http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.997
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Estrategias de sentido numérico en estudiantes del Grado en Matemáticas

Strategies of number sense in Mathematics Degree students

Rut Almeida, Alicia Bruno
Universidad de La Laguna
rutalca@gmail.com, abruno@ull.es

Josefa Perdomo Díaz
Centro de Modelamiento Matemático y Centro de Investigación Avanzada en Educación.
Universidad de Chile
jperdomo@dim.uchile.cl

RESUMEN • Se presentan resultados de una investigación sobre el sentido numérico de un grupo de estudiantes universitarios del Grado en Matemáticas en España. El objetivo de la investigación es estudiar el uso de estrategias asociadas al sentido numérico que manifiestan estos estudiantes. Los resultados muestran que, a pesar de la alta formación matemática de estos alumnos, manifiestan bajo éxito en las respuestas a determinadas cuestiones numéricas, cuando se les pide resolverlas siguiendo métodos no tradicionales de cálculo.

PALABRAS CLAVE: sentido numérico; futuros profesores.

ABSTRACT • This paper presents results of an investigation about the number sense of a student group from the Mathematics Degree from Spain. The objective of this research is to study the use of strategies associated to number sense shown by these students. Results show that, despite the high mathematical knowledge of these students, they show a low success when answering to certain numerical questions, if they are asked to solve them without using traditional calculation methods.

KEYWORDS: number sense; pre-service teachers.

Fecha de recepción: julio 2012 • Aceptado: mayo 2013

Almeida, R., Bruno, A., Perdomo-Díaz, J. (2014) Estrategias de sentido numérico en estudiantes del Grado en Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 32 (2), pp. 9-34

INTRODUCCIÓN

La expresión *sentido numérico* aparece en documentos curriculares, asociada al hecho de que el aprendizaje matemático debe ser una actividad que «tenga sentido» (NCTM, 2000) y promoverlo se convierte en uno de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas. En España, se destaca la importancia del desarrollo del *sentido numérico* en las dos etapas de la educación obligatoria. En la Educación Primaria se indica que: «El bloque 1, Números y operaciones, pretende esencialmente el desarrollo del *sentido numérico* entendido como el dominio reflexivo de las relaciones numéricas» (BOE, 2006: 43.096). Esto se expresa en capacidades como la habilidad para descomponer números de forma natural, comprender y utilizar la estructura del sistema de numeración decimal, usar las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas para realizar cálculos mentales, todo ello en diferentes contextos y seleccionando el método más apropiado para cada caso. En la Educación Secundaria Obligatoria se amplían los conjuntos numéricos y se consolidan los ya estudiados: «el desarrollo del *sentido numérico* iniciado en la educación primaria continúa en educación secundaria con la ampliación de los conjuntos que se utilizan y la consolidación de los ya estudiados». Lo importante en esta etapa «es una comprensión de las operaciones que permita un uso razonado de las mismas, en paralelo con el desarrollo de la capacidad de estimación y cálculo mental que facilite ejercer un control sobre los resultados y los posibles errores» (BOE, 2007: 750).

La inclusión del sentido numérico en los currículos ha hecho que numerosas publicaciones sobre este tópico se sitúen en el contexto de la innovación educativa, con actividades e indicaciones metodológicas (Anghileri, 2006; NCTM, 2000; Reys, 1991). Desde la investigación educativa se analizan las respuestas de estudiantes a tareas que implican el uso del sentido numérico y también los cambios metodológicos que lo fomentan. Estas investigaciones se han realizado principalmente con alumnado de educación primaria (Alsawaie, 2011; Veloo, 2010; Yang, 2005; Yang, Li y Lin, 2008), observándose menos énfasis en la educación secundaria (Markovits y Sowder, 1994; Reys y Yang, 1998; Veloo, 2010). A pesar de la importancia del sentido numérico en los currículos, los resultados muestran que los estudiantes tienden a usar procedimientos estándares de cálculo en tareas que podrían resolver estableciendo relaciones basadas en su conocimiento numérico (propiedades, relaciones numéricas, estimación, etc.). Estas conclusiones se han extendido a los futuros docentes, quienes muestran poca tendencia a utilizar procedimientos propios del sentido numérico (Alajmi y Reys, 2007; Contreras, Carrillo, Zakaryan, Muñoz-Catalán y Climent, 2012; Gómez, 1995; Tsao, 2004; Veloo, 2010; Yang, Reys, y Reys, 2009).

El objetivo de la investigación que se presenta es identificar estrategias de sentido numérico de un grupo de futuros profesores de matemáticas de secundaria (estudiantes universitarios del grado en Matemáticas de la Universidad de La Laguna, España). Se ha utilizado una prueba escrita con el objetivo de analizar el éxito y las estrategias que emplean, en actividades que pueden resolverse con conocimiento numérico y habilidades diferentes a procedimientos basados en reglas o algoritmos estándares.

CARACTERIZACIÓN DEL SENTIDO NUMÉRICO

El sentido numérico no se define de una forma única y completamente delimitada. Las definiciones e intereses de las investigaciones realizadas sobre este tópico difieren cuando provienen de la psicología cognitiva o de la educación matemática. Las primeras suelen presentar estudios cognitivos sobre el sentido numérico propio de las primeras edades (intuiciones elementales de numerosidad, conteo o comparación numérica de magnitudes, etc.) (Berch, 2005; Gersten, Jordan y Flojo, 2005); en la educación matemática el interés suele centrarse en la enseñanza y aprendizaje, ampliando el sentido numérico a tareas más complejas.

Greeno (1991) indicó que un buen sentido numérico se manifiesta cuando se tiene un cálculo mental flexible, se realizan buenas estimaciones numéricas y se hacen inferencias adecuadas sobre las cantidades. Para activar estas habilidades es necesario desarrollar una «intuición cuantitativa», un sentido de lo que significan las cantidades que representan los números (Wagner y Davis, 2010). Sowder (1992) define sentido numérico como una red conceptual, bien organizada, que permite relacionar los números y las operaciones, sus propiedades y resolver los problemas de una forma creativa y flexible.

Estas definiciones muestran que el sentido numérico implica tener conocimiento de los contenidos numéricos, junto con otras habilidades matemáticas que permitan usarlo de manera útil y adecuada en determinadas situaciones cotidianas o tareas matemáticas. En trabajos recientes se ha identificado esta visión del sentido numérico con la competencia numérica (Contreras *et al.*, 2012), concepto que abarca aspectos más amplios que los incluidos en las distintas definiciones de sentido numérico utilizadas hasta el momento en la literatura sobre este tópico.

El sentido numérico se ha caracterizado a través de distintas *componentes*, tanto para poder analizarlo desde la investigación, como para desarrollar tareas de aula (McIntosh, Reys y Reys, 1992; NCTM, 1989; Reys y Yang, 1998). Las componentes que se han presentado son diferentes en cantidad y tipología. A partir de las revisiones de trabajos sobre sentido numérico, Berch (2005) y Methe *et al.* (2011) presentaron un listado de 30 y 23 componentes, respectivamente. Sin embargo, si se analizan los listados de componentes de ambos estudios se observa que se nombran componentes de habilidades muy concretas («Contar de dos en dos», o «Contar a partir de»), algunas equivalentes pero expresadas de distinta forma (por ejemplo, «Reconocer puntos de referencia numéricos» y «Tener números como referentes para medir situaciones del mundo real»), y otras que difícilmente ayudan a hacerlo operativo, por ejemplo, cuando se dice que una componente del sentido numérico es «Un proceso que se desarrolla y se madura con la experiencia y el conocimiento».

Sin duda, la caracterización en componentes del sentido numérico que más influencia ha tenido para la educación matemática es la propuesta en NCTM (1989): tener un buen entendimiento del significado de los números; desarrollar múltiples relaciones entre los números; reconocer la magnitud relativa de los números; conocer el efecto relativo de las operaciones en los números, y desarrollar referentes para medir objetos comunes y situaciones de su entorno. Posteriormente, McIntosh *et al.* (1992) presentan un marco más amplio con algunas de las componentes anteriores desglosadas, en el que además añaden la componente relacionada con la búsqueda de métodos eficientes de cálculo y el uso de estrategias numéricas adecuadas. Las investigaciones más recientes utilizan componentes de ambos marcos (Veloo, 2010; Yang, Li y Lin, 2008; Yang, Reys y Reys, 2009; Yang y Tsai, 2010). En concreto, las componentes que aparecen como esenciales del sentido numérico en dichos trabajos se corresponden con las siete que se muestran a continuación, y en general, seleccionan alguna/s de ella/s para su análisis detallado. Aunque no es objeto de este estudio indagar las siete componentes en profundidad, como veremos más adelante, las tomamos como marco para diseñar el instrumento de investigación y para evaluar los datos.

1. Comprender el significado de los números

El sentido numérico implica comprender cómo está organizado el sistema de numeración decimal y las múltiples relaciones que se dan entre los números. Un aspecto importante de esta componente es manejar el valor posicional, incluyendo su aplicación a los números naturales y decimales, y comprender las distintas expresiones de los números.

2. Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números

Es la habilidad para reconocer o estimar el tamaño absoluto de un número, cantidad o medida, o el tamaño relativo en relación con otro número, cantidad o medida. Se suele incluir en esta componente el tener estrategias útiles para comparar y ordenar números, y para identificar números entre dos dados.

3. Usar puntos de referencia

Es la habilidad para utilizar referentes mentales (matemáticos o reales) para pensar sobre los números y resolver problemas. Los puntos de referencia son valores con los que una persona «se siente cómoda» haciendo comparaciones o cálculos. Muchas veces son personales y están asociados a situaciones reales.

4. Utilizar la composición y descomposición de los números

Esta componente implica la habilidad para componer y descomponer los números, de una forma equivalente, con el objetivo de obtener el resultado de una operación, presentando mayor fluidez procedimental.

5. Usar múltiples representaciones de los números y las operaciones

El sentido numérico se manifiesta al utilizar diferentes representaciones (gráficas o pictóricas) para resolver problemas numéricos de manera efectiva y flexible.

6. Comprender el efecto relativo de las operaciones

Se incluye la habilidad para identificar cómo las diferentes operaciones afectan al resultado final de los problemas numéricos, lo que se suele denominar «comprender el efecto relativo de las operaciones» y «saber relacionar las operaciones». También incluye emplear propiedades para llegar más fácilmente a los resultados.

7. Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta

El sentido numérico se refleja cuando se siguen estrategias adecuadas en función de la tarea (método gráfico, cálculo escrito, estimación, cálculo mental, etc.) y se tiene la habilidad para evaluar si un resultado es razonable.

Aunque se presentan de manera independiente, estas componentes tienen fuertes relaciones entre ellas dependiendo de la tarea o del sujeto que la realice (McIntosh *et al.*, 1992).

INVESTIGACIONES SOBRE SENTIDO NUMÉRICO

Las investigaciones que han evaluado el sentido numérico de alumnado de educación primaria concluyen que la mayoría de ellos tienden a usar reglas y algoritmos en la resolución de problemas numéricos y presentan grandes dificultades para usar elementos propios del sentido numérico. Reys *et al.* (1999) realizaron una investigación con estudiantes de 8 a 14 años de distintos países (Australia, Suecia, Taiwán y Estados Unidos) y observaron que, por lo general, coinciden en un bajo uso del sentido numérico, aunque con diferencias en algunas cuestiones de las planteadas.

Yang, Li y Lin (2008) compararon el uso de las componentes 2, 5, 6 y 7 del marco de sentido numérico presentado en el apartado anterior, en alumnado de 5.º de Primaria en Taiwán. La componente que más éxito tuvo fue la 2, «reconocer el tamaño relativo de los números», y los resultados más bajos se encontraron cuando se pedía a los estudiantes «evaluar lo razonable de las estimaciones de un cálculo numérico». Observaron una relación significativa entre las altas calificaciones académicas en matemáticas y un buen nivel de sentido numérico.

La componente 7 del sentido numérico incluye decidir qué estrategia o método es más adecuado en una situación determinada (cálculo escrito, mental o estimación, gráfico…). El cálculo mental y la estimación son un tópico de mucho interés, sobre los que se han realizado numerosas investigaciones tanto a nivel internacional (Sowder, 1992) como en España (De Castro, Castro y Segovia, 2004; Gómez, 1995; Ortega y Ortiz, 2006). Las investigaciones que analizan las habilidades en estimación y cálculo mental frente al nivel de sentido numérico general (McIntosh *et al.*, 1992; Sowder, 1992) concluyen que un uso flexible de los números al realizar estimaciones está relacionado con un adecuado sentido numérico general. Sin embargo, los alumnos que demuestran tener buenos resultados en cuestiones de cálculo escrito no obtienen los mismos resultados en tareas en las que necesitan hacer uso del sentido numérico. Es decir, las habilidades en el cálculo escrito no se transfieren a formas *no algorítmicas* de resolución de estas tareas (McIntosh *et al.*, 1992; Reys y Yang, 1998; Veloo, 2010).

Las investigaciones que analizan metodologías de aula que fomentan el sentido numérico indican que una instrucción adecuada produce aprendizajes más significativos que las metodologías tradicionales y las mejoras en el aprendizaje se logran a largo plazo (Markovits y Sowder, 1994; Veloo, 2010). Wagner y Davis (2010) señalan que en las recomendaciones del NCTM se distingue entre un sentido cuantitativo (*sense of quantity*) y una habilidad con los cálculos. Normalmente se presta atención al sentido cuantitativo (o de magnitud) en los primeros años de la escolaridad, mientras que en la escuela secundaria dominan las experiencias computacionales, «eclipsando» al sentido cuantitativo. Por ello reclaman que este sentido cuantitativo se prolongue más allá de la primera etapa educativa.

El conocimiento del profesor y una metodología adecuada son clave en el desarrollo del sentido numérico (Alsawaie, 2011). Se han encontrado escasas habilidades asociadas al sentido numérico en profesores de primaria y secundaria tanto en activo como en formación (Tsao, 2004). Alajmi y Reys (2007) estudiaron cómo profesores de secundaria en Kuwait evaluaban lo razonable de una respuesta numérica. Para estos docentes una respuesta es razonable si se realizan los cálculos correctos y la respuesta no se aleja del resultado exacto. Aunque reconocen que la estimación es una herramienta útil en la vida cotidiana, consideran que el aprendizaje debe centrarse en adquirir otro tipo de conocimientos numéricos.

Yang, Reys y Reys (2009) evaluaron dos componentes del sentido numérico: «usar puntos de referencia para reconocer la magnitud de los números» y «conocer el efecto relativo de las operaciones» en futuros profesores de Primaria de Taiwán. El estudio se realizó con 280 estudiantes universitarios, con una formación previa en matemáticas recibida a lo largo de dos cursos, «Basic Mathematics» y «Mathematics Teaching», que contestaron a una prueba escrita de 12 ítems. Los resultados muestran un éxito variable (entre 31 y 95%) y frecuentes razonamientos basados en reglas.

Un estudio realizado en Brunei Darussalam compara la habilidades de sentido numérico entre el profesorado en activo de Primaria y Secundaria (Veloo, 2010). Las habilidades en sentido numérico son bajas para ambos grupos de profesores, con debilidades similares a las de los estudiantes de Secundaria, aunque los profesores de esta obtuvieron mejores resultados que los de Primaria.

El dominio de ideas matemáticas relacionadas con el sentido numérico por parte de los futuros profesores es fundamental para que en la práctica pedagógica exista un verdadero cambio metodológico con una adecuada planificación y actuación en el aula, a través de tareas que estimulen y motiven a los alumnos para el desarrollo del sentido numérico.

OBJETIVOS

Los estudios sobre profesores de matemáticas han mostrado cómo su conocimiento del contenido influye en las elecciones que realizan sobre la práctica en el aula. Los profesores con un adecuado conocimiento del contenido matemático son más flexibles en su enseñanza y tienden a promover que sus alumnos establezcan conexiones matemáticas (Faulkner, 2009).

Establecer conexiones entre conceptos numéricos es una herramienta básica para desarrollar sentido numérico. Por ello es importante que los profesores tengan una profunda comprensión de las componentes del sentido numérico y que conozcan las dificultades que pueden encontrar sus alumnos en ellas.

Es una realidad, tanto en España como en otros países, que los futuros profesores no siempre poseen una comprensión conceptual adecuada de los contenidos matemáticos que deberán enseñar. Son numerosas las investigaciones que muestran dificultades en el dominio numérico por parte de futuros profesores de Primaria, aunque menores son las que se refieren a los profesores de Secundaria.

Esta investigación indaga en el sentido numérico de los futuros profesores de Secundaria de matemáticas, a través de una muestra de estudiantes del Grado en Matemáticas en España. El objetivo general es constatar si la alta formación matemática de los futuros profesores de secundaria se manifiesta en estrategias ricas numéricamente. Para ello se ha planteado el siguiente objetivo: evaluar el éxito y analizar las estrategias de alumnado del Grado en Matemáticas en tareas numéricas que permiten hacer uso de componentes del sentido numérico.

METODOLOGÍA

Participantes

Esta investigación se realizó con un total de 67 estudiantes del Grado en Matemáticas de la Universidad de La Laguna (España), 33 alumnos de 2.º curso y 34 de 3.º, con formación en Análisis Matemático, Cálculo Numérico, Álgebra, Geometría, Topología y Estadística. En la Universidad de La Laguna, el año académico en que se realizó la investigación (2011-12) había un único grupo de cada curso, por lo que el número de alumnos que participó fue el que regularmente acude a clase, sin hacer selección de estos. La investigación no se realizó con el grupo de primer curso porque llevaban escaso tiempo de formación universitaria (dos meses), y tampoco con el de cuarto, por ser un grupo poco numeroso.

Aunque existe la posibilidad de que no todos se dediquen profesionalmente a la docencia en Educación Secundaria, la mayoría de los profesores de matemáticas de este nivel educativo provienen de la Licenciatura o actual Grado en Matemáticas y habrán recibido una formación matemática similar a la de esta población.

Instrumento

Para el análisis del sentido numérico de este grupo de estudiantes se elaboró una prueba escrita con 10 ítems (Anexo), diseñada a partir de los utilizados en otras investigaciones (Yang, 2005; Yang *et al.*, 2009). La elección de los ítems que conforman la prueba se realizó considerando que pudieran responderse con razonamientos que implicaran las diferentes componentes del sentido numérico (tabla 1). No es objetivo de esta investigación realizar un estudio completo de todas las componentes, lo cual implicaría un mayor número de ítems, sino proporcionar información sobre tareas que muestren un rango de respuestas de sentido numérico. La tabla 1 muestra la relación de cada ítem con las componentes del sentido numérico (SN) que se contemplan a priori, como principales para dar respuesta a cada ítem, aunque esto dependerá del razonamiento que siga cada estudiante.

Tabla 1.
Relación ítems con las componentes del sentido numérico

Ítem	Componentes del SN	Ítem	Component es del SN
1. Botellas de agua	6 y 7	6. División entero-decimal	6
2. Cajas	6 y 7	7. Área de la casa	4, 5 y 6
3. Cintas de colores	2 y 3	8. Distancia entre fracciones	2
4. Colocar la coma decimal	3 y 6	9. Área de la granja	3, 5 y 6
5. Ordenar fracciones y decimales	1, 2 y 3	10. Volumen de la clase	2

Procedimiento de recogida y análisis de datos

Se implementó el cuestionario con el siguiente formato: cada pregunta aparecía en un folio independiente, con espacio para indicar la respuesta y la justificación. Las instrucciones fueron las mismas que las dadas en la investigación de Yang *et al.* (2009): responder sin realizar cálculos exactos, justificar y explicar la respuesta, disponer de 3 minutos para cada ítem y no pasar de página hasta recibir aviso.

Los investigadores analizaron las respuestas de los 67 estudiantes por separado, identificando si eran correctas o incorrectas y señalando el tipo de razonamiento utilizado, según las siguientes categorías:

— *Sentido numérico*: utilizan alguna(s) componente(s) del marco del sentido numérico.
— *Parcialmente sentido numérico*: la justificación combina el uso de componentes del sentido numérico con el uso de reglas memorizadas y/o algoritmos.
— *Basado en reglas*: hacen uso, exclusivamente, de algoritmos o reglas memorizadas.
— *Razonamiento incorrecto*: utilizan argumentos matemáticamente incorrectos.
— *Razonamiento incompleto* o *poco claro*: no proporcionan suficientes argumentos para identificar qué razones les llevan a su respuesta.
— *Sin argumentar*: responden al ítem pero no presentan justificación.
— *Blanco*: no responden a la pregunta.

