ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
Revista de investigación y experiencias didácticas
Núm. 30.3 (2012): 219-235
ISSN: 0212-4521

PERSPECTIVA DE LA PRÁCTICA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA. RELACIONES ENTRE LA PRÁCTICA Y LA PERSPECTIVA DEL PROFESOR

A SECONDARY MATHEMATICS TEACHER'S PRACTICE PERSPECTIVE ON THE DERIVATE TEACHING. RELATIONS BETWEEN TEACHER'S PERSPECTIVE AND PRACTICE

Mercedes García, José-María Gavilán
Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla
(mgblanco@us.es), (gavilan@us.es)

Salvador Llinares
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
(llinares@ua.es)

RESUMEN: El objetivo de esta investigación es describir y explicar la práctica del profesor. El contexto es la introducción del concepto de derivada en bachillerato (16-18 años). Mediante la noción «modelación de un mecanismo de construcción de conocimiento» se explica cómo el profesor genera oportunidades de aprendizaje para sus estudiantes. La relación entre la perspectiva del profesor y la práctica se describe a través de cómo el contenido matemático es organizado y cómo el profesor modela los mecanismos de construcción del conocimiento mediante la gestión de distintos sistemas de representación y del discurso matemático en el aula, y se explica desde la complementariedad de referencias cognitivas y socioculturales.

PALABRAS CLAVE: práctica del profesor, construcción del conocimiento, modelación de la descomposición genética de una noción, perspectiva de la práctica, derivada.

ABSTRACT: This study aims to describe and explain teacher´s practice. The teaching context was the introduction of derivative concept in secondary high school (16-18 year-old students). We introduce and use the notion «modeling a mechanism of construction of knowledge» to explain how the teacher generated learning opportunities to his pupils derived from his perspective. The relation between teacher's perspective and his/her practice is describe by how mathematical content was organized, how were modeled the construction mechanisms of knowledge by the management of different representations systems and mathematical discourse in the classroom and it is explained by the complementarity between cognitive and sociocultural references.

KEY WORDS: teacher's practice, construction of knowledge, modeling a genetic decomposition of mathematic notion, practice's perspective, derivative.

Fecha de recepción: abril 2011 • Aceptado: noviembre 2011

Para citar: García, M., Gavilán, J.M. y Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor. *Enseñanza de las Ciencias*, 30 (3), pp. 219-235

INTRODUCCIÓN

La práctica del profesor está siendo considerada un ámbito de investigación en educación matemática (Franke, Kazemi y Battey, 2007; Ponte y Chapman, 2006) desde diferentes perspectivas teóricas (Hersant y Perrin-Glorian, 2005; Schoenfeld, 2000; Barbé, Bosch, Espinoza y Gascón, 2005). Boaler (2006, *on-line*) señala que «La investigación educativa ha avanzado considerablemente nuestra comprensión del aprendizaje de los estudiantes, así como, más recientemente, el conocimiento del profesor, las creencias y prácticas, que pueden apoyar el aprendizaje, pero ha habido relativamente poca investigación que se haya ocupado de la relación directa entre la enseñanza y el aprendizaje». De manera más específica, Robert y Rogalski (2005) indican que es posible explicar ciertos aspectos del aprendizaje de los estudiantes a partir de las propuestas de enseñanza realizadas por el profesor. Simon, Tzur, Heinz, Kinzel y Smith (2000) indican que es posible relacionar los objetivos y el diseño de actividades realizados por el profesor con el aprendizaje de los estudiantes a través de Hypothetical Learning Trajectory (HLT). Estos autores introducen la noción de «perspectiva del profesor» para caracterizar las ideas sobre las matemáticas y el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas que fundamentan su práctica (Simon y Tzur, 1999; *Tzur, Simon, Heinz y Kinzel,* 2001).

Desde posiciones cognitivas, Thompson, Philipp, Thompson y Boyd (1994) usan la idea de «orientación» para describir la práctica del profesor y su cambio a partir de las acciones del profesor, los objetivos que se propone y la gestión en el aula. Asimismo, Schoenfeld (2000) propone el análisis de la «enseñanza-en-contexto» (*Teaching-in-context*) no solo considerando lo que acontece en el aula, sino también subrayando lo que aporta la «imagen de la lección» del profesor. La «imagen de la lección» nos informa de cómo espera el profesor que se desarrolle la lección (Schoenfeld, 2000) y de los planes de acción preparados para lograr sus fines. Para este investigador, lo que sucede en el aula puede describirse mediante las «secuencias de acciones» que se desarrollan a partir de los planes de acción y las interacciones entre el conocimiento, las creencias y las metas activadas del profesor. A partir del uso de este modelo, Törner, Rolka, Rösken y Sriraman (2010) indican que las ideas del profesor sobre el contenido matemático y el aprendizaje influyen en las decisiones que toma. En esta línea, la investigación aquí presentada intenta explicar la práctica del profesor considerando las condiciones de aprendizaje que crea para sus estudiantes. En este contexto, el estudio realizado tiene como objetivo describir (¿qué hace el profesor?) y explicar (¿por qué hace eso el profesor?) la práctica del profesor (principios que la fundamentan).

MARCO CONCEPTUAL

En la teoría APOS (Dubinsky, 1991; Asiala, Brown, De Vries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996), el aprendizaje se apoya en el desarrollo de la idea piagetiana de «abstracción reflexiva» en el sentido de considerar que significa «comprender un concepto y cómo esa comprensión puede ser construida por el aprendiz» (Asiala *et al.*, 1996: 5). Desde esta perspectiva, los investigadores consideran las «construcciones mentales» (acción-proceso-objeto-esquema) y los mecanismos de construcción de dichas construcciones (interiorización-encapsulación-coordinación) organizadas en «un conjunto estructurado de construcciones mentales que pueden describir cómo puede desarrollarse el concepto en la mente de un individuo» (Asiala *et al.*, 1996: 7) y lo denominan descomposición genética del concepto. Usando como base esta idea, consideramos que la descripción y caracterización de las acciones, decisiones, discurso y justificaciones que el profesor realiza para dar cuenta de cómo su instrucción puede ayudar a promover en sus estudiantes la generación de los mecanismos cognitivos de construcción de conocimiento puede aportar información que nos ayude a comprender mejor las relaciones entre las perspectivas de los profesores y la enseñanza realizada. Desde este punto de vista, la caracterización de la modelación del profesor de los mecanismos de construcción del conocimiento en la enseñanza hay que entenderla como una interpretación del investigador.

Por ejemplo, la modelación del *mecanismo constructivo de interiorización para el operador derivada* (a cada función f(x) le hace corresponder su función derivada f′(x)) (Gavilán, 2005) se realiza cuando el profesor intenta que los estudiantes calculen funciones derivadas de funciones compuestas por tres o más funciones elementales a partir de la regla de la cadena (polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas) y para cuyo cálculo no se tiene una fórmula explícita. En esta situación «la modelación de los mecanismos de construcción de conocimiento que se describen en la descomposición genética de un concepto matemático» realizada por el profesor es una descripción de la forma en la que el profesor usa las actividades, su discurso en el aula y los diferentes modos de representación para promover en los estudiantes la construcción de los diferentes mecanismos cognitivos. La hipótesis que subyace en este planteamiento es que algunos aspectos de la práctica del profesor se pueden explicar considerando la forma en la que usa los elementos matemáticos y sus representaciones para apoyar su discurso y la interacción con los estudiantes.

