

# COMPETENCIA DE ARGUMENTACIÓN EN LA INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS FUNCIONALES

## THE ARGUMENTATION COMPETENCE IN FUNCTIONAL GRAPH INTER- PRETATION

Horacio Solar

Departamento de Didáctica, Universidad Católica de la Santísima Concepción

Carmen Azcárate y Jordi Deulofeu

Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals, Universitat Autònoma de Barcelona

**RESUMEN:** En este artículo se interpreta la argumentación en la interpretación de gráficas funcionales como una competencia matemática. Esta competencia se ha caracterizado mediante tareas matemáticas asociadas a la interpretación de dichas gráficas y por determinados procesos. Estos procesos se repiten y se desarrollan a largo plazo en el currículum de Matemáticas mientras que las tareas cambian y su alcance es a corto plazo. Las relaciones entre tareas y procesos permiten identificar el progreso de los estudiantes en la competencia de argumentación, determinando el nivel de complejidad de las actividades matemáticas que realizan.

**PALABRAS CLAVE:** Modelo de Competencia Matemática, argumentación matemática, procesos matemáticos, nivel de complejidad, interpretación de gráficas.

**ABSTRACT:** In this paper we interpret the argumentation in graph interpretation as a mathematical competence. This competence has been characterized by mathematical tasks associated with the interpretation of these graphs and by certain processes. Those processes are repeated and long-term developed in the mathematical curriculum while tasks change and its development is short term. The relationship between tasks and processes allow us to identify students' progress in the argumentation competence, determining the level of complexity of the mathematical activity they realize.

**KEY WORDS:** Mathematical Competence Model, mathematical argumentation, mathematical process, level of complexity, graph interpretation.

Fecha de recepción: noviembre 2010 • Aceptado: octubre 2011

Para citar: Solar, H., Azcárate, C. y Deulofeu, J. (2012). Competencia de argumentación en la interpretación de gráficas funcionales. *Enseñanza de las Ciencias*, 30 (3), pp. 133-154

## INTRODUCCIÓN

La argumentación matemática es actualmente uno de los centros de interés en la investigación en Didáctica de las Matemáticas. Desde una perspectiva de aprendizaje, varios autores han estudiado las secuencias argumentativas de los estudiantes en el aula de Matemáticas (Krummheuer, 1995; Stephan y Rasmussen, 2002; Whitneack y Knipping, 2002; Yackel, 2002; Rasmussen, Stephan y Aleen, 2004; Pedemonte, 2005; Inglis, Mejía-Ramos y Simpson, 2007). Así mismo, desde una perspectiva de enseñanza, la argumentación matemática se está considerando un aspecto del diseño curricular; destacamos en particular dos propuestas con enfoques distintos que han impulsado la argumentación desde una visión curricular. Por un lado, ha sido interpretada como una de las competencias matemáticas que es necesario desarrollar en el currículo (Abrantes, 2001; Niss, 2002; OECD, 2003; Lupiáñez y Rico, 2008) y, por otro, se ha identificado como un «estándar de proceso» que permite organizar el currículo (NCTM, 2003). Tanto desde la perspectiva de competencias como de los estándares, la argumentación se caracteriza como un proceso que se desarrolla a partir de diferentes contenidos y en diferentes niveles educativos.

Tanto desde una visión curricular en la que la argumentación es una competencia, como desde el estudio de las secuencias argumentativas en el aula de Matemáticas, consideramos la argumentación matemática como un proceso que articula el currículo de matemáticas. En otros trabajos (Espinoza, Barbe, Mitrovich, Solar, Rojas y Matus, 2008; Solar, Azcárate y Deulofeu, 2009; Solar, 2009) se ha justificado que el enfoque por competencias es un sustento para identificar procesos articuladores del currículo. El enfoque por competencias, además de promover un enfoque funcional de las matemáticas, caracteriza la argumentación matemática como un proceso.

El interés por desarrollar procesos matemáticos en la enseñanza de las Matemáticas no es nuevo: se puede elaborar una extensa lista de procesos definidos como propios de las matemáticas (representar, argumentar, demostrar, clasificar, analizar, resolver, conjeturar, razonar, visualizar, calcular, etc.). En otros trabajos (Espinoza *et al.*, 2008; Solar *et al.*, 2009; Solar, 2009) hemos sostenido que, si bien los procesos han estado presentes en los currículos de matemáticas, no han tenido un papel destacado en comparación con los contenidos; la mayoría de los currículos tienen como punto de partida los contenidos matemáticos, y los procesos aparecen de manera implícita en las orientaciones didácticas de cada contenido.

De acuerdo con el NCTM (2003), a medida que transcurre el periodo escolar, los estudiantes deberían comparar sus ideas, lo que puede servirles para modificar, consolidar o ampliar sus argumentos; en secundaria tendrían que ser capaces de presentar por escrito sus argumentos de una forma que pudiera ser aceptada por los matemáticos profesionales. A la hora de estudiar este progreso de la argumentación nos surgen preguntas como: «¿De qué manera se progresa?» o «¿Cuáles son las variables que es necesario considerar para estudiar el progreso de la argumentación en los estudiantes?».

En la perspectiva de competencia matemática del marco teórico de PISA (OECD, 2003) se plantean «grupos de competencia» (reproducción, conexión y reflexión) que identifican el nivel de complejidad de una actividad. Si bien en el informe PISA se sostiene que en una actividad no es posible evaluar las competencias de forma individual porque se desarrollan de forma simultánea, se describen las distintas formas de interpretar cada una de las competencias dentro de los grupos.

Según estos antecedentes, el propósito general de este trabajo es estudiar la argumentación como una competencia matemática. Para ello, partimos de la base de que los contenidos sustentan el desarrollo de las competencias matemáticas, y que no se puede caracterizar una competencia sin estar asociada a un tema matemático; por ejemplo, la argumentación matemática en geometría es distinta que en estadística en cuanto al rol que tiene la demostración. En geometría, la demostración puede ser fundamental para hacer evidente la resolución de un problema; en cambio, en un problema estadísti-

co, para evidenciar la validez no es común hacer una demostración, ya que lo que cumple el rol de la evidencia es la justificación de los pasos que se deben seguir. Esta relación entre contenidos y procesos no es evidente; en la propuesta curricular del NCTM (2003), si bien se ofrece una orientación didáctica de la argumentación en el aula de Matemáticas, esta no se formula en función de los contenidos; es decir, en esta propuesta no se menciona si hay contenidos mediante los que se desarrolla mejor la argumentación o si hay diferencias en el significado de la argumentación según los contenidos que se vayan a tratar. Los contenidos matemáticos se han descrito en términos de tareas matemáticas (Chevallard, 1999; Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990; Espinoza y Azcárate, 2000; Espinoza, Barbé, Bosch y Gascón, 2005).

Nuestra propuesta se ha desarrollado en tareas de «interpretación de gráficas funcionales», ya que tiene sentido plantearse si la competencia de argumentación en funciones es diferente que en geometría, siempre y cuando las estructuras que conforman las competencias sean distintas. Por tanto, hemos incorporado la noción de proceso como el componente diferenciador, de tal manera que la competencia de argumentación se conforma por unos procesos que corresponden a un tema matemático concreto, en nuestro caso la interpretación de gráficas funcionales. Cabe destacar que, si estuviéramos en otro tema, algunos de estos procesos que conforman la argumentación podrían cambiar.

Sobre la base de estos antecedentes, para estudiar la argumentación como una competencia hemos elaborado un modelo de competencia matemática (MCM) que relaciona contenidos –en términos de tareas– y procesos. El MCM nos permite estudiar de qué manera progresa el estudiante en la competencia. Este modelo se sustenta sobre la base de que, por medio de las actividades matemáticas, se puede estudiar el desarrollo de las competencias; este mismo principio se aplica al progreso de una competencia. Es decir, por medio de las actividades de una secuencia didáctica se puede identificar el progreso según la complejidad de estas. La pirámide propuesta por Lange (1995) caracteriza una actividad según la complejidad, la dificultad y el contenido que se vaya a tratar. La pirámide de Lange ha sido utilizada por PISA en los «grupos de competencia» (OECD, 2003) para identificar la complejidad de las actividades. Sin embargo, siguiendo a Rico (2007), para nuestro MCM hemos optado por denominar niveles de complejidad a los grupos de competencia y así evitar confusiones con el significado de competencia matemática tal como señala Puig (2008).

En Espinoza *et al.* (2008) se ha utilizado el MCM para realizar un diseño curricular basado en competencias matemáticas; también se ha puesto a prueba para estudiar la modelización como una competencia (Solar *et al.*, 2009) y actualmente se utiliza para la formación de profesores de primaria (Solar, Espinoza, Rojas, Ortiz, González y Ulloa, 2011). En particular, en este artículo se pone a prueba el MCM para estudiar la argumentación como una competencia, según tareas, procesos y nivel de complejidad. La pregunta de la investigación que abordamos es de qué manera se relacionan las tareas, los procesos y la complejidad en el desarrollo de la competencia de argumentación.

