MOMENTOS CLAVE EN EL APRENDIZAJE DE ISOMETRÍAS EN UN ENTORNO COLABORATIVO Y TECNOLÓGICO[1]

Morera, Laura; Fortuny, Josep M. y Planas, Núria
Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona
Laura.Morera@uab.cat
JosepMaria.Fortuny@uab.cat
Nuria.Planas@uab.cat

Resumen. Presentamos una investigación sobre el aprendizaje de isometrías con un programa de geometría dinámica. Los datos se han tomado en una clase de secundaria con estudiantes de 14 y 15 años trabajando en un entorno colaborativo. Partiendo de los ejes de cognición matemática, mediación tecnológica y orquestación del profesorado, construimos la noción de «momento clave en el aprendizaje» para desarrollar el análisis. Para este artículo, seleccionamos cuatro ejemplos de momento clave que indican la pertinencia de explorar los ejes anteriores y que, a su vez, apuntan a la necesidad de considerar estos ejes de forma integrada. En futuras investigaciones, tendremos que profundizar en la influencia entre los distintos resultados que ahora destacamos.

Palabras clave. Aprendizaje de isometrías, cognición matemática, mediación tecnológica, orquestación del profesor, entornos colaborativos.

Key moments when learning isometries in a collaborative and technological context

Summary. We present a research on the learning of isometries with dynamic geometry software. Our data come from a secondary classroom with students aged 14 and 15 who are working in a collaborative context. Drawing on issues of mathematical cognition, technological mediation and orchestration by the teacher, we elaborate the notion of "learning key moment" to develop our analysis. For this article, we select four examples of key moments that point to the adequacy of exploring the issues above and, simultaneously, to the need of further considering these issues as integrated. In future research, it will be useful to go deeper inside the influence among the different results that are now examined.

Keywords. Learning of isometries, mathematical cognition, technological mediation, teacher orchestration, collaborative contexts.

INTRODUCCIÓN

Este artículo muestra *momentos clave de aprendizaje matemático* en un entorno colaborativo de resolución de problemas de isometrías usando un programa de geometría dinámica. Con este fin, planteamos determinar la influencia de la cognición matemática, la mediación tecnológica y la orquestación del profesorado en la construcción del aprendizaje matemático del alumnado. La mirada conjunta a estas tres dimensiones tiene que llevar a refinar el análisis, que se inició en Morera (2010).

Junto con las ventajas de los entornos colaborativos, suponemos que los entornos tecnológicos ofrecen oportunidades específicas para el aprendizaje. Aunque el alumno a menudo se enfrenta a limitaciones impuestas por el artefacto, también se generan oportunidades para comprender y replantear significados. Asimismo, las operaciones con tecnología pueden estar sujetas a procesos de interiorización con la orientación del profesor e intercambios interpersonales en clase, expresados por medio de dinámicas colaborativas. En cualquier caso, las intervenciones del profesor son clave para que los significados personales evolucionen hacia significados culturalmente compartidos, y para que sea facilitada la correspondencia entre conocimiento matemático y conocimiento construido en interacción con entornos sociales y tecnológicos.

En lo que sigue, resumimos los elementos de fundamentación teórica más relevantes para el desarrollo de nuestro trabajo y los métodos de recogida y análisis de datos. Damos cuatro ejemplos de momentos clave de aprendizaje matemático y, por último, discutimos relaciones entre las dimensiones de cognición, mediación y orquestación.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Además del desarrollo de un estudio experimental, nuestra intención es realizar una aproximación al concepto de momento clave de aprendizaje matemático. En nuestro trabajo, los momentos clave de aprendizaje se corresponden con instantes precisos donde se presenta una oportunidad educativa de forma natural e interesante, de manera que el conocimiento se aprovecha y amplía a través de la conversación y el descubrimiento. El cambio conceptual y procedimental identificado en un momento clave puede provenir de la negociación de significados, del intercambio de perspectivas múltiples y/o del cambio de representaciones internas, entre otros aspectos. Esta interpretación se inspira sobre todo en los estudios de Kolb (1984), donde el aprendizaje se describe como un proceso cíclico en espiral que recorre varios momentos, algunos de los cuales son especialmente relevantes para el avance. Completamos la visión clásica de Kolb con la perspectiva sociocultural de Wertsch (1998), quien argumenta que cualquier proceso de aprendizaje está fuertemente influenciado por los sucesos ocurridos en los entornos sociales de quien aprende.