Por otra parte, Simon *et al.* (2000) usan la expresión «perspectiva del profesor» para dar cuenta de las concepciones del profesor que subyacen a su práctica. Tzur *et al.* (2001: 228) indican: «Usamos el término *perspectiva* para postular una amplia estructura pedagógica (*pedagogical structure*) compuesta de múltiples concepciones que conjuntamente organiza algunos aspectos de la práctica del profesor». Para hacer operativa esta idea en esta investigación consideramos dos dimensiones:

- *Cómo el profesor concibe el desarrollo de la comprensión matemática*, es decir, su concepción sobre el aprendizaje matemático, y
- *cómo el profesor concibe las matemáticas escolares*, es decir, su visión de las matemáticas como objeto de enseñanza-aprendizaje.

A partir de la idea de la modelación por parte del profesor de los mecanismos de construcción del conocimiento y de la idea de la perspectiva de la práctica, planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Es posible caracterizar y explicar en la práctica del profesor una modelación de los mecanismos constructivos que articulan una descomposición genética de un concepto?

METODOLOGÍA

Participantes y contexto

Esta investigación siguió una metodología de corte cualitativo, adoptando la forma de estudio de casos. En ella participaron dos profesores de educación secundaria y en este informe se presentan los resultados de uno de los casos, Juan (seudónimo). Juan es profesor de matemáticas en educación secundaria (12-18 años) con más de 20 años de experiencia docente y mantuvo una gran predisposición a colaborar con el grupo de investigadores. La clase de Juan estaba formada por 25 estudiantes de 17 años.

La parte esencial de estudio fue la unidad didáctica, cuyo objetivo era la introducción del concepto de derivada cuando los estudiantes no habían recibido ninguna enseñanza previa sobre este concepto. Esta unidad didáctica duró 17 clases de 45 minutos e incluía una sesión semanal en el aula de informática. Generalmente, Juan distribuía a los estudiantes colecciones de problemas alrededor de los cuales organizaba las clases, y no seguía libro de texto. Se impartieron tres clases en el aula de informática (las clases 3, 9 y 16) y en ellas los estudiantes trabajaban en grupos de dos a cuatro estudiantes por cada ordenador.

La unidad didáctica estaba organizada alrededor de tres conceptos: derivada de una función en un punto, función derivada y operador derivada. Esta organización determinó unas referencias iniciales para que Juan desarrollara en el aula una determinada modelación de los mecanismos de construcción del conocimiento. Juan comenzaba con la introducción de f′(a), vinculando sus significados de medida de la variación de la función en un punto y de pendiente de la recta tangente a partir de las rectas secantes. Para establecer la relación entre estos significados Juan potenció la relación entre los modos de representación numérico, analítico y gráfico, utilizando funciones particulares ($f(x)= x^2$). Con posterioridad, Juan introdujo la función derivada f′(x) a partir de la derivada de la función en un punto, f′(a). La introducción de la función derivada se realizó generalizando distintos puntos para cada función elemental usada con anterioridad (por ejemplo, $f(x)= x^2$). A continuación introdujo el operador derivada D(f) a partir de la generalización a diferentes funciones del procedimiento seguido para obtener la función derivada, f′(x), dada la función f(x). En resumen, en la secuencia de enseñanza planificada por Juan había una doble generalización: en primer lugar, a partir de la función f(x) se generaliza un procedimiento para obtener el valor de la derivada en un punto $x=a$, f′(a), variando los valores de a (se obtiene f′(x)); en segundo lugar, se generaliza lo anterior a distintas funciones f(x) (se obtiene D(f)).

Los datos

Los datos de esta investigación proceden de una entrevista inicial con el profesor sobre la planificación y organización de la unidad didáctica, de la transcripción de los vídeos de las 17 clases observadas, de tres entrevistas de progreso realizadas en diferentes momentos del desarrollo de las lecciones y de una entrevista final al terminar la enseñanza de la unidad didáctica. Además, recogimos los materiales que Juan había preparado para las diferentes lecciones (ejemplos, problemas, anotaciones, guiones de las clases en el aula de informática, materiales que el profesor entregaba a los estudiantes y colecciones de problemas y ficheros de ordenador con construcciones realizadas con Cabri II).

La entrevista sobre la planificación tuvo una duración aproximada de una hora y fue grabada en vídeo y audio. Posteriormente se transcribió en su totalidad. Esta entrevista inicial semiestructurada se centró en preguntas sobre la biografía personal del profesor, la contextualización de la clase y el currículo, sobre la organización del contenido en la unidad didáctica y en torno a cuestiones sobre el aprendizaje.

Los datos sobre la gestión de la enseñanza proceden de las grabaciones y la transcripción de las 17 clases, así como de tres entrevistas realizadas a lo largo de la unidad didáctica (entrevistas de desarrollo). Las entrevistas de desarrollo tenían como objetivo recoger información sobre cómo el profesor percibía el desarrollo de las lecciones. Por último, al finalizar la enseñanza de la unidad didáctica se realizó una entrevista final para recoger las reflexiones del profesor. Las clases videograbadas y las entrevistas de desarrollo y final fueron transcritas en su totalidad.

Análisis de los datos

Adaptamos el procedimiento propuesto por Powell, Francisco y Maher (2003) al caso de vídeos de enseñanza. El análisis de los datos fue realizado en dos fases. En la primera fase (nivel descriptivo) analizamos las tareas propuestas a los estudiantes considerando dos aspectos: las demandas al resolutor de cada una de las tareas y cómo estaba organizado el contenido matemático considerando la secuencia de tareas propuestas. Para cada tarea identificábamos los elementos matemáticos y las relaciones establecidas, los modos de representación usados y los objetivos del profesor. Este nivel de análisis tenía un doble objetivo, por un lado nos permitía realizar un proceso de «inmersión» en los datos y por otro reducir el volumen de datos (Powell *et al.*, 2003). El resultado de este análisis fueron dos informes, uno para la planificación y otro para la gestión.

La segunda fase del análisis tenía como objetivo empezar a generar inferencias a partir de los datos. En esta fase generamos dos niveles de inferencia.

– *Primer nivel inferencial.* Para hacer este análisis usamos los datos sobre la planificación procedentes de la entrevista inicial, la transcripción de las grabaciones de las lecciones, las entrevistas de desarrollo y los informes sobre las características de las tareas usadas por el profesor realizados en el paso anterior. El análisis se centró en dos aspectos. En primer lugar, se identificaron segmentos de enseñanza desde las grabaciones de vídeo (Powell *et al.*, 2003) en los que era posible identificar la modelación por parte de Juan de un mecanismo de construcción (y potenciación, por tanto, de una determinada forma de conocer un concepto). Para identificar estos segmentos de enseñanza usamos las descripciones de los mecanismos de construcción del conocimiento dadas en la literatura (teoría APOS) de manera general y aquellas dadas sobre el concepto de derivada en particular (Dubinsky, 1991; Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf, 1997; De Vries, 2001). Como resultado de este análisis obteníamos una secuencia de segmentos de enseñanza. Cada segmento venía caracterizado por cómo el profesor usaba los modos de representación y sus traslaciones y conversiones y cómo consideraba los diferentes elementos matemáticos del concepto de derivada y sus relaciones (un ejemplo de este proceso se describe en la viñeta 1). En segundo lugar, agrupamos algunos de los segmentos identificados en la fase anterior debido a que mostraban la modelación de un nuevo mecanismo de construcción de conocimiento. Realizando el análisis de los vídeos de esta manera, pudimos identificar la modelación de los mecanismos de construcción para cada elemento del concepto de derivada y las relaciones establecidas entre dichos elementos.