Para ello, nos centraremos en describir cómo se caracterizan las tareas y los procesos en la interpretación de gráficas funcionales, y de qué manera, articulando estos dos componentes, se puede determinar el nivel de complejidad de una actividad matemática en el aula. En el cuerpo del artículo desarrollamos dos aplicaciones del MCM: en primer lugar, desde una visión curricular, permite planificar una secuencia didáctica basada en tareas, procesos y nivel de complejidad, relación que contribuye a dar equilibrio al peso que tienen los contenidos en detrimento de los procesos. En segundo lugar, se describe de qué manera el MCM permite analizar el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de Matemáticas.

## MARCO TEÓRICO

### Argumentación matemática

En general, los análisis de argumentación en el aula se sustentan en el modelo argumentativo propuesto por Toulmin (1958), que sigue un proceso lineal desde los datos hasta las conclusiones. Esta secuencia consta de seis elementos (Sardà y Sanmartí, 2000):

*Datos:* Hechos o informaciones factuales, que se invocan para justificar y validar la afirmación.

*Conclusión:* La tesis que se establece.

*Justificación:* Son razones (reglas, principios...) que se proponen para justificar las conexiones entre los datos y la conclusión.

*Fundamentos:* Es el conocimiento básico que permite asegurar la justificación.

*Calificadores modales:* Aportan un comentario implícito de la justificación; de hecho, son la fuerza que la justificación confiere a la argumentación.

*Refutadores:* También aportan un comentario implícito, pero señalan las circunstancias en las que las justificaciones no son ciertas.

La figura 1 muestra la relación entre estos elementos:

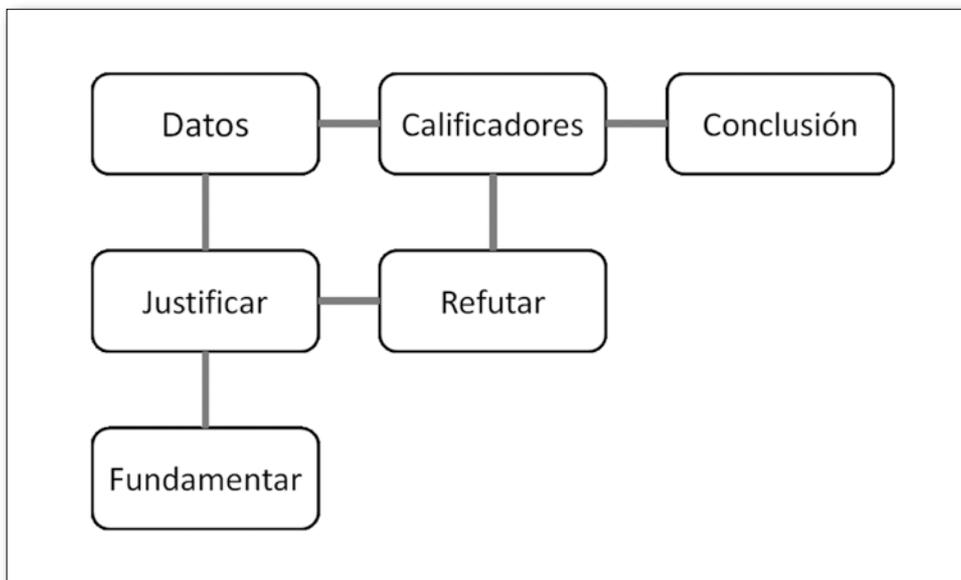


Fig. 1. Modelo argumentativo de Toulmin (1958)

Para estudiar la argumentación en el aula de Matemáticas, Krummheuer (1995) propone una secuencia de argumentación basada en el modelo argumentativo de Toulmin. Sin embargo, reduce el sistema original a cuatro elementos: datos, justificación, fundamentos y conclusión.

Diversas investigaciones sobre argumentación han seguido la reducción de Krummheuer en el uso del modelo argumentativo de Toulmin (Stephan y Rasmussen, 2002; Whitneack y Knipping, 2002; Yackel, 2002; Rasmussen *et al.*, 2004; Pedemonte, 2005) y han usado esta secuencia argumentativa en diferentes temas matemáticos, tanto en primaria como en secundaria, mostrando que es útil transversalmente al nivel escolar y al contenido. De hecho, esta posición parece estar tan arraigada que Mariotti (2006), en una revisión de la prueba en Matemáticas, se refiere al modelo argumentativo de

Toulmin como un «modelo ternario» (datos, justificación y conclusión). Por otra parte, otros autores (Inglis *et al.*, 2007) han investigado la argumentación en la actividad matemática conservando todos los elementos del modelo argumentativo de Toulmin.

Para nuestro análisis interpretamos los componentes del modelo argumentativo de Toulmin como procesos matemáticos. En efecto, el tipo de análisis que realizan Krummheuer y otros autores que han seguido a Toulmin para estudiar la argumentación en el aula de Matemáticas se centra en la secuencia argumentativa, mientras que nuestro estudio se enfoca a la caracterización de los procesos matemáticos que aparecen en la argumentación. A diferencia de Krummheuer y de acuerdo con Inglis *et al.* (2007), se considera como base el modelo argumentativo original de Toulmin, para así poder discutir en nuestra propia investigación qué papel juegan todos los procesos que conforman la estructura argumentativa.

No esperamos que los procesos de argumentación que se identifiquen se correlacionen directamente con la secuencia del modelo argumentativo de Toulmin, dado que uno de los principios de nuestra investigación es que los procesos que emergen de una competencia están ligados a un contenido matemático. Y si bien se considera como base el modelo argumentativo de Toulmin, la caracterización final puede resultar diferente a dicho modelo. En particular, en la interpretación de gráficas funcionales se indagan procesos ligados a la acción de interpretar, y la «interpretación» como tal no es parte del modelo argumentativo de Toulmin.

### Modelo de competencia matemática (MCM)

El MCM que hemos propuesto se sustenta en la perspectiva funcional de las matemáticas, «mathematical literacy»<sup>1</sup> (OECD, 2003). El MCM está formado por cuatro componentes:

*Competencia matemática:* Según los estándares de procesos de la NCTM (2002) y las competencias matemáticas propuestas por Abrantes (2001), Niss (2002) y Pisa (OECD, 2003), acordamos elegir y optar por procesos matemáticos nucleares que denominamos competencias matemáticas, las cuales organizan y articulan el currículo de Matemáticas. Para que las competencias sean articuladoras tienen que cumplir tres criterios:

- Integrar una serie de procesos matemáticos específicos vinculados a una competencia matemática.
- No ser totalmente transversales, es decir, no estar siempre presentes en toda actividad, lo cual permite discriminar y organizar las actividades matemáticas en función de las competencias que desarrollan.
- Ser significativas para la actividad matemática escolar.

*Procesos matemáticos:* El significado de proceso se ha acuñado de la propuesta curricular del NCTM (2003). Cada competencia matemática se compone de procesos matemáticos. Estos están presentes de forma transversal en los contenidos matemáticos y se desarrollan a largo plazo.

*Organizaciones matemáticas:* Los contenidos matemáticos se han estructurado en términos de organizaciones matemáticas, las cuales contemplan tareas, técnicas matemáticas, variables didácticas y condiciones de realización de dichas tareas, aspectos que están sustentados en la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) desarrollada por Chevallard (1999). En particular, para este estudio, se utilizan las tareas de interpretación y construcción de gráficas funcionales identificadas por Leinhardt *et al.*

1. *Mathematical literacy* se ha traducido al castellano en el informe PISA (OECD, 2003) como «competencia matemática». Pero para evitar confusiones con nuestro significado de competencia matemática, preferimos mantener el término en su versión original.

(1990). Las tareas matemáticas cambian y progresan, su alcance es a corto plazo y se van haciendo más complejas a lo largo del periodo escolar.

*Niveles de complejidad:* El progreso de la competencia se determina en términos de la complejidad de la actividad, que depende tanto de las tareas como de los procesos que la conforman. La expresión *nivel de complejidad* se adopta de los grupos de competencia de PISA (OECD, 2003) basados en la pirámide propuesta por de Lange (1995). En nuestro modelo de competencia, los niveles de complejidad se denominan de la misma manera que en PISA, pero se determinan de una forma distinta; además, a partir de nuestros estudios empíricos se ha visto la conveniencia de agregar un nivel más entre conexión y reflexión, el cual hemos denominado *generalización*, resultando así cuatro niveles de complejidad: reproducción, conexión, generalización y reflexión.

