



Análisis del comportamiento de alumnos expertos resolutores de problemas en el contexto del concurso matemático Pruebas Cangur

Analysis of expert problem solving student's behaviour in the context of the mathematical Kangaroo Contest

Marc Guinjoan, Josep M. Fortuny

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona.

marc.guinjoan@uab.cat, josepmaria.fortuny@uab.cat

Ángel Gutiérrez

Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València.

gutierrez@uv.es

RESUMEN • Presentamos los resultados de una investigación que analiza las estrategias de estudiantes considerados expertos resolutores de problemas en el contexto del concurso Pruebas Canguro, con problemas de elección múltiple y tiempo limitado para resolverlos. Nuestro objetivo es entender mejor las estrategias de resolución utilizadas, el uso de las opciones de respuesta y cómo afecta el límite de tiempo a sus estrategias de resolución y a su confianza en las respuestas. Los estudiantes han resuelto dos bloques de problemas, uno en las condiciones del concurso y otro sin estos condicionantes. Establecemos una categorización para el grado de certeza que muestran los estudiantes en sus respuestas. No se observan diferencias importantes en la selección de estrategias ante la presencia o no de opciones de respuesta, pero sí en el porcentaje de aciertos, que concuerdan con diferencias en el nivel de confianza en el momento de dar una solución.

PALABRAS CLAVE: resolución de problemas; respuestas de elección múltiple; intuición; competencias matemáticas; elección de estrategias.

ABSTRACT • We present results of a research aimed to analyse the strategies of students considered as expert problem solvers in the context of the competition Proves Cangur, with multi-choice answers and limited time to solve the test. Our aim is to understand better students' strategies of resolution, the ways they use the options of answer, and how the limited time affects students' strategies of resolution and confidence in their answers. The students solved two sets of problems, one in the same conditions of the competition and another one without such restrictions. A categorization is established for the degree of certainty in the answers. Important differences in the selection of strategies are not apparent when options of answer are or are not given. Significant differences have been observed in the percentage of success, that agrees with differences found in students' levels of confidence when giving an answer.

KEYWORDS: problem solving; multi-choice answers; intuition; mathematics competitions; choice of strategies.

Fecha de recepción: febrero 2014 • Aceptado: julio 2014

Guinjoan, M., Gutiérrez, A., Fortuny, J.M. (2015) Análisis del comportamiento de alumnos expertos resolutores de problemas en el contexto del concurso matemático Pruebas Cangur. *Enseñanza de las Ciencias*, 33.1, pp. 29-46

INTRODUCCIÓN

En 1991 nació en Francia la competición matemática Pruebas Canguro. A partir de 1994, otros países se añadieron a la organización de este concurso, creándose en junio de ese año la asociación internacional Le Kangourou Sans Frontières (KSF). En 2013 esta asociación contaba con 46 países miembros de pleno derecho, y participaron en las Pruebas Canguro aproximadamente seis millones de alumnos de Europa, Asia, África, América del norte y del sur. En Catalunya, Valencia y Baleares se organiza este concurso bajo el nombre *Proves Cangur* desde 1994, con una participación en 2013 de 27.715 estudiantes de más de 843 centros de secundaria.

Para describir adecuadamente el contexto de nuestra investigación, es necesario introducir unas precisiones terminológicas:

- Siguiendo a Kantowski (1977), distinguiremos entre un *problema*, cuya forma de resolución no es evidente y donde se requiere usar la información de manera no rutinaria y un cierto nivel de razonamiento del alumno, y un *ejercicio*, para cuya resolución solo se necesita usar datos recordados o aplicar directamente un algoritmo conocido, sin más procesos de razonamiento.
- Además, siguiendo el modelo de Puig (1996), distinguiremos entre *resultado* (o *respuesta*), *solución* y *resolución* de un problema. Aceptamos «el término resultado para indicar lo que contesta a la pregunta del problema, ya sea un número, una fórmula, una expresión algebraica, una construcción geométrica, una derivación lógica, etc. El término solución lo usaremos para indicar la presentación final del conjunto de pasos que conducen de los datos a la incógnita [...]. Finalmente, usaremos el término resolución para indicar el conjunto de las acciones del resolutor durante el proceso, que pueden conducir a obtener la solución o no» (Puig, 1996: 34).

Las Pruebas Canguro consisten en dar la mayor cantidad posible de respuestas correctas a una lista de 30 problemas en un tiempo máximo de 75 minutos (son muy pocos los estudiantes que logran responder todos los problema). Los problemas se presentan en el formato de «problema con respuesta de elección múltiple», ya que cada problema ofrece cinco opciones de respuesta después del enunciado, donde una y solamente una de ellas es correcta. Los concursantes deben marcar una sola de las cinco respuestas. No se les pide escribir ninguna justificación o desarrollo de la resolución, aunque disponen de papel para poder dibujar, hacer cálculos, etc. No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico (incluyendo calculadoras), pero sí de instrumentos de dibujo. Hay cuatro niveles de dificultad en las Pruebas Canguro en Catalunya acordes con la edad, que se corresponden con los cursos de los alumnos participantes.

Las listas de problemas que se plantean en cada competición se elaboran en el seno de una comisión internacional formada por profesores pertenecientes a todas las organizaciones miembros de la KSF. Así se consigue que las pruebas sean las mismas para los estudiantes de todos los países miembros de la organización. Los conocimientos matemáticos necesarios para resolver los problemas son adecuados para la edad a la que va dirigida la prueba. Al no haber uniformidad de currículos de matemáticas en todos los países participantes, y teniendo en cuenta que no se pretende evaluar el conocimiento del currículo escolar, sino la capacidad de razonamiento y la habilidad para resolver problemas de los concursantes, las herramientas teóricas que se necesitan para resolver estos problemas se corresponden con los contenidos estudiados en la clase de matemáticas en cursos anteriores. Un reto al que se enfrenta la comisión internacional es la decisión del nivel de dificultad de cada problema. Esta decisión se toma por la intuición de los propios miembros de la comisión después de analizar las posibles resoluciones que puede admitir un problema, pero no tienen en cuenta las estrategias que los estudiantes puedan usar en el contexto del concurso.