– *Segundo nivel inferencial.* Apoyado en la descripción de la secuencia de segmentos de enseñanza y su organización posterior generadas en el nivel de análisis anterior y considerando la manera en la que el profesor justifica sus decisiones de acción, realizamos inferencias sobre los principios que parecen fundamentar esta forma de generar oportunidades de aprendizaje por parte del profesor. Para ello identificamos tres variables que permitían explicar la relación entre lo que el profesor hacía en el aula y cómo lo justificaba. Estas variables son:

a) cómo el profesor usa los sistemas de representación (analítico y gráfico) y los justifica,
b) cómo el profesor organiza y relaciona los distintos conceptos matemáticos (derivada de una función en un punto, función derivada, operador derivada), y
c) cómo el profesor enfatiza las formas de conocer los diferentes elementos matemáticos que configuran el concepto de derivada (acción, proceso, objeto).

Los resultados de este análisis nos han permitido describir la práctica desarrollada por Juan considerando la modelación de los mecanismos de construcción y la modelación de la relación entre diferentes mecanismos de construcción que nos ha permitido apoyar las inferencias realizadas en relación con la trayectoria de aprendizaje definida por la práctica de Juan, que dan pie a la caracterización de la relación entre la práctica y la perspectiva del profesor. Estos resultados se presentan como un estudio de caso que se organizan a través de *viñetas* (Gavilán, García y Llinares, 2007*a*) y que permite mostrar la relación entre la modelación de la descomposición genética y la perspectiva de acción del profesor como una manera de explicar su práctica.

RESULTADOS

Para describir e interpretar la enseñanza de la introducción del concepto de derivada realizada por Juan construimos doce viñetas a partir de la identificación de la modelación de determinados mecanismos constructivos y sus relaciones. En este trabajo usaremos dos viñetas para describir la práctica de Juan y para apoyar nuestras inferencias sobre la relación entre la perspectiva del profesor y su práctica.

En la primera viñeta que presentamos, Juan modela el mecanismo de interiorización del significado de la derivada de la función $f(x)= x^2$ en un punto x=1 [f′(1)]. La segunda viñeta, construida desde un conjunto de segmentos de enseñanza, muestra la relación que Juan establece entre las modelaciones de mecanismos de interiorización y encapsulación de f′(a), y cómo modela la relación entre el mecanismo de encapsulación de f′(a) y el mecanismo de interiorización de f′(x). Estas dos viñetas permiten inferir la importancia que Juan da a la relación entre significados en distintas representaciones para construir oportunidades de aprendizaje de sus estudiantes y, por tanto, constituyen las evidencias para identificar las características de su perspectiva de acción.

Viñeta 1. Modelación de un mecanismo de construcción: interiorización de f′(a)

El segmento de enseñanza que se recoge en esta viñeta tiene lugar en la tercera clase de la unidad didáctica y se desarrolla en el aula de informática. El objetivo de Juan para esta clase es introducir el significado geométrico de derivada de una función en un punto, relacionándolo con el límite del cociente incremental. Para ello, Juan ha preparado una figura con el programa de geometría dinámica Cabri-Géomètre II, con el que los estudiantes ya están familiarizados, para que la manipulen mediante *arrastre* de algunos objetos de esta. La tarea propuesta es: «Calcular la derivada de $f(x)=x^2$ en x=1» (explicitar el significado geométrico de la idea de derivada en un punto).

La figura construida por Juan aparece en la siguiente ilustración y proporciona los valores numéricos de f (1) (punto negro) y f (punto rojo) y la pendiente de la recta que pasa por esos puntos.

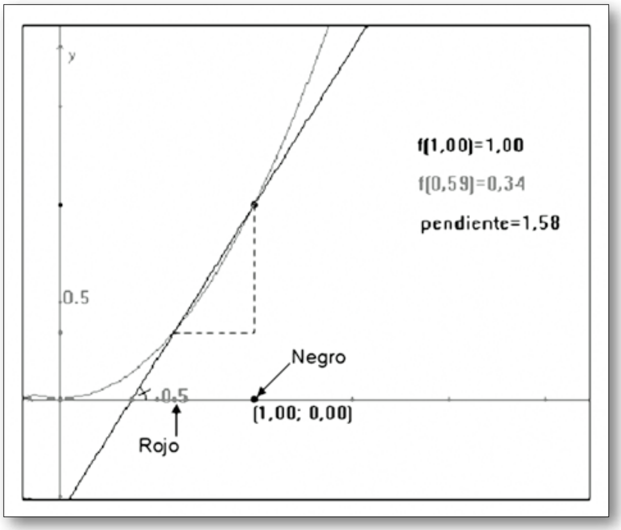

Fig. 1. Figura construida con Cabri II por Juan para ser manipulada por los estudiantes mediante «arrastre».

Juan pide a los estudiantes que «arrastren» el punto rojo (al principio está en x=0,5) aproximándolo al punto negro (1) (modo de representación gráfico, utilizando significados geométricos) y que confeccionen una tabla de valores mostrando los valores de *x* y del cociente incremental (f(1)–f(x))/(1-x) (modo de representación analítico-numérico). El objetivo de Juan con este cálculo de valores del cociente incremental y el trazo de la recta secante por los dos puntos es crear una situación de aprendizaje para que los estudiantes tengan la oportunidad de *realizar una construcción mental de la idea de derivada de la función en un punto como una acción* y que la repitan (cambian el punto rojo mediante arrastre en la figura).

Juan pide a sus estudiantes que describan qué ocurre con la recta secante que une los puntos (1, f(1)) y (punto rojo, f (punto rojo)) cuando el punto rojo (x=0,5) se aproxima al punto negro (x=1). En esta clase, los estudiantes confeccionan la tabla de cocientes incrementales utilizando los valores que proporciona el ordenador manipulando la figura. El diálogo que se generó fue el siguiente:

> Juan (J): Podemos coger el punto rojo que aparece ahí. El punto negro, aparece un punto negro sobre el 1, y lo que vamos a calcular es cómo está variando la función en el punto 1.
> Entonces, si nosotros vamos aproximando, cogiéndolo con la manita el punto este [punto rojo], pues nos va tomando distintos valores [la pendiente de la recta secante].
> Si cogemos este punto [punto rojo] nos vamos aproximando. ¿Cuánto sale la tasa de variación? ¿Qué nos dice el ordenador? Eso es la pendiente de esta recta que aparece aquí, «recta secante por dos puntos».