Para interpretar el currículo en términos de las competencias y los procesos matemáticos, en Espinoza *et al.* (2008) caracterizamos el marco curricular chileno y los programas de estudio de primer ciclo básico correspondiente al subsector de Matemáticas en función del MCM. Se lograron identificar cuatro competencias matemáticas en el currículo de estos niveles, compuestas cada una por un conjunto de procesos matemáticos: resolución de problemas, representación, razonamiento y argumentación, cálculo y manipulación de expresiones; identificándose, a su vez, las tareas matemáticas asociadas. Si bien el de Espinoza *et al.* (2008) significó el primer estudio del marco curricular chileno en el subsector de Matemáticas desde un enfoque por competencias, se han realizado otras investigaciones que han caracterizado las competencias matemáticas que se ponen en juego en el estudio de un tema matemático específico en el aula de Matemáticas. En Solar (2009), el MCM se puso a prueba en un estudio de caso al implementar una unidad didáctica para 8.º básico de interpretación de gráficas para introducir el concepto de función. El MCM se aplicó para estudiar la modelización como una competencia (Solar *et al.*, 2009), identificando ocho procesos que la conforman. Asimismo se planteó que la competencia de modelización tiene una función didáctica, puesto que la caracterización de sus componentes es una estructura útil tanto para la planificación de la modelización en una secuencia didáctica, como para su análisis en el aula. Este análisis consiste en estudiar el desarrollo de las tareas matemáticas por los estudiantes, los diferentes procesos de modelización que emergen en las interacciones en el aula y el nivel de complejidad de una actividad de acuerdo con la modelización que desarrolla un estudiante. Actualmente estamos desarrollando una investigación (Solar *et al.*, 2011) en la que nos interesa estudiar cómo el profesor desarrolla un proceso de comprensión de las competencias matemáticas que ha de trabajar con sus estudiantes. En este sentido, buscamos desarrollar, implementar y evaluar una metodología de trabajo docente en torno al MCM que promueva la reflexión pedagógica necesaria para impactar en las prácticas de aula. Nos centramos principalmente en estudiar al profesor en torno a su nivel de reflexión y su nivel de desempeño.

Para este artículo, estudiamos la aplicación del MCM a la competencia de argumentación, describiendo su función didáctica tanto en la planificación de una secuencia didáctica, como para el análisis de la argumentación en el aula.

## METODOLOGÍA

La experiencia de la cual se obtuvieron los datos de esta investigación se realizó en Santiago de Chile, dentro del marco de proyecto LEM (Lectura, Escritura y Matemáticas) del centro Félix Klein.<sup>2</sup> Un grupo de cuatro profesores de 8.º básico (13 a 14 años) implementó la unidad didáctica denominada «Analizando y construyendo gráficos», diseñada por el equipo LEM (Espinoza, Barbé, Cerda, Wais-

2. Félix Klein es un centro de investigación y experimentación en didáctica de las matemáticas y las ciencias adscrito a la Universidad de Santiago de Chile (USACH).

man, Ruiz y Gálvez, 2006). Esta unidad tiene como propósito introducir las funciones por medio de la interpretación y construcción de gráficas funcionales. Consta de tres etapas, la primera está asociada al sistema de representación cartesiano y se centra en la ubicación de puntos en el plano. En la segunda etapa se estudia la noción de dependencia de variables. La tercera etapa se basa en la interpretación y construcción de gráficas, particularmente en la inclinación de la curva.

La unidad didáctica fue analizada, por medio del instrumento «matriz de competencia» (Espinoza *et al.*, 2008), que permite caracterizar cada actividad a partir de la identificación de las tareas matemáticas y de su nivel de complejidad de acuerdo con la competencia de argumentación. Este análisis previo dio pie a adaptar la unidad didáctica inicial a las necesidades de la investigación, remplazando algunas actividades por otras que *a priori* desarrollaran niveles altos de complejidad para la competencia de argumentación. Posteriormente se implementó la unidad didáctica con estos cambios.

De la unidad didáctica adaptada, para la recogida de datos se han seleccionado seis tareas matemáticas.

Identificar sistemas de referencia, construir sistemas de referencia (etapa 1).

Identificar variables, estudiar dependencia entre variables (etapa 2).

Traducir entre representaciones, interpretar gráficas (etapa 3).

Para este estudio se eligió el caso de la profesora Valentina, porque la dinámica de su clase promueve de manera especial la interacción entre la profesora y los 35 estudiantes que forman el grupo, característica significativa del estudio de la argumentación en el aula.

Seguimos el transcurso de la implementación de la unidad didáctica con una estrategia de observación no participante durante cinco sesiones. Por medio de grabaciones en vídeo, consideramos los registros enfocados a la interacción entre la profesora y los estudiantes. Finalmente transcribimos las cinco sesiones grabadas.

Si bien las tareas matemáticas en gráficas funcionales se han podido caracterizar desde la literatura (Leinhardt *et al.*, 1990), en el caso de los procesos matemáticos que conforman la competencia de argumentación no se tienen suficientes antecedentes teóricos que permitan caracterizar estos procesos. Por ello, hemos aplicado una metodología inductiva para caracterizar los procesos.

De las cinco sesiones, se han seleccionado aquellos episodios en los que hay interacción entre la profesora y los estudiantes y que muestran una mayor riqueza en los procesos de argumentación. La unidad de análisis correspondió a cada una de las acciones del episodio, tanto de Valentina como de los estudiantes. Cada acción se caracterizó con un indicador de proceso asociado a la competencia. Esta estrategia siguió un criterio de comparación constante entre los procesos que emergieron de los episodios analizados y concluyó con la caracterización de un listado de procesos asociados a la competencia de argumentación. Estos procesos tuvieron dos instancias de validación, una interna en la que se analizó el significado de cada uno de estos procesos, y si el conjunto de estos procesos era coherente con una estructura argumentativa. Posteriormente, se aplicó una segunda instancia de validación en la que dos jueces externos a la investigación, en calidad de expertos, discutieron la pertinencia y fiabilidad de los procesos elaborados. Al terminar la validación se obtuvo un listado de procesos asociados a la competencia de argumentación.

En el artículo, nos centramos en una actividad correspondiente a la última sesión, dado que las características de la actividad promueven la argumentación matemática en el nivel más alto de complejidad (reflexión).

## ANÁLISIS Y RESULTADOS

El estudio de la competencia de argumentación se ha organizado en cinco apartados: en el primer apartado caracterizamos la competencia de argumentación por medio de las tareas matemáticas, los procesos y el nivel de complejidad. En el segundo apartado se describe la actividad en la que nos hemos centrado para la obtención de datos. En el tercer apartado se realiza un análisis de la actividad en el que se identifican las tareas matemáticas, los procesos y el nivel de complejidad esperado antes de la implementación de la actividad, de acuerdo con el modelo presentado en el primer apartado. En el cuarto apartado se realiza un análisis de la implementación de la actividad en el aula a través del análisis de episodios que permiten caracterizar los procesos que emergen, y se utiliza nuevamente el modelo para determinar el nivel de complejidad. Finalmente, en el quinto apartado se contrasta el análisis de la actividad con lo sucedido en el aula.

### Caracterizar la competencia de argumentación

En la investigación se han caracterizado los tres componentes de la competencia de argumentación: tareas, procesos y nivel de complejidad.

*Tareas:* Las tareas matemáticas provienen de la unidad didáctica inicial complementadas con otras a partir del análisis previo de la unidad didáctica. Se detallan más adelante, en la figura 2.

*Procesos:* La tabla 1 muestra la caracterización de los procesos que conforman la competencia de argumentación.

Tabla 1.  
Procesos de la competencia de argumentación

<i>Procesos</i>	<i>Descripción</i>
Identificar datos	Identificar los datos (generalmente en una gráfica o tabla) o enunciados que sirven para argumentar.
Interpretar datos	Interpretación de los datos y de las representaciones asociadas.
Validar datos/refutar	Validar o refutar la identificación de lectura o interpretación de datos.
Justificar	Justificar las declaraciones e interpretaciones.
Validar la justificación	Validar o refutar la justificación.
Fundamentar	Conocimiento básico que permite asegurar la justificación.
Reflexionar sobre la argumentación	Reflexionar en relación con los datos o sobre el proceso de argumentación.
Concluir	La tesis que se establece.

Los tres primeros procesos –*identificar datos*, *interpretar datos* y *validar datos*– se sustentan en los datos. Los datos se refieren a los enunciados que se han de probar, tal como se entiende en el modelo de Toulmin (1958), y a los datos matemáticos con los que se cuenta para desarrollar la argumentación.