Tras haber establecido brevemente nuestra caracterización del aprendizaje y del concepto de momento clave como parte de esta caracterización, pasamos a introducir consideraciones sobre cognición matemática, mediación tecnológica y orquestación del profesorado.

Cognición matemática

La noción de cognición matemática admite fundamentaciones diversas, pero prácticamente todas ellas coinciden en ver este tipo de cognición como una forma de pensamiento que lleva a relacionar objetos matemáticos. Para clarificar la idea de cognición matemática, recurrimos a la noción de matematización revisada por Jones (2000) en tanto que: conjunto de procesos y habilidades que facilitan la percepción de relaciones e idealizaciones dentro del dominio matemático (…), así como la abstracción de elementos matemáticos (…) a partir de situaciones reales en el sentido dado por el paradigma realista en educación matemática (Jones, 2000, p. 61). Ya en la tesis doctoral de Treffers (1978) se hace referencia a esta noción y se distinguen dos tipos básicos de matematización: vertical y horizontal. El primer tipo consiste en el tratamiento matemático de situaciones problema, relacionándose los aspectos de cognición matemática con el aprendizaje de conceptos y procesos. El segundo tipo da prioridad a conexiones entre contextos matemáticos y extramatemáticos. Como se verá, para facilitar el análisis de aspectos de matematización horizontal y vertical, se seleccionó una secuencia de problemas contextualizados que supusieran un reto matemático, huyendo de actividades demasiado guiadas.

Mediación tecnológica

Tomamos mediación como noción derivada de la psicología sociocultural vygotskiana, que ve los sistemas de signos y las herramientas como mediadores de la acción humana y del aprendizaje. En concreto, la mediación tecnológica se asienta en la relación entre herramienta o artefacto físico y sujeto, pudiendo ocurrir que ciertos usos de la herramienta transformen completamente la comprensión –cognición– del sujeto. Rabardel (1995) analiza la mediación que produce un entorno de geometría dinámica en el aprendizaje, en particular en la génesis instrumental del alumnado. La noción de génesis instrumental se refiere al paso que va de considerar una herramienta como artefacto a considerarla como instrumento, lo cual supone la conjunción del artefacto y de las habilidades cognitivas necesarias para su uso. Dicha génesis tiene dos dimensiones, instrumentación e instrumentalización (Verillon y Rabardel, 1995), que se corresponden respectivamente con el proceso mediante el cual el artefacto influye al alumno y el proceso de interiorización del uso de dicho artefacto. Teorizaciones posteriores acerca de la génesis instrumental, elaboradas por Rabardel y Bourmaud (2003), ponen de relieve la continuidad entre la potencialidad del artefacto y los esquemas de uso del alumnado. Esto último hace que, para nuestro estudio en concreto, hayamos dado especial relevancia a la selección del programa de geometría dinámica como parte de un buen diseño de la secuencia didáctica.

Orquestación del profesorado

Dentro de los aspectos relativos a la intervención del profesor, utilizamos el concepto de orquestación instrumental inicialmente desarrollado por Trouche (2004) y revisado por Drijvers, Doorman, Boon y Gisbergen (2010). Trouche conceptualiza la orquestación instrumental como la organización intencional y sistemática del profesor y el uso de los artefactos disponibles en un entorno de enseñanza a fin de orientar la génesis instrumental del alumnado. Drijvers y sus colegas completan la estructura de la orquestación instrumental propuesta por Trouche (configuración didáctica y modo de explotación) con un tercer punto: implementación didáctica. La configuración didáctica es un conjunto de objetos orientados a la enseñanza; el modo de explotación es la forma en que el profesor interpreta una configuración para atender a sus intenciones didácticas, mientras que la implementación didáctica se refiere a las decisiones que hacen efectivo el diseño instructivo dado por la configuración y el modo de explotación. Este artículo se centra en la implementación didáctica, ya que sobre todo hace referencia a la gestión del profesor en clase.