Juan pretende que los estudiantes se centren en los procesos de variación que son visibles en la figura. Por un lado, la variación de los valores de los cocientes incrementales y, por otro, la variación de las rectas secantes y sus pendientes. Juan continúa el discurso y los estudiantes van completando la tabla de valores:

> J: Cuando yo me vaya acercando, otro punto aquí, 0,63, pues la pendiente que me aparece, 1,63. Cuando yo me acerque más, en 0,80, ¿qué pendiente aparece?
> Estudiante (E): 1,75.
> J: Si yo pongo aquí 0,9, ¿qué hay que poner aquí? [Indicando cómo completar la tabla de cocientes incrementales].
> E: 1,85.

A continuación Juan promueve en los estudiantes la reflexión sobre los resultados de las acciones (como formas de conocer) que están realizando al preguntar qué sucede con las pendientes y con las rectas secantes que se van obteniendo utilizando la figura de Cabri II. La reflexión sobre estas acciones es *imprescindible* para construir el significado de la idea de «medida del cambio» como proceso, ya que es necesario que los estudiantes «infieran» la tendencia de los valores de las pendientes y lo que sucede con las rectas secantes a partir de los valores de *x* próximos a 1. La reflexión sobre los resultados de las acciones es para Juan el elemento primordial en su gestión, ya que el ordenador proporciona todos los cálculos. Una evidencia de esta característica de la práctica de Juan es el siguiente diálogo:

> J: Cuando yo ponga aquí un 1, ¿qué voy yo a tener que poner aquí? [Última columna de la tabla de cocientes incrementales].
> E: 1.
> J: Cuando este punto x [punto rojo] se vaya acercando a este de aquí [punto negro], fijaos en la recta esta, «recta secante», ¿a qué va *tendiendo*?, *¿a qué se va pareciendo*? A la recta tangente a la curva, ¿lo veis o no lo veis? Se va aproximando, aproximando…
> J: Realmente nosotros *lo que hemos hecho es calcular el límite* cuando x tiende a 1 de esto de aquí, eso es lo que hemos hecho, de (f(1)-f(x))/(1-x), esto es lo que se llama el valor de la derivada en el punto 1 y se representa de esta manera f´(1), eso va a ser la derivada, nada más, o sea que va a ser únicamente una pendiente.

La justificación de Juan sobre su manera de proceder viene dada por la relevancia que él da a las ideas de aproximación (paso al límite). Juan expresó estas ideas en la entrevista sobre la planificación y en la justificación de su unidad didáctica, en la que señaló la necesidad de llamar la atención de los estudiantes sobre los procesos de aproximación:

> Con aproximaciones, cogemos la secante y ahora vamos obteniendo un poquito más, vamos obteniendo cada vez más... una cosa así, queremos calcular la derivada en el punto, pendiente, pendiente, hasta que nos vaya saliendo la tangente. Una cosa así, queremos calcular la derivada en el punto, pendiente, pendiente hasta que nos vaya saliendo la tangente. Esto es lo que te digo que le hago en el programa [se refiere a Cabri II]. Claro, van así, *vamos tendiendo hacia el punto y lo que vamos cogiendo realmente una secante, cogiéndola, echándola para acá*, hasta..., y van calculando las pendientes en cada momento, entonces ahora tenemos la tangente.

Además, Juan, en una de las entrevistas de desarrollo, justifica su gestión de esta tarea con estas palabras:

> Elegí enseñarles el *método de aproximaciones*, la tangente mediante un gráfico de un ordenador porque creo es lo que te da más juego. En una clase te da tiempo a ver muchos puntos aproximando y verlo una y otra vez sin tener que escribir en la pizarra, de una forma más directa. … (para que) se hagan idea de qué es realmente aproximar, cómo pueden coger puntos aproximándolos al otro y cómo va variando la secante, *cómo va variando en principio la secante y va tendiendo hacia la tangente* geométrica de la curva; esa era la idea.

Con esta manera de actuar Juan está poniendo los medios necesarios para que los estudiantes repitan acciones y posteriormente reflexionen sobre los resultados de dichas acciones. En el modelo APOS, la repetición de acciones y la reflexión sobre estas constituyen las características del mecanismo de interiorización de un concepto (Dubinsky, 1991), y por tanto podemos considerar que Juan modela el mecanismo de interiorización de f′(a). Asiala *et al.* (1997) han interpretado explícitamente el mecanismo de interiorización de f′(a) en el modo de representación analítico y gráfico. Dichas interpretaciones del mecanismo son aplicables a esta viñeta. Desde el punto de vista de la interpretación de la práctica del profesor, en esta situación podemos hablar de una triangulación analítica basada en las distintas interpretaciones que la literatura hace del mismo mecanismo de interiorización de f′(a). De esta forma, podemos identificar y caracterizar la «modelación del mecanismo de interiorización de f′(a) en la manera en la que se usan los modos de representación analítico y gráfico de forma relacionada», que puede caracterizarse según se muestra en la figura 2.

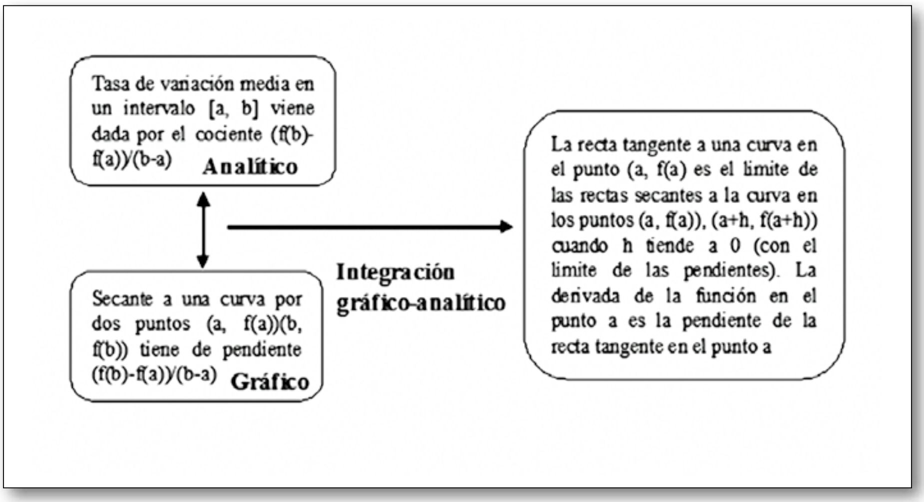

Fig. 2. Modelación del mecanismo de construcción a través del uso de instrumentos de la práctica.

Viñeta 2. Modelación de la relación entre diferentes mecanismos de construcción: interiorización-encapsulación de f′(a) e interiorización de f′(x)

Esta viñeta muestra las relaciones explícitas que Juan establece entre la modelación del mecanismo de encapsulación de la derivada de la función en un punto, f′(a), y el mecanismo de interiorización de la función derivada, f′(x). A través de estas relaciones Juan vincula las formas de conocer la derivada de la función f en un punto x=a, f′(a), como proceso, e introduce la construcción de la función f′(x) a partir de los significados interiorizados de f′(a) cuando el punto x=a va modificándose (modelando el mecanismo de encapsulación de f′(a)). La tarea que Juan plantea a sus alumnos es la siguiente:

> Dada la función f(x) = x^2. Completar la tabla de valores dada por las tasas de variación media en el punto x=1 y calcular f′(1). Repetir y obtener f′(2).
>
> Completar la tabla de valores:

x	1	2	-1	0	
f′(x)					

> Obtener la expresión algebraica de f′(x).