El proceso de *validar datos* se refiere a confirmar la identificación o interpretación de los datos. Si bien identificar e interpretar son acciones diferentes, se ha optado por agruparlas en el mismo proceso para destacar la función de validación. Este proceso se asocia también a valoraciones negativas (*refutar*)

sobre estas acciones. Generalmente, las acciones de validación positiva se asocian a confirmar la interpretación de los datos, mientras que la confirmación de identificación de datos se da con poca frecuencia.

No obstante, se ha decidido que *validar la justificación* corresponde a un proceso distinto, dado que se enfoca a aspectos diferentes a los anteriores procesos. En efecto, el proceso de *justificar* corresponde a explicar el razonamiento que se lleva a cabo para identificar o interpretar datos. Según el modelo de Toulmin, este indicador cumple la función de demostrar, evidenciar o verificar. En nuestro modelo la validez de las justificaciones contempla tanto las valoraciones positivas como las negativas (refutar), ya que nos interesa que un solo proceso recoja las valoraciones en el aula, independientemente de si corresponden a una validación o refutación. De esta forma, también estamos considerando la refutación del modelo argumentativo de Toulmin. Para no perder información, cuando aparece una valoración negativa se indica con el término *refutar*.

El proceso de *fundamentar* apoya la justificación; se trata de datos que son socialmente aceptados y que no requieren una validación. En teoría, los fundamentos deberían emerger en una secuencia argumentativa.

Se ha agregado un proceso que tiene la función de caracterizar las acciones de *reflexión sobre la argumentación*. Este proceso contempla tanto reflexionar sobre la información tratada, como reflexionar sobre la secuencia de argumentación. La presencia de este proceso muestra que el desarrollo de una actividad puede alcanzar un nivel de complejidad elevado.

El modelo termina con el proceso de *concluir*, que cumple la misma función que en el modelo de Toulmin, que consiste en establecer la tesis.

*Nivel de complejidad:* Se han identificado cuatro niveles de complejidad: reproducción, conexión, generalización y reflexión. Su relación con las tareas y los procesos se describe a continuación (figura 2).

*Competencia argumentación:* A partir de las tareas, los procesos y los niveles de complejidad caracterizamos la competencia de argumentación.

La figura 2 muestra los cuatro niveles de complejidad que se determinan a partir de la relación entre tareas y procesos, y los tres componentes que en conjunto caracterizan la competencia de argumentación.

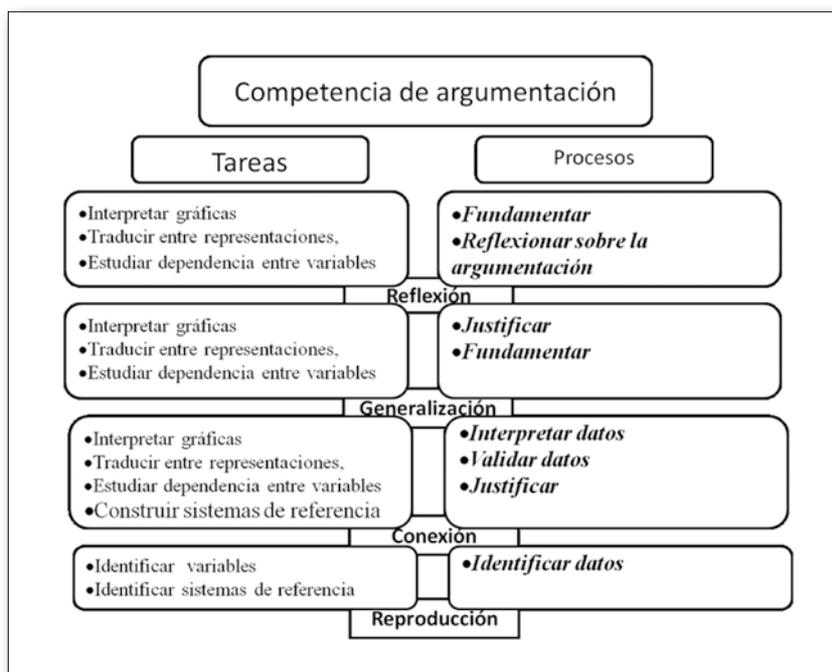


Fig. 2. Competencia de argumentación

Puede observarse que varias tareas se repiten en los distintos niveles, como interpretar gráficas, traducir la dependencia entre variables y estudiarla, y que lo que cambia son los procesos de cada nivel. La competencia de argumentación puede ser aplicada tanto al diseño de una unidad didáctica como a su implementación en el aula. Sirve para relacionar los componentes de la competencia e identificar el nivel de complejidad de una actividad.

En cuanto a los procesos, el de *fundamentar* se ha situado en los dos niveles superiores porque depende de cómo se desarrolle y acompaña al proceso de *reflexionar sobre la argumentación*. Si un proceso emerge de forma incipiente pero no se desarrolla, no implica que se logre el nivel de complejidad asociado. Esto sucede frecuentemente con los procesos de justificar y reflexionar sobre la argumentación, que muchas veces se presentan de forma inicial, pero no se alcanzan a desarrollar en el aula.

El proceso de *concluir* se da en toda estructura argumentativa, y no es un proceso que permita discernir en la complejidad de la actividad. En consecuencia, no se relaciona con las tareas para determinar un nivel de complejidad.

### Descripción de la actividad

La actividad «Accidentes automovilísticos» (figura 3) es la última en la secuencia de la unidad didáctica «Analizando y construyendo gráficos». La manera de presentar la actividad no es un contexto habitual para los estudiantes ya que la gráfica, en vez de ser elaborada para una actividad de aula, proviene originalmente de un periódico. La actividad presenta una gráfica que muestra la velocidad promedio de un coche en el momento en el que tiene un accidente en el transcurso de cinco años. Las preguntas se enfocan a producir una reflexión en los estudiantes sobre la interpretación de gráficas. La pregunta *a)* promueve las tareas matemáticas de lectura e interpretación cuantitativa local<sup>3</sup> de la gráfica, mientras que la pregunta *b)* promueve la interpretación cualitativa global<sup>4</sup> de la gráfica para determinar si hay dependencia entre la velocidad y la cantidad de accidentes (heridos y muertes). A continuación, se presenta un párrafo extraído de la noticia real del periódico asociada a la gráfica. En las tres preguntas siguientes se pide hacer un comentario sobre la interpretación que se hace de la gráfica en la noticia, valorando si se está de acuerdo con la interpretación del periodista. Para ello, en las preguntas *d)* y *e)* se pone al estudiante bajo distintas interpretaciones de la gráfica. Estas características de la actividad hacen que tenga una dificultad no habitual en los estudiantes respecto a sus ideas previas; en la noticia, la interpretación de la gráfica es que «a menos velocidad más accidentes», lo que es contraproducente con las experiencias de los estudiantes de que «a más velocidad hay más accidentes».

### Análisis de la actividad

En la tabla 2 se identifican las tareas y los procesos, y se caracteriza el nivel de complejidad esperado, según las preguntas propuestas en la actividad «Accidentes automovilísticos».

3. Interpretación cuantitativa local: la interpretación se focaliza en una o en ciertas partes de la gráfica y en los aspectos numéricos, sin observarse necesariamente una relación entre las variables.

4. Interpretación cualitativa global: la interpretación se focaliza en la gráfica entera y se asigna un significado a las relaciones entre las variables y, en particular, a la dependencia entre ellas. Una clasificación de las tareas de interpretación se puede encontrar en Leinhardt *et al.* (1990), Azcárate y Deulofeu (1990), Dolores e Íthadehuil (2007) y en Solar (2009); así como una distinción entre gráficas sencillas y complejas en Núñez, Baney y Cordón (2009).

Tabla 2.  
Componentes de la competencia de argumentación de la clase 5

Preguntas	Tareas	Procesos	Complejidad
a)	Lectura de gráficas	Identificar datos	Reproducción
b)	Interpretar gráficas Traducir a otra representación Estudiar dependencia de variables	Interpretar datos	Conexión
c)	Interpretar gráficas Estudiar dependencia de variables	Interpretar datos Justificar	Generalización
d) ; e)	Interpretar gráficas Estudiar dependencia de variables	Justificar Reflexionar sobre la argumen- tación	Reflexión

Los niveles de complejidad de las preguntas a) y b) se determinan con la relación entre las tareas y los procesos. A simple vista la pregunta b) es más compleja que la pregunta a); esta apreciación se caracteriza por las tareas y los procesos implicados: la lectura se asocia a identificar datos que determinan un nivel de reproducción, en cambio la interpretación de gráficas se asocia con la interpretación de los datos y corresponde a un nivel de conexión. En la pregunta c) las tareas se mantienen, pero con la nueva condición de decidir si se está de acuerdo, con lo que se promueve el proceso de justificar. La aparición de este nuevo proceso implica un nivel de generalización. Finalmente, en las preguntas d) y e) se espera que se desarrolle el proceso de reflexionar sobre la argumentación, que se asocia a un nivel de reflexión.