La investigación sobre resolución de problemas ha dado lugar a una gran cantidad de publicaciones. En ellas se estudian diferentes elementos que tienen que ver con el proceso de resolución o con el éxito de los resolutores, como elementos de los enunciados, estrategias de resolución, conocimientos de los resolutores, procesos metacognitivos, influencia de factores afectivos como la ansiedad o la confianza, etc. Sin embargo, no hemos encontrado ningún estudio que informe acerca de cómo actúan los estudiantes con más talento matemático y más experticia en resolución de problemas al enfrentarse a problemas en las condiciones particulares del concurso Pruebas Canguro, es decir, con respuestas de elección múltiple y con tiempo limitado. Conjeturamos, respecto de este tipo de estudiantes, que:

- Al incluir en el enunciado *opciones de respuesta*, se puede inducir el uso de estrategias de resolución o de heurísticas específicas basadas en ellas.
- Disponer o no de tiempo limitado para resolver los problemas puede provocar:
 - Diferencias en el *uso de la intuición* y las conjeturas, con menor rigor matemático en los procesos de resolución cuando el tiempo es limitado.
 - Diferencias en la *confianza* de los estudiantes en sus respuestas, con menor confianza cuando el tiempo es limitado.

No conocemos resultados anteriores que puedan confirmar o rebatir estas conjeturas, por lo que el estudio experimental que presentamos en este artículo es de tipo exploratorio y su objetivo es recabar información que nos permita dar respuesta, aunque sea parcial y limitada, a las conjeturas anteriores y sentar unas bases iniciales de datos empíricos sobre las que avanzar en la formulación de respuestas a cuestiones concretas.

Los resultados del estudio pueden ser de especial interés tanto para la comisión internacional encargada de diseñar las Pruebas Canguro, como para el profesorado que utilice este tipo de problemas en sus clases, propiciando un mejor conociendo del comportamiento que cabe esperar de los estudiantes en este contexto.

Para lograr este propósito, hemos diseñado un experimento en el que varios estudiantes han resuelto problemas en condiciones similares a las de las Pruebas Canguro y también los mismos problemas sin condiciones especiales. El análisis de los datos obtenidos nos ha permitido identificar herramientas heurísticas (Puig, 1996) que aparecen en la resolución de los problemas, evaluar el nivel de confianza que tienen los estudiantes respecto de sus soluciones y estudiar el papel de las intuiciones descritas por Fischbein (1987) en el desarrollo de las resoluciones de los problemas. A partir de esta información, hemos comparado los datos correspondientes a los problemas de cada tipo.

En relación con las conjeturas planteadas antes, los datos indican que plantear problemas con respuestas de elección múltiple no condiciona la elección de estrategias de resolución, lo que contradice nuestra conjetura. Sin embargo, sí se aprecia una relación significativa entre la cantidad de problemas resueltos correctamente y el nivel de certeza mostrado por los estudiantes. La limitación del tiempo para resolver estos problemas se refleja básicamente en el nivel de certeza que alcanzan los estudiantes antes de dar por buena una respuesta. Mientras que, sin límite de tiempo, tienden a completar más su razonamiento y dar en más casos una solución completa al problema, con el tiempo limitado rara vez se llega a realizar la solución completa, aunque los planteamientos y estrategias planteadas por los alumnos en uno y otro caso son básicamente los mismos.

MARCO TEÓRICO

En esta investigación consideramos, por un lado, los estudios generales de resolución de problemas que sientan las bases de conceptos como *problema*, *heurísticas* o *resolución*, y, por otro lado, estudios que

nos servirán de referencia para explicar algunos de los comportamientos observados en los estudiantes, sobre todo mediante la *intuición* y la *visualización*.

Estrategia, resolución y heurística

Se considerarán en este estudio las *estrategias de resolución* de los alumnos, es decir, aquellas actuaciones que les permiten establecer un plan de acción para lograr un objetivo claro. Estas estrategias surgen cuando el alumno se ve ante la situación de tener que tomar decisiones y tomar uno u otro camino a la resolución del problema. En el contexto de los problemas con respuesta de elección múltiple, un ejemplo de estrategia es el uso de las opciones de respuesta: pueden usarse estas respuestas para comprender mejor el enunciado, para comprobar la validez de un resultado obtenido, para hallar la solución por eliminación, etc.

Por otra parte, como hemos indicado en la introducción, distinguimos entre resolución, solución y resultado (o respuesta) en el sentido de Puig (1996).

En cuanto a las heurísticas, usaremos este término para referirnos a las preguntas generales que el estudiante puede hacerse para llevar adelante su resolución del problema según la estrategia que haya decidido seguir. Distinguiremos (Puig, 1996) entre *sugerencia heurística* –buscar un problema análogo, con la misma incógnita o premisa por demostrar, introducir una figura auxiliar, entre otras–, *herramienta heurística*, entendida como elemento para transformar la situación inicial, como puede ser considerar un caso, y *destreza con potencial heurístico*, cuya principal diferencia con la herramienta heurística es no tener el carácter de transformadora del problema.

Intuición

La definición del término *intuición* es discutida por muchos autores, pero nosotros adoptamos la dada por Fischbein (1987) cuando habla de *intuición* en términos de *conocimiento intuitivo*: «El conocimiento intuitivo es conocimiento inmediato; es decir, una forma de cognición que parece presentarse como evidente por sí misma». Fischbein establece una diferencia clara entre *intuición* y *percepción*. Aunque las dos son cogniciones inmediatas, la intuición va más allá de los hechos, implica una extrapolación a partir de la simple observación. Por ejemplo, podemos percibir que hay dos objetos encima de la mesa, y podemos intuir que uno de ellos es más pesado que el otro. El primer caso es una simple observación de hechos, en el segundo hay un razonamiento más allá de lo perceptible.

Cuando el conocimiento matemático no se completa con conocimiento intuitivo, el alumno no será capaz de aplicar ese conocimiento a situaciones similares, ni de ver la relación existente entre conocimientos que ya forman parte de su conjunto de recursos. Un alumno puede conocer un teorema, incluso estar convencido de que es cierto, y comprender su demostración, pero eso no significa automáticamente que sea capaz de comprender su significado más allá del formalismo. Añadiendo, por ejemplo, algún tipo de visualización a este conocimiento, el alumno puede crearse una imagen mental que le ayude a comprender de una forma más intuitiva ese resultado, facilitando su adaptación a otras situaciones donde puede «ver» reflejado ese patrón. Para entender mejor la relación entre la visualización y las intuiciones que se generan en la resolución de problemas, es importante abordar la perspectiva semiótica en la caracterización de estas intuiciones (Andrà, Santi, 2011).

En este estudio, siguiendo a Fischbein (1987), caracterizamos las intuiciones en:

- Intuiciones de afirmación, que son representaciones o interpretaciones de ciertos hechos aceptadas como ciertas, evidentes por sí mismas y consistentes.

