ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
Núm. 32.3 (2014): 385-405

http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1231
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático

Effects of teaching activity on the generation of mathematical learning opportunities

Miquel Ferrer, Josep M. Fortuny, Laura Morera
Universitat Autònoma de Barcelona
miquel.ferrer.puigdellivol@uab.cat, josepmaria.fortuny@uab.cat, laura.morera@uab.cat

RESUMEN: Esta investigación determina cómo afecta la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. Se realiza un estudio de dos casos que caracterizan el tipo de actuación de dos profesores en la gestión de las discusiones en gran grupo de un problema de semejanza, y se estudia el efecto del tipo de actuación en la generación de oportunidades de aprendizaje. Se evidencian diferencias relevantes en la forma en la que cada profesor ha preparado las discusiones en gran grupo y se presenta una caracterización de sus episodios según dos dimensiones: instrumental y discursiva. Un análisis detallado de los episodios, mediante el estudio de las acciones que se producen en ellos, posibilita la determinación de oportunidades de aprendizaje, hecho que permite constatar una relación directa entre la preparación de la discusión en gran grupo y la generación de oportunidades de aprendizaje.

PALABRAS CLAVE: actuación docente; oportunidades de aprendizaje matemático; preparación de discusiones en gran grupo; resolución de problemas de semejanza; entornos colaborativos.

ABSTRACT: This study aims to determine how teaching activity affects the generation of mathematical learning opportunities. We present a case study to characterize the types of teaching activity of two teachers when orchestrating whole-group discussions on a similarity problem, and to gauge the effect of each type of teaching on the generation of learning opportunities. Significant differences are shown in the way each teacher has prepared the whole-group discussion and the episodes are characterised in two dimensions: instrumental and discursive. A detailed analysis of the episodes, studying the actions that occur in them, gives us a chance to identify mathematical learning opportunities and establish a direct relationship between these and the way each teacher has prepared the whole-group discussion.

KEYWORDS: teaching activity; mathematical learning opportunities; preparation of whole group discussions; similarity problem solving; collaborative contexts.

Fecha de recepción: junio 2013 • Aceptado: diciembre 2013

Ferrer, M., Fortuny, J.M., Morera, L. (2014). Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las Ciencias*, 32.3, pp. 385-405

En esta investigación queremos determinar cómo afecta la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. Realizamos un estudio de dos casos para caracterizar el tipo de actuación docente de dos profesores en la gestión de las discusiones en gran grupo de un problema de semejanza en el plano resuelto por estudiantes de 14 y 15 años.

La investigación muestra un estudio experimental de análisis de casos docentes que evidencia diferencias relevantes en la forma en la que cada profesor ha preparado sus discusiones en gran grupo. Se caracterizan los episodios de las discusiones según dos dimensiones: instrumental y discursiva. Se analizan en profundidad los episodios y se estudian acciones significativas que se desarrollan en ellos, con el fin de determinar oportunidades de aprendizaje matemático.

PREPARACIÓN DE DISCUSIONES EN GRUPO, EPISODIOS Y OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO

Algunas investigaciones (por ejemplo, Rigo, Páez y Gómez, 2010) se han centrado en el estudio de las prácticas del profesor en la enseñanza de tareas de proporcionalidad, explorando las prácticas metacognitivas que el profesor fomenta en sus clases de matemáticas. En este artículo nos centramos especialmente en la figura del profesor y en los efectos de la gestión de discusiones en gran grupo con la generación de oportunidades de aprendizaje matemático, en un contexto de resolución de problemas de semejanza.

Sistemática de preparación y gestión

El modo que tiene un profesor para gestionar los elementos singulares de una discusión y producir resultados compartidos lo describimos a través de la noción de orquestación, como en Morera (2013), en la que se reelabora una sistemática de seis fases para preparar y gestionar discusiones en gran grupo: *anticipación a través del árbol*, *configuración didáctica ampliada*, *modo de explotación*, *monitorización*, *selección de situaciones* y *secuenciación de la implementación didáctica*. Estas fases se obtienen realizando una mirada conjunta a las prácticas de Smith y Stein (2011), y a los elementos de la orquestación instrumental de Trouche (2004) y Drijvers, Doorman, Boon, Reed y Gravemeijer (2010). Todas las fases de la sistemática favorecen la gestión eficiente de una discusión en gran grupo y pueden contribuir a la creación de oportunidades de aprendizaje, ya que se potencia que los estudiantes puedan adquirir habilidades matemáticas de alta riqueza cognitiva, procedimental y de autorregulación.

La *anticipación a través del árbol* consiste en hacer un estudio previo de cómo los alumnos pueden abordar el problema planteado y prever sus posibles respuestas, hecho que incluye pensar cómo pueden interpretar la resolución de los problemas y tener un amplio estudio de todas las posibles maneras de resolverlos. Un instrumento relevante de esta fase es el á*rbol del problema* (Morera, Souto y Arteaga, 2011), que está inspirado en el concepto de *espacio básico del problema* (Cobo, 1998). Consiste en una estructura en forma de árbol, cuyas ramas muestran diferentes estrategias (correctas o incorrectas) que un estudiante podría seguir para resolver el problema. Para las estrategias incorrectas, incluye posibles comentarios del profesor orientados a dirigir el proceso de resolución del alumno. Para las estrategias correctas, el árbol propone varias preguntas al estudiante para que se plantee nuevos retos, como el estudio de casos extremos o la generalización de propiedades. La *configuración didáctica ampliada* es el conjunto de artefactos, tecnológicos o convencionales, orientados a la enseñanza que el profesor decide incluir en el desarrollo de su sesión de clase. El *modo de explotación* hace referencia a la forma en la que el profesor interpreta una configuración didáctica para atender a sus intenciones didácticas. La *monitorización* se basa en el seguimiento de los pensamientos matemáticos y las estrategias de resolución de los alumnos mientras trabajan en el problema. La *selección de situaciones* es el proceso mediante el cual el profesor elige de manera particular algunos alumnos para que compartan con el resto del grupo su interpretación o solución del problema. Por último, la *secuenciación de la implementación didáctica* es el reflejo de la preparación previa de la sesión de discusión y su puesta en práctica en el aula. Para ello hay que tener en cuenta las fases anteriores y los estadios de la discusión que se relatan a continuación.

Características de los episodios

Los episodios de una discusión en gran grupo orquestada por el profesor los caracterizamos a través de dos dimensiones: la instrumental, que se centra en el uso de artefactos y en el modo en el que estos se emplean en clase, y la discursiva, que contempla un conjunto de patrones que ayudan a entender el desarrollo genérico de los episodios y las particularidades compartidas entre ellos (Morera, Planas y Fortuny, 2013).

En la dimensión instrumental consideramos seis tipos de orquestación que definimos a continuación:

1. *Explorar el artefacto:* incluye los comentarios técnicos y las indicaciones sobre el funcionamiento del artefacto que realiza el profesor durante la clase.
2. *Explicar a través del artefacto:* el docente elabora explicaciones al grupo apoyándose en algún artefacto.
3. *Enlazar artefactos:* el profesor enfatiza la relación entre lo ocurrido en dos entornos distintos.
4. *Discutir el artefacto:* se produce una discusión conjunta de lo que se muestra o se observa a través del artefacto.
5. *Descubrir a través del artefacto:* se utiliza un artefacto para ilustrar o exponer el razonamiento de un estudiante a través de la identificación del trabajo realizado en la preparación de la discusión y usado a propósito durante la clase.
6. *Experimentar el instrumento:* uno o varios alumnos utilizan un artefacto para presentar su trabajo ante el resto de participantes o para dar respuesta a preguntas del profesor.

Como se puede observar, los tres primeros tipos de orquestación instrumental están centrados en las acciones del profesor y los tres últimos en las acciones de los alumnos. Estos tipos de orquestación se basan en los identificados por Drijvers *et al*. (2010), pero generalizados para el caso en que la implementación de la discusión en gran grupo no contenga necesariamente artefactos tecnológicos.