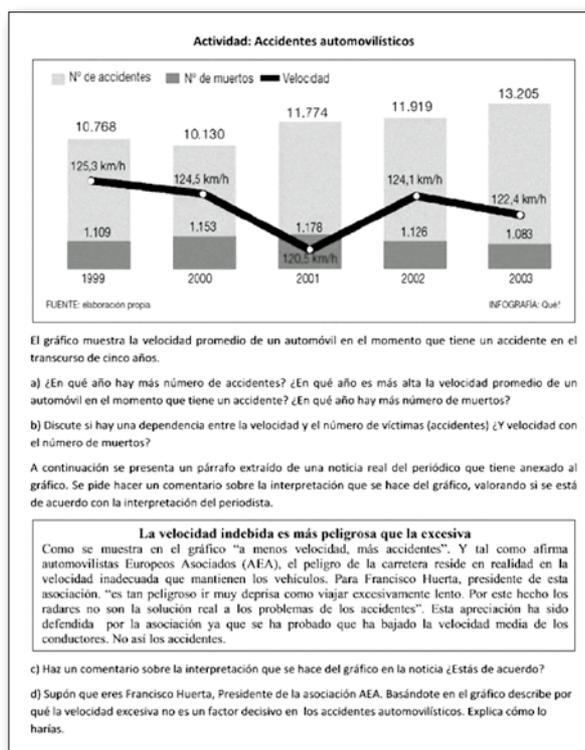


Fig. 3. Actividad «Accidentes automovilísticos»

## Análisis de cuatro episodios de aula

De la aplicación de la actividad en el aula, nos centraremos en el desarrollo de las preguntas *d)* y *e)*, y hemos seleccionado episodios en función de los ciclos argumentativos que se desarrollan. Describiremos cuatro episodios que evidencian cómo emergen varios procesos de argumentación.

En el primer episodio se ha dado inicio a la pregunta *d)*, pero los estudiantes no la entienden, muestran confusión y dicen que la interpretación de la noticia es falsa. Las intervenciones de la profesora Valentina se han diferenciado en formato cursiva.

[507] Valentina: A ver, vuelvo a explicar. Vamos a imaginar que ustedes son este caballero don Francisco Huerta, es decir, que ustedes tienen que dar razones. Don Francisco Huerta dijo [escribe la frase en la pizarra]: «A menos velocidad más accidentes». Aaah, según este gráfico [señala la tabla], a menos velocidad más accidentes, ahora pido, Cristian [tono de atención], que ustedes me expliquen, me den las razones de, a más velocidad.

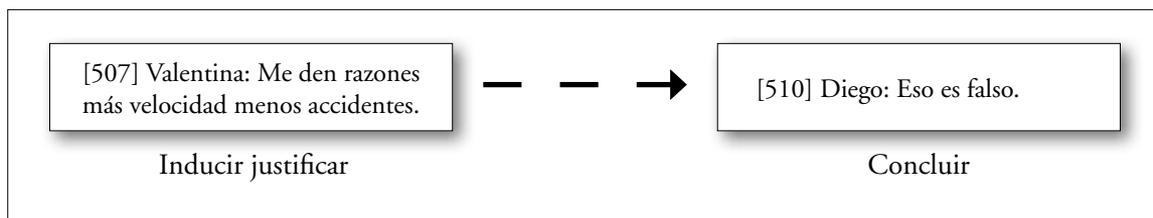
[508] Estudiantes: menos accidentes.

[509] Valentina: *va a ver menos accidentes.*

[510] Diego: Profesora, yo creo que eso es falso.

El episodio, que describe una secuencia argumentativa, consiste en que Valentina incita a probar que a más velocidad menos accidentes, acción que se asocia a inducir una justificación. No se sigue desarrollando el proceso de justificar porque Diego cierra con la conclusión de que no se puede justificar esta afirmación. Para ilustrar los procesos que intervienen se ha elaborado un «mapa de procesos» del fragmento de diálogo (ver los mapas de procesos 1, 2, 3, y 4). En la celda se inscribe o bien una parte de la acción, o una síntesis de esta que describa el proceso que está emergiendo.

Mapa de procesos 1



En el segundo episodio se continúa con la interpretación de los datos.

[515] Valentina: *Miren aquí lo que dice el Leo. ¿Podrías salir a explicarlo?*

[516] Leo: Allí arriba, el caballero tomó los tres primeros [confusión].

[517] Valentina: *El caballero tomó los tres datos de arriba para explicar esto (a menos velocidad más accidentes).*

[518] Leo: y para los dos últimos, esto otro.

[519] Valentina: *Y para estos dos últimos lo explicaría así.*

[520] Alfredo: Sí profesora, pero profesora ahí está mal, porque a menos velocidad más accidentes [Alfredo se confunde, suponemos que quiere decir «A más velocidad más accidentes»].

[521] Valentina: *¿Más velocidad? [corrige a Alfredo].*

[522] Alfredo: ¡Así!

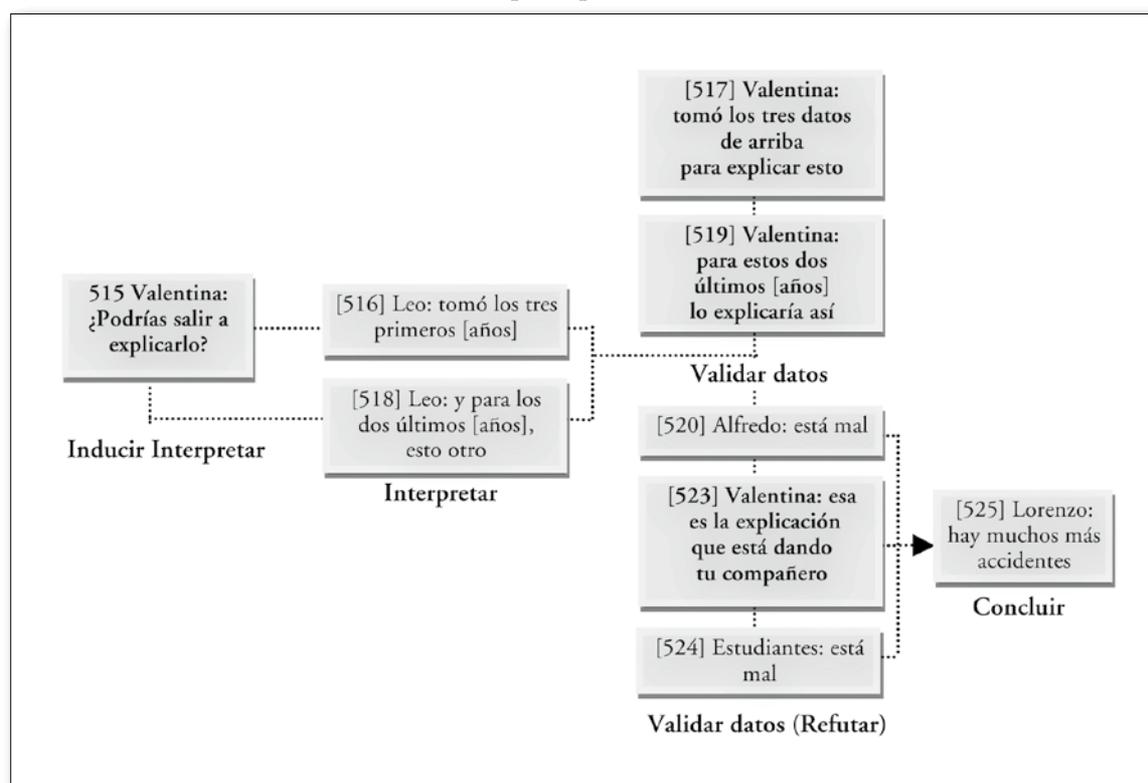
[523] Valentina: *Esa es la explicación que está dando tu compañero.*

[524] Estudiantes: Profesora, está mal.

[525] Lorenzo: Hay muchos más accidentes.

En esta segunda estructura argumentativa se identifica una secuencia en la que la profesora Valentina induce a interpretar, los estudiantes interpretan y Valentina valida la interpretación. Cuando hay una secuencia de acciones en torno al mismo proceso la denominamos ciclo. En el mapa de procesos 2 se aprecia un ciclo en torno a interpretar datos. En la acción 515, Valentina induce a que lean y expliquen la gráfica a través de la tabla, acciones que se asocian al proceso de interpretar. En las acciones 516 y 518, Leo interpreta la tabla identificando que, en los tres años en los que la velocidad es más alta, el número de accidentes es menor en comparación con los dos años en los que la velocidad es menor. Valentina, en las acciones 517 y 519, al repetir lo dicho por Leo está validando su interpretación. Esta secuencia de acciones ya representaría un ciclo en torno a la interpretación, pero aparece un conjunto de intervenciones que refutan la interpretación de Leo, que ya había sido validada por la profesora; estas acciones también son parte del proceso de validar datos, especificando que son refutaciones. Finalmente, en la acción de Lorenzo se obtiene la conclusión de la secuencia argumentativa, la cual no apoya la afirmación inicial de «A más velocidad menos accidentes».