- Intuiciones conjeturales, asociadas a la sensación de certitud, por ejemplo «Estoy seguro que serás un gran arquitecto».
- Intuiciones de anticipación, que también son conjeturas pero que pertenecen explícitamente a la resolución de problemas. Una intuición de anticipación es la visión preliminar de la solución a un problema, que antecede al análisis y al desarrollo completo de este. No todas las hipótesis son intuiciones, solamente aquellas que se asocian desde el inicio con alguna sensación de certeza o evidencia.
- Intuiciones de conclusión, que resumen las ideas esenciales de la solución de un problema previamente resuelto. Esto añade a la construcción formal y analítica una sensación de certeza directa e intrínseca.
- Exceso de confianza: los indicios favorables a la intuición se toman como más relevantes o importantes que aquellos contrarios a esa intuición.

Visualización

Las matemáticas requieren un tipo de pensamiento abstracto y general (Krutetskii, 1976), donde uno espera que la habilidad para percibir imágenes mentales claras sea una ventaja. Al resolver problemas, esta habilidad puede resultar decisiva para la toma de decisiones y estrategias que un alumno va a utilizar en su desarrollo. Según Giardino (2010), la apelación a este tipo de visualización no es directa, ya que depende en gran medida de la experiencia previa. Tomaremos las siguientes definiciones derivadas de Presmeg (1986):

- Imagen visual: una imagen visual es un esquema mental que describe información visual o espacial.
- Métodos visuales de resolución de problemas matemáticos: aquellos métodos en los que intervienen imágenes visuales como parte esencial del método de resolución; aun si aparecen también métodos algebraicos o de razonamiento, los consideraremos métodos visuales.
- Visualización matemática: la visualización matemática de un individuo se refiere a la preferencia que este muestra hacia los métodos visuales sobre los no visuales cuando resuelve un problema que se puede abordar con ambos métodos.

METODOLOGÍA

El presente estudio es de tipo exploratorio, ya que no conocemos investigaciones previas sobre el comportamiento de estudiantes en concursos del estilo de las Pruebas Canguro. Por ello, nuestra metodología de investigación se ajusta al tipo de recogida de información (Gutiérrez, 1991) cualitativa basada en un estudio de casos. La información recogida será organizada en un conjunto de categorías emergentes sugeridas por los propios datos.

Población

La población objeto de estudio son los estudiantes considerados expertos resolutores en el contexto del concurso Pruebas Canguro. Para caracterizar a este segmento de la población estudiantil se han tomado en cuenta los resultados obtenidos en las Pruebas Canguro 2012. Todos los alumnos seleccionados forman parte del 0,25% de alumnos mejor clasificados, que se toma como referencia para la población a estudiar.

Para realizar este estudio, basado en la metodología de estudio de casos, hemos observado a 10 estudiantes clasificados en el concurso Pruebas Canguro 2012 de Cataluña entre los 15 mejores de los niveles 1 y 2, correspondientes a 3.º y 4.º cursos de la ESO, respectivamente. El total de estudiantes que se presentaron en Cataluña al concurso fue de 7.256 en el nivel 1 y de 6.164 en el nivel 2. Todos los alumnos habían sido entrenados de algún modo en la resolución de problemas con respuesta de elección múltiple mediante problemas de ediciones anteriores del concurso. La mayoría de ellos han recibido formación en resolución de problemas en sus centros o en centros externos fuera del horario escolar, preparándose no solo para las Pruebas Canguro, sino también para otros concursos matemáticos como las Olimpiadas Matemáticas.

Elaboración del cuestionario

El instrumento diseñado para la recogida de datos está basado en 20 problemas, cada uno de los cuales está redactado en dos formatos, como problema con respuesta de elección múltiple y como problema abierto (sin proponer resultados posibles). Ambos formatos de problemas son idénticos salvo que uno incluye las opciones de respuesta y el otro no las incluye. A cada estudiante se le plantearon los 20 problemas, la mitad en cada formato. La distribución de los problemas entre ambos formatos se hizo de manera que fuera diferente para cada estudiante, pero que todos los problemas hubieran sido planteados la misma cantidad de veces con cada formato. Dado que los problemas planteados a todos los estudiantes fueron los mismos, su dificultad para cada estudiante fue la misma.

Los problemas se han extraído de una colección de problemas descartados en la elaboración final de las Pruebas Canguro de ediciones anteriores.¹ De esta forma se consigue ser fiel a los tipos de problemas que se plantean en el concurso pero, al mismo tiempo, se minimiza la posibilidad de que algún problema haya sido resuelto por los estudiantes en algún momento de su entrenamiento. De estos 20 problemas, 7 son de geometría, 10 aritméticos y 3 de otras temáticas (lógica, álgebra y combinatoria). Esta proporción es semejante a la que ha habido en anteriores ediciones de las Pruebas Canguro. En cuanto a la dificultad de los problemas, se han elegido de un nivel medio o medio alto respecto a la dificultad media de la prueba, evitando aquellos que requieren conocimientos específicos del currículo de un determinado curso, teniendo en cuenta que participan en el estudio alumnos de diferentes cursos. La dificultad de un problema no es medible en una escala exacta pero, al seleccionarlos, se han tenido en cuenta el criterio que estableció la comisión internacional para cada uno de los problemas.

Recogida de datos

Los alumnos participantes han respondido los cuestionarios por escrito. Cada alumno ha respondido dos cuestionarios, incluyendo entre ambos los veinte problemas, uno con el formato de las Pruebas Canguro y otro sin las opciones de respuesta. Los cuestionarios se han distribuido a los alumnos de forma que cada problema ha sido resuelto la misma cantidad de veces con cada formato.

Primero les hemos presentado un cuestionario con diez problemas en el formato de elección múltiple y un máximo de 35 minutos para resolverlos (tiempo similar al que tendrían en el concurso real para esa cantidad de problemas y su dificultad).

Después de los 35 minutos, se ha realizado una entrevista con cada estudiante centrada en el cuestionario que acababan de responder, para que el estudiante comentara los aspectos que en cada problema puedan no quedar claros solo con lo que han escrito, o para corroborar que la interpretación del investigador de lo que ha hecho el estudiante es correcta.

1. <<http://www.canguromat.org.es/canguro2013/ikg2013.html>>.

A continuación les hemos presentado otro cuestionario con los restantes 10 problemas en el formato sin opciones de respuesta y tiempo ilimitado. Con el fin de alterar lo mínimo el comportamiento que tendrían los estudiantes en un contexto real de competición, se les han dado indicaciones para que resolvieran los problemas sin tener en cuenta aspectos formales. En particular se les ha indicado que no debían preocuparse de la presentación de sus producciones, ni de escribir explicaciones o justificaciones para el corrector, sino únicamente de escribir lo que necesitaran para llegar a un resultado, como harían con sus borradores durante el concurso real.

Después de terminar el segundo cuestionario, se ha realizado otra entrevista con cada estudiante con objetivos y estructura similares a los de la entrevista anterior.