En la dimensión discursiva se identifican ocho estadios de la discusión de un problema, los cuales se presentan como una sucesión del proceso de realización de la discusión en gran grupo, es decir, se trata de pautas de actuación potencialmente interesantes de ser analizadas en toda discusión de un problema matemático. Mostramos los estadios a continuación, ordenados según el desarrollo natural de la evolución de la discusión:

1. *Situación del problema:* se presenta y recuerda el enunciado o los objetivos del problema antes de empezar la discusión para situar a los alumnos en la actividad planteada.
2. *Presentación de una solución:* el profesor o los alumnos muestran al grupo una solución del problema, correcta o incorrecta, y se puede iniciar un debate a partir de ella.
3. *Estudio de diferentes estrategias para resolver o argumentar:* se exponen y discuten diversas formas de resolver el problema o argumentar la solución presentada. Los estudiantes muestran sus estrategias, aunque el profesor puede intervenir y plantear las que no hayan considerado.
4. *Estudio de casos particulares o extremos:* se hace hincapié en los casos singulares del problema para estudiarlos individual y específicamente.

5. *Contraste entre diferentes soluciones:* realización de una comparativa entre las diversas formas de resolver el problema o de interpretar el enunciado de la actividad. No se busca la misma solución mediante diferentes estrategias, sino que se comparan las soluciones obtenidas aplicando cada una de ellas.
6. *Conexiones con otras situaciones:* establecimiento de vínculos entre las diferentes soluciones e interpretaciones de la actividad. Incluye la realización de conexiones entre otros conceptos matemáticos y con las demás áreas del conocimiento.
7. *Generalización y conceptualización:* se emplea la discusión en gran grupo como detonante para generalizar un resultado encontrado, el cual puede generar una nueva tarea matemática.
8. *Reflexión sobre el progreso matemático:* clausura de la discusión con un balance reflexivo, verbalizado o por escrito, sobre los aspectos matemáticos trabajados en la clase.

Siguiendo en la dimensión discursiva, para profundizar en el análisis de los episodios y disponer de más elementos para determinar las oportunidades de aprendizaje matemático que se han generado, estudiamos algunas acciones que se han producido en los episodios. Nos centramos en el ejecutor (estudiante o profesor) y en su tipología. En particular, para el análisis de la gestión de un aula examinamos las acciones realizadas por el docente y, siguiendo a Schoenfeld (2011), las clasificamos en: acciones de gestión de la clase, acciones de discusión y acciones de contenido matemático, según hagan referencia a la organización del aula y de sus participantes; a los aspectos relativos al desarrollo de actividades matemáticas, o bien a los contenidos matemáticos de las actividades y a la habilidad del profesor para escuchar a los estudiantes, darse cuenta de sus dificultades y de los aspectos que comprenden mejor o peor.

Oportunidades de aprendizaje matemático

Varios autores han investigado el tema de las oportunidades de aprendizaje matemático (por ejemplo, Yackel, Cobb y Wood, 1991; Cobb y Whitenack, 1996; Cobo, 1998). Readaptando a Morera (2013), consideramos las oportunidades de aprendizaje matemático como las relaciones entre los aspectos del conocimiento matemático (estructuras conceptuales, algorítmicas, heurísticas, instrumentales, interpretativas o argumentativas) y las acciones que potencialmente facilitan su aprendizaje. Estas oportunidades se presentan mediante acciones generadas por situaciones y circunstancias en los procesos de interacción en el aula de matemáticas.

Destacamos que diversas prácticas pueden favorecer la emergencia de oportunidades de aprendizaje matemático (Informe Vermont, 2000). Algunos ejemplos son la creación de situaciones de interacción entre estudiantes y con el profesor para desarrollar habilidades de pensamiento matemático más extensas, el planteamiento de actividades abiertas para que los alumnos puedan explorar y analizar cuestiones matemáticas, y la creación de situaciones para que presenten y compartan trabajos con sus compañeros de clase. De hecho, Ellis (2011) constata que el aprendizaje es un proceso social que se produce gracias a la interacción de todos los participantes de una clase de matemáticas. Las situaciones de aula se presentan como un conjunto de múltiples procesos de interacción, en los que tanto los estudiantes como el profesor y el uso de artefactos contribuyen conjuntamente en la creación y el desarrollo de situaciones relevantes que pueden generar oportunidades de aprendizaje.

METODOLOGÍA

Población

La recogida de datos se ha realizado en dos centros de secundaria con estudiantes de 3.º de ESO cuyas edades están comprendidas entre los 14 y los 15 años. En este artículo presentamos datos relativos a la discusión en gran grupo de una actividad inicial de semejanza en el plano gestionada por dos profesores de matemáticas, Luis y Pilar, seleccionados según diferentes características docentes iniciales obtenidas mediante entrevistas previas. Luis, con experiencia docente media en el centro A, pone énfasis en los algoritmos y en la aplicación de resultados en la enseñanza de las matemáticas. En cambio Pilar es una profesora novel en el centro B y está preocupada por ser capaz de anticipar el aprendizaje de su alumnado.

Los datos de las intervenciones de todos los participantes, profesores y estudiantes, se obtienen después de registrar en vídeo las discusiones en gran grupo y de realizar una transcripción escrita. Los investigadores estuvieron presentes durante todas las sesiones realizando las grabaciones, pero sin participar en el desarrollo de las actividades de cada clase.

Secuencia didáctica

Para realizar la investigación se ha diseñado una secuencia didáctica de cinco actividades introductorias y cinco problemas del tema de semejanza (véase tabla 1). El objetivo principal de las actividades introductorias es que los alumnos puedan iniciarse en los conceptos matemáticos básicos del tema, los cuales se desarrollarán con más profundidad a lo largo de los cinco problemas.

En el diseño instructivo hemos tenido en cuenta que el término «semejante» constituye una noción matemática difícil (Freudenthal, 1983), ya que gran número de estudiantes lo asocian al mantenimiento de la forma de una figura geométrica (Gómez, 2007). Además, como mencionan Hart, Brown y Küchemann (1981), el concepto de forma es realmente complejo, especialmente cuando se trata de figuras rectilíneas porque, por ejemplo, para algunos estudiantes todos los rectángulos tienen la «misma forma», en el sentido de que son rectángulos, pero no todos son semejantes ya que no mantienen necesariamente las proporciones con los correspondientes lados homólogos. En cualquier caso, la secuencia que se propone sigue los aspectos curriculares para el tercer curso de la ESO (para más información consultar Ferrer, Fortuny y Morera, 2013). El ciclo de trabajo seguido combina la resolución por parejas, la discusión en gran grupo y la reflexión escrita e individual después de la discusión de los problemas. La secuencia instructiva posibilita el uso de artefactos: tecnológicos, como un *software* de geometría dinámica (GeoGebra[1]), o no tecnológicos (lápiz y papel, pizarra ordinaria o material manipulable), aunque los profesores son quienes deciden, de acuerdo con su criterio profesional, la forma de utilizarlos.

1. Disponible en línea: <http://www.geogebra.org>.

Tabla 1.
Estructura de la secuencia didáctica

Sesión	*Organización*	*Tareas*
1	Trabajo por parejas	Actividades introductorias del tema de semejanza, Tales y homotecia
2	Discusión en gran grupo	Actividades introductorias 1 (¡Doblar figuras!) y 2 (Rectángulos semejantes)
3	Discusión en gran grupo	Actividades introductorias 3 (Cambiar las medidas de los polígonos), 4 (División de un tubo) y 5 (Recordemos el teorema de Tales)
4	Trabajo por parejas	Problema 1: La semejanza en las hojas de un árbol
		Problema 2: Transformaciones geométricas
5	Discusión en gran grupo	Problemas 1 y 2
6	Trabajo por parejas	Problema 3: Ampliar y reducir fotocopias
		Problema 4: Puntos medios con una propiedad curiosa
7	Discusión en gran grupo	Problemas 3 y 4
8	Trabajo por parejas y discusión en gran grupo	Problema 5: Investigar con los espejos

La tarea matemática estudiada en este artículo es la primera actividad introductoria de la tabla 1 y su enunciado se muestra en la figura 1. La actividad, que se presenta a los estudiantes de forma gráfica mediante el dibujo lineal de una figura bidimensional, tiene los siguientes objetivos matemáticos: estudiar la proporcionalidad de figuras poligonales, elaborar conjuntamente una definición de semejanza basada en la igualdad de ángulos y la proporcionalidad de lados homólogos, y relacionar los perímetros y las áreas de figuras semejantes de dos dimensiones.

Actividad introductoria 1: ¡Doblar figuras!

Dada la siguiente letra del abecedario, representa otra que sea el doble de grande. A continuación explica brevemente cómo la has obtenido y compárala con la original.

