificando su opinión. Por ejemplo, Pablo (E_4) plantea:

E_4: Lo que yo digo es que la fracción sí serviría pero no está bien planteada … no se da al detalle, ¿por qué? porque se da mal la información sobre la probabilidad y sobre los lados del dado […] Mejor dicho, la fracción sirve pero no está bien especificada ¿por qué? Porque 4/8 es básicamente lo mismo que 3/6. ¿Sí? … Pero entonces para ser la fracción del dado no serviría porque no se específica bien lo que se busca.

Posteriormente, para indagar un poco más sobre el posible «anclaje» a la situación inicial, al *dado* en tanto objeto físico, compartimos con ellos un argumento de otro estudiante, quien afirmaba que fracciones como 3/6, 4/8 o 15/30 son la *mitad*, haciendo referencia a la relación existente entre numerador y denominador, y por tanto cualquiera de ellas podría representar dicha probabilidad, así como también lo haría, por ejemplo, 10/20:

E_6: Yo sí estaría de acuerdo.
E_5: No contradigo que es la mitad y que sería lo mismo … Pero si se busca una precisión, si es un dado de seis caras, yo trabajaría con los números que son, 3 de 6… Porque a uno no le va a quedar claro que, por ejemplo, le diga 4/8 en un dado de 6 caras, no pensaría ¡no! … entonces es un dado de ocho caras ¿sí?
E_4: Pues yo estoy de acuerdo también en que diez veinte [la fracción 10/20] es lo mismo que 3/6. Lo que pasa es que en el sentido común de la población… de todo el mundo, eso no se entendería, ¿cómo así que 10/20? ¿Desde cuándo acá un dado tiene 20 caras?, entonces [ese es] el pedacito que a mí no me cuadra [ríe un poco] …

Finalmente, al preguntarle de nuevo a Daniel (E_5), quien en silencio había estado escuchando atentamente a sus compañeros, si ahora él aceptaría el argumento del estudiante, respondió:

E_5: En este momento sí … Después de hablar ya, todo eso. O sea, para alguien común no, pero… yo por ejemplo, acá, puse en la primera pregunta 50% [señala el primer ítem del cuestionario]… De cien daría lo mismo, mitad. Entonces usted dice, 4/8 sería la mitad entonces da lo mismo, equivalente… no mirándolo hacia las caras, ni hacia el dado, sino a la mitad.

Después de varias interacciones con Pablo, con Jonathan y con el entrevistador, Daniel recuerda que en su cuestionario había respondido que la probabilidad era del 50%, lo cual equivale a la *mitad*, y reconoce que 4/8 también es la mitad; entonces acepta que la fracción 4/8 es *equivalente* al 50%. Es decir, cuando logra descentrarse del objeto, de las caras del dado, y centra su mirada en las expresiones formales que representan la mitad, logra reconocer que la fracción 4/8 expresa la probabilidad pedida y así articula los sentidos asignados.

En el siguiente diagrama presentamos la *configuración cognitiva* de objetos matemáticos primarios lograda por Daniel (E_5) después del proceso de interacción realizado durante la entrevista grupal. Mediante una línea continua, se señalan las funciones semióticas inicialmente establecidas por el estudiante, entre una expresión y un contenido; mediante una línea a trazos, se señalan las nuevas funciones semióticas reconocidas por el estudiante.

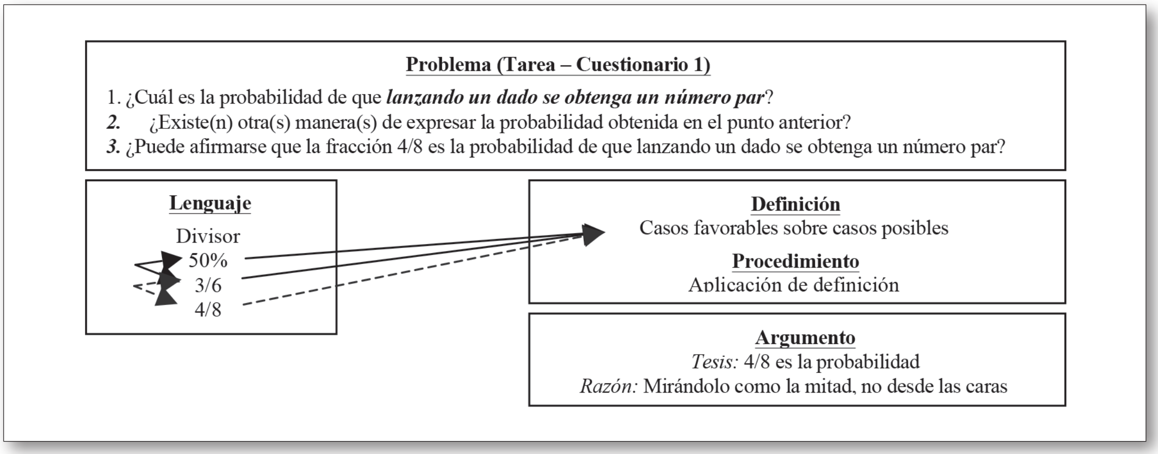

Diagrama 7. Configuración final de Daniel (E_5).

