Núm. 31.3 (2013): 121-134
ISSN (papel): 0212-4521 / ISSN (en linea): 2174-6486

NATURALEZA DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS: REPRESENTACIÓN Y SIGNIFICADO

MATHEMATICAL OBJECTS NATURE: REPRESENTATION AND MEANING

Cristina Pecharromán
Didáctica de la Matemática. Universidad de Valladolid
pecharroman@am.uva.es

RESUMEN: Este artículo describe la naturaleza de los objetos matemáticos y su razón de existencia desde un planteamiento cognitivo. Se considera que la razón de existencia de los objetos matemáticos es la de ser o representar una funcionalidad en un contexto, y se asocia la naturaleza de los objetos matemáticos con su origen. Es decir, los objetos matemáticos son o representan una funcionalidad organizativa o interpretativa en el contexto, una funcionalidad que se hace objeto. La representación del objeto matemático surge como forma de expresión de la funcionalidad que representa. Asimismo, el significado institucional de un objeto matemático se desarrolla a partir de su funcionalidad. Finalmente, se interpreta la comprensión de los objetos matemáticos desde la descripción que se ha hecho de ellos en esta investigación.

PALABRAS CLAVE: objetos matemáticos, funcionalidad, representación, significado, aprendizaje.

ABSTRACT: This article describes the nature of mathematical objects and its reason for existence from a cognitive approach. It is considered that the reason of existence of mathematical objects is to be or represent a functionality in one context. And it is associated the nature of mathematical objects with their origin. That is, mathematical objects are or represent an organizational or interpretive functionality in the context, a functionality that becomes object. The representation of the mathematical object appears as an expression of the functionality it represents. Also, the institutional meaning of a mathematical object is developed from its functionality. Finally, it is interpreted the learning of mathematical objects from the description made of them in this investigation.

KEYWORDS: mathematical objects, functionality, representation, meaning, learning.

Fecha de recepción: mayo 2012 • Aceptado: octubre 2012

Pecharromán, C. (2013) Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado, *Enseñanza de las Ciencias* 31 (3), pp. 121-134

INTRODUCCIÓN

El hecho de no conocer matemáticas en profundidad no tiene por qué impedir al lector ahondar en la naturaleza de los objetos matemáticos y conocer su sentido o razón de existencia.

Se presenta un trabajo de investigación teórico que pretende los siguientes objetivos. En primer lugar, estudiar y caracterizar la naturaleza de los objetos matemáticos, es decir, plantear una posición ontológica sobre estos objetos. A continuación, se utiliza esta caracterización para interpretar los aspectos de representación y significado que configuran o constituyen a estos objetos. Finalmente, se utilizan estas ideas para interpretar de forma general lo que es saber y comprender los objetos matemáticos. Estos objetivos se abordan a través de los sucesivos apartados del artículo según la secuencia en la que se presentan aquí.

Este estudio no utiliza un marco teórico de referencia único sino varios (estudios sobre la ontología, la semiótica y la semántica de los objetos matemáticos, entre otros), debido a que cada apartado necesita de una referencia teórica específica para fundamentar o justificar las ideas que en él se exponen. Las referencias teóricas también se utilizan para contrastar o conjugar las ideas que aporta el artículo con ideas existentes de otros autores.

Asimismo, el hecho de que la idea o hipótesis inicial sobre la naturaleza de los objetos matemáticos permita caracterizar otros aspectos que forman parte de su existencia y de su aprendizaje, se considera que dota de validez a la hipótesis inicial, y dota de coherencia al trabajo de investigación.

ORIGEN Y NATURALEZA DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

Cañón (1993: 351-352) considera que los objetos matemáticos son «cosas» que satisfacen unas determinadas relaciones. Estas relaciones caracterizan un «estado de las cosas»[1] y este estado sería el objeto matemático. Parece que la autora identifica los objetos matemáticos con un estado de relaciones.[2]

A partir de esta interpretación, y como punto de partida de este estudio, se considera que los objetos matemáticos son un estado. En lo que sigue, se intenta caracterizar y distinguir el estado de ser objeto matemático del estado con el que también se podría calificar el ser un objeto material, un ser vivo, un lugar, un fenómeno, una cualidad, etcétera. Sin precisar la totalidad de elementos que pertenecen a estas clases ni sus características definitorias, se reconocen los elementos que pertenecen a cada una de ellas a través de cualidades de semejanza que se observan entre sus elementos. Estas cualidades, por una parte, son relativas a su expresión externa y, por otra, son cualidades que hacen referencia a las capacidades (de los seres vivos), a la funcionalidad o utilidad (de los objetos materiales), a los efectos (de los fenómenos), a las relaciones (causales, de origen, de inclusión, de funcionalidad, etcétera), etcétera, del estado que representan.

Los objetos matemáticos se descubren cuando la razón busca organizar[3] e interpretar el contexto que se percibe y su dinámica. Es decir, los objetos matemáticos surgen desde una cierta caracterización

1. «Aparecen más bien 'estados de cosas' iniciales que sorprenden, y a esas 'cosas' que satisfacen semejantes relaciones se les denominarán números, puntos, rectas, ángulos...» (Cañón, 1993: 352). «Las definiciones, los axiomas, los teoremas no son sino expresiones lingüísticas de esos estados de cosas que emergen ininterrumpidamente en la historia poblando el universo matemático» (Cañón, 1993: 351-352).
2. «Los números aparecen en una secuencia, trabados entre sí por propiedades: dos veces dos hacen cuatro, o tres veces uno hacen tres. Un triángulo es una figura matemática en cuanto que se revela como portador de un conjunto de relaciones entre las medidas de sus lados, o de sus ángulos, o de ambos entre sí» (Cañón, 1993: 352).
3. «No hay nada matemático que descubrir en la naturaleza de las cosas, pero es en el proceso de conocerlas, al organizar las sensaciones percibidas por los sentidos, como se crean los objetos matemáticos» (Cañón, 1993: 395). Puig (1997: 66), siguiendo a Freudenthal, señala que «los conceptos matemáticos son medios de organización de fenómenos del mundo, (…),

del contexto. Con el término *contexto* se hace referencia al que proporciona el mundo físico-sensible, cualquier objeto matemático o varios objetos matemáticos y sus relaciones, etcétera.[4] En general, el contexto lo proporciona el conocimiento previo existente, y el conocimiento del contexto permite el descubrimiento del objeto.