Para mostrar esta modelación tenemos en cuenta tres segmentos de enseñanza:

- El segmento S1 descrito en la viñeta 1 (anterior), en la que se desarrolla en el aula el cálculo del valor numérico de f′(1).
- Un segundo segmento procedente también de la clase 3, en la que Juan pide a los estudiantes que cambien el punto negro de x=1 de la figura (figura 1) por x=2, y que el punto rojo se aproxime a 2. De esta manera, los estudiantes pueden completar una nueva tabla de cocientes incrementales (f(2)-f(x))/(2-x). Las acciones de Juan en este segmento son similares a las descritas en la viñeta anterior. El discurso es el que sigue:

J: Sería coger aquí el 2 y cogemos un número que se vaya acercando a 2. ¿Cuál puede ser? 1,9, el 1,99, el 1,999. ¿A ver qué valores nos salen?
E: 3,9.
J: 3,9, aquí nos a sale 3,9. Éste saldrá a ver si lo acaba.
E: 3,99.
J: 3,99 sale aquí, ¿no?, y aquí saldrá 3,999 luego. ¿Esto hacia dónde va...?
J: Se va acercando cada vez más a 2, esto [los cocientes incrementales en x=2] se va acercando a 4.

- Un tercer segmento procedente de la clase 4, en la que Juan sigue pidiendo a sus alumnos que calculen los valores de la derivada de la función f(x)= x^2 en puntos concretos, por ejemplo, para x=-1 calcular f′(-1), apoyándose en la visualización del proceso de aproximación desarrollado con el apoyo del software. Juan justifica esta forma de actuar indicando que era necesario resaltar la relación explícita entre la manera de calcular el valor de la derivada de una función en un punto particular, f′(a), y la generalización a la función derivada f′(x) haciendo variar el punto:

... yo tengo una función, entonces qué pasaría si yo pongo aquí [se refiere a la tabla de valores de x|f′(x)] los valores y aquí pongo su derivada, aquí lo que vamos a obtener, la tabla que corresponde realmente a una función, función que tiene una forma algebraica y que va a ser la función derivada. O sea, que van a dar el paso de esta manera de la tabla esta [tabla de valores de una función] a la forma algebraica de la función (Entrevista de planificación).

Esta manera de actuar subraya la manera en la que Juan establece la relación explícita entre las modelaciones de interiorización y encapsulación de f′(a). Y también la relación explícita entre la modelación del mecanismo de encapsulación de f′(a) y el mecanismo de interiorización de la función derivada f′(x). Para ello Juan modela la función derivada como acción, como paso previo a modelar los procesos de interiorización de f′(x).

Esta relación explícita entre f′(a) y f′(x) es descrita por Asiala *et al.* (1997) al considerar las acciones de los estudiantes al centrarse en puntos concretos en cada momento. Además, algunos investigadores (Dubinsky, Dautermann, Leron y Zazkis, 1994; Zazkis y Campbell, 1996) describen la relación acción-proceso desde la perspectiva de una acción aplicada a un proceso, que da lugar a un mecanismo de encapsulación como un aspecto importante de la relación entre las formas de conocer los conceptos por parte de los estudiantes y los mecanismos de construcción del conocimiento. De manera más general, Asiala *et al.* (1996: 20-21) señalan que, cuando se pretende aplicar una acción a un proceso, este último se tiende a encapsular: «De hecho, tres cosas pueden suceder al mismo tiempo: 1. la necesidad de crear un objeto (en orden a aplicar una acción a un proceso), 2. la encapsulación del proceso para formar un objeto, y 3. la aplicación de la acción al objeto (p. 20)».

En el conjunto de segmentos de enseñanza que estamos considerando aquí, Juan modela el mecanismo de interiorización de f′(x) a partir de la acción antes descrita, al considerar la función derivada f′(x) no ya en valores concretos de *x*, sino como una función de *x* general. El discurso en el aula que apoya esta idea es el siguiente:

> J: ¿Seremos nosotros capaces de encontrar la forma algebraica de esto [de la función dada por la tabla de valores ya construida]? Si yo pongo aquí x [se refiere a sustituir en la tabla de cocientes incrementales el valor concreto de x por las variables], ¿qué tengo que poner aquí? O dicho de otra manera, ¿a quién será igual f′(x)? O lo que es lo mismo, la función derivada de x^2…
> J: ¿Cuánto valdrá $(x^2-a)/(x-a)$ cuando *a* se está acercando a *x*? Estamos en un punto cualquiera, x.

La situación planteada por Juan permite establecer relaciones explícitas entre las modelaciones de los mecanismos de dos conceptos distintos, f′(a) y f′(x). De esta forma, Juan pretende potenciar en sus estudiantes la idea de derivada de la función en un punto como un objeto a partir de los significados interiorizados. Por tanto, en la práctica de Juan la función derivada, f′(x), se introduce a partir de situaciones previas en las que pretende favorecer que los estudiantes hayan interiorizado y encapsulado significados para la derivada de una función en un punto.

Modelación de una descomposición genética de la derivada como una trayectoria de aprendizaje

En este epígrafe describimos la enseñanza de Juan vista a través de cómo modela los diferentes mecanismos de construcción para los tres conceptos que articulan su enseñanza, apoyándonos en aquellos casos que sea necesario en las dos viñetas descritas en las secciones anteriores: derivada de una función en un punto, la función derivada y el operador derivada. Para la derivada de la función $f(x)= x^2$ en un punto, Juan modela el mecanismo de interiorización (apoyándose en puntos particulares, x=1, x=2, x=-1) y el mecanismo de encapsulación (intentando generalizar, a través del discurso generado, la idea de una x «genérica»). Para otras funciones (lineales, afines, cuadráticas y polinómicas en general) Juan procede de la misma manera, posibilitando que se potencie la construcción de f′(a) como un objeto. Juan también modela el mecanismo de desencapsulación de f′(a). Para ello plantea situaciones en el aula en las que es necesario calcular la derivada en un punto a partir de una situación gráfica de tangencia. En esta situación es necesario desencapsular el significado de f′(a) como pendiente de la recta tangente. De la misma manera, Juan modela estos mecanismos para la función derivada, f′(x).

Y, finalmente, para el operador derivada, D(f), modela los mecanismos de interiorización e inversión, mecanismo este último que hace explícita la relación entre las nociones de derivada y de integral.

