ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
Revista de investigación y experiencias didácticas
Núm. 31.3 (2013): 49-66
ISSN (papel): 0212-4521 / ISSN (en linea): 2174-6486

ACTUACIONES DE ALUMNOS INSTRUIDOS EN LA RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS EN EL ENTORNO DE LA HOJA DE CÁLCULO Y SU RELACIÓN CON LA COMPETENCIA EN EL MÉTODO CARTESIANO

PERFORMANCES OF STUDENTS TRAINED IN ALGEBRAIC PROBLEM SOLVING IN A SPREADSHEET ENVIRONMENT AND THEIR RELATION TO THEIR COMPETENCE IN THE CARTESIAN METHOD

David Arnau, Luis Puig
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València
david.arnau@uv.es, luis.puig@uv.es

RESUMEN: Presentamos resultados de una investigación en la que, entre otros objetivos, se pretendía determinar cómo influía la enseñanza de la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo en la competencia en el método cartesiano. La comparación de los cuestionarios administrados antes y después de la enseñanza puso de manifiesto un aumento del uso polisémico de la *equis* cuando se resolvía con lápiz y papel, y una disminución del uso del lenguaje del álgebra en los problemas de edades. Mostramos que estos resultados pueden atribuirse a la aparición de estrategias de resolución en la hoja de cálculo en las que las situaciones descritas en el enunciado se modelizaban mediante relaciones funcionales, en las que se evitaba operar con lo desconocido y en las que varias cantidades se agrupaban bajo una misma denominación.

PALABRAS CLAVE: resolución de problemas, álgebra, hoja de cálculo.

ABSTRACT: We present results of an investigation in which, among other objectives, we sought to determine how the teaching of algebraic problem solving in a spreadsheet environment influenced the competence in the Cartesian method. The comparison of the tests administered before and after the instruction showed an increase in the polysemy of the *x* when problems were solved with paper and pencil and a decrease in the use of the language of algebra in age problems. We show that these results may be attributed to the emergence of solving strategies in the spreadsheet environment in which the described situations in the statement were modelled by functional relations. In such cases, the operation with the unknown was avoided and several quantities were grouped under a single name.

KEYWORDS: problem solving, algebra, spreadsheet.

Fecha de recepción: junio 2012 • Aceptado: abril 2013

Arnau, D. y Puig, L. (2013) Actuaciones de alumnos instruidos en la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo y su relación con la competencia en el método cartesiano, *Enseñanza de las Ciencias* 31 (3), pp. 49-66

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Plantear un método algebraico de resolución de problemas en la hoja de cálculo se apoya en que numerosos estudios han puesto de manifiesto que el empleo de este entorno informático puede tener un papel destacado en los primeros momentos de la enseñanza del álgebra (Dettori, Garuti y Lemut, 2001; Tabach y Friedlander, 2004; Tabach, Hershkowitz y Arcavi, 2008; Wilson, Ainley y Bills, 2005).

Dentro del campo de la resolución algebraica de problemas verbales, los resultados del *Spreadsheet Algebra Project* (Rojano y Sutherland, 1991, 1993; Sutherland y Rojano, 1993) mostraron que la hoja de cálculo ayudaba a los alumnos a explorar, expresar y formalizar sus ideas informales cuando resolvían problemas. En concreto, al comparar las actuaciones de estudiantes antes y después del uso de la hoja de cálculo, se observó una evolución de sus estrategias espontáneas de resolución hacia un método más general y algebraico en el que se iba de lo desconocido hacia lo conocido (Rojano y Sutherland, 1993).

De igual manera, Friedlander (1996, 1999) señaló que la resolución de problemas con la hoja de cálculo favorecía que los estudiantes buscaran esquemas, construyeran expresiones algebraicas, generalizaran y justificaran conjeturas, ya que las características del entorno «permiten un movimiento libre de vaivén entre el mundo de los números y el del álgebra; (y) presentan un medio en el cual el uso del álgebra es una necesidad natural, más que un requisito arbitrario» (Friedlander, 1996: 71). Sin embargo, también indicó la presencia de posibles obstáculos: «Así, la generación de datos numéricos en gran cantidad puede provocar un exceso de confianza en la 'razonabilidad' de la salida y disminuir la necesidad de una comprensión en profundidad del problema en cuestión» (Friedlander, 1999: 344).

Por otro lado, también ha sido estudiado el hecho de que el lenguaje de la hoja de cálculo y el del álgebra, siendo semejantes, presentan diferencias que van más allá de la forma. Por ejemplo, Dettori, Garuti y Lemut (2001) y Yerushalmy y Chazan (2002) mantienen que los signos usados en la construcción de fórmulas en la hoja de cálculo representan celdas (lugares) y, por tanto, en principio no se puede afirmar que representen ni incógnitas ni variables. Ahora bien, Wilson, Ainley y Bills (2005) sostienen que, aunque inicialmente no sean ni lo uno ni lo otro, el uso que se hace de ellos permitiría introducir el concepto de variable razonando sobre acciones, como la copia y pegado por arrastre que es posible realizar sobre las fórmulas de la hoja de cálculo. Sin embargo, la interpretación de estas acciones también puede resultar un asunto complejo para los estudiantes, pues no siempre es posible establecer una correspondencia con los procedimientos equivalentes que hay que realizar en lápiz y papel. Así, por ejemplo, Tabach y Friedlander (2004) señalan que la acción de arrastre sobre fórmulas recursivas en el entorno de la hoja de cálculo dota a estas de un potencial que no tiene equivalente cuando se trabaja en lápiz y papel.

En este artículo, presentamos parte de los resultados de una investigación que tenía el objetivo de estudiar qué sucede cuando se enseña a resolver problemas aritmético-algebraicos de enunciado verbal en el entorno de la hoja de cálculo, usando un modelo de enseñanza que pretende que los alumnos acaben siendo competentes en la resolución algebraica de problemas mediante el método cartesiano (Filloy, Puig y Rojano, 2008). En concreto, el objetivo del artículo es identificar las causas de las actuaciones contrarias a la competencia en el método cartesiano que se observan tras la enseñanza. Con este fin, presentamos casos de actuaciones generalizadas cuando se resuelve en la hoja de cálculo que se apartan del método propuesto en la enseñanza. En estas estrategias, las situaciones descritas o inferidas a partir del enunciado se modelizan mediante relaciones funcionales en las que se evita operar con lo desconocido y en las que varias cantidades se agrupan bajo una misma denominación. Por último, justificamos que estas estrategias pueden ser la causa de efectos contrarios a los pretendidos por la enseñanza cuando los estudiantes vuelven a resolver problemas con lápiz y papel como: (1) un aumento de la polisemia de la *equis*, y (2) una disminución del uso del lenguaje del álgebra en los problemas de edades que se refleja en un incremento de la resolución mediante ensayo y error.

EL MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

Modelos teóricos locales

En el diseño del marco teórico y metodológico, desempeña un papel central la idea de que lo que se elabora para organizar la investigación es un modelo teórico local (Filloy, 1990; Filloy, Rojano y Puig, 2008; Kieran y Filloy, 1989). El carácter local proviene del hecho de que el modelo se elabora para dar cuenta de fenómenos que se producen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de algún contenido matemático concreto a algunos alumnos concretos, y el modelo pretende ser adecuado a los fenómenos observados en esa situación concreta. El carácter de modelo proviene, entre otros, del hecho de que no se pretende que las cosas sean como las caracteriza el modelo, sino solo que, si las cosas fueran como las caracteriza el modelo, los fenómenos serían los que se observan. Por lo tanto, el modelo tiene un carácter descriptivo, explicativo y predictivo; pero no excluye que los fenómenos observados puedan ser descritos, explicados y predichos de forma diferente, es decir, mediante un modelo diferente (Puig, 2008).