Se observa la necesidad de representar ciertas cualidades y ciertas acciones organizativas o interpretativas del contexto. Son cualidades o acciones que tienen la función de organizar o interpretar el contexto. La representación de funciones organizativas o interpretativas del contexto origina los objetos matemáticos. El objeto es o representa una función o funcionalidad que organiza o interpreta el contexto. La función de organizar o interpretar el contexto que representa el objeto justifica su razón de existencia. Es decir, se considera la naturaleza de los objetos matemáticos en relación con su origen, con la causa de su origen.

Por tanto, los objetos matemáticos tienen existencia real pero no material. Su descubrimiento no es una experiencia exclusivamente física o sensitiva, sino que es necesario que intervenga la razón. Los objetos matemáticos son producto de la razón porque son percibidos por ella, y esta percepción hace que se les pueda considerar objetos reales.[5]

En unos casos, el objeto matemático es una cualidad que se abstrae del contexto. El objeto matemático representa una cualidad interpretativa del contexto. Por ejemplo, el hecho práctico de interpretar y simplificar la representación del mundo físico pudo motivar la abstracción (o conceptualización) de ciertas cualidades de este contexto y, asociados a la forma del contorno, a la superficie limitada, a la cardinalidad, etcétera, surgen objetos matemáticos diversos (*formas geométricas*, *área*, *número natural*, etcétera). Una *función* es el objeto que representa la relación de magnitudes variables. Ya en el contexto matemático, el *límite de una función en un punto* es una cualidad de la función en un entorno de ese punto.

En otros casos, el objeto matemático es una acción o proceso que organiza o interpreta el contexto y su potencialidad y representa este resultado. Por ejemplo, los *conjuntos* clasifican o representan una clasificación, la *integral* representa una suma, la *matriz transpuesta* representa una potencialidad del contexto que ofrece el objeto *matriz*, etcétera. En general, los operadores (adicción, sustracción, etcétera) son o representan una acción, pero se manifiesta cuando se relacionan con otros objetos sobre los que actúan.

La organización del contexto que motiva o da origen al objeto matemático debe ser estructural. Es decir, la casuística que se presenta con cualidades perceptivas del contexto físico, como el color o la rugosidad, lleva a explicitar que los objetos matemáticos deben permitir una organización o interpretación del contexto que sea estructural y necesaria, y no meramente clasificatoria o distintiva. De hecho, las cualidades mencionadas son cuantificables, es decir, pueden ser representadas mediante un número y, además, la acción organizativa de clasificar la representa el objeto matemático *conjunto* con independencia del criterio o cualidad que permite la clasificación.

Sin embargo, se hace necesaria la precisión de la funcionalidad que representan los objetos matemáticos para discriminar o reconocer el objeto. Por ejemplo, asociada a la cualidad de la forma o los

objetos del mundo, sus propiedades, las acciones que realizamos sobre ellos y las propiedades que tienen esas acciones». Godino y Batanero (1994: 11) consideran que un objeto matemático institucional es un ente abstracto que emerge de un sistema de prácticas sociales ligadas a un campo de problemas.

4. Según Cañón (1993: 353, 400, 405), la Matemática es un producto cultural de la racionalidad humana, por la que se busca reducir la complejidad de la Naturaleza y de los sistemas de actividades humanas, a base de ordenar y armonizar, y por medio de lenguajes y de tratamientos o métodos. Puig (1997: 67), siguiendo a Freudenthal, señala que, «los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos son los fenómenos de ese mundo que contiene los productos de la cognición humana y en particular los productos de la propia actividad matemática».

5. Para Cañón (1993: 368), la existencia de los objetos matemáticos consiste en haber sido pensados.

contornos en el plano existen diversos objetos matemáticos (triángulo, cuadrado, etcétera). Es decir, se requiere de una mayor caracterización de la naturaleza (funcionalidad) del objeto matemático. Esta caracterización surge desde cualidades del objeto como propiedades, relaciones internas y relaciones del objeto con otros objetos. Consecuentemente con el origen de los objetos matemáticos, estas cualidades podrán representar nuevos objetos matemáticos.

Como hecho puntual, cabría preguntarse el porqué de unas formas geométricas y no otras, ya que la naturaleza y la actividad humana ofrecen multiplicidad de ejemplos. Posiblemente, se pueda contestar recurriendo a la forma de proceder de la razón: búsqueda de regularidad, simplicidad, generalidad, polivalencia e incluso la belleza, como lo muestra el uso y la presencia del número áureo y las proporciones relativas a este en objetos matemáticos y en el contexto del mundo sensible.[6] En general, estas pueden ser las características generales del proceder de la razón en la interpretación y organización de los contextos, es decir, en el descubrimiento de objetos matemáticos, y se desarrollan desde la experiencia y el conocimiento del contexto.

REPRESENTACIÓN DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

La existencia exclusivamente funcional y no material de los objetos matemáticos hace necesaria una representación externa o un signo que permita su expresión y su reconocimiento. Así como el objeto matemático representa una funcionalidad en un contexto, debe existir un signo que lo represente y manifieste su existencia. La asociación de un signo o conjunto de signos con un objeto matemático y las causas de esta asociación forman parte de la creación del objeto matemático.

La primera representación se crea desde el contexto en el que se descubre el objeto como medio de expresión de la funcionalidad que representa y sus propiedades. La creación de la representación está dirigida, fundamentalmente, por la función organizativa que se quiere expresar, y depende de la naturaleza del contexto en el que se descubre el objeto y del conocimiento que existe de ese contexto (momento histórico y cultural). Es decir, la representación se desarrolla desde los signos que configuran el contexto en el que se descubre la función de organización.[7]

De hecho, si el reconocimiento del objeto necesita de un proceso de acción en el contexto, como el establecimiento de relaciones entre objetos del contexto, la representación del objeto, y es su caso la definición, puede recoger este proceso o su resultado (por ejemplo, la derivada en un punto, un polinomio). Además, la construcción de la representación también puede depender de las propiedades con las que se quiera caracterizar el objeto según las necesidades y el conocimiento del contexto.[8]

Los objetos matemáticos admiten representaciones diversas según la naturaleza de los signos que configuran el contexto desde el que se elabora la representación. Cada representación debe remitir a la funcionalidad asociada al objeto matemático y debe mantener invariantes sus propiedades. Sin embargo, la forma en la que cada representación ofrece la información sobre el objeto es distinta, y se enfatizan ciertos aspectos en detrimento de otros, lo que hace que el tipo de actividad con el objeto predisponga el uso de una u otra representación.[9]

6. Cañón (2004: 9), siguiendo a Whitehead, señala que, «el orden (presente en la Matemática) remite a una doble armonía, la estética y la lógica».
7. Los signos que se utilizan para formar una representación, «pertenecen a un sistema semiótico ya constituido» (Duval, 1999: 41).
8. En Boyer (1996: 397), se observa que el logaritmo surge con unas propiedades distintas a las actuales.
9. «Toda representación es cognitivamente parcial en relación con lo que ella representa y que las representaciones de registros diferentes no presentan los mismos aspectos de un mismo contenido conceptual» (Duval, 1999: 67).