Así pues, las producciones de cada alumno que analizar constan de:

- Producciones escritas mediante los borradores que utilizaron para resolver los problemas.
- Anotaciones del investigador con los comentarios que los alumnos han querido hacer durante la entrevista (inmediatamente después de resolver cada cuestionario) para mejorar la comprensión de sus borradores.
- Registro de audio de las entrevistas realizadas a los alumnos al finalizar cada cuestionario, para aclarar aspectos de su razonamiento que no hayan quedado por escrito.

Categorización de los datos obtenidos

Para analizar los datos, se ha hecho un primer análisis exploratorio de todas las resoluciones y respuestas de los estudiantes, identificando diversos indicadores que aparecen un número significativo de veces en nuestros datos y que han dado lugar a las categorías. Para caracterizar algunos de estos elementos se han tenido en cuenta las *estrategias* y *heurísticas* de resolución (Schoenfeld, 1985; Puig, 1996), el concepto de *intuición* (Fischbein, 1987) y el concepto de *visualización* (Presmeg, 1986). Los aspectos analizados, junto a las subcategorías de cada uno, son:


- Tipos de resultados dados:
 - Correctos
 - Incorrectos
 - No se responde (en blanco o resultados no válidos)
- Uso de aproximaciones en los cálculos:
 - Se realizan cálculos aproximados
 - Se realiza una aproximación del resultado obtenido a una de las opciones ofrecidas
 - Se realizan cálculos exactos
- Prueba de casos particulares:
 - Se usan casos particulares
 - No se usan casos particulares
- Completitud de las soluciones dadas:
 - El resultado se deriva de soluciones completas
 - El resultado se deriva de soluciones incompletas o de conjeturas, con diferentes niveles de certeza y confianza de los estudiantes
- Uso de las opciones de respuesta (en los problemas del tipo Pruebas Canguro):
 - Descarte de opciones
 - Eliminación de opciones
 - Otros procedimientos

En las páginas siguientes presentamos y analizamos ejemplos de respuestas de los estudiantes correspondientes a las diferentes categorías.

Uso de aproximaciones en los cálculos

Hemos considerado que un alumno utiliza aproximaciones en la resolución del problema si lo hace en cualquier momento de su razonamiento como parte de la solución, no solo en el resultado final. De esta manera, se identifican las resoluciones donde se es fiel a la exactitud del resultado, aun complicando los cálculos y aquellas resoluciones donde se opta por el cálculo con aproximaciones (figura 1). Otras resoluciones que se incluyen en esta categoría son aquellas donde el resultado no coincide con ninguna de las opciones de respuesta dadas, pero el alumno atribuye este hecho a un posible error menor de cálculo, tomando como respuesta la opción cuyo valor se aproxima más al suyo.

(GD) Un cuadrado de área 54cm^2 se divide en cuatro cuadrados. La parte superior izquierda se colorea en gris. La parte inferior derecha se vuelve a dividir en cuatro cuadrados y así sucesivamente. Si repetimos este proceso infinitamente, ¿cuál será el porcentaje del total del área que quedará coloreado en gris?



$Gr = \rightarrow \frac{1}{4}$ cuadrat $54 = \frac{1}{4}$ de $54 = 13.5 \text{ m}^2$
 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} \dots$ $3.5 + 3.375 = 6.875$ $\frac{1}{4}$ de $3.375 = 0.84375$
 $6.875 + 0.84375 = 7.71875$
 $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} = \frac{16}{64} + \frac{4}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} = \frac{23}{64} = \frac{100}{64} \approx 35\%$

El resultado exacto del cálculo es $35,9375\%$. Al no disponer de calculadora, el alumno calcula una aproximación del resultado y la da como respuesta. El hecho de que los resultados enteros se consideren más plausibles forma parte del sistema de creencias del alumno descrito por Schoenfeld (1985).

Fig. 1. Uso de aproximaciones.

Prueba de casos particulares

En esta categoría incluimos los problemas en los que el alumno ha utilizado la heurística de probar casos particulares para encontrar un camino hacia la solución del problema (figura 2).

(NA) Si $n^4 - n^3 - n^2 = 2009$, siendo n un entero positivo, entonces n es igual a

14 $n^4 - n^3 - n^2 = 2009 \quad n > 0 ?$
 ~~$n^2(n^2 - n - 1) = 2009$~~
 $n^4 - n^3 - n^2 - 2009 = 0$ ~~en 2009~~
 ~~$n^2(n^2 - n - 1) - 2009 = 0$~~

8 $64(64 - 8 - 1) = 2009$
 $64(55) = 2009 \quad \times$

6 $36(36 - 6 - 1) = 2009$
 $36(29) =$

7 $49(49 - 7 - 1) = 2009$
 $49(41) =$

64	
55	
20	
323	
3250	

36	
29	
1044	5

49	
41	
49	3
196	
2009	

sol: 7 \rightarrow n = 7

La estrategia utilizada en este caso consiste en probar posibles soluciones a la ecuación hasta dar con una correcta. No hay un planteamiento algebraico ni un intento de generalización o de planteamiento de soluciones alternativas.

Fig. 2. Prueba de casos particulares.

Completitud de las soluciones dadas

Se considera que un alumno da una solución completa cuando en la resolución del problema no hay lagunas de razonamiento y, por lo tanto, la solución se obtiene necesariamente del proceso seguido. En caso contrario, cuando el alumno ha formulado afirmaciones no justificadas o basadas puramente en su intuición, consideramos que en ese problema ha realizado algún tipo de *conjetura*, y diremos que se trata de una *solución incompleta*.

Cuando la resolución de un problema tiene lagunas o incluye conjeturas, es interesante evaluar el grado de *certeza* que el estudiante tiene de su resolución. Por otra parte, cuando los estudiantes terminan de resolver un problema, tanto si han dado una solución completa como incompleta, muestran un determinado nivel de *confianza* en que su solución es correcta. Los conceptos de certeza y confianza están relacionados, pero no son equivalentes, pues hacen referencia a aspectos distintos del comportamiento del alumno. La certeza evalúa hasta qué punto el estudiante está seguro de que la solución obtenida es una conclusión necesaria de la información que ha utilizado, mientras que la confianza es el grado de seguridad que tiene el estudiante de que la solución que ha dado es correcta. Por ejemplo, un alumno puede hacer una afirmación que no se sustenta en datos objetivos, sino en una intuición (baja certeza), pero, al mismo tiempo, el alumno puede estar muy seguro de que lo que ha dicho es cierto (alta confianza).