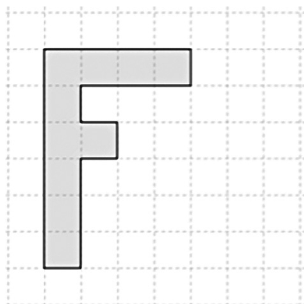

Fig. 1. Enunciado de la actividad inicial.

La indefinición implícita de la frase «el doble de grande» es intencionada para enriquecer la discusión. Así, algunos alumnos podrán representar una figura que tenga cada lado el doble de grande respecto el original y, por tanto, el perímetro de la nueva imagen quedará multiplicado por 2. De este modo podrán observar que los ángulos de ambas figuras son iguales, pero los lados son proporcionales con factor 2 y podrán llegar a la definición de figuras poligonales semejantes. En cambio, otros estudiantes pueden asociar la representación de una figura el doble de grande con una que tenga el doble de área, la cual únicamente será semejante a la original si la razón entre los lados homólogos es $\sqrt{2}$. Disponer de la cuadrícula puede ser una ayuda para representar dicha construcción, ya que el uso de sus diagonales simplifica la obtención de la $\sqrt{2}$.

Inicialmente, los estudiantes resuelven la actividad por parejas y se pretende que ambos miembros trabajen colaborativamente utilizando sus ideas previas sobre el concepto de semejanza, el cual han estudiado en cursos anteriores. Aun así, es posible que algunos alumnos no recuerden la definición de figuras poligonales semejantes y/o no la apliquen correctamente. Durante la discusión en gran grupo se contrastarán las resoluciones de la actividad de doblar figuras y se iniciará la formalización de la definición de semejanza. Se pretende que después de la discusión los estudiantes tengan las herramientas suficientes para poder identificar figuras poligonales semejantes. Una vez realizado el debate, se pide a los alumnos que reflexionen individualmente y que incorporen por escrito todos los elementos tratados en él y que no hubiesen considerado en su resolución inicial.

Finalmente, destacamos la importancia de tomar consciencia del impacto de la interpretación del enunciado en el aprendizaje de los estudiantes. Existe una diferencia relevante entre proponer la solución de duplicar el área preservando la semejanza, la cual se vuelca en el campo de los irracionales, y la de doblar el perímetro, que queda acotada a un manejo de los números naturales. De esta forma, la actuación del alumno y la gestión del profesor serán determinantes para propiciar situaciones susceptibles de generar unas u otras oportunidades de aprendizaje.

ANÁLISIS DE DATOS

El análisis de datos lo planteamos en cuatro etapas: en primer lugar, estudiamos algunas fases de la sistemática descrita anteriormente y determinamos cómo cada profesor ha preparado su discusión en gran grupo. Después, dividimos las discusiones en episodios y obtenemos una descripción del tipo de actuación docente de los dos profesores. A continuación, analizamos con más profundidad todos los episodios, determinamos las acciones que los caracterizan, y detectamos y clasificamos las oportunidades de aprendizaje centrándonos en sus aspectos matemáticos.

Estudio a priori: preparación de las discusiones

Realizamos un estudio a priori para determinar cómo cada profesor ha preparado la discusión en gran grupo de la actividad y, para ello, estudiamos las cinco primeras fases de la sistemática, las cuales se desarrollan antes de la discusión en grupo.

Observamos diferencias relevantes en la fase de *anticipación a través del árbol*, ya que Luis ha realizado una preparación bastante tradicional del problema, únicamente lo ha resuelto y, una vez encontrada una solución factible, no ha profundizado en la búsqueda de nuevas interpretaciones y estrategias, y tampoco ha previsto mensajes para desbloquear a los alumnos y ayudarlos a avanzar en la resolución. En cambio Pilar preparó la resolución de la actividad siguiendo un esquema, pensando en las diferentes soluciones e interpretaciones y anticipó posibles mensajes que podía dar a los estudiantes durante el trabajo por parejas con la intención de hacerlos avanzar en su resolución, hecho que contribuye al andamiaje de su actividad de matematización (Anghileri, 2006). Su fase de anticipación se relaciona con el «espacio básico del problema» (Cobo, 1998) e incluye elementos próximos al «árbol del problema» (Morera, 2013).

En lo relativo a la fase de *configuración didáctica ampliada*, Luis prepara la sesión considerando exclusivamente los artefactos convencionales, es decir, las hojas de resolución de los problemas y la pizarra ordinaria. No obstante, Pilar planea combinar el uso de los artefactos tradicionales con el

GeoGebra, porque considera que este *software* puede ser útil para ilustrar en la pantalla las diversas interpretaciones de la actividad y la aplicación de algunas estrategias de resolución.

Los dos profesores han realizado el mismo *modo de explotación* porque esta variable, junto con la actividad matemática, se ha fijado para la investigación. La intención de los autores es aplicar una metodología favorable para generar oportunidades de aprendizaje matemático utilizando el mismo ciclo de trabajo y estudiando la misma tarea matemática. Ambas cuestiones se han desarrollado con detalle en el apartado anterior del presente artículo.

En la fase de *monitorización*, Luis se centra en resolver las dudas formuladas por sus estudiantes mientras trabajan por parejas y no interviene si no es preguntado. Por otro lado, Pilar utiliza el esquema que ha elaborado en la fase de anticipación para monitorizar la sesión de resolución por parejas. Así, aparte de resolver las preguntas de sus estudiantes, la profesora les proporciona indicaciones adicionales y les pregunta por nuevas interpretaciones del enunciado y otras estrategias de resolución, con el propósito de que los alumnos puedan profundizar más en la interpretación y resolución del problema.

Los dos profesores siguen criterios distintos en la fase de *selección de situaciones*. Luis decide no seleccionar a los estudiantes, simplemente formulará preguntas concretas para que cualquier alumno que lo desee las responda y, después, él realizará explicaciones más extensas. En cambio Pilar selecciona a priori a los estudiantes partiendo de las soluciones que han obtenido en la resolución por parejas. Su intención es tener previstas unas intervenciones fijas, pero dejando cierto margen para que todos los alumnos que quieran realizar aportaciones en el transcurso de la discusión puedan hacerlo.

Determinación de los episodios de las discusiones en gran grupo

La fase de *secuenciación de la implementación didáctica* es el reflejo de la preparación previa de la sesión de discusión en gran grupo y su puesta en práctica en el aula. Para estudiarla hay que determinar los episodios de cada discusión. Con este fin hemos examinado las grabaciones del aula y nos hemos apoyado en las transcripciones, que se han analizado de una forma global de acuerdo a las dos dimensiones: instrumental y discursiva. Es decir, hemos dividido la discusión completa en episodios según un tipo de orquestación y un estadio de la discusión.

Para ejemplificar el proceso de análisis y caracterización de los episodios, hemos seleccionado el quinto, de una serie de nueve, de la discusión de la profesora Pilar. En la línea 1 de la tabla 2 se observa que Pilar dirige una pregunta a un estudiante del grupo para iniciar una discusión que finaliza en la construcción de la definición matemática de figuras poligonales semejantes. Tanto en las preguntas que realiza la profesora como en las explicaciones de los alumnos y en el debate que se establece, se comparan dos construcciones que se visualizan en la pantalla del GeoGebra y se utiliza una de ellas para obtener la definición de semejanza (véanse líneas 2-9 de la tabla 2). Además, para estudiar con detalle cada episodio, interpretamos las acciones de participación realizadas por los estudiantes, las intervenciones llevadas a cabo por el profesor y las acciones instrumentales, en las que se tiene en cuenta el uso de artefactos.

En el inicio del episodio la profesora Pilar realiza una petición de explicación [1] al estudiante E.1, ayudándose de la representación de la pantalla del GeoGebra, con la intención de que explique los motivos por los que ha construido una figura con el doble de perímetro y no el doble de área. El alumno observa las dos representaciones proyectadas en la pantalla y evidencia que su elección se basa en la semejanza de la figura cuyos lados son proporcionales, con razón 2, a la original. Interpretamos esta acción como una observación de evidencia empírica [2], ya que se ayuda de la información visual que le proporciona el artefacto para constatar un hecho concreto, pero sin que este acto implique justificación alguna. A continuación, la profesora utiliza la situación para introducir el concepto de figuras semejantes y realiza una petición de explicación [3] para que algún alumno defina este concepto.