En todo caso, el desarrollo o la construcción de una representación solo tiene sentido desde un contexto en el que se observe el objeto matemático, es decir, su funcionalidad. Asimismo, el uso de una representación para expresar un objeto solo tiene sentido en un contexto que inspire el objeto o en el que sea coherente la presencia de la representación del objeto, sobre todo en los casos en los que una misma representación puede ser utilizada para representar objetos distintos, y el reconocimiento de uno u otro depende del contexto en el que se ubique esa representación (por ejemplo, el término *raíz*, como operación, como valor numérico, etcétera). El contexto (su naturaleza o su dinámica) es quien ofrece la posibilidad del objeto, permite a la razón percibir la funcionalidad que representa. Asimismo, el contexto permite que la representación de acceso al objeto, es decir, la representación ejerza su función en un contexto que lo permita. Por tanto, la expresión del objeto matemático depende de su representación y del contexto en el que se usa.

También puede ocurrir que se desarrollen representaciones de representaciones con la intención de simplificar la expresión del objeto, aunque estas no siempre evocan directamente la función del objeto, por ejemplo, A^t, $f'(x)$, «*2*», *Z*, etcétera. El acceso al objeto a través de estos signos depende del conocimiento previo tanto del objeto al que remiten, como del hecho de que el objeto es representado con estos signos. Por tanto, el aprendizaje de los objetos matemáticos debe partir de representaciones que expresen la función que representan, y de ellas llegar a las restantes porque también estas forman parte del aprendizaje del objeto.

El hecho de que la Matemática se desarrolle sobre el conocimiento matemático existente,[10] conduce al desarrollo de registros semióticos propios del contexto matemático. Es decir, ciertos objetos matemáticos definen registros semióticos a través de los cuales se representan otros objetos matemáticos. Estos registros están caracterizados por la naturaleza de estos objetos (funcionalidad, propiedades), por su representación (naturaleza de los símbolos que la configuran) y por las relaciones entre ellos fruto de su naturaleza o con las que se les caracteriza (por ejemplo, la representación o formación de números es distinta en los sistemas de numeración decimal, binario, romano, etcétera; los convenios del sistema de referencia cartesiano son externos a la naturaleza de los objetos que lo configuran y su representación, etcétera). Estas características, sobre todo las relaciones entre los objetos que configuran el registro, dan lugar a reglas que rigen la dinámica o actividad en el registro semiótico.[11]

La actividad matemática en los registros atiende a la representación e interpretación de los objetos matemáticos y sus propiedades, y a la expresión de las relaciones entre los objetos matemáticos. Ambas están dirigidas por la naturaleza de los objetos matemáticos implicados, pero están organizadas por las reglas del registro y por la naturaleza de los elementos (objetos) que las configuran (el registro semiótico representa el conocimiento previo sobre el que se desarrolla el nuevo conocimiento). La expresión de esta actividad matemática da lugar a una actividad representacional o procedimental característica del objeto o de los objetos implicados y relacionados, y del registro semiótico. Por ejemplo, la representación e interpretación en el registro algebraico del *límite de una función en un punto* tiene asociada una actividad procedimental de transformación que remite desde ese registro, aunque está dirigida por la naturaleza del objeto. Asimismo, el objeto *suma* tiene asociados diversos procedimientos o reglas de transformación, dependiendo de la naturaleza de los sumandos y del registro de representación.

La actividad procedimental se manifiesta en forma de sucesiones de acciones sobre las representaciones. Son acciones de tratamiento o transformación en el interior del registro, y de conversión

10. Según Cañón (1993: 352), la Matemática se desarrolla de manera acumulativa porque construye consistentemente sobre las potencialidades iniciales.

11. Según Duval (1999: 34), se distingue entre representaciones analógicas y digitales. La diferencia entre los registros de representación viene dada por la naturaleza de los elementos que la constituyen, por las reglas que rigen su asociación y por el número de dimensiones en las que puede efectuarse esta asociación.

o transformación de la representación del objeto de un registro a otro. Estas acciones caracterizan la actividad procedimental del registro semiótico y del objeto representado.

En general, sustituir, sacar factor común, factorizar, despejar, simplificar (ejecutar acciones implícitas en la expresión que facilitan el reconocimiento del objeto matemático representado), etcétera, son acciones de transformación características de ciertos objetos matemáticos y registros semióticos. De la sucesión de acciones, pueden surgir reglas o algoritmos que recogen el desarrollo del procedimiento asociado al objeto (algoritmo de solución de la *ecuación de segundo grado*, reglas de *derivación de funciones elementales*, etcétera).

Las acciones de conversión no son tan mecánicas. La conversión necesita de un adecuado conocimiento de los registros semióticos implicados. En concreto, se debe conocer la naturaleza o la funcionalidad de cada objeto elemental del registro, las reglas que rigen el registro y permiten la formación de representaciones, y reconocer en distintos registros semióticos objetos elementales implicados en la formación de otros. De esta forma, las conversiones de los objetos elementales surgen desde el conocimiento de los registros semióticos, y estas orientarán las conversiones de otros objetos más complejos configurados a partir de ellos. Por ejemplo, para convertir la representación de una *función* del registro algebraico al numérico, se debe reconocer a las letras x e y que configuran la expresión de origen como variables numéricas; y al par numérico que se obtiene, se debe reconocer como un punto del plano para conseguir la representación gráfica de la *función*.