Los procesos de enseñanza y aprendizaje pueden ser interpretados como situaciones de comunicación y producción de sentido (Filloy, Rojano y Puig, 2008). Este punto de vista semiótico y el hecho de que en una situación de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas están presentes el profesor (el sistema escolar), los alumnos (el aula) y las Matemáticas conduce a considerar cuatro componentes de los modelos teóricos locales: un componente de competencia, un componente de actuación o de los procesos cognitivos, un componente de enseñanza y un componente de comunicación.

En el apartado siguiente, se describen parte de los componentes del modelo teórico local construido para organizar la investigación. Por cuestiones de espacio y claridad, en la exposición solo se presentan los elementos necesarios para poder analizar e interpretar las observaciones experimentales. Como consecuencia, omitimos completamente el desarrollo del componente de comunicación.

El modelo teórico local de la investigación

El método cartesiano como modelo de competencia

La competencia en la resolución algebraica de problemas verbales aritmético-algebraicos depende básicamente de tres componentes: la competencia en el lenguaje natural en el que está escrito el enunciado; la competencia en el lenguaje del álgebra en el que se representará la ecuación y la competencia en el proceso de conversión del texto expresado en lenguaje natural a lenguaje algebraico (Filloy, Puig y Rojano, 2008). De forma global, podemos describir las exigencias anteriores mediante lo que se hace al emplear el método cartesiano (MC). El MC es la manera en la que habitualmente se introduce la resolución algebraica de problemas en los textos de álgebra. Presentamos el MC desglosado en una secuencia ordenada de pasos:

1. Una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.
2. Elección de una cantidad que se va a representar con una letra (o de unas cuantas cantidades que se van a representar con letras distintas).
3. Representación de otras cantidades mediante expresiones algebraicas que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o una expresión algebraica.
4. Establecimiento de una ecuación (o tantas como letras distintas se haya decidido introducir en el segundo paso) igualando dos expresiones, de las que se han escrito en el tercer paso, que representen la misma cantidad.

5. Transformación de la ecuación en una forma canónica.
6. Aplicación de la fórmula o algoritmo de solución a la ecuación en forma canónica.
7. Interpretación del resultado de la ecuación en términos del problema.

(Filloy, Puig y Rojano, 2008: 330)

La lectura analítica, que se especifica en el primer paso, supone convertir el texto del enunciado del problema en otro texto en lenguaje natural en el que se incluyen únicamente cantidades y relaciones entre cantidades. En este proceso, se produce una secuencia de textos que supone la exploración del contexto que se describe en busca de cantidades o relaciones no presentes en el enunciado, así como la eliminación de elementos superfluos.

Los pasos segundo, tercero y cuarto traducen el texto obtenido tras la lectura analítica a otro texto en el lenguaje del álgebra. Estos tres pasos exigen competencia en las reglas de generación de expresiones bien formadas en el lenguaje del álgebra, el mantenimiento de la semántica del texto al que hemos convertido el problema tras la lectura analítica y la expresión de una misma cantidad (o tantas como letras se empleen) de dos maneras diferentes que da sentido a la construcción de la ecuación, y constituye el significado algebraico del signo igual en una ecuación (Filloy, Puig y Rojano, 2008).

Los pasos quinto y sexto requieren competencia en la transformación de un texto expresado en un sistema de signos algebraico en otro texto en el mismo sistema de signos con la intención de reducir la ecuación (o sistemas de ecuaciones) a una forma canónica que nos permitirá calcular el valor de la cantidad a la que se asoció una letra (y a partir del valor de esta letra, el resto de cantidades a las que se asoció una expresión algebraica).

El último paso supone la incorporación de los valores obtenidos a la situación propuesta en el enunciado, y de la que habíamos partido, para determinar la adecuación del resultado, lo que exige competencia en el conocimiento del contenido del problema.

El componente de actuación y la polisemia de la equis

Desde el punto de vista del componente de actuación, Filloy, Rojano y Puig (2008) describieron casos en los que los estudiantes asignaban significados derivados de diferentes campos semánticos del lenguaje algebraico a una misma letra, que aparecía en una sola frase algebraica y llamaron a este fenómeno *polisemia de la equis*. En concreto, encontraron que algunos estudiantes de niveles iniciales en cursos de Álgebra a los que se les presentaba la ecuación $x + x/4 = 6 + x/4$ tendían a decir que la primera letra x era igual a 6 y que las otras *equis* podían adoptar cualquier valor, siempre que fuera el mismo. Con lo que la primera *equis* estaría tomando su significado del campo semántico en el que las letras son incógnitas que representan, por tanto, cantidades determinadas pero desconocidas; mientras que las otras *equis* tomarían su significado del campo semántico de las identidades algebraicas en las que las letras representan números generalizados, no incógnitas, y por lo tanto pueden tener cualquier valor.

Esta polisemia de la *equis* podemos considerarla ligada a dificultades al abordar los pasos quinto y sexto del MC, pero también podemos encontrar polisemia de la *equis* en los pasos segundo y tercero, cuando se traduce el enunciado de un problema al lenguaje del álgebra (por ejemplo, usar la letra equis para referirse a la edad actual y futura de una persona). En la resolución algebraica de un problema, la ecuación es el resultado de un proceso de traducción en el que la letra está en el lugar de un número determinado (por la ecuación), pero desconocido (para el resolutor). El carácter de determinado es pues una propiedad matemática, pero el carácter de desconocido es una propiedad del conocimiento del resolutor. Por tanto, el resolutor puede no atribuir a la *equis* el significado de determinada, que es una propiedad ligada a la ecuación y no al conocimiento (Puig, 2012), lo cual puede acabar desembocando en un uso polisémico.

Desde el punto de vista de la resolución algebraica, un uso polisémico de una letra supone emplearla para designar a más de una cantidad, y el significado que se le asocia es el de incógnita, lo que no es correcto. Ahora bien, en los problemas en los que se describen dos o más estados del mundo (por ejemplo, el estado actual y futuro en un problema de edades), poner la atención sobre el proceso que los une implicaría poder describir mediante funciones todos los estados intermedios usando cantidades desconocidas no determinadas. En este caso, las letras que las representarían se usarían como variables, es decir, como cantidades que varían unas en función de otras. Por tanto, lo que en el campo semántico de las funciones sería correcto (asignar una letra a la variable edad), en el campo semántico de las ecuaciones sería incorrecto (asignar una misma letra a las cantidades determinadas distintas de «edad actual» y «edad futura»).