Hemos diseñado una escala de cinco niveles para poder agrupar los distintos casos en los que aparece una conjetura. Debido a la diversidad de problemas y temáticas, no hemos establecido criterios uniformes y aplicables a todo problema, sino que hemos agrupado los distintos criterios que han hecho que un problema esté clasificado en uno u otro nivel. Esta clasificación se deriva del análisis pormenorizado de la argumentación seguida en cada una de las resoluciones, de la caracterización de la intuición y de los mecanismos que han participado en la generación de esas intuiciones según lo descrito por Fischbein (1987), y considerando también los aspectos de visualización (Presmeg, 1986) que hayan sido relevantes en la generación de esas intuiciones. Una vez identificados todos los casos

en los que el alumno ha utilizado algún tipo de conjetura, se han agrupado en distintos niveles con la intención de describir un mayor o menor grado de certeza que tienen las afirmaciones que hace el alumno. En la sección de Resultados mostramos cómo esta graduación se corresponde con el nivel de aciertos que obtienen los estudiantes: cuanto mayor es el grado de certeza en nuestra escala, mayor es la probabilidad de que la resolución sea correcta. Identificamos los siguientes niveles de certeza de los estudiantes:

- Nivel 1: *Certeza muy baja*. Hay un mínimo nivel de evidencia, y el alumno ni siquiera muestra tener certeza. Se muestran intuiciones de anticipación que no son comprobadas con un mínimo de análisis ni desarrollo (figura 3). Aparecen factores de inmediatez como la visualización o la disponibilidad (Fischbein, 1987). No se trata de métodos visuales de resolución del problema, sino de simples imágenes visuales, generadas intuitivamente, que no se acompañan de razonamiento, ni escrito ni expresado durante la entrevista.

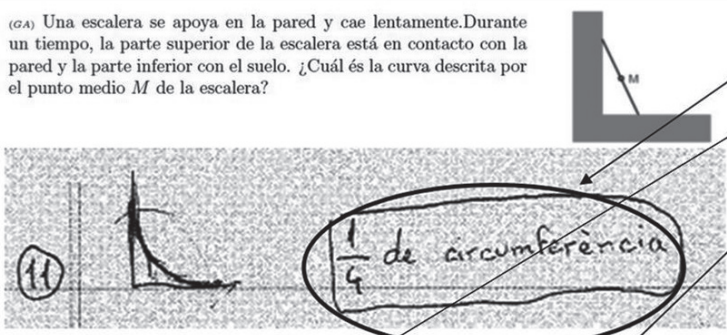
<p>(GA) Una escalera se apoya en la pared y cae lentamente. Durante un tiempo, la parte superior de la escalera está en contacto con la pared y la parte inferior con el suelo. ¿Cuál es la curva descrita por el punto medio M de la escalera?</p>  <p>Alumno: "No he pensado nada" Investigador: "¿Pero qué has hecho para responder?" A: "Nada" P: "Pero a ver, si has dado una respuesta algo habrás pensado" A: "Bueno me lo he imaginado, pero no tengo ni idea de si la respuesta es esa o no"</p>	<p>Resultado sin justificación escrita.</p> <p>Visualización mental del problema y su solución.</p> <p>En la entrevista manifiesta no tener ninguna justificación para su resultado.</p> <p>Es una clara intuición de anticipación según la clasificación de Fischbein, generada por un exceso de confianza con clausura prematura.</p>
--	---

Fig. 3. Respuesta sin certeza.

- Nivel 2: *Certeza baja*. Aun con un nivel bajo de evidencia, el alumno expresa una cierta certeza intrínseca en su resultado (figura 4). Aparecen mecanismos de clausura muy prematura y factores de inmediatez como la disponibilidad, el anclaje y la representatividad. La visualización aparece mediante métodos visuales de resolución muy sencillos. Los casos que se han agrupado en este nivel son:
 - Hace algún razonamiento de carácter aproximativo y responde según esa aproximación.
 - Obtiene una respuesta distinta a todas las opciones que se le ofrecen como posibles y elige la que más se parece a la suya.
 - Plantea una ecuación pero no la resuelve, supone una solución pero tampoco la comprueba.
 - Intenta encontrar la solución por tanteo y, como no la encuentra, conjetura que no habrá solución.

(60) Un cuadrado de área 54cm^2 se divide en cuatro cuadrados. La parte superior izquierda se colorea en gris. La parte inferior derecha se vuelve a dividir en cuatro cuadrados y así sucesivamente. Si repetimos este proceso infinitamente, ¿cuál será el porcentaje del total del área que quedará coloreado en gris?

(A) 28% (B) 32,5% (C) $33\frac{1}{3}\%$ (D) 35% (E) 36%

Ante una serie infinita, el alumno calcula la suma de los primeros términos para obtener una aproximación del resultado.

Aun cuando la opción B también se aproxima a su resultado, elige la opción C porque, según su sistema de creencias, le parece una opción más plausible.

Que la solución sea un número racional simple como $1/3$ constituye un factor de anclaje y representatividad que prima sobre el otro resultado aproximado.

Fig. 4. Uso de factores de anclaje y la representatividad.

- Nivel 3: *Certeza media*. El alumno no solamente muestra un nivel aceptable de certeza, sino que también muestra algo de evidencia, esto es, que sus intuiciones le aparecen como ciertas por sí mismas, por lo que no ve la necesidad de justificar su solución más allá de lo hecho. Aparecen aquí intuiciones como las descritas por Fischbein (1987) de anticipación, y mecanismos como el exceso de confianza y el efecto de primacía (figura 5). La representatividad es el factor de inmediatez más común en esta categoría. Aquí hemos incluido los siguientes casos:
 - Prueba casos inconexos (o un único caso) y conjetura una solución general que se adapte a esos casos.
 - Prueba casos de manera bastante aleatoria pero no busca un patrón para razonar inductivamente.

(70) La suma y el producto de tres números enteros consecutivos da el mismo resultado. ¿Cuántas tripletas existen con esta propiedad?

16

Alumno: "He probado algunos casos y me ha parecido que no habría más"

El alumno prueba casos con números pequeños que cumplen las condiciones del problema.

Prueba un caso con números mayores, ve que no cumplen las condiciones del enunciado y conjetura a partir de este resultado que ya no puede haber más soluciones posibles.

Fig. 5. Uso de certeza media.

- Nivel 4: *Certeza alta*. La solución planteada por el alumno aparece con un alto grado de evidencia. Está convencido de que su resultado es correcto y de que su resolución no necesita más justificación porque es evidente por sí misma. Las intuiciones mostradas aparecen como estables

y resistentes a interpretaciones alternativas. Aparecen factores de globalidad en las intuiciones. La solución conseguida básicamente con argumentos visuales (conjeturas basadas en una imagen mental del problema, visualización de casos particulares) no tiene un papel relevante en la resolución de estos problemas (figura 6). Los casos que han respondido a esta descripción se agrupan en:

- Prueba casos siguiendo un cierto orden para obtener un patrón y conjetura un comportamiento inductivo.
- Resuelve el problema de manera completa restringiéndolo a un único caso particular y conjetura que la solución obtenida para ese caso será general.
- Encuentra una solución por tanteo y no se plantea la existencia de más soluciones.