El lenguaje matemático surge asociado a la representación de los objetos matemáticos y a su dinámica o sintaxis representacional en y entre los registros semióticos. Este lenguaje permite llevar a cabo la actividad matemática. Las representaciones de los objetos y, en general, el lenguaje matemático evolucionan para conseguir una mejor expresión de la funcionalidad, las propiedades y las relaciones del objeto matemático, así como favorecer la actividad procedimental en los registros semióticos.

EL CONTEXTO MATEMÁTICO

La necesidad práctica de interpretar, organizar y representar el mundo físico motiva el descubrimiento y la creación de los primeros objetos matemáticos. Estos objetos son los precursores del contexto matemático, cuyo desarrollo tiene lugar de forma autónoma, aunque a veces también esté motivado por la realidad sensible. Es decir, la Matemática, en toda su historia, se ha manifestado como un instrumento eficaz para interpretar, organizar y representar el mundo físico, y recíprocamente, el mundo sensible se presenta como un contexto que inspira la creación de objetos matemáticos. Además, el interés racional por conocer las propiedades, relaciones y potencialidades de los objetos matemáticos creados también motiva el desarrollo de la Matemática. En definitiva, los objetos matemáticos ofrecen a la razón otro contexto que analizar y organizar o interpretar.

La organización del contexto matemático es inmediata a través de las clases en las que se pueden distribuir los objetos matemáticos. Estas clases se definen atendiendo a una selección de aspectos que caracterizan el objeto, como la función organizativa que representan, sus propiedades, su representación, sus relaciones, etcétera. Estas clases están representadas por lo denominado *concepto* (*fracciones, decimales, polígonos, números naturales*, etcétera).

Los conceptos se caracterizan a través de los aspectos definitorios o discriminatorios de la clase que representan. Estos aspectos forman parte de la naturaleza de los objetos matemáticos que pertenecen a la clase, aunque en el concepto se abstraen y generalizan. Asimismo, estos aspectos dirigen la creación de las representaciones de los conceptos, incluida la definición.

Se observan relaciones de inclusión entre los conceptos según los aspectos que se consideren para su caracterización. Por ejemplo, las clases de objetos con la misma funcionalidad, como forma o contorno, relación entre magnitudes variables, partición, cardinalidad, etcétera, estarían representadas por los conceptos denominados, por ejemplo, forma geométrica, función, fracción, número natural, etcétera, respectivamente. Pero, si además de considerar la funcionalidad, las clases se forman atendiendo a propiedades o precisiones de esta, como formas en el plano, relación de proporcionalidad directa, etcétera, las clases obtenidas estarían representadas respectivamente por los conceptos usualmente denominados polígono y función lineal. Si progresivamente se añaden otras condiciones, se generan otras clases más restrictivas, pero inclusivas (polígono, polígono regular, triángulo equilátero, número natural, número par, etcétera).

Finalmente, los conceptos se pueden ver como objetos en un contexto de conocimiento más amplio del que ellos representan. Por ejemplo, el concepto de polígono (triángulo, cuadrado, etcétera) se puede entender como objeto en la clase de las *formas geométricas* (polígonos, figuras de revolución, poliedros, etcétera). Por tanto, en general, se hablará de objetos matemáticos.

Descubrimiento de objetos matemáticos en el contexto matemático

Cada objeto matemático o relación de objetos se convierte en un contexto de análisis en el que se pueden descubrir cualidades que permiten su interpretación u organización estructural, dando lugar a nuevos objetos matemáticos. Estas cualidades se descubren, o se perciben, por la razón, desde el contexto que las motiva y desde el conocimiento que existe de ese contexto.

Por ejemplo, se pueden descubrir características estructurales o componentes con las que caracterizar el objeto matemático y su representación. Estas características pueden dar lugar a otros objetos matemáticos (*vértices, aristas, grado de un polinomio, término independiente, numerador,* etcétera), cuya naturaleza o funcionalidad viene determinada desde el contexto en el que se percibieron, por ejemplo, la *mediana* y el *baricentro* tienen sentido y se definen desde el contexto que proporciona el *triángulo*.

Ciertas relaciones internas entre componentes del objeto (*teorema de Pitágoras, teorema del resto*, etcétera) representan una cualidad estructural del objeto y pueden tratarse como objetos. Otras cualidades distintivas o propiedades de los objetos matemáticos permiten su clasificación, por tanto, la conceptualización o generación de conceptos (*número par, triángulo rectángulo, funciones simétricas*, etcétera). Muchas veces, el descubrimiento y la interpretación de las propiedades y relaciones de los objetos matemáticos dependen del registro semiótico en el que se interpreten y del conocimiento de este registro. Por ejemplo, la interpretación gráfica de objetos algebraicos motiva la búsqueda de propiedades y se manifiesta como contexto de análisis del que pueden surgir nuevos objetos. En general, el conocimiento de un objeto desde varios registros aumenta su posibilidad de uso y sus relaciones en el contexto matemático.

Asociados a determinados objetos, se desarrollan métodos o procesos (como el método de exhaución) que serán precursores de nuevos objetos matemáticos, como la integral definida que permite el cálculo de áreas y volúmenes; la función derivada, que permite calcular los extremos de una función, etcétera.[12]

La interpretación de la actividad procedimental asociada a un objeto o a un conjunto de objetos en un registro semiótico puede dar lugar al descubrimiento de otros objetos matemáticos (*números irracionales, números complejos, operaciones como el producto, números combinatorios*, etcétera).

La relación entre los objetos matemáticos también da lugar a nuevos objetos matemáticos que la representan, la caracterizan o la organizan. Por ejemplo, de las secciones de un *cono* por un plano surgen las *cónicas*. También la interpretación de estas relaciones puede motivar métodos o procesos asociados

12. Boyer (1986: 396-398) indica que el *logaritmo* se crea con el objeto de simplificar los cálculos numéricos en el contexto de las progresiones geométricas. Boyer (1986: 567) explica cómo D´Alambert introduce el objeto límite motivado por su interpretación del objeto diferencial.

al registro de representación, que serán precursores de los objetos matemáticos que llegan a representar esa relación. Es decir, el objeto sintetiza y representa el proceso por el que se interpreta la relación entre los objetos matemáticos. Por ejemplo, el objeto *distancia* entre dos *rectas* se crea desde la caracterización de la posición relativa entre dos *rectas* (a través de la *perpendicular* común), el objeto *derivada* está asociado al cálculo de *rectas tangentes a curvas*, el *teorema de Tales* (relación de *razones métricas*), etcétera.