El componente de enseñanza del modelo

Para enseñar a resolver problemas de manera algebraica, hemos diseñado una secuencia de enseñanza en la que se usa la hoja de cálculo. La intención no era que se acabara resolviendo problemas con la hoja de cálculo, sino que lo que se hizo en la hoja de cálculo tenía voluntad de ser abandonado. Esto es posible hacerlo porque hay elementos comunes entre el MC y una manera de resolver los problemas en la hoja de cálculo que vamos a describir a continuación, y que está elaborada para que se parezca lo más posible a los pasos del MC. A esa manera de resolver los problemas la vamos a llamar *método de resolución algebraico en la hoja de cálculo* (MHC). El método lo vamos a describir dividiéndolo en pasos ideales para poder compararlo con el MC. Estos pasos ideales no pretendemos que reflejen el comportamiento real, sino un inventario de aquello que de una manera u otra haría un resolutor ideal. El usuario real, cuando ponga en práctica el método, abreviará pasos y cambiará su orden. Exponemos la división en pasos ideales y, a continuación, lo compararemos con el MC:

1. Una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.
2. La asignación de una celda a una o varias cantidades desconocidas y la elección de una única cantidad desconocida representada en una celda de la que dependerán directa o indirectamente el resto de cantidades desconocidas representadas. A esta cantidad la llamaremos *cantidad de referencia* y a la celda que ocupa, *celda de referencia*.
3. La asignación a todas las cantidades desconocidas (exceptuando la cantidad de referencia) de una fórmula mediante la que se expresa una relación con otras cantidades.
4. El establecimiento de una ecuación, lo que se hace igualando dos expresiones que representan la misma cantidad.
5. La variación del valor de la cantidad de referencia hasta conseguir que se verifique la igualdad.
6. La interpretación del valor que verifica la igualdad en términos del problema.

En el primer paso del MHC, se especifica exactamente lo mismo que en el primer paso del MC. Esto no significa que los análisis del enunciado que realizamos en ambos métodos sean equivalentes, pues cada uno prevé el uso de distintos sistemas matemáticos de signos con sus virtudes y limitaciones. Sin embargo, sí coinciden en aspectos como considerar de la misma manera cantidades conocidas y desconocidas.

Los pasos segundo, tercero y cuarto son similares a los respectivos pasos del MC, ya que básicamente se reemplazan las referencias al lenguaje del álgebra que se hacen en el MC por el uso del lenguaje de la hoja de cálculo. Así, en estos pasos se traduce el texto obtenido tras la lectura analítica en otro texto en el sistema de signos de la hoja de cálculo, lo que exige competencia en: las reglas de generación de expresiones bien formadas en el lenguaje de la hoja de cálculo, la adecuación de los significados del texto al que hemos reducido el problema tras la lectura analítica y la construcción de una ecuación. Sin embargo, en el MHC se introduce la limitación del uso de una única celda de referencia que se traslada al paso cuarto en la construcción de una única ecuación. Esta restricción es consecuencia de la imposibilidad de realizar transformaciones algebraicas en el entorno de la hoja de cálculo, lo que impide realizar el equivalente al paso 5 del MC y, en consecuencia, obliga a que la materialización de la lectura en la hoja de cálculo se disponga de una manera canónica. En esta disposición canónica, todas las expresiones (fórmulas) representadas deben tener como argumento (directo o indirecto) la celda de referencia.

En consecuencia, el uso del MHC supone algo más que un tanteo sistemático. Podemos decir que el tanteo sistemático consiste en emplear el MC, pero sustituyendo el lenguaje algebraico por el aritmético, lo que supondría modificar el segundo paso del MC por la exigencia de asignar un valor numérico provisional a una cantidad desconocida. También sería posible seguir el MC hasta el paso cuarto usando el lenguaje del álgebra e iniciar un procedimiento de tanteo sistemático para encontrar la solución de la ecuación planteada. Al primer método lo llamaremos *tanteo sistemático sobre las cantidades* y al segundo, *tanteo sistemático sobre la ecuación*. De lo que acabamos de exponer en este apartado, se concluye que el MHC sería equiparable a un tanteo sistemático sobre la ecuación sustituyendo el lenguaje del álgebra por el de la hoja de cálculo, y apoyando la búsqueda de la solución de la ecuación en las posibilidades de la hoja de cálculo para generar gran cantidad de datos numéricos.

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIMENTACIÓN

Población y esquema de la experimentación

La población de nuestro estudio experimental estaba formada por un grupo natural de 24 estudiantes (11 hombres y 13 mujeres) de segundo curso de educación secundaria obligatoria. Los estudiantes tenían una edad de entre 13 y 14 años. La elección de los individuos y el momento de observación respondieron a que los estudiantes acababan de ser instruidos en la resolución algebraica de problemas verbales aritmético-algebraicos, pero aún encontraban dificultades en el uso del MC. Era, por tanto, un momento en el que aún podíamos observar un aumento en la competencia en el MC, pero en el que también podían surgir actuaciones que supusieran un regreso al uso de formas de resolver más próximas al dominio de la aritmética.

Todas las sesiones de la secuencia de enseñanza se desarrollaron en el aula de Informática del centro, coincidiendo con el horario habitual de la asignatura de Matemáticas y tuvieron una duración de 50 minutos. En primer lugar, se administró un cuestionario (cuestionario Pre) formado por ocho problemas que podemos llamar algebraicos: tres problemas de la familia edades, uno de ábaco, dos de compra-venta y dos de reparto. Los ocho problemas elegidos son problemas cuya solución o cuya lectura analítica más natural o más habitual es algebraica, lo que no quita que puedan tener una solución aritmética (Puig y Cerdán, 1990) o una lectura analítica aritmética (Filloy, Puig y Rojano, 2008). Estos problemas y el resto de los que se emplearon en la investigación eran problemas verbales escolares extraídos de libros de texto o procedentes de informes de investigación que avalaban su uso en este nivel educativo.

A continuación, los estudiantes se agruparon por parejas y se inició la enseñanza de los rudimentos de la hoja de cálculo en la que se ofrecieron técnicas básicas como la construcción de fórmulas o la generación de secuencias numéricas por copia y pegado por arrastre. Esta primera fase de enseñanza se desarrolló a lo largo de siete sesiones.

La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo se desarrolló en seis sesiones inmediatamente después de la fase de enseñanza de rudimentos. En las dos primeras, se introdujo el MHC mediante la resolución guiada de tres problemas; en las cuatro sesiones restantes, los estudiantes resolvieron una colección de diez problemas verbales típicamente algebraicos (en total cuatro de compra-venta, cuatro de edades, tres de ábaco y dos de reparto). Durante esta fase, estuvieron presentes la profesora de Matemáticas del grupo y el investigador. La participación de ambos durante las dos primeras sesiones consistió en vigilar la correcta resolución de los problemas. Para ello se intervino, cuando fue necesario, aclarando las dudas y corrigiendo errores. No se permitió pasar a la colección de problemas sin haber terminado las actividades iniciales. Durante la resolución de la colección de problemas, los profesores únicamente intervinieron a petición de los estudiantes y las ayudas se ofrecieron de manera progresiva (sugerencia, pista y ayuda significativa).

La estructuración de la secuencia de enseñanza a partir del MHC supuso tomar decisiones sobre procesos que podían llevarse a cabo de distintas maneras. Así, a la hora de concretar el paso 4 del MHC, se optó por asignar dos celdas a una misma cantidad y comparar sus valores en lugar de construir la ecuación mediante una fórmula del tipo =B1=B2; la cual proporcionaría como resultado VERDADERO, si los valores presentes en B1 y B2 coincidieran, o FALSO en caso contrario. Respecto al paso 5 del MHC, elegimos generar una secuencia de valores en la fila en la que se encontraba la celda de referencia, y copiar el contenido del resto de celdas mediante copia y pegado por arrastre, frente a la técnica de hacer variar el valor presente en la celda de referencia. Se eligió esta manera porque la generación de tablas numéricas proporciona un referente numérico que permite valorar la resolución en su conjunto.