<p>(N.J) Si $p \geq 5$ es un número primo, ¿para qué valores de p la división de $p^2 - 1$ entre 24 es exacta?</p> <p>(A) nunca (B) en más de tres casos pero no siempre (C) siempre (D) sólo cuando $p = 5$ (E) ninguna de las anteriores</p> <p>8 $p > 5$ $\frac{7^2-1}{24} = 2$ $\frac{11^2-1}{24} = 5$ $\frac{13^2-1}{24} = \frac{169-1}{24} = \frac{168}{24} = 7$</p> <p>$\frac{17^2-1}{24} = \frac{289-1}{24} = 12$ Respuesta: C</p>	<p>El alumno prueba casos probando los números primos mayores que cinco en orden y conjetura un comportamiento inductivo.</p> <p>La falta de tiempo hace que no se plantee la búsqueda de una solución completa, anticipando el resultado.</p>
--	--

Fig. 6. Uso de certeza alta.

- Nivel 5: *Certeza muy alta*. El alumno muestra una certeza grande no solo en su solución sino también en su resolución. No deja margen a las intuiciones de manera consciente, pero puede presentar algún mecanismo como la clausura prematura que le lleva a anticipar el resultado (figura 7).

<p>(N.F) Si a la fracción $\frac{3}{4}$ le restamos el mismo número entero al numerador y al denominador, su valor se duplica. ¿Qué número entero es?</p> <p>15 $\frac{3}{4}$ $\frac{3-n}{4-n} = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ $\frac{3-n}{4-n} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3-n}{4-n} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2(3-n) = 3(4-n) \Rightarrow 6-2n = 12-3n \Rightarrow -2n+3n = 12-6 \Rightarrow n = 6$</p> <p>El número entero es el 6</p>	<p>El alumno plantea una ecuación que conduce a la solución correcta.</p> <p>Se da cuenta de cuál es la solución antes de resolverla sin considerar si hay más soluciones.</p>
---	--

En este caso se dan factores de disponibilidad y globalidad, la anticipación que hace el alumno se corresponde con su facilidad para detectar que se encuentra ante una ecuación de primer grado y es capaz de anticipar su solución.

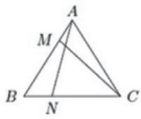
Fig. 7. Uso de certeza muy alta.

Uso de las opciones de respuesta

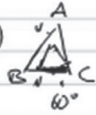

En los problemas resueltos en las condiciones de las Pruebas Canguro, consideramos que un problema pertenece a esta categoría si, en cualquier momento del proceso de resolución, el estudiante utiliza las opciones de respuesta de algún modo. En esta categoría general se incluyen las siguientes subcategorías:

- Descarte de opciones: el alumno analiza las opciones de respuesta del problema y descarta algunas de ellas por considerarlas imposibles sin comprobar que realmente no son soluciones al problema. El alumno se basa para ello en algún razonamiento que no escribe o en alguna imagen mental (figura 8).

(GE) Si $AB = AC = BC$, $BM = CN$, entonces la medida del ángulo más pequeño que forman los segmentos CM y AN es igual a



(A) 60° (B) 45° (C) 90° (D) 30° (E) 75°

5  equilateral  Respuesta = B

En la entrevista posterior a la resolución, el alumno explica lo siguiente:

"las respuestas C, D, E ya vi que no podían ser ciertas por el dibujo, luego para decidir entre la A y la B hice un dibujo y vi que este ángulo de aquí era 75, y como el otro es de 60, pues me quedaba 45"

El alumno descarta tres de las opciones sin ningún cálculo que lo justifique, se basa solamente en su visualización mental del problema.

Fig. 8. Uso de descarte de opciones.

- Eliminación de opciones: el alumno resuelve el problema comprobando las posibles soluciones hasta que encuentra una solución correcta. A diferencia de la categoría anterior, en este caso no hay un razonamiento previo para descartar una solución; el alumno no presupone si una opción es correcta o no hasta que la comprueba (figura 9).

(NA) Si $n^4 - n^3 - n^2 = 2009$, siendo n un entero positivo, entonces n es igual a

(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 41 (E) No hay ningún n que sea solución

5 $n^4 - n^3 - n^2 = 2009$

5 $5^4 - 5^3 - 5^2 = 125 - 125 - 25 = -25$ n acaba en 9 \times

7 $7^4 - 7^3 - 7^2 = 2401 - 343 - 49 = 2009$ n acaba en 9 \checkmark

9 $9^4 - 9^3 - 9^2 = 6561 - 729 - 81 = 5751$ n acaba en 9 \times

41 $41^4 - 41^3 - 41^2 = 2825761 - 68921 - 1681 = 2755159$ n acaba en 9 \times

Respuesta = B

(Handwritten calculations and a vertical multiplication table for 2009 are visible in the background.)

El alumno comprueba todas las opciones fijándose en la última cifra de cada sumando; ve que solamente hay una que termine en 9.

Fig. 9. Uso de eliminación de opciones.

RESULTADOS

En los párrafos siguientes presentamos los principales resultados de este estudio relacionados con las conjeturas que planteábamos en la introducción como objetivos de investigación.

Sobre aciertos y errores

Al comparar las soluciones a los problemas en condiciones de Prueba Canguro y en condiciones de tiempo ilimitado, nos encontramos ante unos resultados poco esperados. En el primer bloque de problemas (con respuestas de elección múltiple y con tiempo limitado), los alumnos tuvieron el tiempo muy limitado pero, por otra parte, tenían cinco opciones posibles de respuesta para elegir, lo que les daba una ventaja por las posibles estrategias que se pueden utilizar en este contexto, y más teniendo en cuenta que son alumnos con experiencia en este tipo de problemas. En el segundo bloque (sin opciones de respuesta y con tiempo ilimitado), los alumnos gozaban de más tiempo para resolver los problemas aunque no tenían la ventaja de las opciones de respuesta. Mientras que en el primer bloque el nivel de acierto se encuentra en el 57%, en el segundo el nivel de acierto está en el 64%. En ambos casos el número de respuestas en blanco está alrededor del 5%. Estos resultados indican que tener tiempo limitado para resolver los problemas es un obstáculo mayor que el hecho de no disponer de opciones de respuesta, pues los estudiantes han sacado más provecho de tener el tiempo suficiente para resolver adecuadamente el problema que de las opciones de respuesta ofrecidas.