Mapa de procesos 2



En el tercer episodio emergen los procesos de justificación respecto a la interpretación.

[527] Valentina: Sí, pero como el señor dijo que el viaje decta a menos velocidad más accidentes, entonces como usted me dijo que con poca velocidad hay muchos accidentes, explíqueme ahora cómo es posible que a mucha velocidad hay menos accidentes. ¿Cómo podríamos argumentarlo?

[528] Alfredo: A no ser que fuéramos en una carretera.

[529] Leo: Fijándose en los últimos años.

[530] Valentina: Leo dice que fijándose en lo últimos se podría dar una razón.

[531] Estudiantes: [Murmullos].

- [532] *Valentina: Alonso tiene otra idea.*  
 [533] *Alonso: En el año 1999 y en el año 2001, eso sería todo.*  
 [534] *Valentina: Escucharon lo que dijo.*  
 [535] *Estudiantes: ¡No!*  
 [536] *Valentina: Él daría el año 99, diría: más velocidad menos accidentes, lo justificaría con el año 99 y...*  
 [537] *Alonso: 2001.*

En el mapa de procesos 3 se aprecia que en este episodio se desarrolla un ciclo en torno al proceso de justificar. Valentina ahora pide que argumenten la afirmación inicial. Alfredo da una justificación externa a los datos que no contribuye a la secuencia argumentativa; en cambio Leo y Alonso justifican sosteniéndose en los datos. Valentina, con la acción de repetir lo dicho por Leo y Alonso, está validando sus justificaciones. Pero la secuencia argumentativa no termina en una conclusión.

Mapa de procesos 3

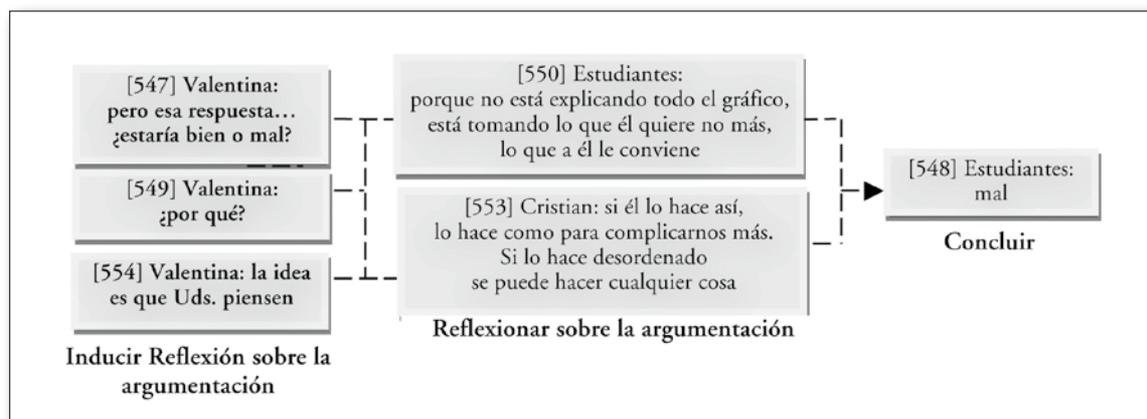


En el cuarto episodio emerge el proceso de reflexión sobre la argumentación.

- [547] *Valentina: Pero esa respuesta que tomaría este señor, ¿estaría bien o mal?*  
 548 *Estudiantes: Mal.*  
 [549] *Valentina: ¿Por qué?*  
 [550] *Estudiantes: Porque no está explicando todo el gráfico, está tomando lo que él quiere no más, lo que a él le conviene.*  
 [551] *Valentina: Está tomando lo que él quiere, lo que a él le conviene.*  
 [552] *Arturo: No, porque no le conviene.*  
 [553] *Cristian: En todo caso si él lo hace así, lo hace como, para complicarnos más. Si lo hace desordenado se puede hacer cualquier cosa.*  
 [554] *Valentina: Pero es que la idea es que ustedes piensen.*

En el mapa de procesos 4 se observa que este episodio corresponde a un ciclo en torno al proceso de reflexionar sobre la argumentación. Valentina, en la acción 447, ya no incita a que interpreten o justifiquen la afirmación inicial, sino a que valoren esta afirmación. Los estudiantes concluyen que la afirmación no es correcta –acción 548– porque no considera la totalidad ni el orden de los datos –acciones 548 y 553–. Estas intervenciones, que se asocian al proceso de reflexionar sobre la argumentación, no alcanzan a desarrollar el proceso. En efecto, Valentina, en las acciones 549 y 554, sigue incitando a reflexionar sobre la argumentación, pero sin obtener las respuestas esperadas.

Mapa de procesos 4



Al observar de manera global los mapas de procesos se aprecia que las continuas inducciones de Valentina evidencian su esfuerzo para que los estudiantes interpreten y justifiquen bajo las nuevas condiciones impuestas en la actividad. Sin embargo, por las refutaciones que realizan los estudiantes se aprecia que esta intención es difícil de llevar a cabo; si Valentina validaba una interpretación o justificación, en respuesta surgía una acción de refutación de un estudiante. Las conclusiones que se obtienen concuerdan con este hecho. En los dos primeros episodios, la conclusión de los estudiantes es contraria a la solicitud de Valentina para argumentar «a menos velocidad más accidentes». Finalmente, en el cuarto episodio, cuando Valentina solicita una reflexión de la actividad, los estudiantes no dudan en expresar que la argumentación no es correcta, y sus reflexiones giran en torno a justificar la errónea interpretación que se hace de la gráfica.

En los cuatro episodios se evidencian acciones de interpretación, justificación, validación- refutación de datos, validación de justificaciones, reflexión sobre la argumentación y conclusión, acciones que se asocian a seis de los ocho procesos que conforman la competencia de argumentación. Según esto, podemos enunciar las siguientes características de los procesos:

- De todas las acciones entre los estudiantes y la profesora Valentina, los procesos emergen de las acciones que son significativas en la argumentación. Estas acciones son frecuentes en el aula de Matemáticas.
- No basta con que emerja un proceso, también es necesario que este proceso se desarrolle en el aula. En el mapa de procesos 4, si bien emergió la reflexión sobre la argumentación, los estudiantes no lograron una reflexión significativa y por tanto no se evidenció un desarrollo real de este proceso.
- Un proceso puede emerger en un ciclo. En los mapas de procesos se aprecian ciclos en torno a interpretar datos y a la justificación. Los ciclos permiten interpretar los patrones de interacción en función de los procesos (Solar, 2009).

### Nivel de complejidad

Según el MCM, para determinar el nivel de complejidad se articulan las tareas y los procesos en juego. En la figura 4 se han caracterizado los componentes de la competencia de argumentación de los cuatro episodios que conforman la clase 5. En el centro se señalan las dos tareas matemáticas y en los laterales los procesos identificados en los mapas de procesos; el proceso de concluir no aparece porque no influye en la complejidad, y el proceso de reflexión sobre la argumentación tampoco, porque solamente

emergió de forma inicial y no fue desarrollado por los estudiantes. Por tanto, siguiendo los criterios del MCM, la complejidad corresponde a un nivel de *generalización*.



Fig. 4. Competencia de argumentación en la clase 5

El nivel de complejidad alcanzado no corresponde al esperado de reflexión. Los estudiantes tuvieron un obstáculo en la interpretación de la gráfica, pues sus ideas previas respecto a que el incremento de velocidad de un automóvil aumenta el riesgo de accidentes no permitieron que comprendieran la interpretación de la gráfica en la noticia.

## DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Por medio del MCM, podemos dar una explicación de por qué no se alcanza el nivel de complejidad de reflexión esperado en la implementación de la actividad en el aula. Este nivel se alcanza si los estudiantes logran identificar qué datos de la gráfica pueden llevar a una interpretación distinta a la que anteriormente ellos habían establecido, y si exponen las razones que tiene el protagonista de la noticia para que no se tomaran medidas contra la alta velocidad de los automóviles. Si bien los estudiantes identifican los datos de la gráfica que justifican la interpretación de Francisco Huerta, no exponen las razones que supuestamente puede tener el autor de la noticia para argumentar que la velocidad excesiva no es un factor decisivo en los accidentes automovilísticos. Los estudiantes no tienen una actitud crítica frente a la actividad y sus reflexiones se limitan a justificar el error de la interpretación y no se centran en desarrollar los argumentos de los intereses que tiene el protagonista de la noticia. Por tanto, no se logró el nivel de reflexión esperado y solo se obtiene el nivel de generalización.