Al terminar la secuencia de enseñanza, se realizó un estudio de casos en el que se grabó a las parejas en vídeo mientras resolvían con la hoja de cálculo una colección de seis problemas típicamente algebraicos (tres de reparto, uno de compra-venta y dos de edades). Estas grabaciones se hicieron en dos días fuera del horario habitual de la asignatura.

Por último, se administró un cuestionario (cuestionario Post) formado por ocho problemas cuya estructura de relaciones entre cantidades era isomorfa a los del cuestionario Pre. Para que el contexto y el lenguaje empleado no aumentara o disminuyera la complejidad de los problemas del cuestionario Post, nos limitamos a sustituir situaciones, nombres y valores numéricos manteniendo en este último caso el orden de magnitud.

Las técnicas de obtención de los protocolos audiovisuales y escritos

Al observar a los estudiantes mientras resolvían problemas en la hoja de cálculo, teníamos el propósito de describir las tendencias cognitivas de los estudiantes, materializadas en las estrategias empleadas, cuando resolvían problemas verbales aritmético-algebraicos en este entorno. Decidimos que la resolución de los problemas se iba a organizar por parejas porque, como señala Puig (1996) partiendo de Schoenfeld (1985), los protocolos verbales obtenidos de la resolución de un problema por parte de dos personas muestran más fácilmente aspectos como la toma de decisiones, que aquellos que se obtienen de la actuación de una persona. Por otro lado, al inicio de la enseñanza se había permitido que los estudiantes eligieran a sus compañeros, para primar el confort, la espontaneidad y los intercambios de información.

Para poder analizar las actuaciones de los estudiantes, convertimos el protocolo audiovisual en un protocolo escrito. Con este fin, segmentamos el continuo que se observa en el protocolo audiovisual en ítems que contienen cualquier fragmento del discurso de un individuo que se producía sin interrupción. Para un correcta interpretación de los diálogos que ofrecemos, nos limitaremos a indicar que, en la transcripción de la introducción de fórmulas, escribimos en primer lugar la celda en la que se introduce la fórmula; a continuación, y separada por un espacio en blanco, la fórmula; por último, y separado por un punto y coma, el valor que se muestra en la celda o el mensaje de error producido.

Características de los problemas del estudio de casos

En este artículo, analizamos casos obtenidos de las grabaciones en vídeo en los que se resolvían tres de los seis problemas utilizados: *Paz, Petra y su madre*; *Lana y algodón*; y *Las ovejas*. A continuación, ofrecemos los enunciados y una breve descripción de las características que nos llevaron a seleccionarlos inicialmente. Dentro de este artículo, la selección de estos problemas únicamente responde a que nos permiten mostrar ejemplos de las estrategias de resolución espontáneas que utilizaban los estudiantes después de haber sido instruidos en el uso del MHC y que se apartaban de la enseñanza.

Paz, Petra y su madre

Paz y Petra tienen 6 y 9 años respectivamente. Su madre, Ana, tiene 35 años. ¿Cuántos años deben pasar para que, entre las dos niñas, igualen la edad de la madre?

Lana y algodón

Se dispone de tela de lana y de tela de algodón. En total 12 metros. El precio del metro de lana es de 2 euros y el de algodón, de 4 euros. El valor total de la tela que se dispone es de 32 euros. ¿De cuántos metros de tela de lana y de cuántos metros de tela de algodón se dispone?

Las ovejas

En una granja hay 180 ovejas en dos corrales. Si sabemos que en uno de ellos hay 30 ovejas más que en el otro, ¿cuántas ovejas hay en cada corral?

El problema *Paz, Petra y su madre* es un problema de la familia de edades. Esta familia de problemas se caracteriza por exigir para su resolución del uso de la estructura conceptual *edad futura = edad actual + tiempo transcurrido*, y no solo por el hecho de que en el enunciado del problema se haga referencia a las edades de las personas. En el problema *Paz, Petra y su madre*, se conocen las edades actuales de las protagonistas; pero se desconocen las edades futuras y el tiempo transcurrido y esto podría posibilitar el desarrollo de estrategias de resolución en las que se generen tablas de valores con las posibles edades de los protagonistas a medida que transcurre el tiempo desde la situación inicial.

Para resolver el problema *Lana y algodón* de manera algebraica en la hoja de cálculo (o si se pretende resolver mediante el MC usando solo una letra), debe modificarse necesariamente una de las dos relaciones ligadas mediante la estructura conceptual total: el total de metros de tela (conocida) es la suma de los metros de cada tipo de tela (desconocidas), o el valor total de la tela (conocida) es la suma del valor total de cada tipo de tela (desconocidas). Por lo tanto, era un problema que nos podía mostrar las dificultades que encuentran algunos estudiantes al usar el MHC en situaciones en las que el uso del MC les permitiría soslayarlas recurriendo al planteamiento de un sistema de ecuaciones.

La selección del problema *Las ovejas* respondió a que permite realizar múltiples lecturas analíticas tanto aritméticas como algebraicas. Por lo tanto, era un problema que nos podía mostrar la tendencia de algunos estudiantes a evitar el uso del MHC recurriendo a resoluciones aritméticas.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Como se indica en Puig (2008), en el marco metodológico que se articula sobre la idea de los modelos teóricos locales, las actuaciones de los estudiantes se analizan con respecto a la conducta competente y se describen mediante las categorías que proporcionan los elementos del modelo de competencia. Ahora bien, el modelo de enseñanza que se pone en juego en nuestra investigación conlleva la competencia en el MHC, el cual se plantea como intermediario en el aprendizaje del MC. En consecuencia, el MHC define un sujeto competente propio del modelo de enseñanza, cuyas competencias tienen el carácter de provisionalidad que les confiere el hecho de que habrán de abandonarse en favor de las competencias propiamente algebraicas, pero que localmente funciona como sujeto ideal. Como consecuencia, el análisis de las producciones de los estudiantes cuando resuelven en la hoja de cálculo, se realiza con respecto a la conducta competente descrita en el MHC; mientras que las resoluciones de los cuestionarios Pre y Post se analizan tomando como referente el MC.

La modelización del proceso que une dos situaciones descritas en el enunciado

La pareja Macarena-Ester resolvió el problema *Paz, Petra y su madre* de manera incorrecta, ya que interpretaron que la suma de las edades futuras de las hijas debía ser igual a la edad actual de la madre. Para ello, generaron secuencias numéricas con las posibles edades de las protagonistas, a las que hemos llamado *líneas de vida*, que les permitieron modelizar el proceso del paso del tiempo (ver figura 1, en la que se muestran los valores y figura 2, en la que se muestran las fórmulas que habían generado). Observamos que, aunque se ha representado la cantidad desconocida tiempo transcurrido (ver celda A4 en las figuras 1 y 2), se ha evitado operar con ella (obsérvese que en la figura 2 no se hace referencia a las celdas de la fila 4) de manera simbólica, sustituyendo la relación entre las edades actual y futura y el tiempo transcurrido, por el cálculo de la edad el año siguiente de manera recursiva. Para ello, en la celda C1 introdujeron la fórmula =B1+1 que les permitía calcular la edad de Paz el año que viene (en B1 se halla el valor de la edad actual de Paz) y copiaron y pegaron mediante arrastre esta fórmula a lo largo de la fila 1 para generar las edades que iría teniendo Paz desde el momento actual (en la fila 2 hicieron lo mismo para Petra). De esta forma, utilizaron la fila 1 para representar tanto la cantidad conocida «edad actual de Paz», como la cantidad desconocida «edad futura de Paz», lo que podría interpretarse como que en esta fila se representó la variable «edad de Paz». A diferencia de lo que exige el MHC, el recurso a las líneas de vida supone iniciar la variación que establece el paso 5 sin atender previamente de forma completa a los pasos 2, 3 y 4 y, en consecuencia, la resolución mediante líneas de vida estaría más próxima al empleo de un tanteo sistemático sobre las cantidades.