De nuevo, el estudiante E.1 se apoya en la representación de la pantalla para explicar que dos figuras semejantes deben tener todos los lados multiplicados por un número y que este debe ser siempre el mismo. No obstante, en este caso interpretamos la acción como una justificación empírica [4] porque el alumno utiliza la representación proyectada en el artefacto como complemento de su explicación oral. Hanna (2000) constata que las representaciones visuales pueden emplearse como justificación matemática más allá de evidenciar hechos concretos, ya que los diagramas son componentes legítimos de un argumento matemático y pueden transmitir o transportar *insight* así como conocimientos. Después, Pilar hace una petición de formalización [5] para precisar el lenguaje matemático y que aparezca el término «proporcionales» [6]. La profesora valida [7.1] la afirmación del estudiante y realiza una nueva petición de explicación [7.2] para que los alumnos completen la definición. El estudiante E.2 se basa en la construcción de la pantalla para observar la evidencia empírica [8] de que dos figuras poligonales semejantes deben tener, además, todos los ángulos iguales. Interpretamos que no utiliza el artefacto para sustentar un razonamiento matemático, sino para evidenciar un hecho concreto. Finalmente, Pilar complementa la explicación del alumno [9] constatando la importancia de la igualdad de ángulos en la definición de semejanza.

Tabla 2.
Quinto episodio de la discusión en gran grupo de Pilar

			Interpretación
1	Pilar:	¿Óscar, tú qué entendiste, es decir, por qué construiste esta (la profesora señala sobre la pantalla del proyector una figura que tiene el doble de perímetro respecto de la original) y no esta otra (señala una figura con el doble de área)?	*Intervención*: petición de explicación *Instrumental*: soporte visual-complemento de la explicación
2	E.1:	Porque estas dos son semejantes (refiriéndose a la F original y la que tiene el doble de perímetro).	*Participación*: observación de evidencia empírica
3	Pilar:	Vale, por tanto, la definición de semejanza. ¿Qué creéis que son dos figuras semejantes?	*Intervención*: petición de explicación
4	E.1:	Todos los lados multiplicados por un número, en todos los casos el mismo.	*Participación*: justificación empírica
5	Pilar:	Vale, es decir, ¿cómo son los lados?	*Intervención*: petición de formalización
6	E.1:	Proporcionales.	*Participación*: formalización
7	Pilar:	1. Proporcionales, vale.	*Intervención*: validación
		2. ¿Y además qué hace falta?	*Intervención*: petición de explicación
8	E.2:	Que todos los ángulos sean iguales.	*Participación*: observación de evidencia empírica
9	Pilar:	Es decir, aquí, chicos, los ángulos no los comprobamos porque se trata de una F y es evidente que todos son de 90º, pero se debería hacer.	*Intervención*: complemento de la explicación

Analizando las líneas del texto de la tabla 2, inferimos que el tipo de orquestación del episodio seleccionado es *discutir el artefacto*, mientras que el estadio de la discusión es *contraste entre diferentes soluciones* porque se consideran y discuten dos soluciones posibles para el problema, las cuales se originan a partir de dos interpretaciones distintas del enunciado.

La caracterización completa de la discusión de Pilar se detalla en la tabla 3, que muestra que la discusión en gran grupo se inicia pidiendo a un estudiante que lea el enunciado del problema (e_1). El alumno muestra una primera solución, que consiste en duplicar el área de la figura original, y la representa con el GeoGebra (e_2). Se estudia la estrategia y se discute con el grupo clase la construcción de la pantalla (e_3). Después, otro estudiante presenta una nueva solución duplicando el perímetro, y la profesora realiza explicaciones apoyándose en la construcción del GeoGebra (e_4). Se discuten y contrastan las dos soluciones representadas en la pantalla (e_5) y, a petición de un alumno, Pilar realiza diversas aclaraciones relacionadas con la definición de semejanza y la solución de duplicar el perímetro (e_6). Entonces, la profesora expone a los estudiantes la relación entre los perímetros y las áreas de figuras semejantes, y realiza anotaciones en la pizarra convencional basándose en la información de la pantalla (e_7). Nuevamente, se contrastan las dos soluciones y Pilar realiza explicaciones diversas para establecer consenso entre los alumnos (e_8). Finalmente, la profesora plantea una generalización del problema que consiste en duplicar el área manteniendo la semejanza con la original, y utiliza la pizarra y el GeoGebra para realizar las explicaciones apoyándose en los razonamientos de los estudiantes (e_9).

En la tabla 3 también podemos visualizar que la orquestación de Pilar está centrada equilibradamente entre el profesor y los alumnos, ya que el número de episodios correspondientes a los tres primeros tipos de orquestación es casi el mismo que el de los tres últimos. El tratamiento de los estadios es bastante completo y su distribución es secuencial, porque se progresa de los estadios correspondientes a momentos iniciales de la discusión hasta los más avanzados.

Tabla 3.
Análisis de los episodios de la discusión
en gran grupo de la primera actividad de Pilar

Pilar / **Estadio de la discusión** / **Tipo de orquestación**	Situación del problema	Presentación de una solución	Estudio de diferentes estrategias para resolver o argumentar	Estudio de casos particulares o extremos	Contraste entre diferentes soluciones	Conexiones con otras situaciones	Generalización y conceptualización	Reflexión sobre el progreso matemático
Explorar el artefacto								
Explicar a través del artefacto		e_4	e_6		e_8			
Enlazar artefactos							e_7, e_9	
Discutir el artefacto			e_3		e_5			
Descubrir a través del artefacto								
Experimentar el instrumento	e_1	e_2						

Analizando de forma análoga la actuación docente del profesor Luis, detectamos que la orquestación de su discusión en gran grupo está centrada básicamente en la figura del profesor, como se observa en la primera parte del quinto episodio de la discusión:

Tabla 4.
Parte I del quinto episodio de la discusión en gran grupo de Luis

			Interpretación
12	E.1:	Entonces, ¿qué sería correcto? Porque una tiene 40 y la otra tiene 20.	*Participación*: petición de aclaración
13	Luis:	1. A ver, con respecto a cuestiones lingüísticas, el doble de grande se refiere al doble de superficie. ¿Vale? Por lo tanto, la opción esta es correcta, pero tampoco nos quedaba demasiado claro si se debía respetar la misma... las mismas proporciones.	*Intervención*: realización de explicación
		2. Aquí nadie al parecer... yo tampoco lo he hecho, ¿eh? Intentar conseguir el doble de área respetando las proporciones. De todos modos, es que el enunciado tampoco nos dice que tengamos que respetar las proporciones. Solo nos dice que sea el doble de grande. Otra.	*Intervención*: invitación a la generalización
		3. Entendemos otra "F" el doble de grande. Yo lo veo así, vosotros parece que también.	*Intervención*: establecimiento de consenso
		4. ¿Y el resto de la gente lo que ha hecho al final es?	*Intervención*: invitación a la participación

Además, centra la implementación de su discusión en gran grupo en realizar explicaciones orales ayudándose de algunas anotaciones en la pizarra (véanse tablas 4 y 4bis) y realiza un tratamiento insuficiente de los estadios de la discusión (véase tabla 5).

Tabla 4bis.
Parte II del quinto episodio de la discusión en gran grupo de Luis

			Interpretación
14	E.1 y E.3:	Doblar el perímetro.	*Participación*: Exposición sin argumentación:
15	E.4:	Cada cuadradito hacer un cuadro grande, hacer cuatro.	*Participación*: Exposición sin argumentación
16	Luis:	Es decir, habéis doblado directamente, es decir, habéis mantenido las proporciones con respecto a los lados.	*Intervención*: Ampliación o complemento de la explicación

La mayoría de tipos de orquestación de Luis se concentran en *explicar a través del artefacto* y es remarcable la poca participación de sus estudiantes, hecho que dificulta la exposición y discusión conjunta de sus *estrategias para resolver o argumentar* el problema durante la sesión de clase. La distribución de los episodios según los estadios de la discusión es secuencial y no se producen agrupaciones relevantes de episodios en ningún estadio. El tratamiento que se hace de estos es bastante incompleto y superficial.

Resumimos en la tabla 5 las cadenas discursivas correspondientes a los estadios de la discusión para los dos profesores.