A manera de síntesis. En el transcurso de la entrevista grupal, el proceso de interacción generó algunos cambios en las interpretaciones realizadas inicialmente por los estudiantes; por una parte, los tres reconocieron explícitamente la equivalencia entre las fracciones 3/6 y 4/8, e incluso que cualquier fracción equivalente a 3/6 podría representar la probabilidad pedida en la tarea, no obstante, su «anclaje» al *dado*, en tanto objeto físico, y al número de caras de este, no les permite articular los sentidos asignados a tales expresiones y, por tanto, Pablo y Jonathan no aceptan que 4/8 sea dicha probabilidad. Daniel, por su parte, logra «separarse» de la situación concreta, reconoce que la fracción 4/8 representa dicha probabilidad y logra así articular los sentidos asignados a las diferentes expresiones numéricas. En la tabla 2 se resume la información obtenida.

Tabla 2.
Rejilla síntesis –Pablo, Daniel y Jonathan– Grado 9.º (Colegio CHA)

	Pablo	*Daniel*	*Jonathan*	*Grupo*
Reconoce diversas maneras de representar la probabilidad	Sí	Sí	Sí	Sí
Articula sentidos asignados	No	Sí	No	No
Cambio (reconocimiento de equivalencia entre 3/6 y 4/8)	✓	✓	✓	✓
Cambio (articulación de sentidos)		✓		

Tarea triple de un número. Como segundo ejemplo, presentamos el trabajo realizado por el grupo de estudiantes integrado por Cristian (E_1), Angely (E_2) y Dairon (E_3), respecto a la tarea del cuestionario 2, relacionada con la equivalencia de las expresiones $(n - 1) + n + (n + 1)$ y $3n$. En el trabajo individual, Cristian verifica la equivalencia asignando un valor específico de n, y establece una función semiótica entre la expresión $3n$ y el contenido *resultado de multiplicar 3 por un número cualquiera*. Angely y Dairon, por su parte, realizan el tratamiento requerido a la primera expresión para obtener la segunda, y afirman que son equivalentes.

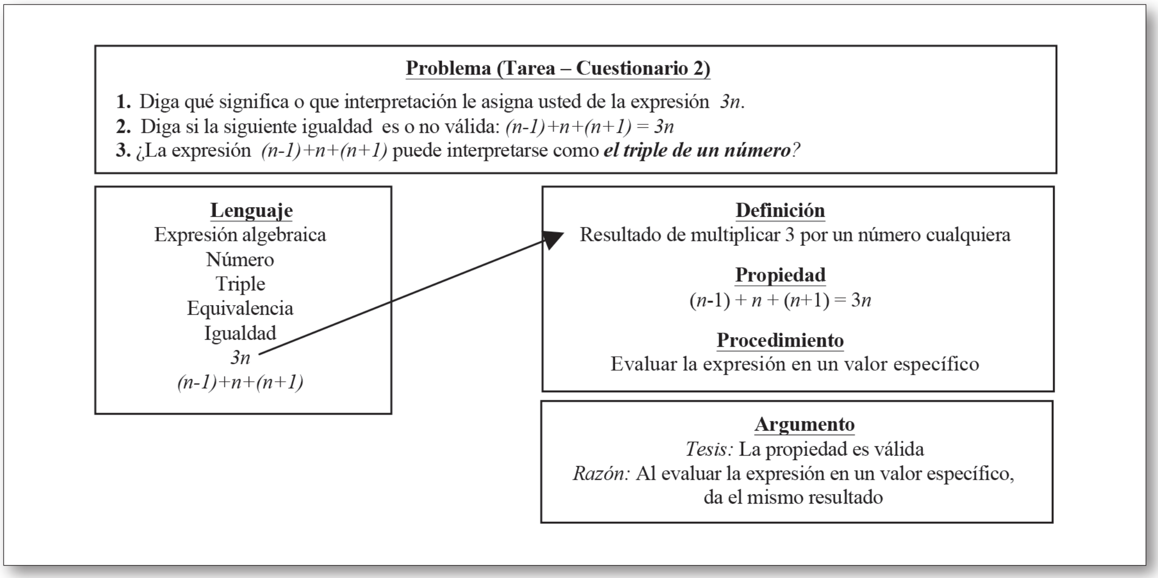

Diagrama 8. Configuración inicial de Cristian (E_1).