Juan modela el mecanismo de interiorización de forma analítica para la derivada en un punto, f´(a), (Ia), de forma gráfica (Ig) y también analítico-gráfica (ambas de forma integrada, Iag, como se describe en la viñeta 1). Cuando Juan modela el mecanismo de interiorización integrando los sistemas de representación analítico y gráfico pretende que los alumnos construyan la derivada en un punto como forma de conocer un proceso. El uso que hace Juan de las relaciones entre los sistemas de representación tiene como objetivo la construcción de significados independientemente del modo de representación. En este sentido, el paso de f´(a) a la idea de «función derivada», (f´(x)), apoyándose en el significado de la derivada en un punto, f´(a), es un objetivo explícito de Juan. De esta forma se pone de manifiesto la relación entre f´(a) y f´(x). La modelación del mecanismo de interiorización de la función derivada de $f(x)=x^2$ se realiza a través de la «generalización a todos los puntos» del paso al límite de la derivada de la función en un punto integrando lo gráfico y lo analítico. De esta forma, Juan pretende que los alumnos construyan como proceso la idea de «función derivada» de $f(x)=x^2$. Juan repite esta manera de actuar con diferentes funciones (*e.g.* lineales, afines, cuadráticas, polinómicas en general, logarítmicas, etc.). Con esta forma de proceder usando diferentes funciones elementales, Juan modela el mecanismo de encapsulación de la idea de función derivada como paso previo a dar sentido al operador derivada haciendo explícita la relación entre f´(x) y D(f). Para ello, Juan modela el mecanismo de desencapsulación de la derivada de una función en un punto, de forma gráfica (Dg) (situación anteriormente citada de tangencia) y de forma analítico-gráfica (Dag), por ejemplo, cuando pretende obtener las derivadas laterales en un punto de una función definida a trozos y la condición necesaria y suficiente de derivabilidad en esta situación.

Para el operador derivada, Juan modela dos mecanismos de construcción, el mecanismo de interiorización y el de inversión. Juan plantea a sus estudiantes tareas para calcular funciones derivadas utilizando los límites de cocientes incrementales (algunas veces con valores concretos en una tabla de valores y/o utilizando cocientes incrementales para un valor genérico x). De esta forma, obtienen diferentes reglas para calcular derivadas (derivada de la suma de dos funciones, producto de una función por una constante, producto de dos funciones, etc.). Una vez que se han obtenido las reglas de derivación, Juan propone tareas de aplicación de estas reglas a diferentes funciones. Para resolver estas tareas hay que aplicar la combinación de diferentes reglas en un orden determinado. Con esta manera de actuar Juan pretende que los estudiantes construyan como proceso la idea de operador derivada. Juan también propone a sus estudiantes tareas en las que, conocida una función (derivada), se pide obtener la función primitiva. Las funciones que se utilizan son dadas algebraica o gráficamente. La modelación del mecanismo de inversión de D(f) posibilita introducir la noción de integral indefinida, haciendo explícita la relación entre la derivación de funciones y la antiderivación (integral indefinida).

La siguiente ilustración muestra gráficamente los rasgos característicos de la modelación de la descomposición genética realizada por Juan que hemos descrito.

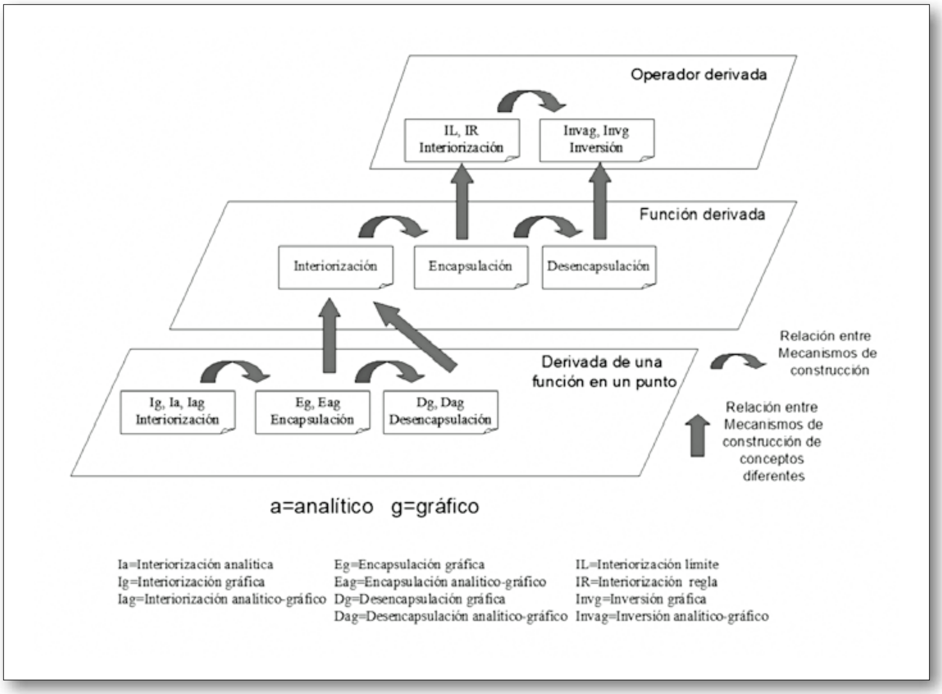

Fig. 3. Modelación de la descomposición genética de la noción de derivada, identificada en la práctica de Juan.

DISCUSIÓN

En la descripción de la práctica de Juan a partir de la modelación de la descomposición genética del concepto de derivada, podemos identificar algunos principios que fundamentan su práctica. Para realizar estas inferencias nos apoyamos de:

– la organización del contenido matemático en la enseñanza (a través de la organización de los conceptos y de las formas de conocer potenciadas para cada concepto), y
– cómo usa los modos de representación para potenciar las relaciones entre las diferentes maneras de llegar a conocer el concepto de derivada y los mecanismos de construcción.

Uso de los sistemas de representación: Juan hace un uso integrado de los sistemas de representación relacionando los significados gráficos y analíticos. La tecnología le da a Juan el soporte necesario para llevar a cabo esta integración de significados en los distintos sistemas de representación.

Organización del contenido matemático en la enseñanza: Juan introduce cada concepto apoyándose en los conceptos ya construidos y vincula los diferentes significados:

– la idea de función derivada se construye a partir de los significados de la derivada de una función en un punto,
– el operador derivada se introduce a partir de la función derivada, y
– el operador integral indefinida (antidiferenciación) se introduce a partir de los significados del operador derivada y usando el significado de la función derivada.

Esta forma de relacionar los distintos conceptos involucrados es una característica de la práctica de Juan que le permite llegar a relacionar las nociones de derivada e integral.

Respecto a las formas de conocer que potencia para cada concepto, f′(a) y f′(x): Juan realiza modelaciones de los mecanismos de interiorización, encapsulación y desencapsulación. De esta manera, la práctica de Juan potencia que los objetos se construyan a partir de oportunidades creadas para que los estudiantes puedan interiorizar los significados. Desde esta perspectiva, las desencapsulaciones que Juan modela permiten crear situaciones en las que se deban usar estos significados. De la misma forma, para D(f) Juan modela el mecanismo de interiorización e inversión, sin llegar a considerarlo como objeto. La inversión de una forma de conocer como proceso facilita introducir un nuevo concepto haciendo explícita la relación entre ambos; en este caso lleva a introducir el significado de «antidiferenciación».