Tabla 5.
Estadios de la discusión del problema

Profesor	*Estadios de la discusión*									*Interpretación*
Luis	*B*	*B*	*E*	*C*	*E*	*G*				Distribución secuencial y tratamiento incompleto de los estadios de la discusión.
Pilar	*A*	*B*	*C*	*B*	*E*	*C*	*G*	*E*	*G*	Distribución secuencial y tratamiento bastante completo de los estadios de la discusión.

(A. Situación del problema; B. Presentación de una solución argumentada; C. Estudio de diferentes estrategias para resolver o argumentar; E. Contraste entre diferentes soluciones; G. Generalización y conceptualización)

Identificación de las acciones de los episodios

Hasta el momento nos hemos fijado únicamente en aspectos globales de las discusiones en gran grupo, es decir, hemos determinado los episodios y hemos establecido un tipo de actuación del profesor basándonos en la gestión de su discusión. Para identificar las oportunidades de aprendizaje matemático, necesitamos profundizar en la dimensión discursiva y estudiar los episodios con mayor profundidad. Para ello determinaremos las acciones de los participantes, estudiaremos sus efectos sobre el tipo de aprendizaje susceptible de ser promovido e ilustraremos las relaciones entre ellas.

Para identificar el generador (estudiante o profesor) de las oportunidades de aprendizaje, analizamos cómo se suceden las acciones en cada uno de los episodios. Con el fin de profundizar en el análisis de las acciones del profesor, establecemos un paralelismo con Schoenfeld (2011) y, de acuerdo con lo expuesto en el marco teórico del artículo, las clasificamos en tres categorías amplias y generales: gestión de clase, discusión y contenido matemático.

Las siguientes tablas recogen un resumen de todas las acciones de participación y de intervención detectadas en el análisis de los episodios de las discusiones en gran grupo de Luis y Pilar. Se incluye una breve definición de las acciones ilustradas en los episodios del apartado anterior y se denota la frecuencia con la que estas aparecen en la discusión. Hacemos notar que no incluimos las acciones instrumentales en este sumario.

Tabla 6.
Resumen del análisis de las acciones de participación

Acciones de participación	*% Luis*	*% Pilar*
Petición de aclaración: el estudiante pregunta al profesor o a otro compañero una puntualización o especificación sobre la cuestión que se está tratando en la discusión.	8,8	24,6
Observación de evidencia empírica: el alumno se ayuda de una información visual proporcionada por el artefacto para constatar algún hecho concreto o experimental, pero sin que este acto implique justificación alguna.	65,2	23,2
Exposición sin argumentación: el estudiante manifiesta o explicita algún hecho, en general de forma muy breve, pero no lo evidencia experimentalmente a través del artefacto y no realiza ninguna justificación o argumentación al respecto.	17,4	20
Justificación empírica o deductiva: el alumno emplea la representación proyectada en el artefacto como complemento justificativo de su explicación oral. Se incluye lo expuesto en Hanna (2000), donde se constata que los diagramas son componentes legítimos de un argumento matemático y pueden transmitir o transportar *insight* así como conocimientos.	-	13,8
Formalización: el estudiante realiza una aclaración que da mayor solvencia y rigor matemático a una intervención o exposición previa.	4,3	1,5

Acciones de participación	*% Luis*	*% Pilar*
Recapitulación.	4,3	1,5
Establecimiento de conjetura.	-	7,7
Asentimiento.	-	4,6
Búsqueda de alternativas.	-	3,1

Se evidencian diferencias relevantes en la distribución de las acciones de participación en las dos discusiones. La tabla 6 muestra que en el caso de Luis los estudiantes centran sus participaciones en realizar observaciones de evidencias empíricas y algunas exposiciones sin argumentación. En cambio, la distribución de las acciones de los alumnos en la discusión de Pilar es más homogénea en los diversos tipos. Luis utiliza las observaciones de sus estudiantes para iniciar las explicaciones, que están orientadas mayoritariamente a la formulación de preguntas de las cuales espera comprobaciones sencillas o bien explicaciones muy cortas. En cambio, Pilar también realiza bastantes peticiones de comprobación o de explicación, pero las intervenciones de sus estudiantes son más extensas. Frecuentemente es ella quien utiliza estas acciones para realizar nuevas preguntas, o bien concluir la correspondiente etapa del debate completando las descripciones de sus estudiantes realizando nuevas explicaciones y formalizaciones. La frecuencia con la que se distribuyen las diferentes intervenciones en las discusiones en gran grupo de ambos profesores es bastante parecida. Luis realiza un porcentaje ligeramente mayor de acciones de gestión de clase, hecho que compensa Pilar efectuando un mayor número de acciones de discusión (véase tabla 7).

Tabla 7.
Resumen del análisis de las acciones de intervención

<table>
<tr><th>Acciones de intervención</th><th>% Luis</th><th>% Pilar</th></tr>
<tr><td>Acciones de gestión de clase</td><td rowspan="3">19</td><td rowspan="3">12</td></tr>
<tr><td>Invitación a la participación: el profesor incita a los estudiantes a comunicar oralmente alguna observación o razonamiento.</td></tr>
<tr><td>Petición de atención.</td></tr>
<tr><td>Acciones de discusión</td><td rowspan="3">6</td><td rowspan="3">12</td></tr>
<tr><td>Establecimiento de consenso: el docente realiza una breve explicación o pregunta para conseguir acuerdo y centrar la atención del grupo clase.</td></tr>
<tr><td>Recapitulación.</td></tr>
<tr><td>Acciones de contenido matemático</td><td rowspan="6">75</td><td rowspan="6">76</td></tr>
<tr><td>Petición de comprobación, de explicación, de generalización, de solución, de formalización: el profesor pregunta por algún suceso (matemático), con el fin de que los alumnos lo comprueben, expliquen, generalicen, etcétera.</td></tr>
<tr><td>Validación: el docente remarca la aprobación de una explicación, comentario o exposición de un estudiante realizada durante la discusión en gran grupo.</td></tr>
<tr><td>Realización de explicación (por petición de un alumno o en el contexto de la discusión): el profesor lleva a cabo una exposición para introducir o profundizar en algún hecho matemático o para responder a la petición de un alumno.</td></tr>
<tr><td>Complemento de la explicación (de un alumno): el docente completa o amplia la exposición de un alumno con el fin de dar mayor profundidad matemática a la cuestión que se está debatiendo.</td></tr>
<tr><td>Invitación a la búsqueda de alternativas, a la reflexión y a la generalización: el profesor intenta inducir a los estudiantes a que profundicen matemáticamente en estos aspectos durante la discusión del problema.</td></tr>
</table>

El análisis de las dos discusiones en gran grupo evidencia que se producen muy pocas acciones instrumentales, las cuales no detallamos en este artículo, aunque son susceptibles de promover aprendizaje de tipo técnico, relacionado con el uso y funcionamiento de los artefactos.

Diversas acciones de participación también pueden promover aprendizaje técnico centrado en el desarrollo organizativo de la clase y en puntualizaciones sobre algunos aspectos de la discusión (por ejemplo, peticiones de aclaración); en la realización de síntesis sobre las exposiciones de otros alumnos y la aceptación de las observaciones o explicaciones de los demás compañeros (por ejemplo, recapitulaciones y asentimientos), o bien, en precisiones técnicas y formales sobre ciertos elementos matemáticos (por ejemplo, formalizaciones). En cambio, algunas acciones son susceptibles de promover conocimiento instrumental relacionado con los procesos matemáticos y centrado en las exposiciones de evidencias concretas realizadas por los alumnos en el transcurso del debate (por ejemplo, observaciones de evidencias empíricas, establecimientos de conjetura y búsquedas de alternativas). Finalmente, determinadas acciones de participación pueden promover aprendizaje conceptual centrado en las exposiciones, los razonamientos y las justificaciones de los alumnos, que se focalizan en el desarrollo de conceptos matemáticos (por ejemplo, exposiciones sin argumentación y justificaciones empíricas o deductivas).