En el trabajo como grupo, Cristian no acepta los argumentos de sus compañeros que los llevan a concluir que la expresión $(n - 1) + n + (n + 1)$ es el triple de un número, e insiste en que si bien dan el mismo resultado la primera expresión «no es el triple sino una suma». La información inicial obtenida se resume en la tabla 3:

Tabla 3.
Rejilla síntesis (inicial) –Cristian, Angely y Dairon– Grado 9.º, Colegio MMC

	Cristian (E_1)	*Angely (E_2)*	*Dairon (E_3)*	*Pequeño grupo*
Reconoce equivalencia sintáctica	No	Sí	Sí	Sí
Articula sentidos asignados a expresiones	No	Sí	Sí	No

Cristian acepta la equivalencia de las dos expresiones algebraicas, a partir de la evaluación con un valor específico de n, pero no logra articular los sentidos asignados a dichas expresiones. Mientras que Angely y Dairon, quienes habían reconocido individualmente la equivalencia sintáctica de las dos expresiones y logrado articular los sentidos asignados a estas, en el trabajo en pequeño grupo acogen la argumentación de E_1, y aunque reconocen como grupo la equivalencia sintáctica, ahora no articulan los sentidos asignados.

Entrevista. En cuanto a la pregunta de si la expresión $(n - 1) + n + (n + 1)$ es o no, significa o no, el triple de un número, Cristian (E_1) responde:

E_1: Yo creo que, que no, porque el triple de un número no es así, sino [que] esa es la suma de tres números consecutivos, no tres veces ese mismo número, o sea… [silencio].

El sentido que le asigna a la expresión $3n$ es de representación de un producto o multiplicación entre números, mientras el asignado a la expresión $(n - 1) + n + (n + 1)$ es de una suma, aunque reconoce que la expresión $3n$ es «tres veces ese mismo número», pero sin reconocer la posibilidad de articular dichos sentidos con base en la equivalencia sintáctica antes reconocida de tales expresiones. Por su parte, Angely (E_2) plantea sus dudas respecto a lo planteado por Cristian, pues afirma que al evaluar cada una de las expresiones con números específicos se obtiene una igualdad, y aclara así la dificultad que encuentran:

> E_2: *cuando se habla de números consecutivos entonces uno se imagina 1, 2, 3,* pero cuando se habla de triple de un número *está diciendo 2, 2 , 2, entonces ese es el problema*.

Si bien Cristian reconoce que al evaluar las dos expresiones algebraicas con un valor específico obtiene el mismo resultado (el número 6), no evoca explícitamente la equivalencia de las expresiones, ni articula los sentidos asignados a cada una de las expresiones, centrando su atención fundamentalmente en las operaciones realizadas y perdiendo de vista, al parecer, la relación entre tales expresiones. Dairon está de acuerdo con lo explicado por Angely y afirma que, al evaluar lo obtenido en las dos expresiones, «son el triple de un mismo número»; si bien habla poco, todo el tiempo estuvo escuchando con atención a sus compañeros, y se evidenció que puede operar los términos de la expresión desde lo general, sin requerir realizar evaluaciones con valores específicos. Frente a la duda de Cristian respecto a que la expresión es el triple de n cuando $n = 2$, pero podría no serlo para otro valor, sugieren evaluar dicha expresión para $n = 3$. Cristian lo hace y exclama:

> E_1: sí, ¡sí es! […] sí da, entonces, sí, este es el triple de un número.

Esta es la configuración lograda por Cristian después de la entrevista:

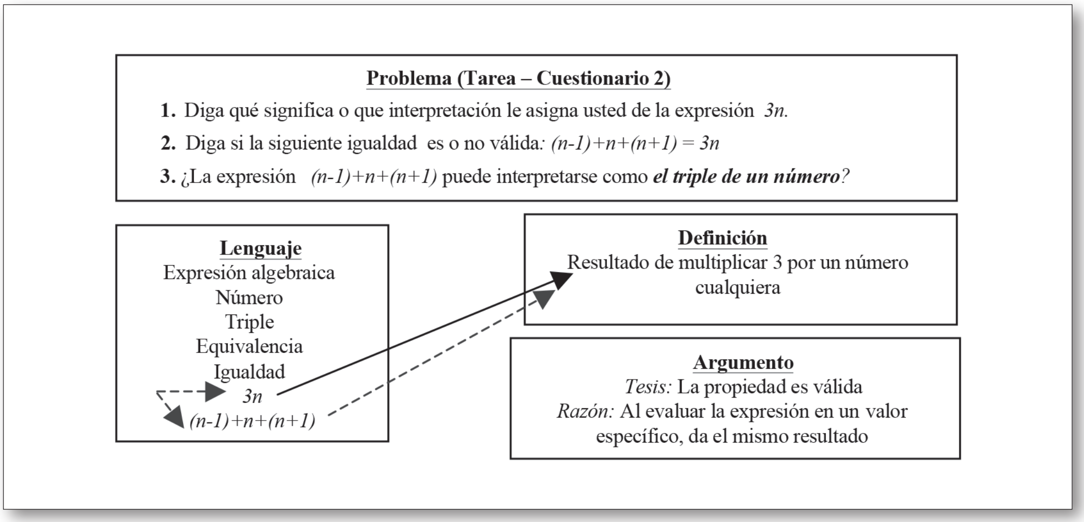

Diagrama 9. Configuración final de Cristian: $E_1^{9.1}$.

A manera de síntesis. La respuesta inicial dada por Cristian refleja un hecho cultural de la asignación de significados asociados con la forma de cada una de las expresiones algebraicas: «el triple de un número no es así […] esa es la suma». El proceso de interacción durante la entrevista, especialmente con Angely, le posibilita a Cristian repensar su respuesta, al aceptar la sugerencia de realizar evaluaciones de las expresiones con valores específicos (con los valores 2 y 3); es decir, acepta la equivalencia entre $(n-1) + n + (n+1)$ y $3n$ mediante el análisis de casos particulares, pero sin generalizar. Se trata de una especie de *inducción empírica*. Así, durante la entrevista, establece dos nuevas funciones semióticas, una entre la expresión $(n-1) + n + (n+1)$ y el contenido $3n$, y otra entre la expresión $(n-1) + n + (n+1)$ y el contenido «resultado de multiplicar 3 por un número cualquiera», es decir, asigna el mismo sentido a la expresiones $(n-1) + n + (n+1)$ y $3n$. En la tabla 4 se resume la información obtenida de los tres estudiantes:

Tabla 4.
Rejilla síntesis (final) –Cristian, Angely y Dairon (T-1)– Grado 9.º, Colegio MMC

	Cristian (E_1)	*Angely (E_2)*	*Dairon (E_3)*	*Pequeño grupo*
Reconoce equivalencia sintáctica	Sí	Sí	Sí	Sí
Articula sentidos asignados a expresiones	Sí	Sí	Sí	Sí
Cambio (reconocimiento de equivalencia)	✓			
Cambio (articulación de sentidos)	✓			✓

Finalmente presentamos algunas afirmaciones adicionales, realizadas en otras de las entrevistas efectuadas, en relación con la expresión $(n - 1) + n + (n + 1)$:

> … pues acá está (n - 1) y acá (n + 1), pues ahí no está el triple.
> … porque es tres números consecutivos, no el triple de un número.
> … esa expresión no es 3 veces *n*.

RESULTADOS

En la investigación desarrollada, además de documentar el fenómeno reportado inicialmente por D'Amore (2006) sobre la no articulación de sentidos asignados a expresiones asociadas con un objeto matemático, presentamos evidencias sobre elementos que permiten explicar posibles causas de este hecho relacionadas con tres hechos fundamentales: 1) los estudiantes «manejan» las propiedades básicas de los sistemas numéricos, a partir de las cuales realizan las transformaciones de tratamiento requeridas para establecer la equivalencia sintáctica de las expresiones, pero no por ello articulan los diversos sentidos asignados a las expresiones dadas; 2) existe una tendencia a anclarse en situaciones específicas planteadas en el contexto por la tarea propuesta, y 3) se evidencia una «mirada» básicamente icónica de las expresiones algebraicas.

De igual manera, ponemos en evidencia la importancia de los procesos de interacción como elemento fundamental para posibilitar la articulación de sentidos asignados a expresiones sintácticamente equivalentes. No solo se dispone de cierto tiempo para socializar y reconocer los argumentos presentados por otros, sino también, y sobre todo, para analizar los argumentos presentados por unos y otros, los cuales no son asumidos de manera acrítica.