RESULTADOS

Los resultados se presentan en tres apartados diferentes: 1) análisis de las respuestas correctas y uso de estrategias de sentido numérico; 2) detalle de los tipos de razonamiento utilizados en los cinco primeros ítems de la prueba; 3) respuestas más destacables de los ítems restantes.

Análisis general de los resultados

En esta sección se presenta un análisis general de las respuestas de los estudiantes del Grado en Matemáticas a los 10 ítems del cuestionario. La tabla 2 muestra los resultados de éxito en cada ítem y el tipo de razonamiento observado en las respuestas, distinguiendo entre el éxito y el fracaso.

Tabla 2
Resultados de éxito y estrategias de los 10 ítems

Ítem	Éxito	Tipo de razonamiento								
		SN		PSN		BR		Otros		BL
		E	F	E	F	E	F	E	F	F
1. Botellas de agua	57/67	46	1	1	0	6	2	4	4	3
2. Cajas	40/67	24	2	0	2	2	4	14	15	4
3. Cinta	39/67	25	4	0	0	10	8	4	14	3
4. Colocar la coma decimal	24/67	20	2	1	5	0	29	3	7	0
5. Ordenar distancias	28/67	20	9	0	0	5	5	3	21	4
6. División entero-decimal	45/67	36	5	6	1	1	1	2	14	1
7. Área de la casa	25/67	15	12	0	0	2	1	8	26	3
8. Distancia entre fracciones	18/67	11	4	0	1	3	8	4	32	4
9. Área de la granja	35/67	14	2	4	1	6	2	11	23	4
10. Volumen de la clase	35/67	34	16	0	3	0	0	1	9	4

E: Éxito; F: Fracaso
SN*:* Sentido numérico; PSN: Parcial sentido numérico; BR: Basado en reglas
Otros: Incorrectos, Incompletos, Sin justificación; BL: Blanco

El éxito varió en función de los ítems (entre 18/67 del ítem 8 a 57/67 del ítem 1). En general, respetaron la consigna de «no utilizar algoritmos o reglas», lo que explicaría el bajo éxito de algunos ítems. La evaluación de los ítems como correctos o incorrectos permite mostrar cuántos alumnos contestaron correctamente a un número determinado de ítems.

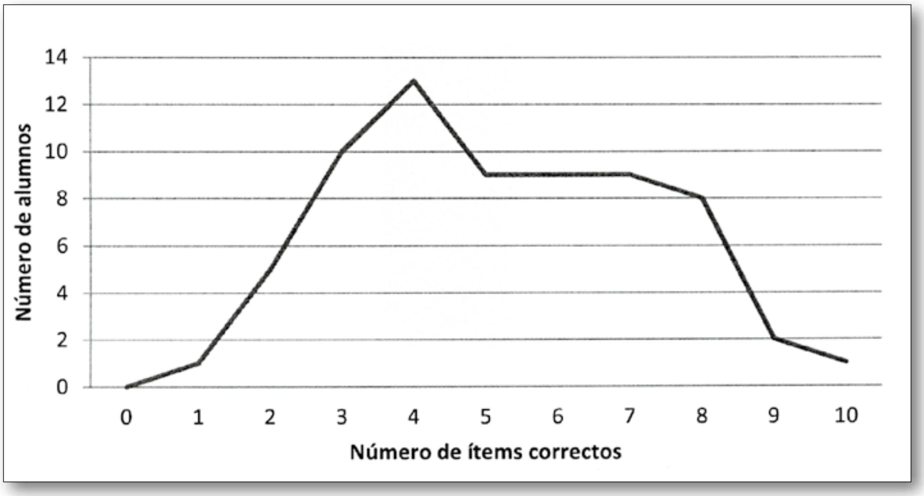


Fig. 1. Relación número de ítems correctos/número de alumnos

En el gráfico se observan dos resultados extremos: solo un estudiante contestó correctamente a todos los ítems y un estudiante contestó con éxito únicamente a un ítem. Esto último resulta sorprendente dado que los conceptos que se trabajan en los ítems están contenidos en el currículo de Educación Secundaria. Casi la mitad de los estudiantes (29/67) contestaron correctamente a menos de 5 ítems, aunque la mayor proporción de alumnos se acumula entre 5 y 8 ítems contestados correctamente.

En cuanto a las estrategias utilizadas, la variedad fue amplia. Aunque los resultados de razonamientos de sentido numérico no son siempre altos, en la mayoría de los ítems fue el más usado y está asociado a respuestas correctas, lo que no ocurre con otros tipos de razonamiento. En cierta forma, la mayoría de las veces que se usa el sentido numérico se hace de forma correcta. También son altas las proporciones de respuestas catalogadas en «Otros» (razonamientos incorrectos, incompletos o poco claros).

La figura 2 muestra el número de alumnos que dan respuestas correctas utilizando un razonamiento con sentido numérico o parcialmente de sentido numérico. Un alto número de alumnos contestaron, con este tipo de razonamiento y correctamente, solo a 2 ítems o menos. Más de la mitad de los estudiantes contestaron correctamente con sentido numérico a menos de 4 ítems. Son pocos los alumnos que contestan a 8 o más ítems de manera correcta y con sentido numérico. Estos resultados hacen concluir que, por lo general, los alumnos de la investigación no muestran un uso alto del sentido numérico en las actividades propuestas.

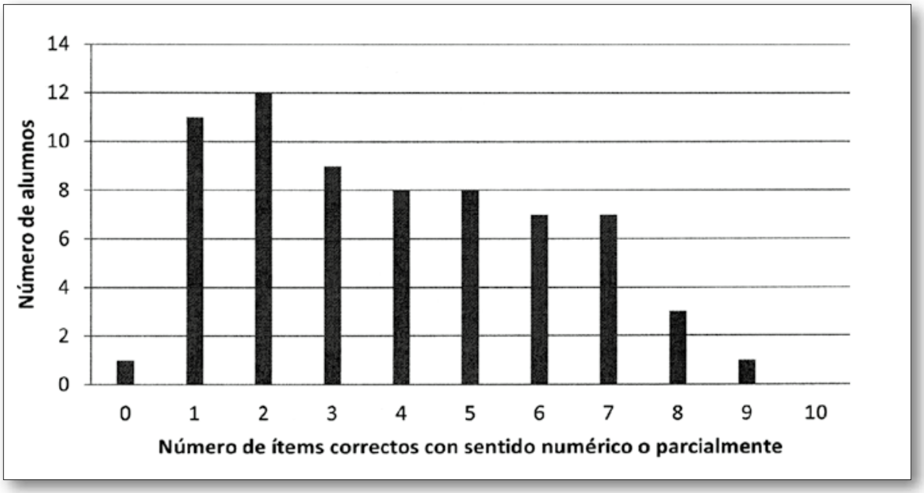


Fig. 2. Relación número de ítems correctos de SN/PSN y número de alumnos

En resumen, los ítems pueden agruparse teniendo en cuenta los resultados de las estrategias utilizadas de la siguiente forma:

- Ítems 1, 6 y 10: Tienen la proporción más alta de razonamientos basados en sentido numérico, tanto correctos como incorrectos.
- Ítems 3 y 4: Los razonamientos basados en sentido numérico son inferiores a la mitad y presentan la mayor proporción de razonamientos basados en reglas.
- Ítems 2, 5 y 7: Cerca de la mitad de las respuestas están basadas en sentido numérico y la otra mitad son principalmente razonamientos incorrectos, incompletos o sin justificación.
- Ítems 8 y 9: Tienen la proporción de razonamientos de sentido numérico más bajos y el mayor número de razonamientos incorrectos, incompletos o no argumentado.

Resultados y análisis de estrategias de los ítems del 1 al 5

En este apartado se muestran los resultados más detallados de los ítems del 1 al 5 (tabla 1 y anexo) que coinciden con los que aparecen desarrollados en el trabajo de Yang *et al.* (2009). Los datos a los que se hace referencia en este apartado también aparecen en la tabla 2.

Ítem 1. Botellas de agua

Se trata de un ítem contextualizado cuyo objetivo es la búsqueda de una estrategia apropiada de estimación que se resuelve mediante el uso de relaciones de la comparación de razones, sin necesidad de calcular el precio por mililitro de cada botella, estrategia esta última denominada «método de la unidad» (*unitary method*, Hart, 1981: 89).

Este ítem es el de mayor éxito para los estudiantes (57 de los 67 estudiantes). Las respuestas clasificadas de sentido numérico (47 estudiantes) fueron las que se justificaron sin calcular el precio exacto de la misma cantidad de agua para ambas botellas, con razonamientos similares al siguiente:

> «La botella pequeña de 600 ml cuesta 18 céntimos, luego 1.200 ml costarán 36 céntimos. La botella grande de 1.500 ml solo cuesta 35 céntimos, luego la botella grande es más rentable».

Las estrategias basadas en reglas son las que calculan el precio del mililitro en cada botella, o que calculan la cantidad de mililitros por cada céntimo (figura 3).

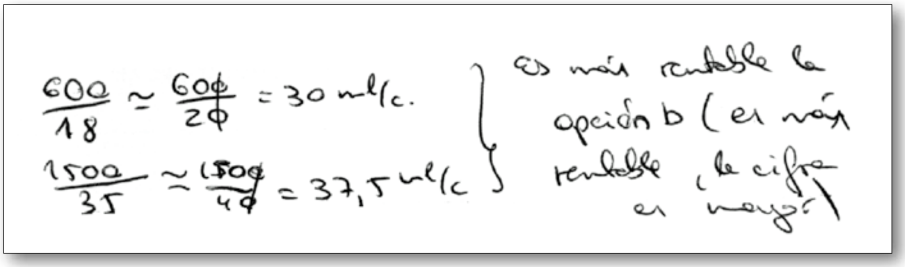


Fig. 3. Respuesta de estudiante del Grado en Matemáticas al ítem 1

Ítem 2. Cajas

El objetivo del ítem 2 es que los alumnos decidan qué caja necesitará más cinta. Se pretende que utilicen la componente del sentido numérico *desarrollar estrategias* teniendo en cuenta que la altura y el ancho de ambas cajas son los mismos, por lo que necesitaríamos solo comparar la cinta central que rodea las figuras por la mitad del alto.