Asimismo, la interpretación de las relaciones entre los objetos matemáticos según la naturaleza de los objetos que intervienen y sus propiedades también da lugar a nuevos objetos matemáticos, por ejemplo, *grupo, espacio vectorial*, etcétera. En estos niveles de abstracción y desarrollo de la matemática, también se puede observar la interpretación inicial que se hizo de los objetos matemáticos. Por ejemplo, un *espacio vectorial* es un objeto matemático que representa (funcionalidad) un contexto definido por unos objetos (*escalares, vectores*) con unas determinadas relaciones (operaciones) y propiedades.

En general, a medida que se desarrolla la ciencia matemática o estructura en la que coexisten los objetos matemáticos, sus propiedades y sus relaciones, hay objetos que surgen y se desarrollan para organizar e interpretar esta estructura y forman parte de ella.

Finalmente, existen otros motivos que permiten el descubrimiento y la creación de objetos matemáticos o la reinterpretación de los objetos existentes. Por ejemplo, en el caso del *infinito*, la regularidad que se observa en objetos o situaciones conocidas, la idea de continuidad, la posibilidad de no considerar límites finitos, la repetición recurrente de procesos, etcétera, son experiencias o actuaciones de la razón que, junto con su capacidad de generalización, la acercan al objeto matemático *infinito* (la razón puede aceptar el infinito desde el reconocimiento de los límites perceptivos y cognoscitivos del ser humano).

Muchas veces, la variación del contexto bajo el que se interpreta una funcionalidad hace necesario que se reinterprete el objeto inicial o se creen nuevos objetos asociados a esa funcionalidad pero desde un contexto distinto. Por ejemplo, al sustituir el quinto postulado de Euclides por su negación, se generan espacios no euclídeos en los que hay que reinterpretar objetos conocidos, como el caso del objeto de *rectas paralelas*, que representa a dos *rectas* que no se cortan (funcionalidad) y tiene expresión y propiedades diferentes en el contexto euclídeo y en el no euclídeo. Otro ejemplo lo proporciona la reinterpretación del *producto escalar* en distintos *espacios de Hilbert, como los espacios de Sobolev, los de Lebesgue o los de sucesiones*. También existen diversos objetos *integral definida*, según la *función* que se integra y el *dominio* de integración (*integral de Riemann, integral de Lebesgue, integral de Riemann-Stieltjes*, etcétera), la reinterpretación del objeto *límite* en distintos espacios, etcétera. En general, estos ejemplos manifiestan una actuación de la razón fundamentada en la generalización, muchas veces regida por la conservación de propiedades del objeto en el contexto en el que se percibió inicialmente. La analogía y la dualidad[13] matemática también motivan la generalización o la construcción de objetos matemáticos, por ejemplo, *la relación pitagórica entre cuadriláteros que conservan la forma*, en el caso de la analogía, y el *teorema del hexágono de Pappus en geometría euclídea y proyectiva*, en el caso de la dualidad.

Asimismo, la generalización de procedimientos a distintos espacios permite el desarrollo de nuevos métodos o procesos (cálculo de derivadas en varias variables, derivadas direccionales, etcétera).

13. «En la matemática actual, el término 'dualidad' tiene varios significados, los cuales se relacionan entre sí por una sola idea: la de una conversión de conceptos, teoremas y estructuras matemáticas en otros conceptos, teoremas o estructuras mediante una transformación específica» (Torres, 2009: 51).

SIGNIFICADO DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

El significado institucional de los objetos matemáticos se desarrolla desde su razón de existencia. El significado de un objeto matemático se desarrolla desde la funcionalidad organizativa que le da origen y lo representa (*función*: relación; *fracción*: partición; *número natural*: cuenta u ordena; las formas geométricas organizan el plano o espacio; etcétera).

Sin embargo, existen aspectos o características discriminatorias de esta funcionalidad que también forman parte de la naturaleza y del significado del objeto matemático, pues permiten el reconocimiento del objeto, como propiedades, relaciones entre sus objetos constituyentes o componentes, relación con otros objetos, etcétera. Por ejemplo, una *función* es una relación entre magnitudes variables, y una *función cuadrática* no deja de tener esa interpretación, pero además posee otras características que la discriminan. Además, la caracterización de la funcionalidad que representa un objeto depende del conocimiento matemático aceptado y conocido. Por ejemplo, la *recta tangente a una curva*, en el contexto geométrico, no corta a la *curva*, pero en el contexto del análisis puede cortarla y puede tener infinitos *puntos comunes con la curva (función seno)*.

Por tanto, el significado de un objeto matemático en el contexto de origen queda definido por la funcionalidad que representa en este contexto y por características discriminatorias de esa funcionalidad que ofrece el contexto y su conocimiento.

Sin embargo, la manifestación o el uso de la funcionalidad del objeto matemático en otros contextos distintos a los de su origen hace que el objeto matemático adquiera nuevas funcionalidades asociadas a su uso y al contexto de uso. Muchas veces, estos usos o nuevas funciones surgen en contextos de conocimiento más amplios del que surgió el objeto. Por ejemplo, *3* como entero, o *3* como numerador en *3/4*. En todo caso, los usos que desarrolla el objeto en otros contextos surgen desde la funcionalidad que representa el objeto matemático en el contexto de su origen.

Por tanto, la funcionalidad que da origen y representa el objeto matemático, los aspectos discriminatorios de esta, y el conjunto de usos de esta funcionalidad en el conocimiento matemático constituyen el significado institucional del objeto matemático.[14] Los nuevos usos completan permanentemente el significado institucional del objeto matemático. Es decir, la caracterización del significado institucional de un objeto matemático no es completamente definida y cerrada, sino que considera la potencialidad de que puedan surgir nuevos usos del objeto matemático.[15] El propio desarrollo del conocimiento matemático puede conllevar que se desarrolle el significado de los objetos matemáticos.

La funcionalidad que representa el objeto se plantea como algo más amplio que su uso, pues permite el uso, dota al objeto de potencialidad de uso en otros contextos, para su interpretación y organización. Los objetos matemáticos adquieren una identidad específica fruto de su funcionalidad en el contexto que le da origen, pero esta funcionalidad se desarrolla posteriormente en los contextos de uso del objeto.