◇	A	B	C	D
1	Paz	6	7	8
2	Petra	9	10	11
3	Madre	35	35	35
4	Años que tienen que pasar			

Fig. 1

◇	A	B	C	D
1	Paz	6	=B1+1	=C1+1
2	Petra	9	=B2+1	=C2+1
3	Madre	35	35	35
4	Años que tienen que pasar			

Fig. 2

La pareja Paco-Lorenzo fue la única que resolvió este problema mediante el MHC; aunque durante el proceso se observaron intentos por parte de Paco de usar líneas de vida cuando surgían dificultades. Así, Lorenzo, siguiendo el MHC, construyó la ecuación incorrecta =B1+B2+B4=B3+B4 (que traducida al lenguaje del álgebra sería $6 + 9 + x = 35 + x$, siendo x el tiempo transcurrido), en la que se operaba con la cantidad desconocida «tiempo transcurrido» representada en la celda B4 (ver figura 3). Cuando iniciaron el paso 5 del MHC, el error en la construcción de la ecuación condujo a que no se verificara la igualdad, lo que dio lugar al siguiente diálogo en el que se observan los esfuerzos de Paco por emplear las líneas de vida (al decir: «¿No es todo más uno…?» parece proponer el cálculo de la edad el año siguiente mediante fórmulas recursivas), y la perseverancia de Lorenzo en mantenerse fiel al MHC que le llevó incluso a considerar que, antes que un error en el planteamiento, podían encontrarse ante un problema mal formado.

[Véase figura 3]
Paco: —¿No es todo más uno…? Sí.
Lorenzo: —¿Más uno? No, más esto (sitúa el cursor sobre C4).
Paco: —La edad de todas, más uno. Así hasta que … Sí, ahora verás.
Lorenzo: —A lo mejor será que nunca igualarán.
Paco: —¡Sí hombre…!
Lorenzo: —Pues un problema trampa.

◇	A	B
1	Edad Paz	6
2	Edad Petra	9
3	Edad madre	35
4	Años que deben pasar	
5		=B1+B2+B4=B3+B4

Fig. 3

El recurso a las líneas de vida en los problemas de edades se observó durante la secuencia de enseñanza, y su uso fue generalizado en el estudio de los casos en los que 11 parejas de un total de 12 resolvieron el problema *Paz, Petra y su madre* mediante este procedimiento. También utilizaron esta estrategia 9 de las 12 parejas en el otro problema de edades utilizado que decía: «Adrián tiene 15 años. Tania tiene 40 años. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la edad de Tania sea igual al doble de la edad de Adrián?».

La modelización de un posible proceso que une la situación descrita en el enunciado con otra hipotética

De lo descrito en el apartado anterior, podemos concluir que la fusión de cantidades determinadas (edad actual y edad futura) en cantidades no determinadas (edad) y la posterior generación de las tablas de valores que dan cuenta de un proceso real es un recurso que emplean los resolutores cuando en el enunciado del problema aparecen referencias a una misma magnitud (edad) de un mismo objeto (persona) en momentos distintos (actual y futuro), y estas están relacionadas mediante un proceso conocido (por ejemplo, el transcurso del tiempo). Sin embargo, como veremos en los dos ejemplos siguientes, también hemos encontrado casos en los que se recurre a la modelización de un posible proceso en problemas en cuyo enunciado solo hay referencia a un estado.

El caso de la pareja Marcos-Jorge en el problema Lana y algodón

En el enunciado del problema *Lana y algodón*, se explica que un personaje dispone de unos metros de tela y se indica su precio; pero en ningún momento se hace referencia explícita a que la haya comprado o pretenda venderla. Sin embargo, se observaron casos en los que los estudiantes intentaron resolver el problema suponiendo una situación de compra-venta e imaginando la existencia de un vendedor y de un proceso que diera cuenta de cómo este convierte la tela que inicialmente tenía en dinero. En concreto, el 50% de las parejas emplearon esta estrategia para resolver el problema, aunque solo una pareja lo hizo de manera correcta. El resto de parejas realizaron resoluciones aritméticas incorrectas o dejaron el problema en blanco, pero en ningún caso se usó el MHC.

Así por ejemplo, la pareja Marcos-Jorge construyó (ver figura 4) nombres poco precisos, como «Lana» y «Algodón» en las celdas, A1 y A2, respectivamente, que, por los valores que introdujeron en las celdas B1 y B2, podrían hacernos pensar que hacían referencia al precio de un metro de la tela de lana y de algodón, respectivamente. Sin embargo, cuando los estudiantes avanzaron en la resolución, utilizaron las filas 1 y 2 para generar secuencias de valores mediante fórmulas de recurrencia. En concreto (ver figura 5), generaron una progresión aritmética de diferencia dos (el precio de un metro de tela de lana) en la fila 1, y una progresión aritmética de diferencia cuatro (el precio de un metro de tela de algodón) en la fila 2. De esta forma, utilizaron las filas 1 y 2 en las que parecían haber representado las cantidades conocidas «precio de un metro de tela de lana» y «precio de un metro de tela de algodón», para representar los distintos valores que puede tomar el precio de la tela en función de los metros comprados. Así, se evitó utilizar la representación simbólica de las cantidades desconocidas «metros de tela de lana» y «metros de tela de algodón», aunque se tuvieran en cuenta implícitamente.

Es decir, de forma similar a lo que ocurría en las líneas de vida, los estudiantes se refieren con el nombre *Lana* (y de igual manera con *Algodón*) a una cantidad indeterminada («precio de la tela de lana») que varía en función de otra cantidad también indeterminada («metros de tela de lana»). Desde este punto de vista y por el uso que se hace en la hoja de cálculo, no hay polisemia en el uso de *Lana*. Ahora bien, desde el punto de vista de lo que marca el método cartesiano, el nombre *Lana* derivaría hacia un uso polisémico si con él los estudiantes hicieran referencia a las cantidades «precio de un metro de tela de lana» y «precio de la tela de lana», las cuales son cantidades determinadas y distintas en la resolución algebraica.

◇	A	B
1	Lana	2
2	Algodón	4
3	m/lana	
4	m/algodón	
5	Total/metros	12
6	Valor total	32

Fig. 4

◇	A	B	C	D
1	Lana	2	=B1+2	=C1+2
2	Algodón	4	=B2+4	=C2+4
3	m/lana			
4	m/algodón			
5	Total/metros	12		
6	Valor total	32	32	32

Fig. 5

En definitiva, plantearon la modelización del proceso que unía la situación real descrita en el enunciado, en el que se dispone de toda la tela, con otra en la que se había vendido toda la tela y únicamente se disponía de dinero. Inicialmente, explicaron las secuencias generadas en las filas 1 y 2 como que cada vez que se vendía un metro de tela lana también se vendía un metro de tela de algodón. Sin embargo, como se muestra en el diálogo siguiente que se produjo ante la situación descrita en la figura 6, para comprobar que habían dado con la solución se limitaron a comprobar que la suma del precio de la tela de lana y algodón (la suma de los valores presentes en las celdas de una misma columna de las filas 1 y 2) diera 32, ignorando el hecho de que los metros totales de tela debieran ser 12.