De forma análoga estudiamos las acciones de intervención y evidenciamos que las relativas a la gestión de clase y de la discusión son susceptibles de promover aprendizaje técnico relacionado con la gestión del aula y de sus participantes (por ejemplo, peticiones de atención e invitaciones a la participación); o bien, se centran en la realización de síntesis para establecer consenso en el grupo clase (por ejemplo, recapitulaciones y establecimientos de consenso). En cambio, las acciones de contenido matemático pueden promover aprendizaje instrumental si hacen referencia a peticiones sobre la explicación de procedimientos matemáticos, realización de comprobaciones, o búsquedas de soluciones adicionales al problema (por ejemplo, peticiones de comprobación o de explicación, validaciones e invitaciones a la búsqueda de alternativas y a la reflexión). No obstante, este tipo de acciones también pueden promover aprendizaje conceptual si se relacionan con los contenidos matemáticos, se centran en el desarrollo de explicaciones sobre las soluciones del problema y hacen referencia a conceptos específicos de la tarea (por ejemplo, peticiones de solución o de generalización, realizaciones de explicaciones matemáticas y complementos de las explicaciones de los alumnos).

Los diagramas de sucesión de las acciones de los episodios (ver figura 2) se consideran representativos del perfil de enseñanza seguido por cada profesor durante la implementación de su discusión en gran grupo. Destacamos que ambos episodios tienen una duración parecida y que el punto de partida es el mismo, ya que se dispone de dos soluciones posibles al problema: duplicar el perímetro o el área de la figura original.

Observamos que Luis no aprovecha esta situación para introducir el concepto matemático de semejanza, y realiza explicaciones generales y extensas sobre el significado de cada una de ellas. Hay poca participación de los alumnos y el diagrama tiene una estructura centrada en las explicaciones del docente (véase figura 2-izquierda). En diversas ocasiones el origen y final de los conectores de influencia recae sobre el profesor, hecho que ilustra poca interacción entre los estudiantes y el docente.

En cambio Pilar utiliza las dos soluciones al problema para introducir preguntas que conduzcan a los estudiantes a la definición de semejanza. La profesora no realiza explicaciones, sino que a través de las preguntas que formula y las respuestas de sus alumnos consigue que se enuncie la definición mencionada. La estructura del diagrama presenta una sucesión encadenada de intervenciones entre la profesora y sus estudiantes (véase figura 2-derecha). Además, a diferencia de Luis, las soluciones se encuentran representadas en la pantalla del GeoGebra en lugar de la pizarra.

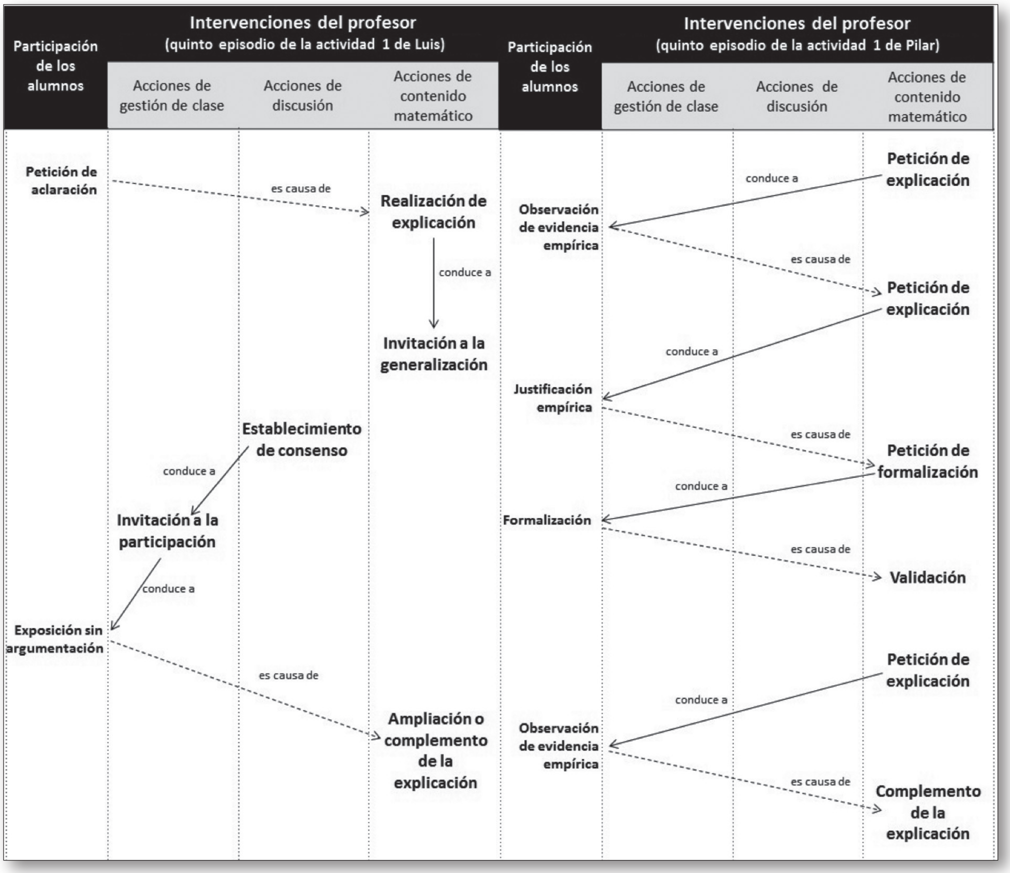

Fig. 2. Comparación de las acciones del episodio de Luis y Pilar.

Determinación de oportunidades de aprendizaje matemático

Para caracterizar las oportunidades de aprendizaje evidenciamos los aspectos matemáticos de la oportunidad y explicitamos las acciones que favorecen su aparición. Ejemplificamos este proceso detallando las oportunidades de aprendizaje del quinto episodio de la discusión en gran grupo de los dos profesores, sin realizar un estudio comparado entre ellas ni hacer referencia a las diferencias en su complejidad.

En el caso de Luis detectamos que la intervención del docente en la línea 13.2 (véase tabla 4), invitando a sus estudiantes a la generalización y mencionándoles que no han intentado conseguir una figura con el doble de área respetando las proporciones y sin cambiar la forma, genera una oportunidad de aprendizaje conceptual cuyo aspecto matemático se caracteriza por «aprender que la duplicación del área de una figura, utilizando solo los bordes de una retícula, implica un cambio en la estructura de esta». En otras palabras, nos referimos a que los alumnos tienen la oportunidad de aprender que no es posible duplicar el área de la figura poligonal del problema sin alterar su forma, en el sentido coloquial del término, empleando únicamente la rectas de la cuadrícula y sin realizar consideraciones con la $\sqrt{2}$. Consideramos que se trata de una oportunidad de primer orden, ya que se genera gracias a la intervención del profesor, sin la participación previa de ningún alumno que trate este tema. En el episodio también se origina la oportunidad de aprendizaje conceptual de primer orden caracterizada por «aprender que la duplicación del perímetro de una figura poligonal implica la multiplicación por cuatro de su área». Esta oportunidad se genera en la línea 15 (véase tabla 4bis), cuando un alumno realiza la acción de participación, clasificada como exposición sin argumentación, en la que indica que si duplicamos el perímetro de la figura original el número de cuadraditos (área) queda multiplicado por cuatro. Finalmente, la intervención del profesor en la línea 13.1 (véase tabla 4) realizando una explicación sobre la corrección de dos soluciones posibles del problema, que es producto de la participación previa de un estudiante que efectúa una petición de aclaración, origina una oportunidad de aprendizaje interpretativa, argumentativa y relacionada con las creencias, cuyo aspecto matemático se define por «observar que un problema puede tener diferentes soluciones e interpretaciones y todas ellas ser correctas». En este caso consideramos que la oportunidad es de segundo orden ya que esta se genera gracias a la pregunta del estudiante, y la explicación del profesor solo responde a su petición de aclaración.

En el quinto episodio de la discusión en gran grupo de Pilar también detectamos tres oportunidades de aprendizaje matemático, pero su naturaleza es algo distinta. La intervención de la profesora en la línea 3 (véase tabla 2), cuando realiza una petición de explicación, genera una oportunidad de aprendizaje conceptual cuyo aspecto matemático es «interiorizar el concepto y entender la definición de semejanza de dos figuras poligonales». Se trata de una oportunidad de segundo orden, porque la intervención de la profesora preguntando a los estudiantes por la definición de semejanza viene generada por la participación previa de un alumno que hace referencia al término «semejante» en su observación de evidencia empírica. En la línea 9 (véase tabla 2), la profesora complementa la explicación previa de un estudiante, hecho que genera una oportunidad de aprendizaje conceptual caracterizada matemáticamente por «identificar la importancia de la igualdad de ángulos en la definición de semejanza». Además, esta misma intervención de Pilar posibilita que los alumnos tengan una nueva oportunidad interpretativa, argumentativa y relacionada con las creencias, la cual se define por «darse cuenta de la importancia de ser riguroso en los elementos que constituyen una definición matemática». Ambas oportunidades son de primer orden, ya que las genera directamente la profesora sin que los comentarios previos de los alumnos sean causa directa de su aparición en la discusión.