Anghileri (2006) señala el concepto de andamiaje para referirse a una mediación del profesor flexible, que facilita la actividad de matematización que llevan a cabo los alumnos a lo largo de una secuencia didáctica. Vemos los procesos de filtraje (*filtering approach*, en Sherin, 2002) como un tipo de andamiaje con tres componentes: *a*) generación de ideas, *b*) comparación y evaluación, y *c*) filtrado. En la generación de ideas se solicitan múltiples explicaciones de los alumnos para facilitar el debate matemático; en la comparación y evaluación se les anima a elaborar su pensamiento y a comparar y evaluar sus ideas con otras sugeridas; mientras que en el filtrado el profesor focaliza la atención en un subconjunto de ideas planteadas. Los componentes del proceso de filtraje son recursos del profesor para facilitar el aprendizaje de forma más o menos indirecta.

Junto con la mediación del profesor, en toda situación de clase se da la mediación más amplia del resto de participantes por el hecho de tratarse de un entorno colectivo. Krummheuer (2007) asocia el interés científico por la mediación social a la caracterización teórica del aprendizaje como una forma de participación en un discurso específico. Bajo esta interpretación, Planas e Iranzo (2009) destacan la influencia de la interacción entre participantes durante la implicación en la tarea matemática; se argumenta que este tipo de interacción tiene una auténtica función de mediación o influencia de unos participantes sobre otros. Se dice que el alumnado actúa como un sistema de estímulos externos con incidencia real en el desarrollo de estados internos y comportamientos individuales. Según esto, el momento clave en el aprendizaje deviene una construcción individual que se elabora en un entorno de colaboración y participación.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para el desarrollo del estudio se llevó a cabo una experimentación en una clase de secundaria con alumnado de 14 y 15 años, en torno al contenido curricular de isometrías. Se diseñó una secuencia didáctica centrada en el tema de transformaciones en el plano (traslaciones, simetrías y giros, excluyendo homotecias) basada en la resolución de problemas. Desde la perspectiva de la cultura del aula, se procuraron fomentar normas de trabajo en un entorno colaborativo, tales como tener interés por compartir la resolución de tareas, o bien asumir conjuntamente la responsabilidad de superar dificultades individuales y de grupo.

Secuencia didáctica

La secuencia didáctica se estructuró en ocho sesiones de clase: una primera sesión de actividades introductorias con lápiz y papel y siete alternando trabajo en parejas con la ayuda del programa de geometría dinámica y puestas en común con el profesor (Tabla 1). La secuencia se planteó en un momento del curso escolar en el que se había trabajado por primera vez con el programa (en este caso, GeoGebra –GGB) durante dos temas anteriores de geometría, de modo que se supuso que los alumnos tenían un nivel de instrumentalización bajo o medio. De acuerdo con Iranzo y Fortuny (2009), esto significa que no se sabía coordinar por completo el uso de la ventana algebraica y geométrica en función de su conocimiento geométrico.