Otra explicación, desde un marco alternativo, es que puede haber un conflicto de normas socio-matemáticas (Yackel y Cobb, 1996); las ideas previas de los estudiantes actúan como obstáculo para comprender la interpretación de la gráfica en la noticia; asimismo, los estudiantes encuentran ambiguo

el propósito de las preguntas. Los estudiantes no están acostumbrados a este tipo de actividades, es decir, las normas sociomatemáticas de los estudiantes no permiten desarrollar la actividad tal como se esperaba. Según esta perspectiva no es de extrañar que al finalizar la sesión solo unos pocos estudiantes levantaran la mano indicando que comprendieron el problema.

Si bien la alusión a las normas sociomatemáticas no es contradictoria con la explicación desde el MCM, cada una tiene implicaciones de distinta índole. Las explicaciones desde el MCM tienen un componente curricular; por ello, la resolución de la discrepancia entre el nivel esperado y el alcanzado puede ser abordada desde la planificación, adaptando las actividades para que puedan permitir que emerja y se desarrolle un proceso de reflexión sobre la argumentación. En cambio, la explicación desde una aproximación de las normas (Yackel y Cobb, 1996) tiende a ser resuelta desde la gestión de aula, centrándose en temas como patrones de interacción y participación en el aula de matemáticas.

Otro resultado significativo es la total ausencia de acciones asociadas al proceso de *fundamentar*. La profesora no incita a indagar las fundamentaciones ni tampoco emergen por parte de los estudiantes. En el episodio se aprecia que los estudiantes no entendían las preguntas de la actividad sobre accidentes automovilísticos, lo que se constató en la cantidad de acciones conducentes a refutar los datos. Este conflicto en la estructura argumentativa daba pie para que Valentina incentivara a los estudiantes a estudiar con profundidad por qué la interpretación de la noticia sobre accidentes automovilísticos es errónea, pero no emergen estos fundamentos. En vez de esto, los estudiantes desarrollan procesos de interpretación y justificación que se limitan a identificar que la interpretación no es correcta. Cabe resaltar que la ausencia de acciones que se dirijan a los fundamentos no es un hecho aislado, sino que se dio a lo largo de todas las sesiones durante las que se aplicó la unidad didáctica.

Otro aspecto que cabe destacar es la relevancia que tiene el proceso de interpretar datos en la secuencia argumentativa. La interpretación es un proceso que no aparece en el modelo argumentativo de Toulmin ni en la adaptación para el aula de Matemáticas que hace Krummheuer (1995), y que han seguido el resto de autores que han estudiado la argumentación en el aula de Matemáticas (Stephan y Rasmussen, 2002; Whitneack y Knipping, 2002; Yackel, 2002; Rasmussen *et al.* 2004; Pedemonte, 2005). Sin embargo, en nuestro estudio experimental se ha evidenciado que las acciones de interpretar son parte de la argumentación colectiva, que se pone de manifiesto en la variedad de acciones en los episodios de clase en los que la profesora induce a interpretar, los estudiantes y la profesora interpretan, la profesora valida la interpretación, los estudiantes justifican la interpretación y, finalmente, la profesora valida la justificación de la interpretación. Es decir, que la interpretación es uno de los aspectos centrales en la secuencia argumentativa en el estudio de las gráficas. En el mapa de procesos 2 se ilustra este hecho en el ciclo de proceso en torno a la interpretación. En los análisis de las sesiones, la interpretación es la acción que aparece con mayor frecuencia, tanto en la profesora como en los estudiantes. Si no fuera parte de la estructura argumentativa, perdería riqueza la caracterización de la argumentación.

Para entender mejor la naturaleza de la interpretación, en los mapas de procesos 2 y 3 se puede observar que, al terminar el ciclo en torno a la interpretación, se inicia un nuevo ciclo en torno a la justificación. En esta secuencia se refuta la afirmación con una interpretación de los datos, para luego dar lugar a una acción de justificación por parte de la profesora. Esta relación también se constata en otros episodios que aquí no se han mostrado, en los que la interpretación se da en muchos casos antes de la justificación.

La figura 5 ilustra la relación que hemos establecido entre la interpretación y los otros componentes del modelo argumentativo de Toulmin. Se aprecia que la interpretación sirve de sostenimiento a los datos y apoya la justificación.

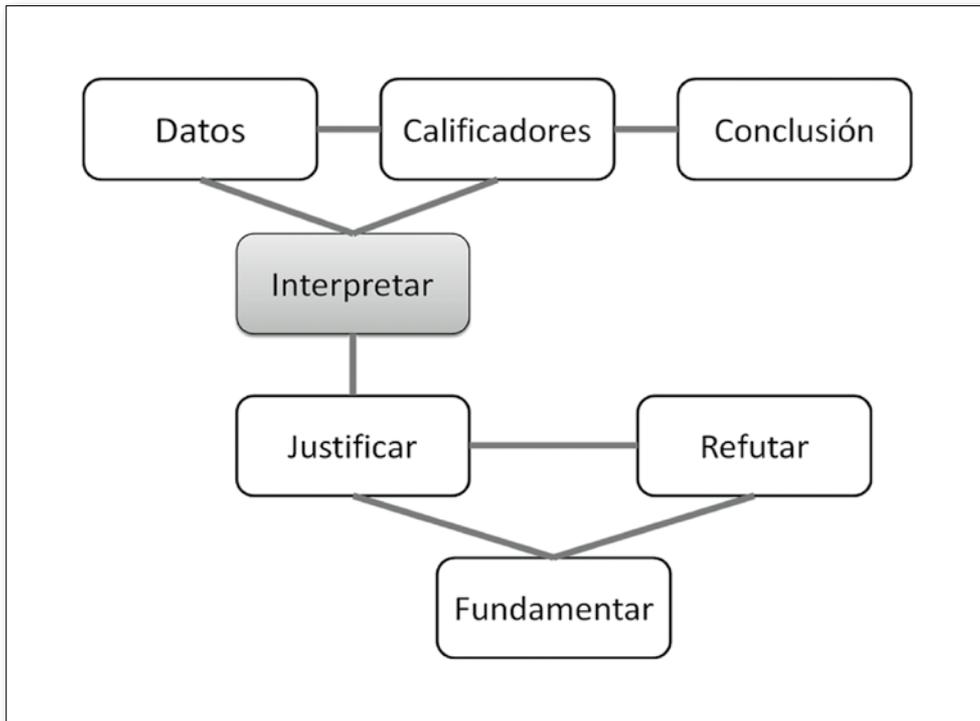


Fig. 5. Interpretación en el modelo argumentativo de Toulmin

La interpretación aparece en la estructura argumentativa en el estudio de las gráficas funcionales, pero ello no significa que aparezca con la misma importancia en otros temas. Por ejemplo, suponemos que en la composición de funciones la interpretación puede estar ausente y, en cambio, los fundamentos sí pueden emerger como un proceso en el aula. Como resultado, sostenemos que la secuencia argumentativa que se genere depende de los contenidos matemáticos que se pongan en juego, y no es automáticamente transferible a otro contenido matemático, tal como resulta implícito en la literatura sobre argumentación matemática en el aula.

## CONCLUSIONES

Hemos propuesto un MCM que se ha aplicado para estudiar la argumentación. Tres componentes articulan la competencia de argumentación: los *niveles de complejidad* identifican el nivel cognitivo de una *tarea matemática* en relación con un *proceso*.

La perspectiva de competencias matemáticas nos ha permitido estudiar desde diferentes ángulos la argumentación en el aula de Matemáticas. Interpretando las competencias matemáticas como procesos articuladores del currículo, hemos logrado diferenciar los contenidos de los procesos que actúan en la argumentación durante la interpretación de gráficas funcionales. Además, a través de la noción de complejidad de la actividad (de Lange, 1995; OECD, 2003; Rico, 2007), se ha caracterizado el progreso en la argumentación, identificando tanto el nivel de complejidad que se espera alcanzar en una actividad como el finalmente desarrollado. Estas características hacen que la competencia de argumentación tenga una función didáctica puesto que la caracterización de sus componentes es una estructura útil tanto para la planificación de una secuencia didáctica, como para el desarrollo de la argumentación en el aula.