Resumiendo, para determinar las oportunidades de aprendizaje nos hemos centrado en los episodios de la discusión, en las acciones que se producen en cada uno de ellos (véanse tablas 6 y 7) y en sus efectos en el posible aprendizaje de los estudiantes. Como en Morera (2013), para cada discusión en gran grupo obtenemos oportunidades conceptuales, procedimentales (instrumentales; interpretativas, argumentativas y relacionadas con las creencias; relacionadas con el uso de artefactos, etcétera) y oportunidades de gestión del conocimiento y de participación. La tabla 8 recoge para cada profesor las oportunidades de aprendizaje del quinto episodio de su discusión e ilustra los aspectos matemáticos de cada oportunidad, así como las acciones que potencialmente facilitan su aprendizaje.

Tabla 8.
Caracterización de las oportunidades de aprendizaje del quinto episodio de las dos discusiones

Aspectos matemáticos de las oportunidades de aprendizaje	*Acciones*	
Conceptuales	*Luis*	*Pilar*
Aprender que la duplicación del área de una figura, utilizando solo una cuadrícula, implica un cambio en la forma de esta.	Invitación a la generalización *(Intervención -Línea 13.2)*	–
Aprender que la duplicación del perímetro de una figura poligonal implica la multiplicación por cuatro de su área.	Exposición sin argumentación *(Participación -Línea 15)*	–
Interiorizar el concepto y entender la definición de semejanza de dos figuras poligonales.	–	Petición de explicación *(Intervención -Línea 3)*
Identificar la importancia de la igualdad de ángulos en la definición de semejanza de dos figuras poligonales.	–	Complemento de la explicación *(Intervención -Línea 9)*

Aspectos matemáticos de las oportunidades de aprendizaje	*Acciones*	
Interpretativas, argumentativas y relacionadas con las creencias	*Luis*	*Pilar*
Observar que un problema puede tener diferentes soluciones e interpretaciones y todas ellas ser correctas.	Realización de explicación *(Intervención -Línea 13.1)*	–
Darse cuenta de la importancia de ser riguroso en los elementos que constituyen una definición matemática.	–	Complemento de la explicación *(Intervención -Línea 9)*

RESULTADOS Y CONCLUSIÓN

En este artículo hemos realizado un estudio de casos que caracteriza el tipo de actuación de dos profesores, Luis y Pilar, que gestionan la discusión en gran grupo de un problema de semejanza y hemos estudiado el efecto de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. A continuación detallamos los resultados de la investigación.

Tipos de actuación docente en la gestión de discusiones en gran grupo

Basándonos en el análisis global de las discusiones en grupo y teniendo en cuenta las dimensiones instrumental y discursiva, determinamos dos tipos de actuación docente:

– *Magistral*. La orquestación está centrada en el profesor, se produce una distribución secuencial pero un tratamiento superficial e incompleto de los estadios de la discusión, y el tipo de orquestación mayoritario es explicar a través del artefacto. Se ejemplifica con el profesor Luis.
– *Participativo*. La orquestación es equilibrada entre la figura del profesor y los alumnos. Se detecta una distribución secuencial y un tratamiento bastante completo de los estadios de la discusión. Sus orquestaciones se corresponden mayoritariamente con las de explicar, experimentar y discutir a través de un artefacto. El ejemplo es la profesora Pilar.

Destacamos que la clasificación anterior es local, ya que no tenemos evidencias para afirmar que representa un comportamiento general o perfil del profesor en una situación de clase distinta. Este elemento nos abre una perspectiva de futuro que permitirá ver si los comportamientos detectados son intrínsecos del profesor y no dependen del tipo de problema, del contenido matemático tratado, o bien de la forma de organizar el aula.

Relación entre los tipos de actuación docente y las oportunidades de aprendizaje matemático

Hemos profundizado en la dimensión discursiva y hemos estudiado con más detalle los episodios de la discusión en gran grupo de los dos casos. Hemos analizado las acciones que se han producido en ellos, clasificándolas según fuesen de participación (realizadas por los alumnos), de intervención (llevadas a cabo por el profesor) o instrumentales (relacionadas con el uso de artefactos). Hemos evidenciado diferencias relevantes en la distribución de las acciones de participación en las dos discusiones, y hemos observado que las realizadas por los estudiantes de Luis son, mayoritariamente, observaciones empíricas y exposiciones sin argumentación utilizadas por el profesor para efectuar explicaciones más extensas. En cambio, los alumnos de Pilar desarrollan exposiciones más elaboradas porque la profesora intenta que los estudiantes construyan su propio conocimiento matemático. Además, hemos determinado que el efecto de las acciones dentro de la discusión es susceptible de generar tres tipos de aprendizaje matemático: técnico, instrumental y conceptual. De este modo, ilustramos un componente adicional de las acciones dentro del sistema que se podrá estudiar con más profundidad en un futuro. En tal caso, el objeto de análisis debería ser el alumno y el establecimiento de grados en el aprovechamiento, por parte de los estudiantes, de las oportunidades de aprendizaje generadas en la discusión.

Para caracterizar las oportunidades de aprendizaje hemos relacionado los aspectos del conocimiento matemático de la oportunidad con los efectos de las acciones que potencialmente facilitan su aprendizaje. En este artículo únicamente hemos podido detallar las oportunidades de los quintos episodios de las discusiones de Luis y Pilar, pero un análisis completo y más extenso permite observar que la discusión en gran grupo gestionada por Pilar presenta el doble de oportunidades conceptuales que la discusión de Luis, incluyendo todas las generadas por el profesor mencionado. Algo parecido sucede con las oportunidades procedimentales y las de gestión del conocimiento y de participación. Este hecho sugiere que el modo de actuación *participativo* genera un mayor número de oportunidades de aprendizaje que el *magistral*, aunque en el artículo no podemos obtener conclusiones más generales. Para ello se debería estudiar el grado en que los alumnos aprovechan cada oportunidad de aprendizaje matemático. De igual modo, sería interesante comparar en un futuro estas evidencias con las discusiones en gran grupo de las demás actividades introductorias y de los cinco problemas, si bien intuimos que las observaciones previsiblemente serían análogas.

Por otro lado, también podemos relacionar la generación de oportunidades de aprendizaje con la forma en la que cada profesor ha preparado la discusión en grupo (véase tabla 9). Luis (estilo *magistral*) realizó una preparación tradicional de la sesión sin profundizar en las fases de la sistemática, y en su sesión se generaron menos oportunidades de aprendizaje que en la de Pilar (actuación *participativa*). La profesora otorgó especial importancia a la fase de anticipación, preparándose esquemas para la resolución y la gestión de la actividad los cuales se identifican con los «árboles de los problemas». Además, tenía claramente definidos los objetivos matemáticos de la tarea, que planteó como introducción al concepto de semejanza, y seleccionó a priori las participaciones de los estudiantes favoreciendo la aparición de un mayor número de estrategias de resolución.

Destacamos que en ningún episodio de la discusión de Luis se generó la oportunidad conceptual caracterizada matemáticamente por «interiorizar el concepto y entender la definición de semejanza de dos figuras poligonales», hecho que sí se produjo en el quinto episodio de la discusión en gran grupo de Pilar. Previsiblemente el profesor no consideró que este elemento fuese uno de los objetivos matemáticos de la actividad, porque de no ser así podría haberlo introducido en la línea 16 (véase tabla 4bis), justo al final del quinto episodio de su discusión en grupo.

Tabla 9.
Gestión de las discusiones en gran grupo y generación de oportunidades de aprendizaje

	Luis	*Pilar*
Preparación de las discusiones en gran grupo	Tradicional, seguimiento superficial de la sistemática.	Detallada y con profundidad en la fase de anticipación. Elaboración de esquemas de resolución del problema. Selección de los alumnos y previsión de la gestión.
Tipo de actuación docente	Magistral	Participativo
Generación de oportunidades de aprendizaje matemático (estudio completo)	Pocas. No se generan oportunidades de aprendizaje matemático conceptuales para introducir la semejanza.	Gran número de oportunidades de aprendizaje matemático. Utiliza la actividad para generar oportunidades de aprendizaje conceptuales relacionadas con la semejanza.