Aceptando que los alumnos eran conocedores de los aspectos básicos del programa de geometría dinámica utilizado, no se incluyó ninguna actividad de familiarización con el *software*. La primera sesión se dedicó a recordar y manejar conceptos básicos sobre isometrías con lápiz y papel, trabajando en parejas. La segunda sesión consistió en resolver dos problemas de construcción de isometrías con el objetivo de formalizar conceptos intuitivos. En la tercera sesión se consolidaron los problemas de la sesión anterior mediante una puesta en común orquestada por el profesor, para asegurar que se avanzara hacia los mínimos requeridos. Los tres primeros problemas, aunque tratan las tres isometrías, se centran en las propiedades de las simetrías axiales. En cambio, en la cuarta sesión se trabajó el concepto de giro con un problema donde se tuvo que deducir la construcción del centro a partir de propiedades básicas y explorar todos los casos que se podían generar. En las dos siguientes sesiones, se propuso resolver dos problemas más complejos, uno sobre composiciones donde se tuviera que reflexionar sobre este nuevo concepto, y otro de aplicación de isometrías. En la octava y última sesión se hizo una puesta en común de los dos últimos problemas para comentar enfoques y dificultades.

Tabla 1
Estructura de la secuencia didáctica.

SESIÓN	LUGAR	TAREAS
1	Clase ordinaria	Actividad introductoria
2	Clase de ordenadores	**Problema 1:** Construir simetrías axiales
		Problema 2: Identificar isometrías y construir ejes de simetría
3	Clase ordinaria	Puesta en común problemas 1 y 2
4	Clase de ordenadores	**Problema 3:** Encontrar centro de giro
5	Clase ordinaria	Puesta en común problema 3
6	Clase de ordenadores	**Problema 4:** Componer simetrías axiales
7	Clase de ordenadores	**Problema 5:** Aplicar simetrías axiales
8	Clase ordinaria	Puesta en común problemas 4 y 5

Durante la experimentación en su conjunto, contamos con distintas fuentes de datos según se tratara de sesiones de trabajo por parejas o puestas en común. En las sesiones de trabajo por parejas recogimos vídeo y audio de tres parejas informantes, protocolos de construcción de grabados en los archivos del programa y grabaciones de la pantalla, que permitieron observar aspectos relevantes no registrables en el protocolo de construcción tales como elementos borrados o movimientos de los elementos. También recogimos los registros escritos de los estudiantes en su cuaderno. Tomamos estos datos, exceptuando vídeo y audio, de todos los alumnos de clase para análisis posteriores y para la gestión de la puesta en común de la siguiente sesión. En las puestas en común, tomamos grabaciones de vídeo de toda la clase desde tres ángulos distintos, junto con datos adicionales de audio de las tres parejas.

Aunque la mediación tecnológica es de gran relevancia en nuestro trabajo, para este artículo hemos seleccionado resultados de una sesión de clase donde el uso del *software* se manejó conjuntamente con la pizarra y otros objetos «no tecnológicos» –a diferencia de la sesión previa donde los alumnos habían trabajado de forma autónoma y en parejas ante un ordenador. Presentamos el análisis y la discusión de la sesión de puesta en común del tercer problema (Figura 1), que corresponde a la quinta sesión de clase de la secuencia didáctica. Es una puesta en común especialmente interesante desde el punto de vista de la riqueza de la discusión del problema y, además, es la única donde se comenta sólo un problema, de modo que nos resulta más fácil mostrar su análisis en un artículo. Los resultados que mostramos más adelante se corresponden con momentos clave de aprendizaje de esta sesión.

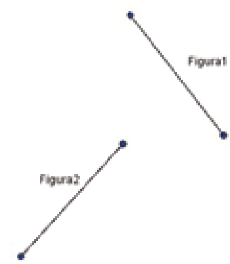
Estudiamos en profundidad seis alumnos de tercer curso de secundaria obligatoria. Los seis se escogieron sobre todo por su implicación activa en clase. En algunas de las sesiones estos alumnos se agruparon por parejas manteniendo, hasta donde fue posible, una homogeneidad de conocimiento académico dentro de la pareja y una heterogeneidad en los estilos de interacción, con la finalidad de fomentar la discusión. A lo largo de la puesta en común que aquí discutimos, la interacción entre pares no responde necesariamente a la interacción dentro de estas parejas.

Figura 1
Enunciado del problema 3.