Los estudiantes que contestaron con éxito a este ítem fueron 40 de los 67. Las estrategias se reparten, principalmente, entre sentido numérico (26/67), e incorrectas, poco claras, incompletas (29/67). Un razonamiento típico clasificado como de sentido numérico fue el siguiente:

> Puesto que la altura de ambas cajas es la misma, no necesitamos considerarla. Sólo necesitamos comparar la cinta que rodea ambas cajas por la mitad. La cinta del cubo= $4 \times 10 >$ la cinta del cilindro = $3{,}14 \times 10$.

Además, aparecen otras estrategias aunque toman elementos propios del sentido geométrico. Es el caso de los estudiantes que argumentan que el cilindro puede introducirse en el cubo y solo es necesario comparar parte de la cinta de forma visual (figura 4).

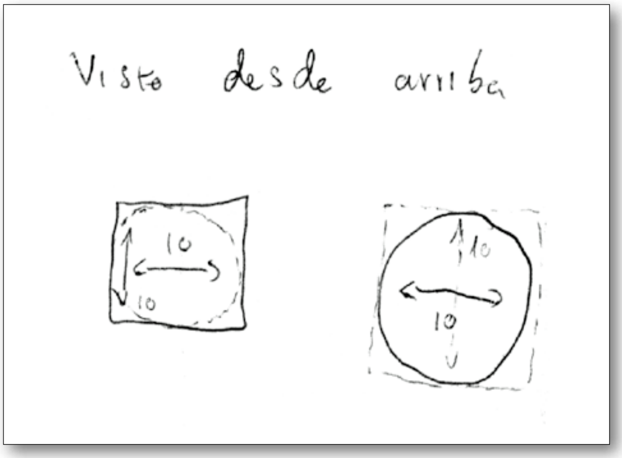


Fig. 4. Respuesta de estudiante del Grado en Matemáticas al ítem 2

La estrategia clasificada como basada en reglas es la de calcular la cantidad total de cinta que necesita cada caja, y posteriormente comparar ambas longitudes, es decir:

$$3 \cdot 10 \cdot 4 = 120$$
$$2 \cdot 10 \cdot 4 + \pi \cdot 10 = 80 + 10\pi = 80 + 31{,}4 < 120$$

Los razonamientos incorrectos de los estudiantes relacionan la cantidad de cinta necesaria, con el volumen de las figuras, o bien con el número de caras, argumentando, por ejemplo, que «como el cilindro tiene 2 caras y el cubo 6, el cubo necesitará más cinta».

Estos razonamientos basados en conceptos geométricos incorrectos se alejan de lo esperado en estudiantes del Grado en Matemáticas.

Ítem 3. Cintas

Esta pregunta se planteó con el objetivo de analizar las estrategias que los estudiantes utilizan para comparar las fracciones $\frac{30}{31}$ y $\frac{36}{37}$. La respuesta basada en sentido numérico que se esperaba era la de considerar el 1 como *punto de referencia* y comparar los residuos de las fracciones ($\frac{1}{31}$ y $\frac{1}{36}$)

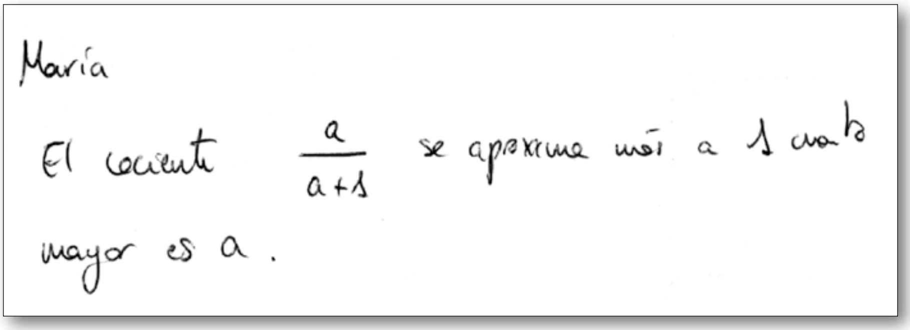
Este ítem presentó 39 respuestas correctas, de las cuales 25 se refieren a estrategias de sentido numérico.

Aunque el uso de razonamientos basados en reglas no es garantía de éxito (obsérvese que de las 18 respuestas con argumentos basados en reglas, 8 son incorrectas), creemos que algunos de los alumnos que tuvieron razonamientos poco claros o incompletos podrían haber tenido éxito siguiendo reglas.

Una de las respuestas clasificadas como basadas en sentido numérico fue la siguiente:

$$\frac{36}{37}+\frac{1}{37}=\frac{30}{31}+\frac{1}{31}>\frac{1}{37}, \text{ luego } \frac{30}{31}<\frac{36}{37}$$

Aparecen otras estrategias de sentido numérico, de nivel matemático superior, como relacionar las fracciones con una sucesión numérica y aplicar la noción de límite (figura 5) o demostrar que esta sucesión es creciente (figuras 6).


María

El cociente $\frac{a}{a+1}$ se aproxima más a 1 cuanto mayor es a.

Fig. 5. Respuesta de estudiante del grado en Matemáticas al ítem 3

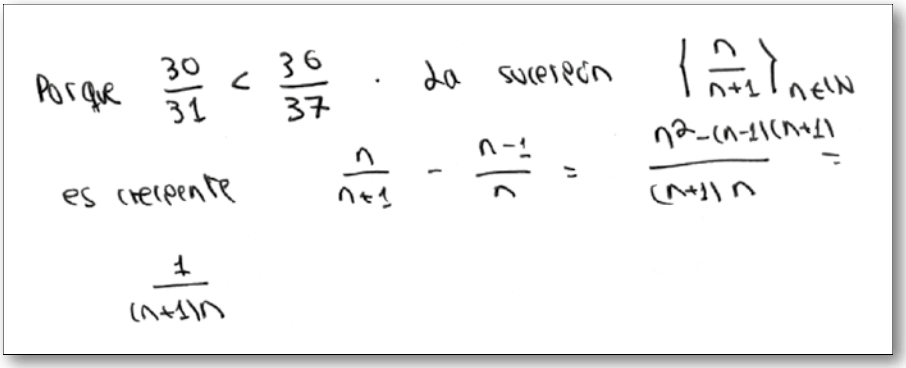
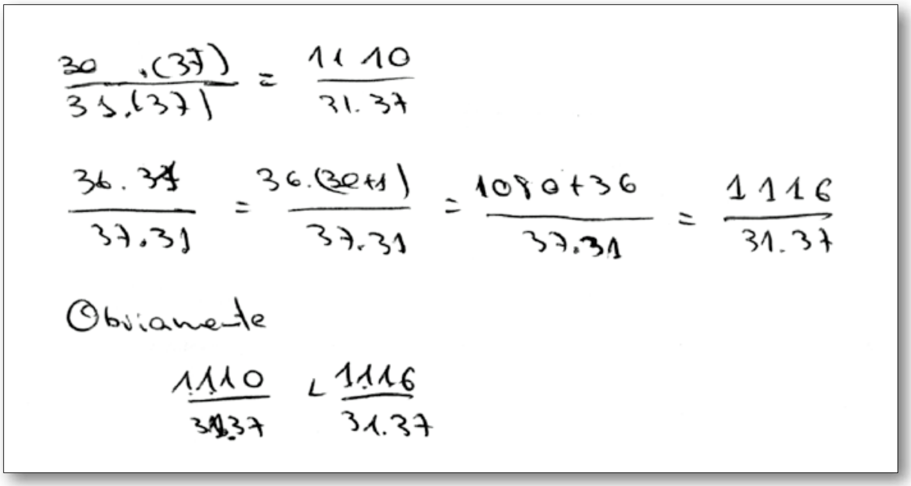

Porque $\frac{30}{31} < \frac{36}{37}$. La sucesión $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente $\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2-(n-1)(n+1)}{(n+1)n} = \frac{1}{(n+1)n}$

Fig. 6. Respuesta de estudiante del grado en Matemáticas al ítem 3

Los razonamientos más comunes clasificados como basados en reglas fueron los siguientes:

a) Reducen las fracciones $\frac{30}{31}$ y $\frac{36}{37}$ a común denominador (figura 7).


$\frac{30\cdot(37)}{31\cdot(37)} = \frac{1110}{31\cdot 37}$

$\frac{36\cdot 31}{37\cdot 31} = \frac{36\cdot(30+1)}{37\cdot 31} = \frac{1080+36}{37\cdot 31} = \frac{1116}{31\cdot 37}$

Obviamente

$\frac{1110}{31\cdot 37} < \frac{1116}{31\cdot 37}$

Fig.. 7. Respuesta de estudiante del Grado en Matemáticas al ítem 3

b) Comparan las fracciones, resultado de dividir el numerador y el denominador (figura 8).

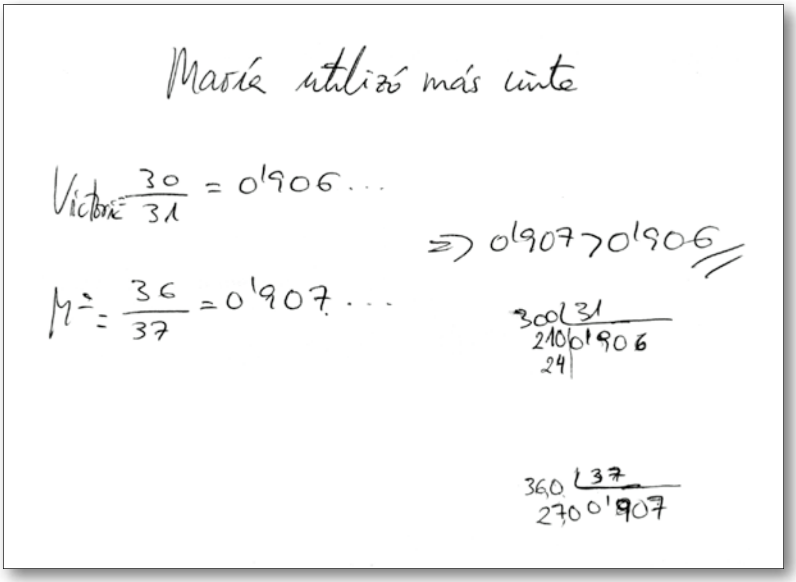


Fig. 8. Respuesta de estudiante del Grado en Matemáticas al ítem 3

Ítem 4. Colocar la coma decimal

El objetivo de este ítem es analizar el uso de *puntos de referencias y comprender el efecto relativo de las operaciones en los números* para estimar un producto de números decimales.