En resumen, Juan hace visibles las relaciones que se establecen entre los significados analíticos y gráficos, entre conceptos matemáticos (f′(a), f′(x) y D(f)) y entre las formas de conocer cada concepto (acción-proceso-objeto) que promueve. Lo que parece justificar esta manera de actuar de Juan es una determinada concepción sobre el aprendizaje y sobre la naturaleza de las matemáticas escolares. Para Juan, las matemáticas son algo más que un conjunto de reglas y procedimientos para recordar, son un conjunto de conceptos con significados vinculados y con diferentes representaciones, e interconectados entre sí, donde un concepto está relacionado con otros conceptos formando una red de conceptos. Además, para Juan el aprendizaje es «progresivo y conectado», se desarrolla de acuerdo con las ideas recogidas en el modelo APOS; empieza con la forma de conocer la acción, le sigue la interiorización de estas en un proceso y, posteriormente, se encapsula un objeto a través de la presencia de un nuevo concepto, comenzando de nuevo el ciclo acción-proceso-objeto y conectando conceptos. En definitiva, podemos indicar que la concepción de las matemáticas escolares de Juan se apoya en las «relaciones» y esto es coherente con su visión del aprendizaje, de ahí que la práctica de Juan se articule desde las relaciones entre las ideas matemáticas y entre las distintas formas de conocer de los estudiantes. De esto se ha dado cuenta explícitamente en la figura 3, en la que se describe la modelación de la descomposición genética. Por lo que las concepciones de Juan sobre el aprendizaje y la naturaleza de las matemáticas escolares permiten justificar y explicar su práctica.

CONCLUSIONES

La noción «modelación de un mecanismo constructivo de conocimiento» hace referencia a las acciones y justificaciones del profesor atribuyéndoles una motivación basada en el «fomento del aprendizaje». Los mecanismos de construcción de conocimiento considerados en esta investigación son una adaptación de las ideas de Piaget (Piaget y García, 1982) sobre la abstracción reflexiva hecha en el modelo APOS (Dubinsky, 1991). La noción de «modelación de la descomposición genética» (Gavilán, García y Llinares, 2007*b*) permite identificar cómo el profesor genera situaciones en el aula para favorecer el aprendizaje de sus estudiantes desde una determinada perspectiva. Para Asiala *et al.* (1996: 11), la comprensión de los conceptos matemáticos se puede caracterizar a través de la construcción de esquemas, entendidos como «la organización estructurada de 'una colección de procesos y objetos'». La modelación de los distintos mecanismos constructivos realizada por el profesor permite dar cuenta de cómo construye las situaciones de aula para que los estudiantes puedan llegar a organizar la colección de procesos y objetos que constituyen el esquema de la noción de derivada. La modelación de la descomposición genética inferida desde la práctica del profesor ha sido construida a partir de cómo el profesor organizaba el contenido matemático que se pretende enseñar y de cómo usaba los diferentes modos de representación para potenciar la construcción de los significados por parte de los estudiantes. A partir de esta información, hemos inferido la perspectiva que subyace a la práctica del profesor (principios que la fundamentan). Con la noción «perspectiva que subyace a la práctica» de Simon y Tzur (1999) es posible identificar diferentes concepciones respecto al aprendizaje de las matemáticas y las matemáticas como objeto de enseñanza aprendizaje que parece que apoyan la práctica del profesor. De esta manera, esta noción nos permite explicar la práctica a partir de las cogniciones del profesor. Por otra parte, con la idea de la «modelación de la descomposición genética» realizada por el profesor, podemos describir cómo las perspectivas que subyacen a la práctica son traducidas por el profesor desde una determinada caracterización de las matemáticas escolares y el aprendizaje.

La descripción de la práctica del profesor a través de la modelación de diferentes mecanismos de construcción del conocimiento que realiza permite identificar, al menos de manera potencial, el esquema de derivada que los estudiantes pueden construir en el aula. En el caso mostrado en este trabajo, la práctica de Juan se caracteriza por establecer relaciones explícitas entre la manera de entender el contenido matemático como objeto de enseñanza-aprendizaje y su concepción sobre el aprendizaje, definiendo de esta manera su «perspectiva». Subrayar estas «relaciones» en la práctica pone de manifiesto una determinada forma de concebir las matemáticas escolares como objeto de enseñanza-aprendizaje y de concebir su aprendizaje. En este sentido, la perspectiva que subyace a la práctica del profesor está formada por un conjunto de variables que van más allá de la «suma» de las partes involucradas. Por otra parte, la perspectiva que subyace a la práctica del profesor también ha mostrado su potencial en explicar «la arquitectura relacional que es establecida en la clase durante el desarrollo de una unidad didáctica» (Escudero y Sánchez, 2008: 87).

Por otro lado, el uso de la idea de relación entre objetos de distinta naturaleza (modos de representación, formas de conocer potenciadas para cada concepto, y entre distintos conceptos) para la caracterización de la perspectiva que subyace a la práctica del profesor, creemos que permite avanzar en las explicaciones de la práctica del profesor. Nuestra forma de identificar la perspectiva que subyace a la práctica del profesor desde la manera en la que este modeliza en el aula los mecanismos de construcción del conocimiento indica que las concepciones de los profesores sobre las matemáticas escolares y el aprendizaje juegan un papel relevante en su práctica.

En este sentido, podemos decir que nuestros resultados complementan propuestas de investigaciones cognitivas como la de Schoenfeld (2000) sobre la enseñanza-en-contexto, en la que se subrayaba el papel de las concepciones del profesor para explicar su práctica. Asimismo, nuestra investigación resalta la importancia de considerar la concepción del profesor sobre el aprendizaje de las matemáticas como un elemento relevante en la caracterización de su práctica, como ya ha sido indicado en otros estudios (Thompson *et al.*, 1994; Wilson y Cooney, 2002). Además, nuestros resultados muestran cierta discrepancia con las «organizaciones didácticas espontáneas» con las que concluyen las investigaciones apoyadas en la teoría antropológica de lo didáctico (Barbé *et al.*, 2005), ya que algunos aspectos de la práctica del profesor pueden explicarse desde las perspectivas del profesor (sus concepciones) que presentan cierta persistencia y coherencia y no solo desde argumentos institucionales.

Las investigaciones desarrolladas en este ámbito de investigación en los últimos años están subrayando la dificultad en explicar la práctica del profesor. En este caso, nuestra investigación aporta información sobre la complejidad de la relación entre las perspectivas del profesor que subyacen a su práctica y las características de su práctica. De esta manera, nuestra investigación aporta elementos desde los cuales complementar otras aproximaciones que subrayan la importancia de las instituciones y, en particular, del currículo en configurar la práctica del profesor. Posiblemente sean necesarias más investigaciones que aporten información adicional sobre esta complementariedad.

AGRADECIMIENTOS

A los revisores, cuyos comentarios y sugerencias han permitido mejorar este trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASIALA, M.; BROWN, A.; DE VRIES, D. J.; DUBINSKY, E.; MATHEWS, D. y THOMAS, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education, En J. Kaput, A. Schoenfeld y E. Dubinsky (eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education II*. Washington: American Mathematical Society and Mathematical Association of America, pp. 1-32.

ASIALA, M.; COTTRILL, J.; DUBINSKY E. y SCHWINGENDORF, K. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative. *Journal of Mathematical Behaviour*, 16(4), pp. 399-431.

BARBÉ, J.; BOSCH, M.; ESPINOZA, L. y GASCÓN, J. (2005). Didactic Restrictions on the Teacher's Practice: The Case of Limits of Functions in Spanish High Schools. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1-3), pp. 235-268.