Problema 3. Imaginad que nos contratan en una fábrica para ayudar a resolver un problema:

«Teníamos una máquina que giraba las piezas de un sitio a otro, como muestra la animación anterior. La llevaron a arreglar y ahora que ya funciona bien, no se sabe dónde colocarla para que siga transportando las piezas como antes.»

Hay que colocar la máquina de giro en su sitio. Escribid argumentos para convencer a los técnicos de vuestra solución. Tenéis la ventana del GeoGebra de ayuda.



A lo largo de la configuración didáctica y del modo de explotación, tanto para la preparación de la implementación de la puesta en común del problema 3 como del resto de problemas de la secuencia, el profesor se comportó facilitando el enlace entre lo que ocurría en el entorno tecnológico y la representación convencional en la pizarra. Los objetos principales de la configuración didáctica en las puestas en común fueron la pizarra y un ambiente de clase que coordinó el uso conjunto de pizarra y pantalla, tomando como punto de partida los productos (construcciones de GGB con cuadros de texto) realizados en pareja. Un rasgo distintivo del comportamiento del profesor fue el uso del gran grupo para discutir qué había sucedido en el entorno tecnológico durante la sesión previa de trabajo en pareja. Uno de los tipos de orquestación más usados en las sesiones en gran grupo fue lo que Drijvers, Doorman, Boon, Reed y Gravemeijer (2010) denominan *Sherpa-at-work*. Este tipo se refiere a situaciones en las que un alumno (una pareja, en nuestro estudio) usa la tecnología (en el proyector, en nuestro estudio) para presentar su trabajo o bien para llevar a cabo acciones requeridas por el profesor. Esto implicó que, a pesar de que en la dinámica de grupo no había un ordenador por pareja, los alumnos continuaron teniendo acceso a la herramienta (GeoGebra, en nuestro estudio).

Instrumento de análisis

El análisis se organizó en función de la identificación, localización, descripción y explicación de indicios de cambio en el conocimiento matemático de los alumnos. Estos indicios de cambio en el aprendizaje se construyeron a partir de evidencias de un cambio en el contenido de lo expresado por alguno de los alumnos, ya sea en la puesta en común o durante el trabajo en pareja;

este cambio se vio como un momento clave en el aprendizaje. Entendemos que todo aprendizaje se evidencia cuando emergen indicios de cambio entre una situación inicial –donde se expresa un determinado contenido– y una situación posterior –donde se produce una reapropiación de partes de ese contenido, pudiendo haber avances y retrocesos por parte del alumno durante el proceso. Así pues, en nuestro trabajo, los indicios de cambio son elementos observables en los procesos de interacción en los cuales uno o más alumnos modifican algún contenido para dar respuesta a demandas de la tarea matemática.

En la reducción de datos, se ilustraron los indicios de cambio con la ayuda de transcripciones en tablas. Estas tablas se distribuyeron en columnas con los turnos de los alumnos seleccionados; hay también columnas para comentarios del resto de compañeros, del profesor y en relación con el uso del programa de geometría dinámica. Tras esta primera representación, se trianguló una segunda reducción todavía más centrada en los indicios de cambio: se suprimieron columnas y filas que se consideraron secundarias –por no contener turnos significativos– y, para dar mayor dinamismo a las tablas, se trazaron conectores de influencia. Estos conectores son segmentos orientados que representan la supuesta influencia de un turno en otro durante una interacción. Se realizó una tercera reducción de las tablas por medio de la construcción de acciones asociadas a los distintos turnos (Tabla 2). Se aplicó, por tanto, una técnica básica de análisis del discurso al identificar las tareas o pasos incluidos dentro de un turno de intervención (Wells, 1996).