Jorge: —Pues … A ver, se han gastado 32 euros … Pues 18 (en la pantalla se muestra [D1; 6] y [D2; 12]) … Aquí … aquí hay 32 ya (mueve el cursor sobre [E1; 8] y [E2; 16]), ¿no? No, aquí hay 22. Aquí, 30 (mueve la ventana hasta que se inicia en la columna F en la que se muestra [F1; 10] y [F2; 20]) … Sí. Aquí, 30 (mueve el cursor sobre [F1; 10] y [F2; 20]) y aquí, 36 (mueve el cursor sobre [G1; 12] y [G2; 24]).

Marcos: —Entonces no da ninguno 32.

◇	A	E	F	G
1	Lana	8	10	12
2	Algodón	16	20	24
3	m/lana			
4	m/algodón			
5	Total/metros			
6	Valor total	32	32	32

Fig. 6

En el diálogo siguiente, se muestra el instante de la resolución en el que, al no conseguir su propósito, Jorge planteó la posibilidad de que se hubieran comprado distinto número de metros de cada tipo de tela. Esto les llevó a sustituir la secuencia de números presentes en la fila 1 por una progresión aritmética de diferencia uno (el precio de medio metro de tela de lana) con origen en el valor del precio de un metro de tela de lana (ver figura 7).

Jorge: —Tendrá que ser … Alguno habrá dado medio metro. Alguno habrá comprado medio metro.

Marcos: —¿Más?

Jorge: —Claro. Vamos a probar con este más uno (modifica [C1 =B1+1; 3]) … Vamos a hacer con este y a ver lo que da.

◇	A	B	C	D
1	Lana	2	3	4
2	Algodón	4	8	12
3	m/lana			
4	m/algodón			
5	Total/metros	12		
6	Valor total	32	32	32

Fig. 7

Continuaron la resolución modificando las diferencias de las progresiones aritméticas sin conseguir que fuera 32 la suma de los valores presentes en las celdas de una misma columna de las filas 1 y 2, y, en ningún caso, comprobaron que la suma de los metros de tela fuera 12.

Como hemos señalado anteriormente, la actuación de la pareja Marcos-Jorge en este problema fue similar a la de la mitad de las parejas, lo que reforzaría la afirmación de Friedlander (1999) de que el potencial de la hoja de cálculo a la hora de generar grandes cantidades de datos puede disminuir la necesidad de utilizar relaciones entre cantidades.

El caso de la pareja Alberto-Lluís en el problema Las ovejas

La pareja Alberto-Lluís resolvió correctamente los seis problemas en el estudio de casos, pero los estudiantes emplearon el MHC solo en uno. En los problemas de edades, recurrieron a las líneas de vida, y en el resto de problemas menos en uno, Lluís propuso y llevó a cabo una estrategia de resolución en la que suponía un posible proceso que se desarrollaba entre una situación inicial hipotética y la descrita en el enunciado. Para generar las secuencias, no usó la copia y pegado por arrastre de un fórmula de recurrencia, sino que recurrió a un automatismo que ofrece la hoja de cálculo por el que es posible generar una progresión aritmética arrastrando los dos primeros términos.

Como ejemplo de esta estrategia, mostramos un fragmento de la resolución del problema *Las ovejas*. Durante la resolución, prácticamente no existió discusión y cuando finalizó (ver figura 8), el profesor pidió a Lluís que explicara a su compañero qué era lo que había hecho. Esto dio lugar al siguiente diálogo en el que se argumentó sobre lo que en ese momento se mostraba en la hoja de cálculo (ver figura 9):

[Véase figura 8.]
Lluís: —Ya está.
Profesor: —¿Cuál es la solución?
Lluís: —Primer corral, ciento cinco y segundo, setenta y cinco.
[Véase figura 9.]
Profesor: —¿Le puedes explicar a tu compañero lo que has hecho aquí (el profesor hace visibles la fórmulas y mueve la celda activa por el rango B1:C3)?
Lluís: —Pues en el primer *co*… en el primer corral hay treinta más que en el otro. Entonces empieza, por uno, treinta y por el otro, cero para saber que en el otro hay treinta más. Y luego en el segundo se le sumaría uno al primero y al segundo también uno para que continuara la diferencia de treinta.
Profesor: —¿Y aquí (el profesor hace clic en B4) qué tienes?
Lluís: —Ahí es el total de ovejas que tendrías. O sea, quiero decirte, que te quedarían fuera.

◇	A	BX	BY	BZ
1	1 corral	104	105	106
2	2 corral	74	75	76
3	Diferencia	30	30	30
4	Total	2	0	-2

Fig. 8

◇	A	B	C
1	1 corral	30	31
2	2 corral	0	1
3	Diferencia	30	30
4	Total	=180-B1-B2	=180-C1-C2

Fig. 9

Como se pone de manifiesto en la explicación que ofreció, supuso a las 180 ovejas fuera de los corrales, después introdujo 30 en uno y, a continuación, imaginó que iba metiendo una en cada corral hasta que todas las ovejas quedaron encerradas (ver figuras 8 y 9). Es decir, realizó una inferencia lógica que transformó la situación descrita en el enunciado del problema en un nuevo estado del mundo en el que todas las cantidades eran conocidas, o se podían calcular a partir de otras conocidas. Después empleó las facilidades que ofrece la hoja de cálculo a la hora de generar secuencias numéricas para unir ambas situaciones mediante el modelado de un posible proceso que llevara de un escenario al otro, manteniendo en todo momento las restricciones del problema, lo que generó una secuencia de nuevos estados posibles del mundo. Podríamos decir que en lugar de resolver la situación planteada en el problema, la construyó, utilizando la hoja de cálculo para modelizar el proceso. Para controlar cuándo había llegado al escenario descrito en el problema, necesitaba observar la verificación de una condición. Podría haber utilizado que la suma de las ovejas de los corrales fuera 180; pero buscó que el número de ovejas que hubiera fuera de los corrales fuera cero. Desde el punto de vista de las cantidades, esto supondría plantear una igualdad sobre dos expresiones de una cantidad conocida cuyo nombre podría ser *número de ovejas que hay fuera de los corrales*. Esta cantidad no aparece de forma explícita en el enunciado, y el valor que le asigna el resolutor proviene de hacer una suposición, pues en el problema no se informa si hay ovejas o no fuera de los corrales. Sin embargo, dentro de la estrategia de resolución esta cantidad tuvo un papel destacado pues, al considerarla como variable, permitió conectar las situaciones inicial (en la que todas las cantidades eran conocidas) y final dando sentido a las acciones que se realizaban en la hoja de cálculo. Así, podríamos decir que cada columna representaba un fotograma de una película en la que todos los valores podían ser interpretados como la descripción de un instante en la evolución desde la situación hipotética de partida, en la que las ovejas estaban fuera de los corrales, hasta la planteada en el problema, consiguiendo que en todo momento el número de ovejas presente en cada columna fuera constante.