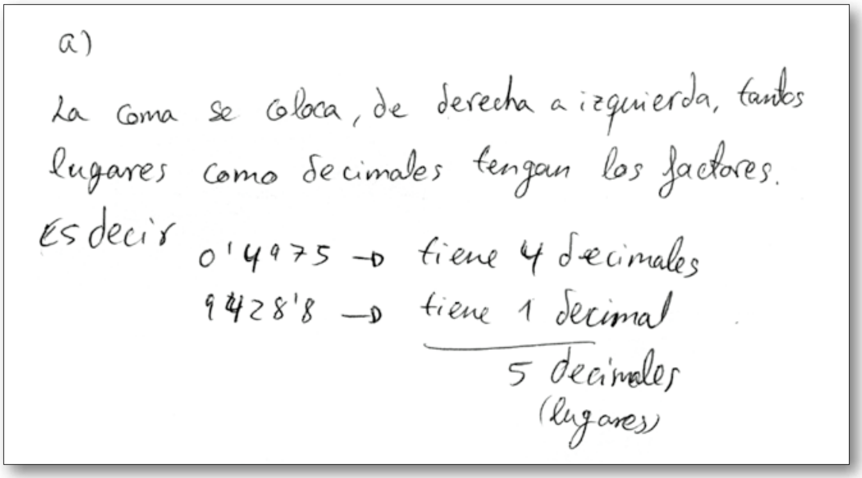
El éxito de este ítem 4 es muy bajo (24 de 67 estudiantes), centrándose en las respuestas basadas en reglas. Se esperaba que los alumnos eligiesen la respuesta correcta *c)*, utilizando argumentos asociados a un buen sentido numérico como:

– 0,4975 *se aproxima a* 0,5 *luego*:

$$0{,}4975 \times 9428{,}8 \cong 0{,}5 \times 9428{,}8 \cong \frac{9400}{2} = 4700$$

— *Aproximando* 9428,8 *por* 10.000*, una estimación del producto es* 0,4975 × 10000 = 4975.

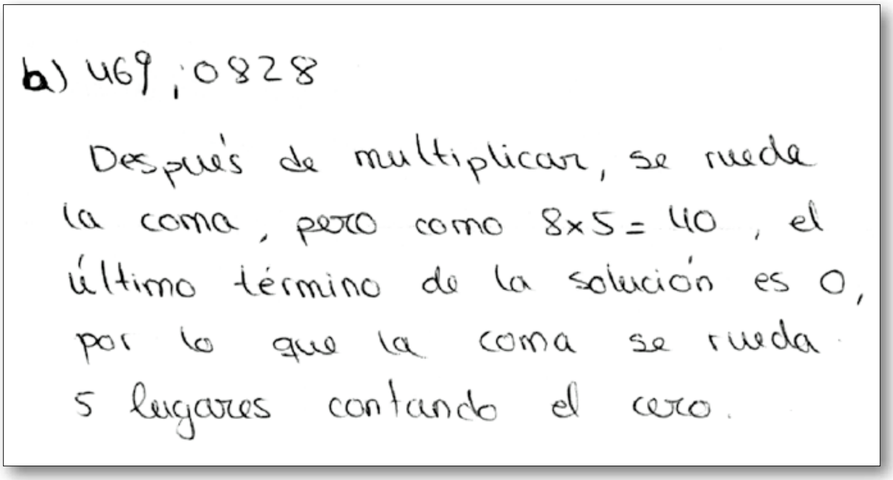
Una alta proporción de alumnos utilizaron la regla que relaciona el número de decimales del resultado de un producto, con la suma del número de decimales de los factores (figura 9).



a)
La coma se coloca, de derecha a izquierda, tantos lugares como decimales tengan los factores.
Es decir 0'4975 → tiene 4 decimales
9428'8 → tiene 1 decimal
5 decimales
(lugares)

Fig. 9. Respuesta de estudiante del Grado en Matemáticas al ítem 4

En este caso, la regla puede llevar a error si no se tiene en cuenta que el resultado del producto acaba en dos ceros. Un ejemplo de respuesta incorrecta parcialmente de sentido numérico de un alumno es la que se muestra en la figura 10, en la que el alumno solo considera el último cero de la operación.



b) 469,0828
Después de multiplicar, se rueda la coma, pero como 8x5 = 40, el último término de la solución es 0, por lo que la coma se rueda 5 lugares contando el cero.

Fig. 10. Respuesta de estudiante del Grado en Matemáticas al ítem 4

Estos errores cuando se trabaja el ajuste del valor posicional de la cifras se han detectado en trabajos previos sobre estimación y cálculo mental (De Castro, Castro y Segovia, 2004; Gómez, 1995). Los autores indican que reflejan una debilidad de la comprensión del valor posicional y sobre la coma decimal, que queda oculta cuando el trabajo se realiza con algoritmos escritos.

Las respuestas incorrectas en este ítem ponen de manifiesto que muchos estudiantes no comprueban el resultado y no valoran si el resultado escogido es razonable (componente 7 del marco de sentido numérico).

Ítem 5. Ordenar distancias

El ítem 5 pide ordenar de mayor a menor, medidas expresadas con fracciones y con decimales. El objetivo era tomar *puntos de referencia* para comparar los números dados.

En concreto, comparar las medidas dadas con los puntos 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ de forma que se puedan ordenar las distancias sin necesidad de expresar las medidas en forma decimal o pasar las fracciones a igual denominador.

En este ítem, el éxito fue de 28 estudiantes de 67, de los cuales 20 usaron estrategias de sentido numérico. Las respuestas clasificadas de sentido numérico son aquellas en las que se utilizan los cuatro puntos de referencia (figura 11).

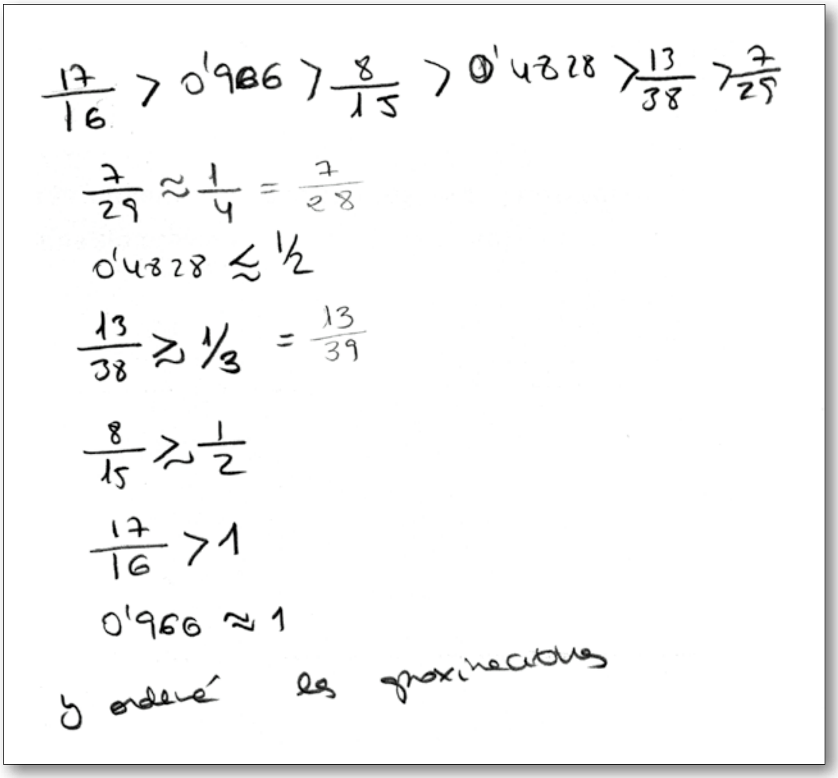


Fig. 11. Respuesta de estudiante del Grado en Matemáticas al ítem 5

Solo 10 estudiantes utilizaron razonamientos basados en reglas, expresando las longitudes en forma decimal a partir del algoritmo de la división, la mitad de ellos de manera incorrecta. Los razonamientos de 8 estudiantes se clasificaron como incorrectos, al hacer uso de un argumento de un bajo nivel para estudiantes de formación matemática superior (figura 12).

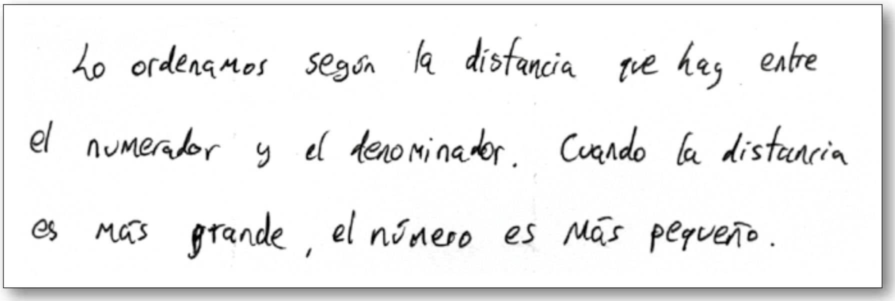


Fig. 12. Respuesta de estudiante del Grado en Matemáticas al ítem 5

Resultados de los ítems del 6 al 10

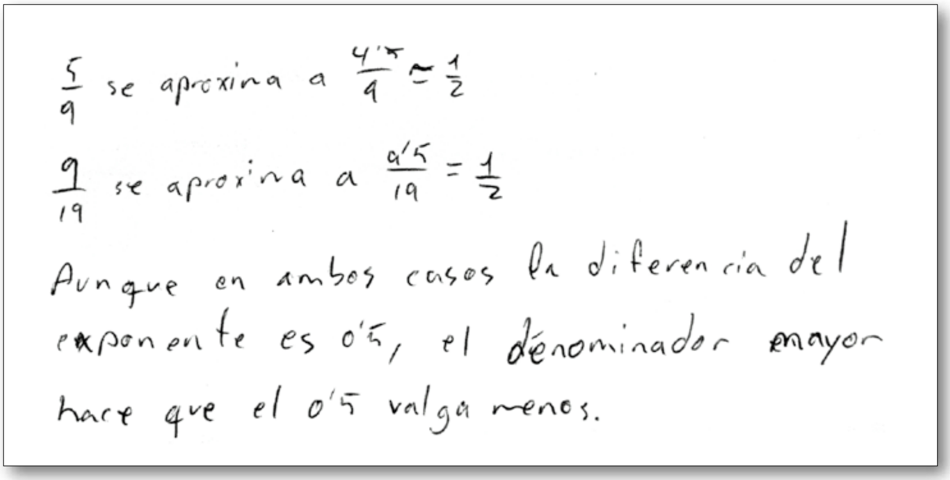
En esta sección se presenta el análisis de las respuestas de los estudiantes del Grado en Matemáticas a los ítems del 6 al 10 de la tabla 1. La tabla 2 muestra los resultados de éxito en cada uno de los ítems y el tipo de razonamiento de las respuestas.