Los resultados obtenidos en esta investigación permitirían además relativizar el planteamiento según el cual, en el aprendizaje de las matemáticas, las principales dificultades están asociadas a la conversión, en tanto operación cognitiva fundamental (Duval, 1999, 2004). En matemáticas, las transformaciones de tratamiento no solo son fundamentales, sino que, como puede concluirse de las evidencias presentadas en este escrito, pueden ser fuente de diversas dificultades en la construcción y comprensión de los objetos matemáticos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

D'Amore. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. En Radford, L. y D'Amore, B. (eds.). Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático. *Relime*, 9(4), pp. 177-196. Disponible en línea: <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/580%20Objetos%20y%20sentido%20RELIME%20speciale.pdf>.

D'Amore, B. y Fandiño, M. (2008). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. *ICMI*, Rome, *Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI*.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle (Original publicado en idioma francés en el 1995).

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle (Original publicado en idioma francés en 1999).

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, pp. 97-124. Disponible en línea: <http://www.ugr.es/~jgodino/eos/emergence_mathematical_objects.pdf>.

Font, V. y Ramos, B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales. *Revista de Educación*, 338, pp. 309-345. Disponible en línea: <http://www.revistaeducacion.mec.es/re338/re338_19.pdf>.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Granada: Universidad de Granada. Disponible en línea: <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf>.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), pp. 325-355. Disponible en línea: <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf+03_SignificadosIP_RDM94.pdf>.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), pp. 127-135.

Goldin, G. (2000). A scientific perspectives on structured, task-based interviews in mathematics education research. En Kelly, A. y Lesh, R. (eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517-545). New Jersey-London: LEA.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. En Radford, L. y D'Amore (eds.). Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático. *Relime*, 9(4), pp. 103-129. Disponible en línea: <http://www.luisradford.ca/pub/58_Objectification3Spsh.pdf>.

Rorty, R. (1991). *Contingencia, ironía y solidaridad* (A. Sinnot, Trad.). Barcelona: Paidós (Original publicado en idioma inglés en 1989).

Mathematical objects, semiotic representations and senses

Pedro Javier Rojas Garzón
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá-Colombia
pedroedumat@udistrital.edu.co

In this paper we present results of a study on the emergence of mathematical objects from their representations and the difficulties encountered by some students to articulate the senses assigned by them to semiotic representations of the same mathematical object, obtained by transformations of treatment. We describe and analyze some processes of assigning senses achieved by students in grades 9 and 11 of the secondary education (Colombia) in relation to specific tasks that require such treatments performed between representations, and report some associated difficulties. In this study we include aspects of mathematical activity, communication on emerging mathematical objects and cognitive construction of mathematical objects.

This research is part of an approach of qualitative research, from the type descriptive-interpretative, analyzing in real context of the described phenomenon, related to the change of sense. It makes use of the structured interview based on task (Goldin, 2000), conducted in small groups of students. It is assumed that the verbalization of processes of thought and action provides important information, not only from written materials, such as those obtained by instruments of inquiry (tasks or questionnaires), but also from interaction processes, like those generated in the work with small groups or by interviews, in the context of a given task. The interview to small groups, unlike individual, offers more opportunities of interaction that allow recognizing the different interpretations made regarding mathematical objects involved in such task and identify the senses assigned to the expressions, in addition to recognize some reasons that make possible or not the assignment of senses and the articulation of these.

The analysis of the student productions reported in this research is made from an onto-semiotic approach from the group of Godino (2003), used to explain and understand the student productions. The use of formal systems of signs is an emerging phenomenon of the systems of practices that are socially and culturally framed. To perform the analysis of the transcripts of the interviews, a thematic segmentation is done, which is itself segmented in each of the interventions of the participants in the interview, making an enumeration.

The work done by students from 9th grade (last grade of basic education) and students from 11th grade (last year of pre-university education) regarding three specific tasks showed the difficulty that many of them have when articulating several senses assigned to expressions associated with a mathematical object. Even though some of them recognize the syntactic equivalence obtained by treatment between two or more expressions, they are not always able to articulate the senses assigned to such expressions and may even change the initial sense assigned to one of them.

We present evidence that confirms the phenomenon reported by D'Amore (2006) on difficulties encountered by students to articulate senses associated with expressions recognized by them as syntactically equivalent and elements that allow making explicit the causes of this difficulty in articulating the senses, associated to three fundamental facts. One, that although students «manage» the basic properties of number systems, which enables them to make the transformations of treatment required establishing the syntactic equivalence of the expressions, they find it difficult to associate senses different from the given expressions. Two, the tendency to anchor in specific situations arising in the context of the proposed task and, three, the basically iconic «look» of algebraic expressions. Moreover, it highlights the importance of the interaction processes as a key element to enable the articulation of senses assigned to syntactically equivalent expressions.