En este sentido, consideramos que las oportunidades de aprendizaje matemático ocurren en situaciones o circunstancias, en nuestro caso evidenciadas en lo sucedido a lo largo del quinto episodio de la actividad inicial, en las que se generan acciones que pueden ser aprovechadas por los alumnos para aprender contenidos matemáticos. Los datos mostrados en este artículo solo evidencian una mínima parte de las muchas oportunidades (conceptuales, instrumentales, heurísticas, interpretativas, argumentativas, relacionadas con las creencias, relacionadas con el uso de artefactos, de gestión del conocimiento y de participación) que han sido generadas en todos los episodios de la discusión en gran grupo de la actividad. Además, hemos detectado una estrecha dependencia entre la actuación docente seguida por cada profesor a lo largo de toda la secuencia didáctica que enmarca este estudio (véase tabla 1) y la generación de oportunidades de aprendizaje. En los dos casos ilustrados se contabiliza que, tal como ya hemos comentado, en la investigación completa la actuación docente *participativa* representada por Pilar genera más del doble de oportunidades de aprendizaje que el estilo *magistral* descrito para la actuación de Luis.

Los distintos grados posibles de aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje pueden ser analizados en sucesivas investigaciones, mediante rúbricas que evalúen tanto el grado de demanda cognitiva de la tarea como la calidad de la discusión.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al profesor Luis Puig, de la Universitat de València, y al profesor Lluís Bibiloni, de la Universitat Autònoma de Barcelona, las sugerencias a una versión previa de este artículo; a los Proyectos EDU2011-23240 y EDU2012-31464; a la Beca FPI BES-2012-053575 (primer autor), y a los profesores con pseudónimos Luis y Pilar que nos han facilitado el acceso al escenario y el estudio de casos presentado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(1), pp. 33-52.
http://dx.doi.org/10.1007/s10857-006-9005-9

Cobb, P. y Whitenack, J.W. (1996). A method for conducting longitudinal analyses of classroom video recordings and transcripts. *Educational Studies in Mathematics*, 30, pp. 213-228.
http://dx.doi.org/10.1007/BF00304566

Cobo, P. (1998). *Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos.* Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, España.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75, pp. 213-234.
http://dx.doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5

Ellis, A.B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42, pp. 308-345.

Ferrer, M., Fortuny, J.M. y Morera, L. (2013). Identificación de estilos de enseñanza comparando discusiones en gran grupo de un problema de semejanza. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII*. Bilbao. SEIEM, pp. 263-274.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados*. México. CINVESTAV, 2001.

Gómez, B. (2007). La razón en semejanza: El caso del perrito. En E. Castro y J.L. Lupiáñez (Eds.). *Investigaciones en educación matemática: Pensamiento numérico. Libro homenaje a Jorge Cázares Solórzano*. Granada. Editorial universitaria de Granada, pp. 237-257.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, pp. 5-23.
http://dx.doi.org/10.1023/A:1012737223465

Hart, K.M., Brown, M.L. y Küchemann, D.E. (1981). *Children's Understandings of Mathematics: 11-16*. London: John Murray, 1986.

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología.* Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra, España.

Morera, L., Planas, N. y Fortuny, J.M. (2013). Design and validation of a tool for the analysis of whole group discussions in the mathematics classroom. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Antalya, Turquía: ERME, pp. 1506-1515.

Morera, L., Souto, B. y Arteaga, P. (2011). ¿Qué puede hacerse antes de llevar un problema al aula? Comunicación presentada en las XV Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, Julio de 2011, Gijón (actas en prensa).

Rigo, M., Páez, D. y Gómez, B. (2010). Prácticas metacognitivas que el profesor de nivel básico promueve en sus clases ordinarias de matemáticas. Un marco interpretativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), pp. 405-416.

Schoenfeld, A.H. (2011). *How We Think. A Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications.* New York, NY: Taylor & Francis.

Smith, M. y Stein, M.K. (2011). *Five practices for orchestrating productive mathematics discussions.* Reston, VA: NCTM.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), pp. 281-307.
http://dx.doi.org/10.1007/s10758-004-3468-5

Vermont Department of Education (2000). *Vermont's framework of standards and learning opportunities*. Montpelier, VT: Department of Education.

Yackel, E., Cobb, P. y Wood, T. (1991) Small-group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(5), pp. 390-408.
http://dx.doi.org/10.2307/749187

Effects of teaching activity on the generation of mathematical learning opportunities

Miquel Ferrer, Josep M. Fortuny, Laura Morera
Universitat Autònoma de Barcelona
miquel.ferrer.puigdellivol@uab.cat, josepmaria.fortuny@uab.cat, laura.morera@uab.cat

In this article we examine the ways in which teaching activity affects the generation of mathematical learning opportunities. To this end, we have carried out a case study to characterize the types of teaching activity displayed by two teachers when conducting whole-group discussions on a problem of similarity in the plane. In the study we reveal significant differences in the ways in which each teacher has prepared the whole-group discussions. We characterize the episodes in the discussions and point to examples of mathematical learning opportunities.

On the theoretical level, we reformulate a six-stage procedure for preparing and conducting whole-group discussions. All stages in the procedure favour the efficient management of a whole-group discussion and can contribute to the creation of learning opportunities. We characterize the episodes in a discussion in two dimensions: instrumental, which focuses on artefacts and how these are used in class, and discursive, which focuses on a set of patterns that help to understand the general development of the episodes and their shared characteristics. On the instrumental level we consider six types of orchestration and on the discursive level we identify eight stages in the discussion of a problem. Still on the discursive level, in order to analyse the episodes more deeply and obtain more clues to determine the mathematical learning opportunities generated, we study certain actions that took place during the discussion. We focus on the executors (students or teachers) and their typology. Finally, we regard mathematical learning opportunities to be the relationships between the different aspects of mathematical knowledge (conceptual, algorithmic, heuristic, instrumental, interpretative, or argumentative structures) and the actions that potentially facilitate learning of these aspects. These opportunities arise out of actions generated by situations and circumstances in interaction processes in the mathematics class.

Regarding methodology, the data was collected at two secondary schools with students aged 14 to 15. This data is on whole-group discussions of an initial activity on similarity in the plane, conducted by two mathematics teachers, Luis and Pilar, who were chosen on the basis of various initial teaching characteristics ascertained from previously-held interviews. The work cycle followed in class combines pair work, whole-group discussion and individual written reflection following discussion of the problems. The mathematical aims of the task studied are to examine the proportionality of polygons, jointly formulate a definition of similarity based on equality of angles and proportionality of homologous sides, and relate perimeters and areas of similar two-dimensional figures.

Data analysis is divided into four stages. Firstly, we examine certain phases in the procedure and determine how each teacher has prepared the whole-group discussion. Next, we divide the discussions into episodes and obtain a description of both teachers' activity type. Then we examine all the episodes more closely, determine the actions that characterize them and detect and classify learning opportunities, focusing on their mathematical aspects.

The first result in the article points to two types of teaching activity: *teacher-centred* and *participative*. In teacher-centred activity, the orchestration is focused on the teacher, there is a sequential, yet superficial, distribution, incomplete treatment of the discussion stages and the dominant orchestration type is that of explanation through the artefact. This is seen in the case of Luis. Participative activity, on the other hand, means sharing of the orchestration between teacher and students. Sequential distribution is apparent, along with quite comprehensive treatment of the discussion stages. Orchestration here mainly involves explaining, experimenting and discussing on the basis of an artefact. It is exemplified by Pilar.

The second result points to a close dependence between each teacher's activity and the generation of mathematical learning opportunities. The participative activity mode is seen to generate more learning opportunities than the teacher-centred one, though the article does not draw wider conclusions from this. Additionally, the generation of learning opportunities is linked to the way each teacher has prepared the group discussion. Luis' preparation is of the traditional type and does not go deeply into the stages of the procedure, so fewer learning opportunities are generated in his session than in Pilar's. Pilar attached particular importance to the anticipation stage, drawing concept maps to guide her management of the activity.