LA INFLUENCIA EN LA RESOLUCIÓN CON LÁPIZ Y PAPEL

La aparición generalizada de estrategias de resolución en los problemas de edades en las que se evitaba el uso del MHC cuando se resolvía en la hoja de cálculo nos condujo a comparar la evolución de los problemas de edades entre los cuestionarios Pre y Post (recordemos que tres de los ocho problemas eran de esta familia) respecto al resto de problemas (recordemos, uno de ábaco, dos de reparto y dos de compra-venta). Cada estudiante recibió una puntuación de uno o cero en cada problema según lo hubiera planteado correctamente o no. La suma de las puntuaciones obtenidas por cada estudiante en los problemas de la familia de edades sirvió para asignarle una puntuación que podía ir de 0 a 3. De igual manera, cada estudiante recibió una puntuación para el resto de problemas con rango de 0 a 5. Del análisis de los datos, se observa que la puntuación media en la familia de edades disminuyó de 1,32 (0,65) en el cuestionario Pre a 1,14 (0,83) en el Post, mientras que en el resto de problemas aumentó de 2,23 (1,45) a 2,32 (1,62).

Por otro lado, como resolver mediante el MC implica expresar las relaciones entre cantidades mediante el lenguaje del álgebra, también analizamos la evolución de su uso. En los problemas de edades, disminuyó el uso del lenguaje algebraico del 83,87% sobre el total de problemas abordados en el Pre al 77,42%. Sin embargo, en el resto de problemas la situación se mantuvo prácticamente estable, pasando del 67,01% al 67,02%. Evidentemente, la disminución en el uso del lenguaje del álgebra cuando se resolvían problemas de edades supuso un incremento del empleo del lenguaje de la aritmética. Esto se reflejó en un aumento del recurso a estrategias de resolución en las que se utiliza el lenguaje de la aritmética, como es el caso del tanteo sistemático sobre las cantidades. El uso del tanteo sistemático sobre las cantidades pasó en los problemas de edades del 1,52% de los casos en los que se abordó el problema al 16,13%. Para el resto de problemas, el uso del tanteo también se incrementó, pasando del 3,09% de los casos al 4,26%. De hecho, tras aplicar una prueba de Wilcoxon para datos pareados encontramos que existían diferencias significativas (Z = -2,31; p = 0,021) entre los rangos de las variables que medían el número de problemas resueltos mediante tanteo sistemático en las pruebas anterior (M = 0,05; SD = 0,21) y posterior (M = 0,45; SD = 0,67) a la enseñanza.

Ahora bien, aunque en el caso de los problemas de edades se produjo una disminución en el uso del lenguaje del álgebra, encontramos un aumento de la proporción del uso de letras polisémicas entendidas como la asignación de una misma letra a dos cantidades distintas. En concreto, se incrementó del 26,92% de los casos en los que se empleó el lenguaje del álgebra al 29,17%. También en el resto de problemas se produjo un incremento del 9,23% al 11,11% en el uso de letras polisémicas.

CONCLUSIONES

Tras la enseñanza del MHC, hemos observado el recurso a estrategias de resolución en la hoja de cálculo en las que se evita operar con lo desconocido, que aprovechan las posibilidades que ofrece este entorno a la hora de construir secuencias numéricas mediante fórmulas de recurrencia. En los problemas de edades en cuyo enunciado se describía un momento actual y otro futuro, el recurso a estas técnicas permitió la modelización del proceso real del paso del tiempo mediante lo que hemos llamado *líneas de vida*. La creación de líneas de vida implica generar secuencias numéricas con las posibles edades que pueden tener los protagonistas desde el momento actual, y buscar la situación en la que se cumplen las restricciones del problema. Esta forma de resolver supondría usar en la hoja de cálculo un tanteo sistemático sobre las cantidades y no sobre la ecuación, como supondría usar el MHC. Esta estrategia también apareció en el problema *Lana y algodón*, el cual compartía con los problemas de edades el hecho de hacer referencia a dos cantidades determinadas distintas («precio de un metro de un tipo tela» y «precio de todos los metros de un tipo de tela») que podían agruparse en una cantidad indeterminada («precio de los metros de tela»).

También hemos analizado un caso (el de Alberto-Lluís en el problema *Las ovejas*) en el que, ante un problema en cuyo enunciado se describía una única situación, los estudiantes llevaron a cabo una lectura analítica del problema en la que aparecían dos situaciones y supusieron, e intentaron modelizar, un proceso que las unía. Desde el punto de vista de los procesos generales de resolución de problemas, el recurso a esta estrategia tuvo como consecuencia la transformación del problema en otro que era equivalente al inicial: equivalente en el sentido de que si se resuelve el problema transformado, el problema inicial queda resuelto (Polya, 1965). Si seguimos la terminología introducida en Puig (1996), esta estrategia tiene carácter heurístico, y como el alumno reitera la estrategia para otros problemas que no analizamos en este articulo, podríamos decir que para este alumno es una herramienta heurística. La constatación de que los estudiantes, durante la lectura analítica, aplican una herramienta heurística que es especialmente útil en el entorno de la hoja de cálculo pone de manifiesto que la lectura analítica de un problema viene condicionada por el sistema de signos que se piensa utilizar, y en el caso que nos ocupa por las posibilidades técnicas ligadas al entorno que es posible emplear, como se pone de manifiesto en otros estudios (véase, por ejemplo, Filloy, Puig y Rojano, 2008).

Podemos concluir que el potencial dinámico de la hoja de cálculo favorece el desarrollo de estrategias apoyadas en la generación de gran cantidad de números que se apartan del MHC, y, en consecuencia, del objetivo final que nos habíamos planteado de que contribuyera al aprendizaje de la resolución algebraica de problemas. De hecho, tras la secuencia de enseñanza se observó: (1) una disminución del uso del lenguaje del álgebra cuando se resolvían problemas de edades con lápiz y papel debido, fundamentalmente, a un aumento en el uso de la estrategia de tanteo sistemático sobre las cantidades; y (2) un aumento de la polisemia de la *equis*. Podemos relacionar el descenso en el uso del lenguaje del álgebra con el hecho de que, cuando se resolvían problemas de edades en la hoja de cálculo, se evitaba operar con lo desconocido recurriendo de forma general a usar líneas de vida. El incremento de la polisemia de la *equis* tras la enseñanza también podría relacionarse con el uso de la hoja de cálculo. En concreto, se podría asociar con la aparición de estrategias de resolución en las que se fusionaban dos cantidades (determinadas, fueran conocidas o no) que deberían representarse en celdas de dos filas distintas, en una sola cantidad (indeterminada) representada en una misma fila y que agrupaba las cantidades iniciales mediante un mismo nombre.

En definitiva, los resultados de nuestro estudio arrojan sombras sobre el uso de la enseñanza de la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo como una forma de avanzar hacia la competencia en el MC. La principal causa se identificaría en las estrategias correctas o incorrectas que usan los estudiantes que se apartan del MHC ligadas a la posibilidad de generar grandes cantidades de datos. Evidentemente, permitir que aniden estas estrategias es consecuencia de la acción (o inacción) educativa, pero su presencia pone de manifiesto que las potencialidades de la hoja de cálculo encierran peligros que es necesario tener presentes.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado al amparo del proyecto EDU2012-35638 del Ministerio de Economía y Competitividad del Gobierno de España.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Dettori, G., R. Garuti y E. Lemut (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. En: R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (eds.). *Perspectives on School Algebra*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, pp. 191-207.