Entre estos cinco ítems se observa diferencia en el éxito (45 estudiantes en el ítem 6 y 18 estudiantes en el ítem 8), y también en los razonamientos (el ítem 10 es el de mayor uso de sentido numérico, con 50 estudiantes ,y el de menor proporción corresponde al ítem 8, con 15 estudiantes). En cuanto a los razonamientos parcialmente de sentido numérico y los basados en reglas, los resultados para estos 5 ítems son bajos. No ocurre lo mismo con los razonamientos que hemos incluido en la columna «otros». Este grupo es, en varios casos, superior al del sentido numérico y con una alta proporción de estudiantes cuyo razonamiento se clasificó como poco claro, lo que refleja la dificultad para encontrar estrategias diferentes a las del uso de algoritmos tradicionales.

A continuación mostramos algunas de las respuestas que surgieron en estos ítems de una forma menos detallada que en el caso de los ítems del 1 al 5, destacando las estrategias de sentido numérico y los argumentos que reflejan ciertas dificultades o concepciones erróneas.

Estrategias de sentido numérico

En el conjunto de respuestas de los estudiantes encontramos diferentes estrategias de sentido numérico de distintos niveles matemáticos. Por un lado, surgieron las estrategias de sentido numérico que se esperaban a priori. Por ejemplo, en el ítem 8 los alumnos debían decidir qué fracción está más cerca de $\frac{1}{2}$ de entre dos dadas. Se observó que podían ordenarlas, pero tenían dificultades para comparar las distancias a $\frac{1}{2}$. Uno de los razonamientos que esperábamos que surgieran se ve plasmado en la respuesta del estudiante de la figura 13 que compara los residuos de los puntos M y N a $\frac{1}{2}$ (aunque comete un error en el uso del término exponente, pues se refiere al numerador), llegando a la conclusión de que ambos residuos tienen el mismo numerador, pero en el caso de N el denominador es mayor y, por lo tanto, el residuo $\frac{0,5}{19}$ será menor que $\frac{0,5}{9}$.



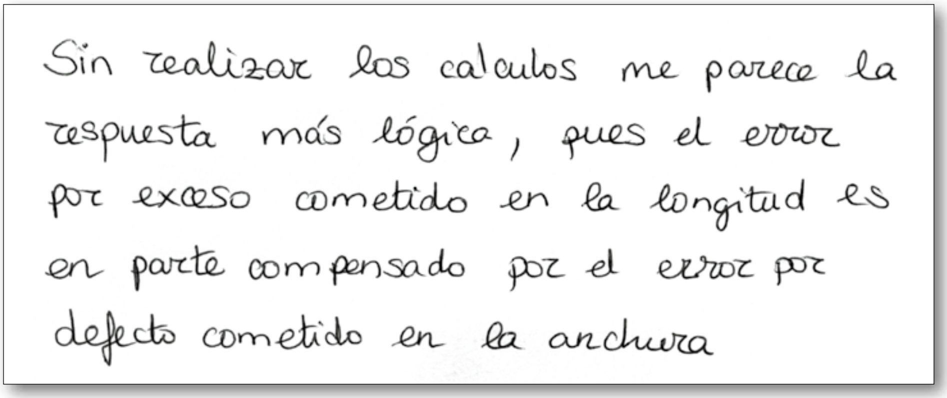
$\frac{5}{9}$ se aproxima a $\frac{4'5}{9} \simeq \frac{1}{2}$

$\frac{9}{19}$ se aproxima a $\frac{9'5}{19} = \frac{1}{2}$

Aunque en ambos casos la diferencia del exponente es 0'5, el denominador mayor hace que el 0'5 valga menos.

Fig. 13. Respuesta de estudiante del Grado en Matemáticas al ítem 8

Otro razonamiento de los esperados son los que encontramos en el ítem 7, en el que debían decidir qué estimación estaba más próxima al área exacta de una casa, evaluando el error que se cometía en cada opción. Surgieron dos estrategias distintas de sentido numérico: una en la que tenían en cuenta la compensación del error que existía en la respuesta correcta (figura 14) y otra que utiliza la representación gráfica de un producto en forma de área.



Sin realizar los calculos me parece la respuesta más lógica, pues el error por exceso cometido en la longitud es en parte compensado por el error por defecto cometido en la anchura

Fig.. 14. Respuesta de estudiante del Grado en Matemáticas al ítem 7

En el ítem 9 encontramos otro tipo de razonamiento gráfico con la representación del área, con la que el alumno determina que el área está próxima a $\frac{1}{4}$ y, por lo tanto, será menor que $\frac{1}{2}$ (figura 15).

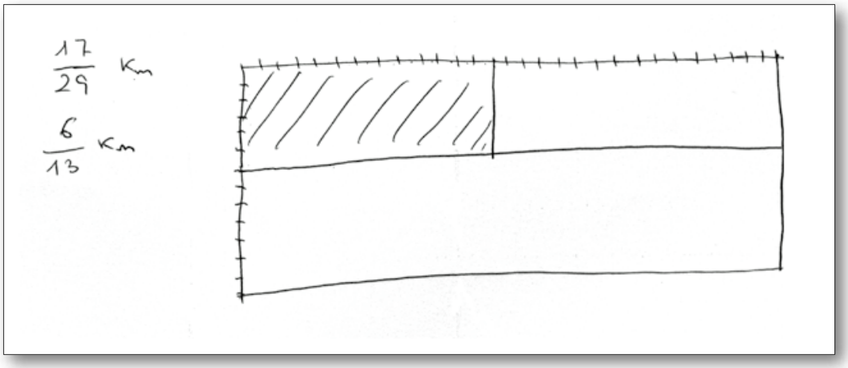


Fig. 15. Respuesta de estudiante del Grado en Matemáticas al ítem 9

También aparecen estrategias con argumentos matemáticos de un nivel superior que buscaban la solución general del problema particular, como ya se dio en el ítem 3. Un ejemplo de este hecho es e1 razonamiento del estudiante de la figura 16, en el ítem 6, en el que utiliza la representación gráfica de $\frac{72}{x}$ para determinar que cuando x se aproxima a cero hay una asíntota vertical, con lo que la opción correcta es «mucho mayor que 72».

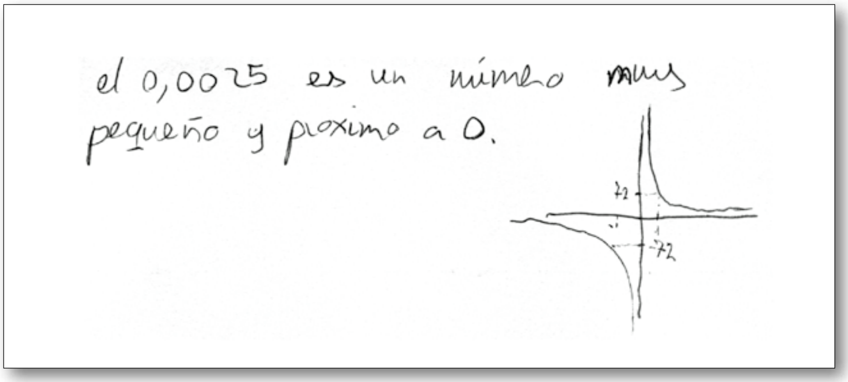


Fig. 16. Respuesta de estudiante del Grado en Matemáticas al ítem 9

Concepciones erróneas

En contrapartida, encontramos argumentos matemáticamente incorrectos, como el caso del ítem 8, en el que para ordenar las fracciones M y N se realiza a partir de la mayor diferencia entre el numerador y denominador (Figura 17). Un argumento similar para ordenar fracciones que implica observar el tamaño de los números del numerador y denominador ha sido identificado en la literatura como «predominio de los números naturales» (*whole number dominance*), presentado por el alumnado de Primaria (Behr, Wachsmuth, Post y Lesh, 1984).

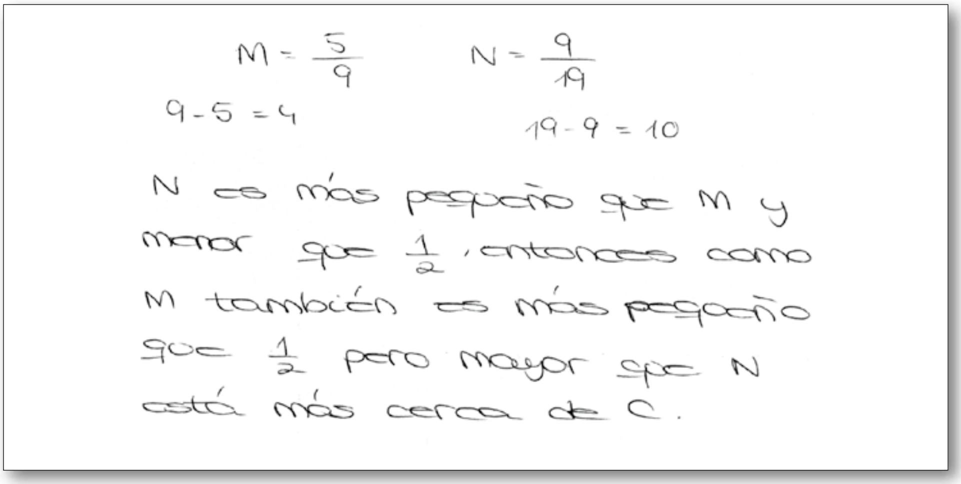


Fig. 17. Respuesta de estudiante del Grado en Matemáticas al ítem 8

En el ítem 10, para estimar el volumen del aula, encontramos un número importante de estimaciones longitudinales inadecuadas con la situación real: estimar 50 m cuando en realidad había 13 m; afirmar que el alto de la clase es 2 m «porque yo mido 1,85»; o escribir que «el volumen es 40 m^3 porque el largo es de 20 m». En un orden más conceptual algunos estudiantes calculan áreas y dicen que es el volumen. Estas respuestas no son resultados adecuados al perfil que debe tener este alumnado.