Por tanto, se observa la influencia del contexto para acceder al significado, uso o la funcionalidad inmediata del objeto en el contexto.[16] Por ejemplo, una *función* representa una relación entre dos *va-*

14. «En una situación ideal, y en una institución dada, diríamos que un sujeto 'comprende' el significado del objeto O_1 –o que ha 'captado el significado' de un concepto, por ejemplo– si fuese capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas dentro de la institución correspondiente», Godino y Batanero (1994: 14).

15. Puig (1997: 77-78) habla de *campo semántico* para referirse al conjunto de significados que tienen asociado culturalmente un concepto en función del contexto, y con *restricción semántica* hace referencia a la limitación del significado de un concepto que provoca el contexto en el que se ubica.

16. Douady, citado en Godino y Batanero (1994: 18), indica que «el significado de un concepto se deriva del contexto en que está implicado».

riables, pero bajo el símbolo de *integral definida* representa el *integrando* o en una *ecuación diferencial* es la *incógnita*; el objeto + representa un *valor positivo*, una *operación*, una *lateralidad (límites laterales)* etcétera; una *fracción* es un *operador, un porcentaje, parte-todo, una medida, un cociente indicado, una probabilidad, una posición en la recta real*, etcétera; un *punto* puede ser el *vértice* (significado) de un *triángulo* (contexto), o puede ser un punto (significado) del *plano afín* (contexto), o el *centro* (significado) de una *circunferencia* (contexto), etcétera.

DESARROLLO DE LA MATEMÁTICA

Siguiendo a Cañón (1993), la Matemática es creación y descubrimiento. El descubrimiento se interpreta aquí como la percepción a través de la razón y el conocimiento existente de una cualidad o acción organizativa o interpretativa del contexto. La creación es la expresión externa de esta funcionalidad como objeto independiente del contexto en el que es percibido. Por ejemplo, el objeto fracción surge para representar la parte respecto al todo.

Los objetos matemáticos representan una función organizativa o interpretativa en un contexto. Por tanto, su descubrimiento surge desde la posibilidad o necesidad de una determinada función o funcionalidad en un contexto. Por ejemplo, no se crean los *números naturales* para representar la cantidad, sino que se descubre la posibilidad de representar la cantidad y se crea el objeto matemático con esa función; no surge el objeto de *función* para relacionar dos fenómenos variables, sino que se descubre que la variación de ciertos fenómenos está relacionada, y se crea el objeto matemático que representa esta relación. Históricamente, se ha observado que la función organizativa que representa el objeto *coordenadas* está implícita, desde la Antigüedad, en la medida de longitudes que necesitan de la organización del plano y del espacio.

La deducción es un proceso racional que justifica y dota de validez a los nuevos objetos matemáticos desde el conocimiento previo.[17] La deducción es un proceso cognitivo que pone de manifiesto la posibilidad de descubrir y de crear desde el conocimiento matemático existente. Sin embargo, el descubrimiento y la creación también pueden necesitar de una previsión o de un tanteo de la potencialidad del contexto o de las posibilidades interpretativas u organizativas con las que se puede analizar el contexto. Esta previsión necesita de otros procesos cognitivos como la intuición, la inducción, la analogía, la conjetura, etcétera, por los que se prevén objetos matemáticos motivados por el conocimiento previo del contexto y por las necesidades que se pueden observar o que pueden surgir en él.[18]

El desarrollo del conocimiento matemático se ha puesto de manifiesto desde diversas perspectivas. Por una parte, la percepción de cualidades o acciones que permiten organizar o interpretar contextos genera objetos matemáticos; y el análisis de estos objetos permite descubrir propiedades, métodos o procesos asociados, relaciones entre objetos, de los que también pueden surgir nuevos objetos. Por otra parte, el conocimiento matemático se desarrolla a través de: la simplificación de la expresión de objetos y procesos en los registros semióticos; nuevos usos del objeto desde la funcionalidad que él representa (se amplía su significado); la búsqueda de conexiones del objeto con el conocimiento previo, pues además de dotarlo de validez, pueden motivar el desarrollo de nuevos objetos o reinterpretar los conocidos;[19] la reinterpretación del objeto (o creación de uno nuevo) cuando se percibe la funcionali-

17. «Los nuevos objetos solo llegan a serlo, si el mundo de objetos y de relaciones anteriormente existente encaja dentro de lo nuevo» (Cañón, 1993: 356). Puig (1997: 74) indica que la creación de conceptos también tiene que ver con la organización de conjuntos de resultados en un sistema deductivo.

18. «De una forma u otra, explícita o implícitamente, aún bajo el más inflexible aspecto formalista, lógico o postulatorio, la intuición constructiva continúa siendo el elemento vital en matemáticas» (Courant y Robbins, 1964: 97). «La razón rebasa la pureza deductiva e incorpora otras manifestaciones que le son propias: analogía, inducción...» (Cañón, 1993: 398).

19. «La búsqueda de legitimización para aceptar como ente matemático el número complejo 'i', (...), fue seguida por el descubrimiento de los cuaternios,...» (Cañón, 1993: 386).

dad que representa en otros contextos, es decir, la generalización de la funcionalidad que representa el objeto debida a la aparición de ejemplos;[20] la modificación del objeto (o creación de otros) debida al descubrimiento de errores[21] y de contraejemplos,[22] etcétera.

En definitiva, los conceptos matemáticos tienen un proceso histórico, social y cultural de creación, desarrollo y definición. En cada momento de la historia, existe un desarrollo social y cultural que moldea, condiciona y determina el conocimiento que se considera válido o posible, desde un conocimiento previo aceptado y las nuevas perspectivas que puedan considerarse. Además, el contexto temporal, social y cultural manifiesta necesidades que motivan el desarrollo de este conocimiento.

La definición de los objetos matemáticos surge desde la expresión de su funcionalidad, las propiedades que permiten su discriminación de otros objetos y las relaciones que la ubican en el conocimiento existente (estas relaciones se desarrollan a través de la deducción). La expresión de estos aspectos crea y permite definir el objeto matemático.

Por ejemplo, se podría definir el objeto matemático *3* como aquel que representa una cantidad de tres unidades, y el objeto *triángulo* como la región del plano delimitada por tres rectas que se cortan dos a dos. Sin embargo, también se definen los objetos matemáticos a través del representante (concepto) de la clase de objetos definida por ciertas características comunes, como el origen funcional, las propiedades, etcétera. Por ejemplo, *3* es un *número natural*, un *triángulo* es un *polígono de tres lados*, etcétera. En general, se define el concepto (*fracción, poliedro recto, función, función polinómica*, etcétera) a través de los aspectos distintivos o discriminatorios de la clase de objetos que representa. Entonces, el objeto particular sería un ejemplo del concepto y se puede definir a través de él.