Filloy, E. (1990). PME algebra research. A working perspective. En: G. Booker, P. Coob y T. Mendicuti (eds.). *Proceedings of the 14th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*. Oaxtepec, México: PME, pp. PII 1-PII 33.

Filloy, E., L. Puig y T. Rojano (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 26(3), pp. 327-342.

Filloy, E., T. Rojano y L. Puig (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Friedlander, A. (1996). Superproblemas del álgebra en hojas de cálculo. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, 9, pp. 71-75.

Friedlander, A. (1999). Cognitive processes in a spreadsheet environment. En: O. Zaslavsky (ed.). *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*. Haifa, Israel: PME, pp. 337-344.

Kieran, C. y E. Filloy (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), pp. 230-240.

Polya, G. (1965). *Mathematical discovery* (Vol. 2). New York: John Wiley & Sons.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Puig, L. (2008). Sentido y Elaboración del Componente de Competencia de los Modelos Teóricos Locales en la Investigación de la Enseñanza y Aprendizaje de Contenidos Matemáticos Específicos. *PNA*, 2(4), pp. 87-107.

Puig, L. (2012). Observaciones acerca del propósito del álgebra educativa. En: A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (eds.). *Investigación en Educación Matemática XVI*. Jaén: SEIEM, Anexo, pp. 1-20.

Puig, L. y F. Cerdán (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. En: E. Filloy y T. Rojano (eds.). *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*. Cuernavaca, México: PNFAPM, pp. 35-48.

Rojano, T. y R. Sutherland (1991). Symbolising and Solving Algebra Word Problems: The Potential of a Spreadsheet Environment. En: F. Furinghetti (ed.). *Proceedings of the 15th Psychology of Mathematics Education Conference*. Asís, Italia: PME, pp. 207-213.

Rojano, T. y R. Sutherland (1993). Towards an Algebraic Approach: The Role of Spreadsheets. En: I. Hirabayashi, N. Nobuhiko, S. Keiichi y L. Fou-Lai (eds.). *Proceedings of the 17th Psychology of Mathematics Education Conference*. Tsukuba, Japón: PME, pp. 189-196.

Schoenfeld, A. (1985). Making Sense of «Out Loud» Problem-Solving Protocols. *Journal of Mathematical Behavior*, 4(2), pp. 171-191.

Sutherland, R. y T. Rojano (1993). A Spreadsheet Approach to Solving Algebra Problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 12(4), pp. 353-383.

Tabach, M. y A. Friedlander (2004). Levels of student responses in a spreadsheet-based environment. En: M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (eds.). *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*. Bergen, Noruega: PME, pp. 423-430.

Tabach, M., R. Hershkowitz y A. Arcavi (2008). Learning beginning algebra with spreadsheets in a computer intensive environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, 27(1), pp. 48-63.

Wilson, K., J. Ainley y L. Bills (2005). Spreadsheets, pedagogic strategies and the evolution of meaning for variable. En: H. L. Chick y J. L. Vincent (eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*. Melbourne, Australia: PME, pp. 321-328.

Yerushalmy, M. y D. Chazan (2002). Flux in School: Curricular Change, Graphing Technology, and Research on Student Learning and Teacher Knowledge. En: L. D. English (ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 725-755.

PERFORMANCES OF STUDENTS TRAINED IN ALGEBRAIC PROBLEM SOLVING IN A SPREADSHEET ENVIRONMENT AND THEIR RELATION TO THEIR COMPETENCE IN THE CARTESIAN METHOD

David Arnau, Luis Puig
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València
david.arnau@uv.es, luis.puig@uv.es

We present some of the results of a research aimed to study what happens when teaching algebraic word problem solving in a spreadsheet environment by using a teaching model that requires students to become competent in solving problems through the Cartesian method. This objective is supported by many studies, which have proved the use of this computing environment may have an important role in the early stages of teaching algebra. However, the spreadsheet language, although similar to the algebraic language, presents some differences.

The aim of this paper is to identify the causes of performances contrary to the competence in the Cartesian method (CM) that we have observed when students solve problems with paper and pencil after the teaching of the algebraic problem solving in the spreadsheet environment.

We have designed the theoretical and methodological framework around the idea that what is made to organize the research is a local theoretical model. We have taken the CM as a competence model and we have centred the cognitive process model in the description of a usual tendency in students when they are initiated in the algebraic word problem solving: the polysemic use of *x*. The particular case of polysemy of *x* described in this paper can be observed when the problem is translated into the algebraic language. When a letter is used in an equation, it occupies the place of a determined number (by the equation), but unknown (for the solver). However, a real solver may not attribute to *x* the meaning of a determined quantity. For example, using *x* to refer to the current and future age of an individual. It is important to point out that in the semantic field of equations it is incorrect to assign the same letter to different determined quantities (for example, to current and future age). However, in the semantic field of functions it is correct, but in this case the letter is used as a variable.

The teaching model was designed with the intention of integrating the CM in the spreadsheet environment. The similar characteristics between the algebraic and the spreadsheet languages allow developing a method of resolution in the spreadsheet (SM) equivalent in the four first steps to the CM.

In the empirical study, the participants were 24 students in the second year of secondary school. These individuals had just been instructed in algebraic problem solving. This was a point in which the teaching of SM could increase the students' competence in the CM, but a tendency to return to ways of solving using arithmetical language was also possible. In the first seven sessions of the teaching sequence, the students were introduced to the basic techniques of the spreadsheet environment. In the next six sessions, the students were instructed in the SM and then they solved a collection of ten algebraic problems. Before and after the teaching sequence two tests integrating eight algebraic problems were handed out to the students. They had to solve these tests using paper and pencil.

The comparison of the tests given before and after the instruction showed an increase in the polysemy of *x* when problems were solved with paper and pencil. Moreover, a decrease in the use of the language of algebra in age problems was observed and a significant increment in the use of the strategy, which we have called trial and error on the quantities.

At the end of the teaching sequence, students grouped in pairs solved typically algebraic problems in the spreadsheet. The analysis of the performances shows possible causes to the negative effects in the post-test. The tendency observed is to avoid the use of the SM and recur to resolution methods in which the situations described in the statement were modelled by functional relations. In such cases, the operation with the unknown was avoided and several quantities were grouped under a single name.

Thus, in age problems the students generated numerical sequences with the possible ages of the protagonists, which we have called lifelines. These lifelines allow the students to model the passage of time. In this way, the use of the symbolic representation of the quantity of elapsed time is substituted by the recursive determination of next year's age. This resolution method is equivalent to trial and error on quantities, while the SM is equivalent to trial and error on equation. When the students use lifelines, the determined quantities (current and future age) are fused in an undetermined quantity (age).

The fuse of two determined quantities in an undetermined quantity is also observed in the resolution of another kind of problems. For example, some pairs used the name «Wool» to represent both the price of a meter of wool and the price of the meters of wool for which the problem statement asks. Again, through this kind of representation students avoid the operation with the unknown.

Ultimately, to resort to lifelines when solving age problems in the spreadsheet could be behind the increase in the strategy of trial and error on the quantities. On the other hand, the representation of two quantities under the same name in the spreadsheet could be the cause of the increase in the polysemy of *x*.

Keywords: problem solving, algebra, spreadsheet