En el ítem 7 surgen también dificultades con la estimación de un producto. En la figura 18 se muestra el argumento de un estudiante que considera que la estimación de un producto no puede contener las medidas exactas en ninguno de los factores, por lo que escogen la opción en la que ninguna de las medidas coincide con las medidas exactas de la casa.

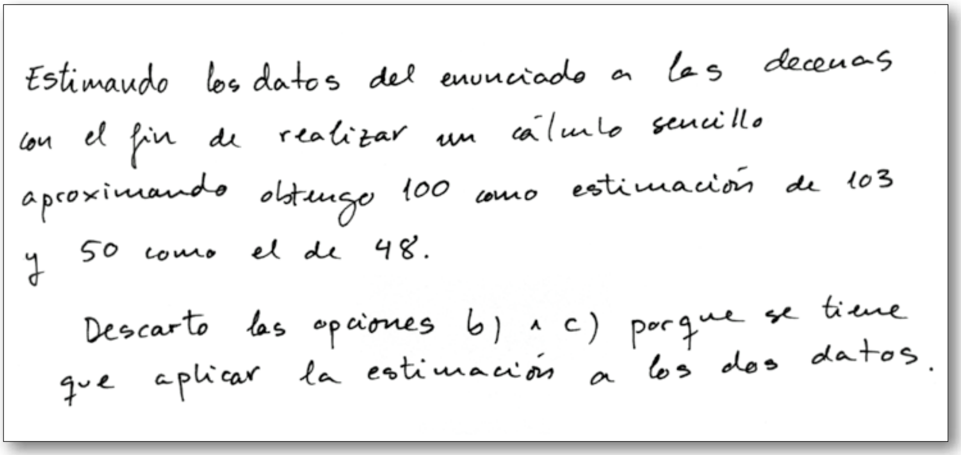


Fig. 18. Respuesta de estudiante del Grado en Matemáticas al ítem 7

CONCLUSIONES

El nivel curricular de los contenidos matemáticos de la prueba utilizada en este estudio está entre el final de la Educación Primaria y el inicio de la Secundaria. La dificultad de esta para el alumnado objeto de esta investigación estriba en que se realiza con límite de tiempo y con la condición de no usar algoritmos escritos. La primera condición en cierta manera garantiza la segunda, ya que con un tiempo ilimitado, el alumno puede realizar un algoritmo de forma mental y el evaluador nunca lo sabría. Damos por hecho que los alumnos de este estudio sabrían responder a todos los ítems si siguieran procedimientos estándares de resolución y sin tiempo limitado. Son las normas impuestas las que ayudan a que aparezcan diferentes razonamientos, algunos de ellos propios del sentido numérico y otros que muestran dificultades o dejan al descubierto concepciones erróneas sobre conceptos numéricos.

Se ha encontrado una gran diferencia, tanto en el éxito como en los razonamientos según los ítems. En cuanto al éxito, la mayoría de los estudiantes contestaron entre tres y ocho ítems correctamente, con una media de cinco ítems correctos. Con respecto a las estrategias, más de la mitad de los estudiantes contestó correctamente con sentido numérico a menos de cuatro ítems. Esto hace que concluyamos que en los ítems de esta prueba han mostrado un bajo uso del sentido numérico. Aunque su actividad matemática diaria está alejada de este tipo de tareas, se esperaría de ellos un éxito superior y un mayor uso de recursos relacionados con el sentido numérico.

Por otro lado, observamos que cuando utilizan estrategias de sentido numérico el éxito es mayor que con otro tipo de razonamiento. Al analizar las estrategias de sentido numérico hemos encontrado, en general, las que se esperaban a priori en los distintos ítems, y otras muy diferentes y de nivel más alto del requerido, llegando en ocasiones a una generalización propia de la matemática. Estas últimas no aparecieron en la muestra de estudiantes de futuros profesores de primaria de Yang *et al.* (2009), los cuales respondieron mayoritariamente con respuestas basadas en reglas. Esto refleja que, cuanto mayor es la formación matemática, más estrategias se tienen para enfrentarse a estas situaciones. Este resultado coincide con Dowker, Flood, Griffiths, Harris y Hook (1996), donde se presenta un estudio, con profesionales de distintos campos, en la realización de estimaciones de operaciones con decimales. Se compararon matemáticos profesionales, contables, estudiantes universitarios de psicología y de inglés. Los matemáticos superaron a los otros grupos en la variedad de estrategias. Sin embargo, a diferencia de los estudiantes de nuestro estudio, futuros profesores de Secundaria, los matemáticos profesionales se mostraron como buenos estimadores y con altos niveles de precisión.

Por otra parte, han aparecido ideas incorrectas, arraigadas en el conocimiento de los alumnos que no les han impedido avanzar en su formación matemática superior. Los resultados invitan a la reflexión sobre el tipo de enseñanza numérica que reciben los alumnos a lo largo de la escolaridad obligatoria, en muchos casos dominada por la realización de procedimientos más que por un uso flexible de conceptos y propiedades numéricas. Al pedirles no utilizar algoritmos, hemos visto que aparecen ideas intuitivas de conceptos o procedimientos básicos, que no se han modificado, o al menos que han surgido al razonar de forma rápida. Algunas de estas ideas o concepciones ya han sido recogidas en la investigación con alumnado de primaria o secundaria, pero en este caso las evidenciamos con futuros profesor de Secundaria. Entre estos últimos destacamos las siguientes:

- Indicar que el resultado de una división (multiplicación) es siempre un número menor (mayor) que cada uno de los términos implicados (Fischbein, Deri, Nello y Marino, 1985).
- Afirmar que para estimar el resultado de una operación es necesario redondear todos los términos de la operación.
- Al operar con decimales asegurar que el resultado tiene «más probabilidad de ser decimal».
- Comparar fracciones observando el tamaño de los números y utilizando reglas del tipo «la fracción es mayor cuanto mayor es la diferencia entre el numerador y denominador» (Behr, Wachsmuth, Post y Lesh, 1984).
- Utilizar reglas incorrectas para colocar la coma en el resultado del producto de dos números decimales (De Castro, Castro y Segovia, 2004; Gómez, 1995).
- Usar vocabulario inadecuado (denominar cuadrado al cubo o círculo al cilindro).

— Confundir la longitud con el volumen o el volumen con el área, o indicar que el círculo tiene volumen.
— Realizar estimaciones incorrectas de medidas de longitud cercanas.

En el otro extremo, observamos que la alta formación en matemáticas de este alumnado se refleja al usar una escritura matemática formal y al llegar a expresar la respuesta general. Quizás ese deseo de generalizar impidió a algunos alumnos pensar en los ítems de manera más simple y que hicieran uso de herramientas matemáticas más complejas de las necesarias.

A pesar de los esfuerzos curriculares en la educación primaria y secundaria por incorporar un aprendizaje diferente de los números, se sigue dedicando mucho tiempo del aprendizaje a tareas cerradas y con una única solución. Los alumnos crean la idea de que los métodos algorítmicos son los «auténticos» para la resolución de problemas en un contexto académico.

Cambiar esta práctica implica que los docentes reconozcan la utilidad del desarrollo de tareas diferentes que propicien el sentido numérico. Pensamos que la formación de profesores, de primaria y secundaria, debe dejar un hueco para la reflexión sobre el sentido numérico, lo que implica analizar tareas y metodologías que fomentan el sentido numérico, tomando conciencia de su importancia en la enseñanza obligatoria.

Se ha mostrado en este estudio que los futuros profesores de secundaria pueden presentar determinadas carencias relacionadas con el sentido numérico. Seguramente estas carencias no sean complejas de superar dada la formación de los estudiantes porque, como indican Markovits y Sowder (1994), se trata de reorganizar el conocimiento que se posee de manera diferente.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo forma parte del proyecto EDU2011-29324: Modelos de competencia formal y cognitiva en pensamiento numérico y algebraico de alumnos de Primaria, de Secundaria y de profesorado de Primaria en formación. Ministerio de Ciencias e Innovación. Madrid. También ha sido parcialmente financiado por el Proyecto Basal PFB 03, del Centro de Modelamiento Matemático, y el Proyecto Bicentenario CIE-05, del Centro de Investigación Avanzada en Educación, ambos de la Universidad de Chile.

BIBLIOGRAFÍA

Alajmi, H. y Reys, R. (2007). Examining eighth grade Kuwaiti students' recognition and interpretation of reasonable answers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8, pp. 117-139.
http://dx.doi.org/10.1007/s10763-009-9165-z

Alsawaie, O.N. (2011). Number sense- based strategies used by high-achieving sixth grade students who experienced reform textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 26, pp. 1-27.

Anghileri, J. (2006). *Teaching Number Sense, 2nd Edition*. London: Continuum.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post T. y Lesh R. (1984). Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education,* 15(5), pp. 323-341. http://dx.doi.org/10.2307/748423

Berch, D. (2005). Making sense of number sense. *Journal of learning disabilities*, 36(4), pp. 333-339.
http://dx.doi.org/10.1177/00222194050380040901

BOE (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria (BOE nº. 293, 8 de diciembre de 2006).

BOE (2007). Real Decreto 1631/2006, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria (BOE nº. 5, 5 de enero de 2007).

Contreras, L., Carrillo, J., Zarayan, D., Muñóz-Catalán, M.C. y Climent, N. (2012). Un estudio exploratorio sobre las competencias numéricas de los estudiantes para maestros. *Bolema*, *Río Claro*, 26(42b), pp. 433-457.
http://dx.doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200003

De Castro, C., Castro, E. y Segovia, I. (2004). Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: Estudio con maestros en formación. En E. Castro y E. de la Torre (eds.). Actas del VIII *Simposio de la SEIEM*. A Coruña: Universidade da Coruña, pp. 183-194.

Dowker, A., Flood, A., Griffiths, H., Harris, L. y Hook, L. (1996). Estimation strategies of four groups. *Mathematical cognition*, 2(2), pp. 113-135.
http://dx.doi.org/10.1080/135467996387499

Faulkner, V. (2009). Components of Number sense: An instructional model for teachers. *Teaching Exceptional Children*, 41(5), pp. 24-30.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M.S. y Marino, M.S. (1985). The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division Journal for Research in Mathematics *Education*, 16(1), pp. 3-17.