Uso de conjeturas

Un aspecto importante en este estudio es observar el comportamiento de los alumnos a la hora de tomar riesgos o asumir una solución como correcta sin una prueba completa de ello, recogido en la categoría de *conjetura/solución completa*. Un 37% de los problemas han presentado una solución completa, un 59,5% han presentado una solución incompleta y el 3,5% restante corresponde a respuestas en blanco. Todas las soluciones completas menos una han sido correctas (la errónea es por un leve error de cálculo), mientras que la cantidad de soluciones incompletas correctas se reduce a casi un 60%.

En los problemas geométricos hay una clara tendencia a utilizar conjeturas, mientras que en los problemas aritméticos la cantidad de soluciones completas es significativamente mayor. En los problemas geométricos, la posibilidad de visualizar mentalmente o mediante un dibujo la información durante la resolución hace que el alumno se sienta más confiado a aventurar una solución. Por otro lado hemos constatado que las herramientas geométricas que los alumnos aplican son muy sencillas en comparación con las herramientas aritméticas. Esto se traduce en una mayor proporción de soluciones completas en los problemas aritméticos. Además, en los casos donde aparecen conjeturas durante la resolución, el grado de desarrollo de la solución del problema también es mayor en los problemas aritméticos que en los geométricos. En los problemas geométricos se da a menudo la solución basada únicamente en unas suposiciones o estimaciones visuales sin fundamento. El análisis de las soluciones indica que, a mayor grado de certeza de la conjetura, mayor cantidad de soluciones correctas se obtienen, con una leve desviación entre los niveles muy bajo y bajo. Esto nos lleva a concluir que los niveles de conjetura en los que hemos clasificado las soluciones representan bien el riesgo que asumen los estudiantes en cada una de ellas.

Hemos analizado con qué frecuencia se utilizan conjeturas durante la resolución de los problemas y con qué frecuencia se dan los distintos niveles de certeza. Se observa que las conjeturas con nivel de certeza muy alto aparecen muy pocas veces, en un porcentaje inferior al 3%, mientras que las conjeturas de los otros niveles aparecen todas un número significativo de veces. En particular, hemos analizado

las diferencias observadas en este aspecto cuando los alumnos han realizado los problemas del primer bloque y los del segundo bloque. Los alumnos han utilizado en un 58% de los problemas del primer bloque el recurso de conjeturar un resultado, mientras que en el segundo bloque han utilizado la conjetura un 41% de las veces. Analizando el grado de esas conjeturas hemos observado también que resulta mucho más fácil para un alumno elegir una solución entre las cinco posibles sin tener una certeza suficiente de su resultado; por lo tanto, al disponer de tiempo y no tener las opciones de respuesta, los alumnos tienden a no aventurar posibles resultados con tanta frecuencia y, cuando lo hacen, muestran un mayor grado de razonamiento.

Uso de las opciones de respuesta

La presencia de las opciones de respuesta combinada con la limitación del tiempo a 35 minutos da como resultado un mayor porcentaje de problemas sin una solución completa y también un menor grado de acierto, por lo que la ventaja de conocer estas opciones no compensa el inconveniente de la limitación del tiempo. Por otra parte, las respuestas de elección múltiple brindan a los estudiantes la posibilidad de utilizar herramientas heurísticas partiendo del uso de estas para poder encontrar la solución correcta al problema. Algunas de las herramientas heurísticas descritas por Puig (1996), como la consideración de casos particulares, el análisis de posibilidades o la utilización de figuras auxiliares, pueden aplicarse de forma distinta en un mismo problema según se disponga o no de opciones de respuesta. Si nos ceñimos al conjunto de problemas del primer bloque, observamos que los alumnos han utilizado las opciones de respuesta en el proceso de resolución solamente en un 22% de sus resoluciones. Se excluyen de este recuento los problemas donde el alumno ha utilizado las opciones simplemente para aventurar una solución, sin haber desarrollado un proceso de resolución razonada.

Constatamos así que, en contra de nuestra conjetura inicial, estos alumnos no basan su éxito en la competición de las Pruebas Canguro en un uso habitual de estrategias basadas en las opciones de respuesta. De forma más detallada, hemos analizado la aparición de las estrategias de resolución por eliminación de opciones y por descarte de opciones, obteniendo que, en los problemas del bloque 1, los estudiantes han descartado opciones en un 3% de los casos y han eliminado opciones en el 11% de los problemas. En ambos casos el porcentaje de uso de este tipo de estrategias es demasiado bajo como para poder justificar que su uso tiene una influencia relevante en el alto rendimiento de estos alumnos en las Pruebas Canguro.

Estrategias utilizadas

Los datos obtenidos indican, por una parte, que los estudiantes usan con mucha más frecuencia las estrategias de prueba de casos que las de aproximaciones. Por otra parte, se observa que no hay diferencias significativas en el uso de estas estrategias entre ambos tipos de problemas, sino que los alumnos las utilizan de una manera casi idéntica. El hecho de tener opciones de respuesta facilita un poco más tanto las aproximaciones en el resultado como las comprobaciones de casos, especialmente cuando la resolución no ha llevado al alumno a ninguna de las soluciones propuestas, por lo que, en vez de revisar sus cálculos y razonamientos, ha decidido seleccionar por aproximación el resultado propuesto por el problema que más se acerca al suyo, cosa que no es posible en los problemas sin opciones de respuesta.

Finalmente, la estrategia de probar casos particulares es muy habitual en cualquiera de las condiciones de resolución, ya que se utiliza en alrededor del 40% del total de las resoluciones de cada bloque. Este porcentaje resulta más significativo si tenemos en cuenta que no en todos los problemas se puede aplicar esta estrategia.

CONCLUSIONES

En este artículo hemos analizado las actuaciones de un grupo de 10 estudiantes elegidos entre los 15 mejores clasificados en los niveles 1 y 2 (estudiantes de 3.º y 4.º de la ESO) del concurso matemático Pruebas Canguro en Cataluña. Hemos evaluado diversos factores que pueden influir en la corrección del resultado, en la elección de estrategias de resolución y en la toma de decisiones respecto del detalle con el que se realiza la resolución de los problemas.

Nivel de conjetura e intuición

Hemos analizado las intuiciones y conjeturas que aparecen en las resoluciones de estos alumnos y hemos establecido una categorización en cinco niveles que nos permite valorar el grado de certeza que muestran los alumnos respecto a sus soluciones de los problemas. Hemos identificado cada uno de los niveles con los mecanismos que participan en la generación de esas intuiciones diferenciando distintos grados de certeza y evidencia (Fischbein, 1987), y explorando también los tipos de visualización que se asocian a cada nivel (Presmeg, 1986). Esta categorización por niveles concuerda con la cantidad de aciertos que obtienen los estudiantes, de modo que a mayor nivel de certeza al proponer un resultado, mayor es la probabilidad de que el resultado sea correcto.