BOALER, J. (2006). *Advancing Teacher Development and Mathematics Learning Through the Integration of Knowledge and Practice*. Project description. Disponible en línea: <http://www.stanford.edu/~joboaler/NSF_prop.doc> [última consulta: febrero del 2006].

DE VRIES, D. (2001). *Rumec/Apos Glossary*. Febrero del 2001. Disponible en línea: <http://www.cs.gsu.edu/~rumec/Papers/glossary.html> [última consulta: enero del 2005].

DUBINSKY, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 95-123.

DUBINSKY, E.; DAUTERMANN, J.; LERON, U. y ZAZKIS R. (1994). On Learning Fundamental Concepts of Group Theory. *Educational Studies in Mathematics*, 27(3), pp. 267-305.

ESCUDERO, I. y SÁNCHEZ, V. (2008). A Mathematics Teachers' Perspective and its Relationship to Practice. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 6(1), pp. 87-106.

FRANKE, M. L.; KAZEMI, E. y BATTEY, D. (2007). Understanding Teaching and Classroom Practice in Mathematics. En F. Lester (ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte: NC, IAP-NCTM, pp. 225-256.

GAVILÁN, J. M. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva.* Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla

GAVILÁN, J. M.; GARCÍA, M. y LLINARES, S. (2007*a*). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(2), pp. 157-170.

GAVILÁN, J. M.; GARCÍA, M. y LLINARES, S. (2007*b*). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje potencial de los estudiantes. *Educación Matemática*, 19(2), pp. 5-39.

HERSANT, M. y PERRIN-GLORIAN, M. J. (2005). Characterizing of an Ordinary Teaching Practice with the help of the Theoriy of Didactics Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1-3), pp. 113-151.

PIAGET, J. y GARCÍA, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI editores.

PONTE, J. P. y CHAPMAN, O. (2006). Mathematics Teachers' Knowledge and Practices. En A. Gutierrez y P. Boero (eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future*. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers, pp. 461-494.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M. y MAHER, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners`mathematicals ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(4), pp. 405-435.

ROBERT, A. y ROGALSKI, J. (2005). A Cross-Analysis of the Mathematics Teacher's Activity. An Example in a Frenc 10th-Grade Class. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1-3), pp. 269-298.

SCHOENFELD, A. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), pp. 243-261.

SIMON, M. A. y TZUR, R. (1999). Explicating the teacher's perspective from the researchers perspectives: Generating accounts of Mathematics teachers' practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(3), pp. 252-264.

SIMON, M. A.; TZUR, R.; HEINZ, K.; KINZEL, M. y SMITH, M. S. (2000). Characterizing a Perspective Underlying the Practice of Mathematics Teachers in Transition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), pp. 579-601.

THOMPSON, A. G.; PHILIPP, R. A.; THOMPSON, P. V. y BOYD, B. A. (1994). Calculational and conceptual orientations in teaching mathematics. En D. B. Aichele y A. Coxford (eds.). *Professional Development for Teachers of Mathematics, 1994 Yearbook of the NCTM*. Reston: NCTM, pp. 79-92.

TÖRNER, G.; ROLKA, K.; RÖSKEN, B. y SRIRAMAN, B. (2010). Understanding a Teacher's Actions in the Classroom by Applying Schoenfeld's Theory Teaching-In-Context: Reflecting on Goals and Beliefs. En B. Sriraman y L. English (eds.). Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers. Heidelberg: Springer, pp. 401-420.

TZUR, R.; SIMON, M. A.; HEINZ, K. y KINZEL, M. (2001). An account of a teacher´s perspective on learning and teaching mathematics: implications for teacher development. Journal of Mathematics Teacher Education, 4 (3), pp. 227-254.

WILSON, M. S. y COONEY, T. J. (2002). Mathematics Teacher Cahange and Development. The Role of Beliefs. En G. C. Leder, E. Pehkonen y G. Hörner (eds.). Beliefs: A Hidden variable in Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers*, pp. 127-147*.

ZAZKIS, R. y CAMPBELL, S. (1996). Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: preservice teachers`understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), pp. 540-563.

A SECONDARY MATHEMATICS TEACHER'S PRACTICE PERSPECTIVE ON DERIVATE TEACHING. RELATIONS BETWEEN THE TEACHER'S PERSPECTIVE AND PRACTICE

Mercedes García José-María Gavilán
(mgblanco@us.es) (gavilan@us.es)
Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla

Salvador Llinares[b]
(llinares@ua.es)
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante

This study aims to describe and explain a teacher's practical experience. The teaching context was the introduction of derivatives in a secondary school (16-18 year-old students). Two analytic tools were introduced: "modeling a mechanism of construction of knowledge" and "modeling of the genetic decomposition of a notion".

These tools were used to describe the mathematics teacher's practice from the point of view of construction of mathematical knowledge (learning) that seems to develop in the students and to explain how the teacher generated learning opportunities to his pupils derived from his/her perspective.

The description of teachers' practice through the modeling of different mechanisms of construction of knowledge that the teacher carries out, allows identifying, at least potentially, the scheme that the students can construct in the classroom.

Simon and Tzur's notion of "perspective underlying the practice" is used to explain the teacher's practice. Thus this notion allows us to explain practice from the teacher's cognition. From our point of view, teacher's perspective is structured in two dimensions:

– How the teacher conceives of the development of mathematical understanding, teacher's conceptions about mathematics learning, and

– How the teacher conceives of the school mathematics, teacher's conceptions of mathematics as teaching and learning subject.

To make these inferences, the following must be relied on:

The organization of the mathematical content to teaching (through the organization of concepts and ways of knowing fostered for each concept), and

How the teacher uses different representational systems to foster relationships between different ways of knowing the concept of derivative and mechanisms of construction of knowledge.

This paper examines the case of John, a mathematics teacher with 25 years experience. In relation to the organization of the mathematical content in teaching, John introduces each concept building on the concepts already built and links the different meanings. Regarding the management of different representational systems, John makes an integrated use of systems of representation relating analytical and graphical meanings.

This way of linking concepts is a characteristic of John´s practice. In short, John shows the relationships established between analytical and graphical meanings, between mathematical concepts (f '(a), f' (x) and D (f)) and between the ways of knowledge each concept (action-process-object) he encourages.

What seems to justify John's actions is a certain conception about learning and the nature of mMathematics in school. It can be said that the conceptions about mMathematics in school are based on "relationships" between mathematical ideas, and this is consistent with his view of learning: hence John`s practice is articulated from the relationship between mathematical ideas and between different students' ways of knowledge.

In this paper it is claimed that the use of the idea of relationship between objects of different types (representations systems, ways to know for each concept and concepts), for the characterization of the perspective underlying the practice of the teacher, allows advancing in the explanations of the teacher's practice.

Our way of identifying the perspective underlying the practice of the teacher from the way in which he models the construction of mechanisms of knowledge in the classroom indicates that teacher's conceptions of school mMathematics and of learning play an important role in his/her practice. (Lo siento, ni idea de qué es esto)This research provides information on the complexity of the relationship between the perspectives of teachers behind their practice and the characteristics of their practice. Thus, the study provides elements which complement other approaches that emphasize the importance of institutions and the curriculum in teachers' practice. More research may be necessary to provide additional information about this complementarity.