El desarrollo del conocimiento matemático obliga a la modificación o el desarrollo de la definición de los objetos matemáticos.[23] Es decir, la percepción de la funcionalidad que representa el objeto en contextos distintos al que le dio origen puede obligar a modificar (ampliar, generalizar, etcétera) su definición (*continuidad, función, dimensión, producto escalar, límite*, etcétera), de manera que esta permita los condicionamientos del contexto o las particularidades de la funcionalidad en cada contexto. En otros casos, una funcionalidad puede dar lugar a objetos distintos dependiendo del contexto en el que se observe y las propiedades y relaciones que adquiera la funcionalidad de ese contexto (*integral definida, curva*, etcétera). La definición del objeto tiene que reflejar los condicionamientos del contexto que caracterizan al objeto o la funcionalidad en este contexto.

Finalmente, un objeto matemático puede tener varias definiciones, dependiendo del contexto desde el que se desarrolle su definición, por ejemplo: *número natural (Peano, Cantor, etcétera), números reales (sucesiones de Cauchy, cortaduras de Dedekind, etcétera) integral definida (Riemann, Darboux),* etcétera. Es decir, la funcionalidad que representa el objeto matemático (la cardinalidad, la medida, el área de un recinto plano, etcétera) se interpreta desde distintos contextos de percepción y expresión, lo que da lugar a las distintas definiciones, como se pone de manifiesto con los objetos matemáticos mencionados.

20. «Las funciones del análisis, las transformaciones geométricas, las permutaciones de los conjuntos finitos, las aplicaciones entre conjuntos arbitrarios confluyen para generar el concepto general de función» (Puig, 1997: 93). «La transformación de conceptos, como el cambio de las variables, de dependiente a independiente y entre independientes, motivó los conceptos de inversión y composición de funciones» (Puig, 1997: 93).

21. «Al 'corregir' la demostración dada por Cauchy, surge de manera natural un nuevo concepto: convergencia uniforme» (Cañón, 1993: 333).

22. Para evitar la aparición de monstruos [contraejemplos] y *salvar el teorema* [de Euler], «se elabora una nueva definición del concepto de poliedro que los excluye explícitamente» (Puig, 1997: 71).

23. Según Cañón (1993: 167), la definición de un concepto se perfila a medida que aparecen nuevos casos susceptibles de ser captados bajo ese concepto, pero que imprimen precisiones a la caracterización existente.

CONCLUSIÓN: ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Se ha planteado la razón de existencia de los objetos matemáticos, su significado y su representación en torno a la funcionalidad organizativa que representan. En esta conclusión, se plantea el aprendizaje de los objetos matemáticos desde la descripción que se ha hecho de ellos en esta investigación.

La comprensión de un objeto matemático es la percepción de la funcionalidad que representa el objeto y la expresión de esta funcionalidad en un contexto. A diferencia de la creación del objeto matemático, que parte del descubrimiento de una funcionalidad en un contexto y de ella se derivan los aspectos de representación y significado, el aprendizaje se plantea como un recorrido distinto al proceso de creación del objeto.

Desde un punto de vista general, es decir, sin considerar las experiencias con las que un individuo pueda percibir ciertos objetos matemáticos en el contexto del mundo sensible, el aprendizaje de los objetos matemáticos parte necesariamente de sus representaciones. Las representaciones del objeto permiten su expresión y deben ser el medio para llegar a observar la funcionalidad que representa el objeto. La poca especificidad que, en general, tiene el simbolismo que configura estas representaciones hace también necesaria la consideración del contexto (medio físico, objeto matemático, registro semiótico, etcétera) como medio que permite observar la funcionalidad que representa el objeto y, por tanto, que permite que la representación adecuada exprese al objeto. Es decir, las representaciones y la actividad con ellas en los distintos registros y el uso del objeto en distintas situaciones[24] deben permitir observar la funcionalidad que representa el objeto matemático, desde el conocimiento del registro en el que aparecen las representaciones y desde la interpretación de las situaciones en las que se presenta el objeto.

Sin embargo, en un principio, el objeto se identifica con sus representaciones, con la actividad con ellas y con su uso en contextos y situaciones diversas.[25] Es decir, el individuo desarrolla un significado personal[26] del objeto desde su experiencia con sus representaciones. Este es un aprendizaje incompleto por limitarse al tratamiento de sus representaciones. Por ejemplo, un alumno de 1.º de bachillerato indica:

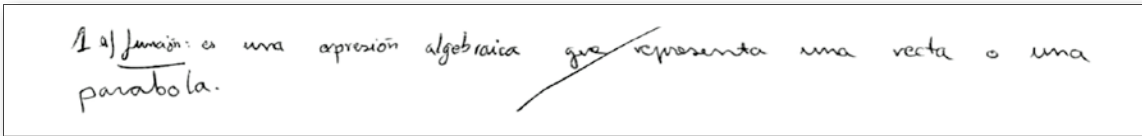

Fig. 1. «Función es una expresión algebraica que representa una recta o una parábola».

Este alumno asocia el concepto de función con su representación algebraica y con la conversión de la representación algebraica a la gráfica, y limita este concepto a funciones lineales y cuadráticas.

Cuando el individuo perciba las representaciones del objeto como medios de expresión de un mismo objeto y, por tanto, independice el objeto de sus representaciones,[27] y cuando perciba la funcionalidad que permite el uso y no los usos particulares, el alumno habrá aprendido y comprendido el objeto y será capaz de que se desarrolle este aprendizaje con nueva información sobre él. Es decir, el aprendizaje y la comprensión se alcanzan cuando el objeto se independiza de sus representaciones y de sus usos particu-

24. «Situaciones susceptibles de dar sentido a los conceptos y a los procedimientos que se les quiere enseñar» (Vergnaud, 1990: 10).
25. «El significado de una expresión está caracterizado por el uso que hacemos de ella» (Wittgenstein, 1976: 99).
26. «Significado de un objeto personal O_p: Es el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto O_p en un momento dado» (Godino y Batanero, 1994: 13).
27. «No puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación» (Duval, 1999: 13).

lares y se percibe como una funcionalidad.[28] El propio proceso de aprendizaje capacita al individuo para que recurra a la representación adecuada y a reconocer el objeto en un contexto o situación.