Tras la triangulación y representación de momentos clave mediante tablas, se analizaron uno por uno los distintos momentos: se observaron y relataron tipos de cognición matemática (matematización vertical y horizontal), grados de mediación tecnológica (instrumentación e instrumentalización) y acciones de la orquestación del profesor (procesos de filtraje). Durante la identificación de indicios de cambio, se buscaron evidencias de aprendizaje matemático; por tanto, el eje de la cognición se tuvo en cuenta desde el inicio del análisis. Esto no fue así con los ejes de la mediación y la orquestación, puesto que el análisis de las influencias del *software* y del profesor se realizó en un segundo período, tras haberse elaborado las primeras tablas.

EJEMPLIFICACIÓN DE MOMENTOS DE APRENDIZAJE

Presentamos de forma resumida cuatro indicios de cambio –momentos clave en el aprendizaje, pertenecientes a una de las puestas en común alrededor de la resolución del problema 3 (Figura 1). Para simplificar su descripción, agrupamos estos momentos en función de los dos estudiantes que más directamente intervienen en la construcción de aprendizaje matemático. Para todos los momentos, explicamos primero los elementos con los que los caracterizamos, para luego pasar a detallar parte del análisis de los datos y observaciones experimentales.

Meritxell y Elisabet

Dos estudiantes, Meritxell y Elisabet, han conjeturado que el centro de giro de la máquina se sitúa en el punto de corte de las mediatrices de los puntos homólogos (Figura 2) y también han encontrado el giro prolongando los segmentos (Figura 3). Ambas construcciones han sido realizadas por las alumnas, sin ayuda del profesor. Éste es el punto de partida del que derivan los siguientes momentos clave en el aprendizaje matemático.

Figura 2

Corte de las mediatrices.

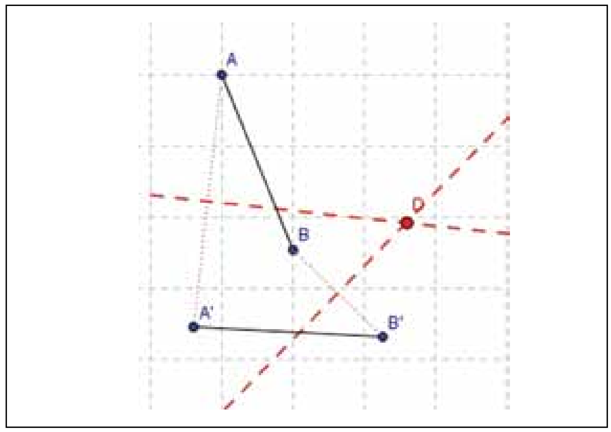
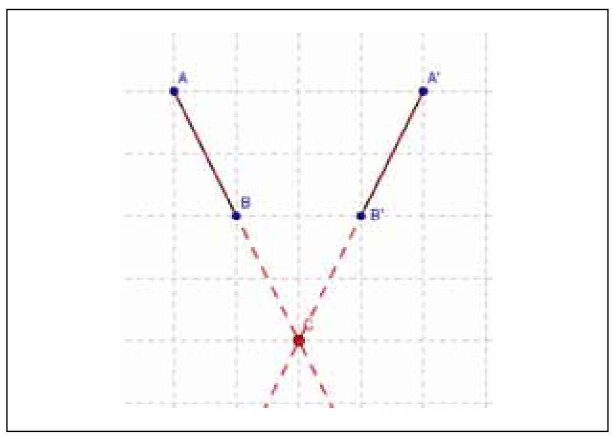


Figura 3

Corte de las prolongaciones.



Generalización con filtraje de procesos

En este momento de aprendizaje, desde la perspectiva de la matematización, Meritxell se centra en el desarrollo de un proceso matemático de generalización; mientras que, desde la perspectiva de la mediación, destaca el filtraje de procesos que principalmente orquesta el profesor.