Gersten, R. Jordan, N.C. y Flojo, J. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. Journal of Learning Disabilities, 38(4), pp. 293-304.
http://dx.doi.org/10.1177/00222194050380040301

Gómez, B. (1995). Tipología de errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo. *Ense*ñanza de *las Ciencias*, 13(3), pp. 313-325.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), pp. 170-218.
http://dx.doi.org/10.2307/749074

Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics:11-16.* London: John Murray Publisher.

Markovits, Z. y Sowder, J. (1994). Developing number sense: an intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematic Education*, 25(1), pp. 4-29.
http://dx.doi.org/10.2307/749290

McIntosh, A., Reys, B.J. y Reys, R.E.(1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics*, 12(3), pp. 2-8.

Methe, S. A., Hojnoski, R., Clarke, B., Owens, B.B., Lilley, P.K., Politylo, B.C., White, K.M. y Marcotte, A.M. (2001). Innovations and Future Directions for Early Numeracy Curriculum-Based Measurement: Commentary on the Special Series. *Assessment for Effective Intervention*, 36(4), pp. 200-209.
http://dx.doi.org/10.1177/1534508411414154

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2000). *Principles and Standars for School Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ortega, T. y Ortiz, M. (2006). Jerarquía holística de las dificultades asociadas a las estrategias aditivas de cálculo mental. *Ense*ñanza *de las Ciencias*, 24(1), pp. 99-110.

REYS, B.J. (1991). *Developing number sense: Addenda series, grades 5-8*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

REYS, B.J. y YANG, D.C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth and eighth grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematic Education*, 29(2), pp. 225-237.
http://dx.doi.org/10.2307/749900

REYS, R., REYS, B., MCINTOSH, A., EMANUELSSON, G., JOHANSSON, B. y YANG, D.C. (1999). Assessing number sense of students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. *School Science and Mathematics*, 99(2), pp. 61-70.
http://dx.doi.org/10.1111/j.1949-8594.1999.tb17449.x

SOWDER, J. (1992). Estimation and number sense. En D. Grouws (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 245-275. MacMillan Publishing Company. New York.

TSAO, Y. (2004). Exploring the connections among number sense, mental computation performance, and the written computation performance of elementary preservice school teachers. *Journal of College Teaching and Learning*, 1(12), pp. 71-90.

VELOO, P.K. (2010). *The development of number sense and mental computation proficiencies: An intervention study with secondary one students in Brunei Darussalam*. Doctor Ph. University of Otago, Dunedin. New Zealand.

WAGNER, D. y DAVIS, B. (2010). Feeling number: grounding number sense in a sense of quantity. *Educational studies in Mathematics*, 74, pp. 39-51.
http://dx.doi.org/10.1007/s10649-009-9226-9

YANG, D. C. (2005). Number sense strategies used by 6th grade students in Taiwan. *Educational Studies*, 31(3), pp. 317-333.
http://dx.doi.org/10.1080/03055690500236845

YANG, D.C., LI, M.N. y LIN, C.I. (2008). A study of the performance of 5th graders in number sense and its relationship to achievement in mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 6, pp. 789-807.
http://dx.doi.org/10.1007/s10763-007-9100-0

YANG, D.C., REYS, R. y REYS, B.J. (2009). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7, pp. 383-403.
http://dx.doi.org/10.1007/s10763-007-9124-5

ANEXO

Ítem 1. Botellas de agua

Una botella de agua de 600 ml cuesta 18 céntimos, mientras que una botella de agua de 1500 ml cuesta 35 céntimos. Estima cuál de las botellas es más rentable.

Ítem 2. Cajas

Tenemos dos cajas de regalo que queremos rodear con cinta, tal y como se representa en la ilustración. La caja A es un cubo de arista 10 cm. El alto y el diámetro de la caja B son también 10 cm. ¿Qué caja necesita más cinta?

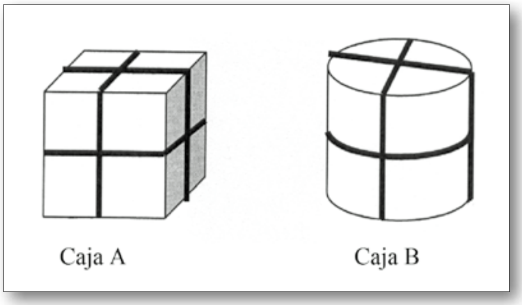


Fig. 19

Ítem 3. Cintas de colores

Victoria y María utilizaron unas cintas de colores para una tarea de clase. Victoria utilizó $\frac{30}{31}$ m y María $\frac{36}{37}$ m. ¿Quién usó más cinta?

Ítem 4. Colocar la coma decimal

Carlos utilizó una calculadora para efectuar la operación

$$0{,}4975 \times 9428{,}8 = 4690828$$

Pero olvidó escribir la coma decimal. Usa estimación para encontrar el lugar de la coma decimal.

a) 46,90828
b) 469,0828
c) 4.690,828
d) 46.908,28
e) No puedo elegir la respuesta sin realizar el cálculo exacto.

Ítem 5. Ordenar fracciones y decimales

Tomás caminó 0,4828 km, Juan caminó $\frac{13}{38}$ km, María caminó $\frac{8}{15}$ km, Julia caminó $\frac{17}{16}$ km, David caminó 0,966 km y José caminó $\frac{7}{29}$ km.

Ordena las distancias que recorrieron de mayor a menor.

Ítem 6. División entero-decimal

Sin calcular el valor exacto de la operación, elegir la mejor estimación para $72 \div 0{,}0025$:

a) Un poco menor que 72
b) Un poco mayor que 72
c) Mucho menor que 72
d) Mucho mayor que 72
e) No puedo decidirlo sin realizar el cálculo exacto.

Ítem 7. Área de la casa

La casa de Elena mide 103 m de largo y 48 m de ancho. Averigua cuál es la mejor estimación del área de la casa:

a) 100×50
b) 103×50
c) 100×48
d) No puedo decidirlo sin realizar los cálculos exactos.

Ítem 8. Distancia entre fracciones

Consideremos tres puntos *M*, *N* y *C*. *M* es $\frac{5}{9}$, *N* es $\frac{9}{19}$ y *C* es $\frac{1}{2}$. Sin encontrar la distancia exacta, elige quién está más cerca de *C*.

a) M
b) N
c) M y N están a la misma distancia de C
d) No puedo responder sin calcular la distancia exacta.

Ítem 9. Área de la granja

David tiene una granja de largo $\frac{17}{19}$ km y $\frac{6}{13}$ km de ancho. Sin calcular el valor exacto, escoge la mejor estimación del área de la granja:

a) Mayor que $\frac{1}{2}$ km^2
b) Igual a $\frac{1}{2}$
c) Menor que $\frac{1}{2}$
d) No puedo decidirlo sin realizar el cálculo exacto.

Ítem 10. Volumen de la clase

Da una estimación para el volumen de esta clase en m^3.

Strategies of number sense in Mathematics Degree students

Rut Almeida, Alicia Bruno
Universidad de La Laguna
rutalca@gmail.com, abruno@ull.es

Josefa Perdomo Díaz
Centro de Modelamiento Matemático y Centro de Investigación Avanzada en Educación. Universidad de Chile
jperdomo@dim.uchile.cl

This paper presents the results from a research about number sense with a group of university students of the Mathematics Degree in Spain.

Number sense is defined as a well-organized conceptual network that relates numbers and operations and its properties, which solves problems in a creative and flexible way. Different studies have characterized the number sense with the components considered as framework of this investigation:

1. Understanding the meaning of the numbers.
2. Recognizing the relative size and absolute magnitudes of numbers.
3. Using benchmarks.
4. Composing and decomposing numbers.
5. Using multiple representations of numbers and operations.
6. Understanding the relative effect of operations.
7. Developing appropriate strategies and evaluating the reasonableness of an answer.

The objective of this research is to analyze the success and strategies manifested by future secondary teachers of Mathematics in tasks that can be implemented with the above components of number sense.

A descriptive and qualitative study of responses to a written test has been made, with ten items. The research was conducted with 67 students of the Mathematics Degree from the University of La Laguna, trained in Mathematical Analysis, Numerical Analysis, Algebra, Geometry, Topology and Statistics. The test was performed with a time limit (three minutes for each item), and participants were asked to respond without using written algorithm. The test items were taken from previous research on number sense. The responses were categorized as follows:

- *Number sense*, when using some (s) component (s) of number sense framework.
- *Partially number sense*, if the justification combines the use of components of number sense with the use of memorized rules and / or algorithms.
- *Rule based*, if they exclusively make use of algorithms or memorized rules.
- *Wrong reasoning*, when using mathematically incorrect arguments.
- *Incomplete or unclear reasoning*, if they do not provide sufficient arguments to identify reasons that lead them to the answer.
- *Not explained*, they respond to the item but they do not have a justification.
- *Blank*, question not answered.

A big difference has been found, both in the success rate and in the arguments according to the items. In the case of the success, most students answered from three to eight items correctly, with an average of five items correct. With regard to strategies, more than half of the students answered correctly with number sense in less than four items. This makes us conclude that in the items of this test they have shown a low use of number sense. Although their daily mathematical activity is far from these tasks, a greater success and increased use of resources related to number sense is expected of them.

We note that when they use number sense strategies, the success is greater than with other types of reasoning. When analyzing the number sense strategies, we found, generally, those expected a priori on the different items, and some very different and of a higher level than required, sometimes leading to a generalization of Mathematics itself. This shows that the higher the mathematical background, the more strategies they have to deal with these situations.

When asked not to use algorithms, they have come up with intuitive ideas or basic concepts and procedures which have not changed, or which have emerged when they think quickly. Some of these ideas or concepts have already been collected in research with primary or secondary students, but it also appears in future secondary teachers as shown here. In the latter, we highlight the following: indicate that the result of a division (multiplication) is always a less (greater) number than each of the terms involved; when operating with decimals, ensure that the result is «more likely to be decimal»; compare fractions by observing the size of the numbers and using rules such as «the fraction is greater the greater the difference between the numerator and denominator»; use incorrect rules to place the decimal point in the result of the product of two decimal numbers; use geometric vocabulary inadequately; use incorrect estimations of close length measurements.

At the other extreme, we note that a high mathematical training of these students is reflected by using formal mathematical writing and trying to come to the generalized response. Perhaps, the desire to generalize prevented some students from thinking in a more simple way and this brought the use of more complex mathematical tools than necessary.