Uso de las opciones de respuesta

Analizando las resoluciones hechas por los alumnos en cada bloque, se constata que el hecho de disponer de opciones de respuesta no afecta de una manera importante a las decisiones que toman los estudiantes a la hora de elegir sus estrategias. Observamos que los estudiantes han utilizado las opciones de respuestas de los problemas del bloque 1 en un 22% de los problemas (aunque en ocasiones las opciones se utilizan para elegir una solución cuando el alumno no encuentra ningún camino razonable hacia la resolución del problema). Las estrategias como la resolución por eliminación aparecen en alrededor del 10% de los problemas. Esto concuerda con lo expuesto anteriormente, en el sentido de que los resultados de los alumnos son más favorables cuando pueden desarrollar el problema al completo, dada su poca tendencia a utilizar las opciones de respuesta.

Uso de heurísticas específicas

Las heurísticas analizadas (probar casos y aproximar cálculos) aparecen casi por igual en los dos bloques de problemas. Este resultado indica que los estudiantes deciden la forma de abordar los problemas dependiendo más de los enunciados y de los conocimientos matemáticos apropiados que tienen disponibles que de la presencia o no de opciones de respuesta.

Uso de la intuición

Al observar los tipos de intuiciones que aparecen en cada uno de los bloques de problemas y los mecanismos que generan esas intuiciones, se observan también diferencias significativas. En las condiciones del concurso, es muy frecuente que los alumnos no desarrollen de manera completa sus resoluciones, cosa esperable dado el poco tiempo del que disponen para su realización. En el segundo bloque hemos encontrado un mayor porcentaje de problemas resueltos completamente, aunque las diferencias más significativas con los problemas del bloque 1 no las encontramos en el porcentaje de resoluciones que

utilizan conjeturas, sino en el nivel de certeza de esas conjeturas. En el primer bloque los estudiantes han utilizado preferentemente conjeturas con un nivel bajo o muy bajo de certeza, mientras que en el segundo bloque, aun cuando el problema no ha llegado a una solución completa, los niveles de certeza utilizados han sido significativamente mayores.

Conclusiones finales

En el contexto del concurso matemático Pruebas Canguro, los alumnos que obtienen mejores puntuaciones no modifican de manera significativa sus patrones de resolución ni sus actuaciones por el hecho de que los problemas ofrezcan opciones de respuesta. Son buenos resolutores de problemas con recursos apropiados y los aplican para diseñar planes de resolución que parten de la esencia del problema y no del uso de estrategias basadas en las opciones de respuesta dadas por los problemas. Su habilidad no reside en encontrar atajos mediante la utilización de las opciones de respuesta, sino en ser capaces de intuir y adelantar resultados que les eviten tener que resolver los problemas con todo detalle, pero basándose en enfoques de la resolución de los problemas que no varían sustancialmente de los que utilizan cuando no tienen las opciones de respuesta disponibles. En futuras investigaciones sería conveniente analizar más detalladamente cómo estos factores afectan al uso de las intuiciones en los alumnos, así como revisar la categorización que permite el análisis de los datos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDRÀ, C. y SANTI, G. (2011). A semiotic characterization of intuitions. *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4. Ankara, Turquía: PME, pp. 113-120.
- FISCHBEIN, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel.
- GIARDINO, V. (2010). Intuition and visualization in mathematical problem solving. *Topoi*, 29(1), pp. 29-39.
<http://dx.doi.org/10.1007/s11245-009-9064-5>
- GUTIÉRREZ, A. (1991). La investigación en didáctica de las matemáticas. En A. Gutiérrez (ed.), *Área de conocimiento Didáctica de la Matemática*. Madrid: Síntesis, pp. 149-194.
- KANTOWSKI, M.G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8, pp. 163-180.
<http://dx.doi.org/10.2307/748518>
- KRUTETSKII, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: The University of Chicago.
- PRESMEG, N. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), pp. 42-46.
- PUIG, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.
- SCHOENFELD, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, EE.UU.: Academic Press.
<http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-12-628870-4.50013-X>

Analysis of expert problem solving student's behaviour in the context of the mathematical Kangaroo Contest

Marc Guinjoan, Josep M. Fortuny

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona.
marc.guinjoan@uab.cat, josepmaria.fortuny@uab.cat

Ángel Gutiérrez

Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València.
gutierre@uv.es

We present results of a research aimed to analyse the strategies of students considered as expert problem solvers in the context of the competition Proves Cangur, with multi-choice answers and limited time to solve the problems. These students were chosen from the group of 15 students with the best scores in the 2012 competition.

Previous research about problem solving has produced a large amount of papers studying several elements related to solving process or solver performance, such as problem wording, resolution strategies, solver's knowledge, metacognitive processes, or the influence of emotional factors such as anxiety or confidence. However, we have not found any study considering how expert solver and most mathematically talented students behave when facing problems with the particular features of the *Math Kangaroo Contest*, that is, multiple choice answers and with a very limited time to solve the problems.

We conjecture that, regarding this kind of students:

- Including multiple choice answers can induce the use of some specific strategies or heuristics based on them.
- Having or not having a short time to solve the problems may result in:
 - Differences in the use of intuition and conjectures, with less accurate mathematical resolution processes when the time limit is tight.
 - Differences in student's confidence in their answers, being this confidence lower when the time limit is tight.

The students solved two sets of 10 problems, one in the same conditions of the competition and another one without such restrictions -i.e., with no options for possible answers and without a limit of time to solve them. Each problem was solved in both ways the same number of times. The data collected for the study consist of written productions from the students and the recording of an interview immediately after having solved each set of problems.

Our aim was to understand better students' strategies of resolution, the ways they used the options of answer, and how the limited time affected students' strategies of resolution and confidence in their answers. To do so we explored the different kinds of intuition (Fischbein, 1987) and visualization (Presmeg, 1986) exhibited by the students, and the way they are reflected in the students' productions. A categorization is established for the degree of certainty in the answers based on the use of the different aspects of both intuition and visualization previously established.

Important differences in the selection of strategies are not apparent when options of answer are or are not given. The way students solved the problems is basically the same regardless of the restrictions, but significant differences have been observed in the use of intuition when finding the answer and also in students' levels of confidence when giving this answer. Especially in geometry problems, mechanisms of visualization were more often used when the time for solving the problem is reduced.

Significant differences have also been observed in the percentage of success related to the level of confidence shown by the students.