La tabla 2 –T2– ilustra un cambio en el conocimiento matemático de Meritxell (línea 8, T2. *Es que tampoco hace falta* *poner esto, porque no es que se corten, pero como son la misma se considera que se cortan en todos los sitios, por lo tanto, es lo mismo que allí*), marcado por un punto de partida identificado dentro del episodio (línea 4, T2. *Pues decimos que en dos segmentos cualesquiera menos en este caso*). Esta alumna empieza diciendo que la conjetura de que el centro de giro se construiría haciendo la intersección de las mediatrices de puntos homólogos funcionaría para dos segmentos cualesquiera excepto en un caso concreto (el de la figura 3). Después ve que se puede considerar un caso particular del general y que no hay necesidad de mencionarlo porque el centro de giro estará donde se corten las mediatrices, que si son coincidentes se cortan en infinitos puntos, de modo que la prolongación de los segmentos será un caso más. Éstas son evidencias básicas de cambio.

También hay influencia indirecta del profesor mediante el andamiaje de la discusión en clase por medio del filtraje de ideas, que se han comparado y evaluado (línea 1, T2. *Aquí, ¿no os molesta algo? Me dais la solución para dos segmentos cualesquiera, pero decís que para un caso la solución es distinta;* y línea 7, T2. *Es decir, ¿que no hace falta sacarle este caso?*). Se da prioridad al aprendizaje de procesos, ya que hay errores en el contenido matemático de ideas de los alumnos: no es cierto que la máquina de giro se pueda colocar en cualquier punto de las mediatrices coincidentes como se sugiere, aunque es de esperar que en un filtraje posterior se refine el contenido matemático. Esta influencia basada en la tercera fase del proceso de filtraje señala como crucial el papel del profesor en el desarrollo del episodio. El aprendizaje de procesos de generalización que contribuyen a una matematización vertical probablemente no se habría dado si se hubiese interrumpido la discusión para filtrar contenidos erróneos.

En la interacción de Meritxell con otros participantes, encontramos la influencia del profesor y de alumnos que hacen intervenciones de tipo progresivo (Cobo y Fortuny, 2005). Alumnos de otras parejas, por ejemplo, introducen procedimientos matemáticos como fijarse que en el caso particular también se pueden hacer mediatrices, que se cortarían en el punto hallado, aunque también lo harían en infinitos más (línea 6, T2. *Pues como coinciden en todos los sitios, es como si se cortaran en todos los sitios, entonces es el segundo caso [cuando las mediatrices se cortan], pero para todos los sitios de cualquiera de las dos mediatrices*).

Conexión de ideas con generación de propuestas

En este momento de aprendizaje, desde la perspectiva de la matematización, el momento de aprendizaje se centra en la conexión de ideas matemáticas que contribuyen a avanzar en la resolución del problema; mientras que, desde la perspectiva de la mediación, destaca la generación de propuestas.

A raíz de la intervención de su compañera Meritxell (ver ejemplo anterior), Elisabet hace una aportación matemáticamente interesante (línea 12, T2. *Si tenemos dos casos, que son si se cortan o si son la misma, también podríamos considerar que fuesen paralelas y que no se cortaran*).

Tabla 2
Síntesis de MA-1 y MA-2.

	Elisabet	Meritxell	Otros	Profesor
1				Sugerencia de filtrar procesos matemáticos
2			Explicación errónea	
3				Reflexión sobre una incongruencia
4		Resolución parcial		
5		Enunciación de propiedad		
6			Primera generalización con contenidos erróneos	
7				Confirmación de la generalización
8		Apropiación de la generalización		
9				Cuestionamiento sobre la reafirmación de respuesta
10		Reafirmación		
11				Introducción de nuevas ideas
12	Generación de otra idea relativa al tratamiento de otro caso particular			

El cambio en el proceso de resolución del problema de Meritxell influye en un cambio en el pensamiento de Elisabet, que hace conexiones con otro tema de geometría. Elisabet también hace un cambio en el aprendizaje de procesos. No hay evidencia del estado inicial, pero consideramos que, por omisión, esta alumna no había establecido la conexión. La única influencia aparente sobre ella es el comentario de su compañera, pero si se amplía la mirada (T2) se ve que ha interaccionado con varios turnos dentro del conjunto del episodio.