Destacamos, como elemento fundamental en el modelo de competencia, los procesos matemáticos, ya que son estos los que conforman una competencia matemática. Si bien las tareas matemáticas también son parte del modelo, estas representan los contenidos que han estado explícitamente presentes en los currículos. En cambio, los procesos han estado históricamente ausentes en la organización del diseño curricular. El modelo de competencia equilibra la importancia entre las tareas matemáticas y los procesos: las tareas se desarrollan a corto plazo y cambian en los diferentes niveles del currículo; en cambio los procesos se repiten y se desarrollan a largo plazo en el currículo de Matemáticas.

Actualmente, varios autores consideran las competencias matemáticas como un organizador del currículo (Abrantes, 2001; Niss, 2002; Espinoza *et al.*, 2008; Lupiáñez y Rico, 2008). En este estudio no solo se ha analizado la argumentación como una competencia que emerge en el aula de Matemáticas, sino también se ha evidenciado que puede ser considerada como un organizador del currículo.

El modelo de competencia de argumentación puede ser una contribución tanto para el investigador, como modelo didáctico para analizar la modelización en el aula, como para el profesor, como herramienta para planificar la enseñanza de la argumentación con sus estudiantes.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Proyecto de Investigación con referencia EDU2011-29328 del Ministerio de Ciencia e Innovación del Plan Nacional I+D+i del Gobierno Español.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABRANTES, P. (2001). Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles. *Educational Studies in Mathematics*, 47(2), pp. 125-143.
- AZCÁRATE, C. y DEULOFEU, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis.
- CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), pp. 221-266.
- DE LANGE, J. (1995). Assessment: No change without problems. En T. A. Romberg (ed.). *Reform in School Mathematics and Authentic Assessment*. Nueva York: SUNY Press, pp. 87-172.
- DOLORES, C. y ITHADEHUIL, C. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *RELIME*, 10 (1), pp. 69-96.
- ESPINOZA, L. y AZCÁRATE, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de límite de función: una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(3), pp. 355-368.
- ESPINOZA, L.; BARBÉ, J.; BOSCH, M. y GASCÓN, J. (2005). Didactic Restrictions on the Teaching of Limits of Functions at Secondary School. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1-3), pp. 235-268.
- ESPINOZA, L.; BARBÉ, J.; CERDA, F.; WAISMAN, F.; RUIZ, R. y GÁLVEZ, G. (2006). *Analizando y construyendo gráficas*. Unidades didácticas LEM. Santiago: Mineduc.
- ESPINOZA, L.; BARBÉ, J.; MITROVICH, D.; SOLAR, H.; ROJAS, D. y MATUS, C. (2008). *Análisis de las competencias matemáticas en primer ciclo. Caracterización de los niveles de complejidad de las tareas matemáticas*. FONIDE N.º: DED0760. Santiago: Mineduc.
- INGLIS, M.; MEJÍA-RAMOS, J. P. y SIMPSON, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), pp. 3-21.
- KRUMMHEUER, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (eds.). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, pp. 229-269.

- LEINHARDT, G.; ZASLAVSKY, O. y STEIN, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Task, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), pp. 1-64.
- LUPIÁÑEZ, J. L. y RICO, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, 3(1), pp. 35-48.
- MARIOTTI, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En A. Gutiérrez y P. Boero (eds.). *Handbook of Research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense, pp. 173-204.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM) (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- NISS, M. (2002) (coord.). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish Kom Project*. Roskilde: Roskilde University.
- NÚÑEZ, F.; BANET, E. y CORDÓN, R. (2009). Capacidades del alumnado de educación secundaria obligatoria para la elaboración e interpretación de gráficas. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(3), pp. 447-462.
- OECD (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París, autor.
- PUIG, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. *PNA*, 2(3), pp. 87-107.
- RICO, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), pp. 47-66.
- PEDEMONTE, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(3), pp. 313-348.
- RASMUSSEN, C.; STEPHAN, M. y ALLEN, K. (2004). Classroom mathematical practices and gesturing. *Journal of Mathematical Behavior*, 23(3), pp. 301-323.
- SARDÀ, A. y SANMARTÍ, N. (2000). Enseñar a argumentar científicamente: un reto de las clases de ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(3), pp. 405-422.
- SOLAR, H.; AZCÁRATE, C. y DEULOFEU, J. (2009). Competencia de modelización en la interpretación de gráficas funcionales. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (eds.). *Investigación en Educación Matemática XIII*. Santander: SEIEM, pp. 499-510.
- SOLAR, H. (2009). *Competencias de modelización y argumentación en interpretación de gráficas funcionales: propuesta de un modelo de competencia aplicado a un estudio de caso. Tesis doctoral*. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.
- SOLAR, H.; ESPINOZA, L.; ROJAS, F.; ORTIZ, A.; GONZÁLEZ, E. y ULLOA, R. (2011). *Propuesta metodológica de trabajo docente para promover competencias matemáticas en el aula, basadas en un Modelo de Competencia Matemática (MCM)*. FONIDE 511091. Santiago: Mineduc.
- STEPHAN, M. y RASMUSSEN, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, pp. 459-490.
- STRAUSS, A. y CORBIN, J. (1990). *Basic of Qualitative Research: Grounded Theory, procedures and techniques*. Londres: Sage Publications.
- TOULMIN, S. (1958). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.
- WHITENACK, J. y KNIPPING, N. (2002). Argumentation, instructional design theory and student's mathematical learning: a case for coordinating interpretive lenses. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, pp. 441-457.
- YACKEL, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, pp. 423-440.
- YACKEL, E. y COBB, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), pp. 458-477.

---

# THE ARGUMENTATION COMPETENCE IN FUNCTIONAL GRAPH INTERPRETATION

Horacio Solar

Departamento de Didáctica, Universidad Católica de la Santísima Concepción

Carmen Azcárate y Jordi Deulofeu

Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals, UAB

In this paper we interpret the argumentation in graph interpretation as a mathematical competence.

We have generated a mathematical competence model that is useful to plan a teaching sequence, and also to analyze its development in the mathematics class. This model is elaborated from topic of graph interpretation, as we start assuming that the mathematical competencies aren't independent of the mathematical contents. Also, as competencies are developed through the mathematical processes, we intend to know the relation between processes and contents, and also if the processes change depending on the school level.

The mathematical competence model, based on processes, tasks and levels of complexity, is tested in the study of argumentation competence, in a mathematical class in which a teaching unit about functional graph interpretation is applied. Our central research question is: How are related tasks, processes and complexity in the development of argumentation competence?

The competence model is tested in an experimental study. We studied the case of Valentina, an 8th grade teacher (14-15 years old) who applied a teaching unit called «Analyzing and constructing graphs».

The application of the teaching unit was followed with a strategy of non participating observation during five lessons. Using video recordings, records were considered focusing in the interaction between teacher and students. Finally the five classes recorded were transcribed.

Episodes that show a greater richness in the interaction between teacher and students were selected from each lesson. The unit of analysis corresponded to each of the actions of the episode, both Valentina and students. Each action is characterized by a term indicating the process associated with competence. The strategy followed an approach of constant comparison between the processes that emerged from the analyzed episodes, concluding with the characterization of a process list for argumentation competence.

The eight processes which constitute this competence have been inspired by Toulmin's argumentation structure. It has been stated that the episodes obey the argumentative trio: beginning, development, and conclusions. In the development it is where the majority of processes emerge. In the maps of processes it is shown how each one of these processes emerge; the interpretation of the data is the most frequent process, but there are also maps where the process of to identify data it is also predominant and even the process to justify emerges.

Other aspect to highlight in the argumentation competence it is the relevance that to interpret data has in the argumentative sequence. The interpretation it is a process that doesn't appear in Toulmin's argumentative structure. However, in our experimental study it has been evidenced that the interpreting actions are part of the collective argumentation, what arises in the variety of actions in the class episodes where the teacher induces to interpret, is that the students and the teacher interpret, and the teacher validates the justification of the interpretation. That is to say, the interpretation is one of the central aspects of the argumentative sequence in as interpretation topic.

The development of a mathematical competence model represents a contribution both from the research and the innovation points of view. This model can be applied both to the planning of a teaching unit and to its development in the classroom.

Argumentation is a remarkable topic in the mathematics education. In this study the argumentation competence has been characterized in terms of: mathematical tasks, eight processes that constitute the mathematical competence, and four levels of complexity. It has been stated that the relationships between tasks and processes defines the activity complexity level. The processes which conform the competence have been characterized from a case study, we highlight that the eight processes as a whole are understood as the model construction.

The results have shown that there is a base structure: the levels of complexity identify the cognitive level of a mathematical task regarding the process.

The argumentation competence has a didactic function because the characterization of its components it is a useful structure both for the planning of a teaching sequence and the argumentation development in the class. This competence consists on the study of the mathematical tasks development, the different processes of argumentation which emerge, and the activity complexity level according to argumentation.