Es necesario que la funcionalidad se asocie con un objeto y no con un signo, ya que por ejemplo el hecho de que una misma representación sea signo de objetos distintos puede dar lugar a problemas en el aprendizaje y en la comunicación (el signo + representa una *operación, unos ejes cartesianos*, etcétera; un *par de números reales (a, b)* puede ser un *intervalo de la recta real, un punto del plano afín*, etcétera). En general, el uso que se haga de un signo, más bien la funcionalidad que se le asocia a un signo a través de su uso en un contexto (significado), determina el objeto que se está evocando a través del signo.

Finalmente, se considera que el hecho de plantear lo que significa aprender un objeto matemático puede orientar los diseños de enseñanza y la valoración del aprendizaje de los alumnos, en definitiva, orientar la docencia en el aula. Esta apreciación puede ser objeto de investigación posterior.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aleksandrov, A. D., A. N. Kolmogorov, M. A. Laurientiev *et al.* (1973). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid: Alianza Editorial.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Cañón, C. (1993). *La Matemática creación y descubrimiento*. Madrid: UPCO.

Cañón, C. (2004). Lo nuestro es lo infinito. *UNO*, 37, pp. 8-24.

Courant, R. y H. Robbins (1964). *¿Qué es la matemática?* Madrid: Aguilar.

D'Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. La posición «ingenua» en una teoría «realista» versus el modelo «antropológico» en una teoría «pragmática». *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 27, pp. 51-76.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna: Peter Lang. (Traducción al castellano [1999]. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, Cali, [Colombia]: Universidad del Valle, Grupo de Educación Matemática).

Godino, J. D. y C. Batanero (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), pp. 325-355. Disponible en línea: <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf> (1-26).

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En: L. Rico (coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ICE/Horsori, pp. 61-94.

Serrano, W. (2005). El significado de objetos en el aula de matemáticas. *Revista de Pedagogía*, 75, pp. 131-164.

Sierra, M. (1997). Notas de Historia de las Matemáticas para el Currículo de Secundaria. En: L. Rico (Coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, Barcelona: ICE/Horsori, pp. 179-194.

Torres, C. (2009). De la matemática clásica a la matemática moderna: Hilbert y el esquematismo kantiano. *Diánoia*, 54(63), pp. 37-70.

Ullmann, S. (1978). *Semántica. Introducción a la ciencia del significado*. Madrid: Aguilar.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, 10(2,3), pp. 133-170. Disponible en línea: <http://ipes.anep.edu.uy/documentos/curso_dir_07/modulo2/materiales/didactica/campos.pdf> (1-21).

Wittgenstein, L. (1976). *Los cuadernos azul y marrón*. Madrid: Tecnos.

28. Vergnaud (1990: 7) y Duval (1999: 60) asocian el aprendizaje conceptual al descubrimiento de invariantes en un conjunto de situaciones (Vergnaud), y de una invarianza entre las representaciones semióticas (Duval). En este estudio, se considera que esa invarianza es la función que representa el objeto matemático y le da origen.

MATHEMATICAL OBJECTS NATURE: REPRESENTATION AND MEANING

Cristina Pecharromán
Didáctica de la Matemática. Universidad de Valladolid
pecharroman@am.uva.es

This article contains a theoretical research study that approaches the characterization of mathematical objects from an ontological position, with regard to the nature of these objects.

The need to represent certain qualities and actions, organizational or interpretive of the context originates mathematical objects. These qualities and actions are perceived by reason when we look at the organization or interpretation of the context (physical - sensitive world, any mathematical object or several mathematical objects and their mathematical relationships). In other words, mathematical objects are considered to be or to represent an organizational or interpretive function of the context, and the nature of mathematical objects is associated with their functional origin. However, a greater precision or characterization of the functionality that mathematical objects represent is necessary to discriminate or recognize the object. This characterization comes from the qualities of the object, such as properties, internal relations and relations of the object to other objects. Consequently, with the origin of mathematical objects, these qualities may represent new mathematical objects.

This position of mathematical objects in nature is then used to interpret aspects of representation and meaning that set up or constitute these objects and reveal them.

The first representation of the mathematical object is created from the context in which it is discovered, as a form of expression of the functionality that it represents. However, mathematical objects support diverse representations, depending on the nature of the signs that make up the context from which the representation is made. The creation of the representation is primarily directed by the organizational function they are meant to express, and depends on the nature of the context and the knowledge about this context, therefore, the historical and cultural moment.

The institutional meaning of a mathematical object is developed from the functionality that it represents in the context of origin, and from the discriminatory aspects of that functionality. In addition, the functionality the object represents provides it with a potentiality of use in different contexts and situations. These uses complete the institutional meaning of the mathematical object permanently, and show the influence of the context to access the immediate meaning or use of the object.

The development of mathematical knowledge is revealed from diverse perspectives. On the one hand, the perception of qualities or actions that allow to organize or to interpret contexts generates mathematical objects, and the analysis of these objects leads to discover properties and methods, or associate processes and relations between objects, from which new objects can also arise. On the other hand, mathematical knowledge develops through: the simplification of the expression of objects and processes in the semiotic registers; new uses of the object from the functionality it represents; the search for connections of the object with prior knowledge; the generalization of the functionality the object represents due to the appearance of examples; the modification of the object due to the discovery of errors and counterexamples...

Finally, an interpretation is made of the understanding of mathematical objects as the perception of the functionality the object represents. In addition, it is believed that the representations and their activity in different records, together with the use of the object in different situations, should allow to observe the functionality that it represents, from the knowledge of the record in which the representations appear, and from the interpretation of the situations in which the object occurs. However, these aspects are not thoroughly developed, as this paragraph is proposed as an approach to future research.

This study does not use a single theoretical framework but several, since each paragraph has needed a specific theoretical reference to substantiate or justify the ideas presented in it. The theoretical references are also used to contrast or combine ideas that the article brings with existing ideas of other authors. The validity of the ideas the article brings is given by the foundation on the ideas of other authors, but also by the ability to carry out the construction of mathematical objects and the interpretation of their understanding, from the initial position on the nature of mathematical objects that the article initially provides.

Keywords: Mathematical objects, functionality, representation, meaning, learning.