Elisabet piensa que puede haber más casos concretos que quizás hagan replantear la conjetura inicial. Como indicio, tenemos que quiere explotar toda la casuística de posiciones relativas de las rectas: se cortan, son coincidentes, o bien son paralelas. Esta alumna defiende que si algunos segmentos hacen que sus mediatrices se corten en un punto, quedando determinado el punto donde colocar la máquina, y otros segmentos hacen que sus mediatrices sean coincidentes, determinando que hay infinitos puntos donde colocarla, entonces también debe haber segmentos que estén colocados de tal forma que sus mediatrices queden paralelas; de ahí, sugiere que sería necesario pensar qué pasaría con la máquina si se encontraran en esa situación.

Las acciones de la tabla 2 ilustran un enriquecimiento de los procesos de resolución del problema de demostración, gracias a que se ha relacionado la resolución dada con la noción de posiciones relativas de las rectas. Pero, a su vez, hay contenidos matemáticos implícitos que van siguiendo un proceso de filtraje con la ayuda del profesor. La gestión del profesor basada en el filtraje de procesos está presente en los turnos en los que interviene, por lo que es razonable pensar que, cuando se pasa a la fase de generación de nuevas ideas, dicha gestión ha contribuido a generar conexiones que implican una evolución de procesos. Este análisis pone de manifiesto la importancia de la mediación del profesor y, por otro lado, confirma la necesidad de referirse a las conexiones asociadas a procesos de matematización horizontal. Así pues, hay diferencias entre el aprendizaje de procesos y el establecimiento de relaciones entre el problema y otros conceptos, siendo la comprensión de ambos aspectos lo que parece haber llevado a Elisabet a mejorar su proceso de resolución del problema.

Elisabet y Matías

En los dos momentos clave de aprendizaje protagonizados por Elisabet y Matías, a diferencia de los dos anteriores y a pesar de que no hay una presencia directa del trabajo con ordenador, destaca la mediación del *software* en algunos de los procesos de matematización de ambos alumnos.

Refutación de conjetura desde lo particular con mediación de *software* y profesor

En este momento de aprendizaje, desde la perspectiva de la matematización, el momento de aprendizaje se centra en la particularización que Elisabet realiza a partir de la refutación de una conjetura; mientras que, desde la perspectiva de la mediación, destaca tanto la influencia del *software* como la del profesor. Esto ocurre temporalmente en paralelo al cuarto momento de aprendizaje, parecido en cuanto al eje de la mediación, pero con actividad de matematización por medio de procesos de generalización a cargo de Matías.

Tabla 3

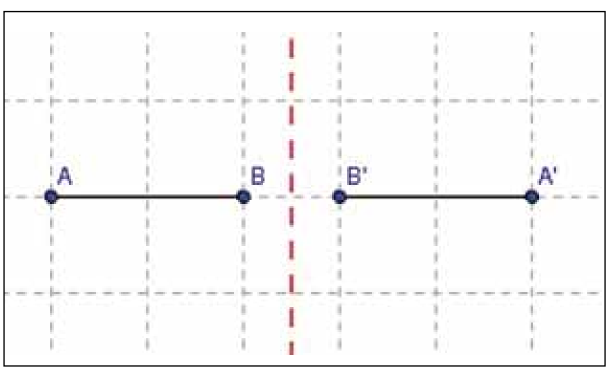
Síntesis de MA-3 y MA-4.

	Elisabet	Hugo	Matías	Profesor	Software
1				Intento de filtrar contenidos matemáticos erróneos	
2	Afirmación errónea		Afirmación errónea		
3		Afirmación correcta			
10	Reafirmación errónea				
15				Manipulación en la pizarra e introducción del concepto de ángulo de giro	
19	Cambio de opinión respecto a la medida del ángulo				
20				Intento de concreción	
21		Argumentación de la falsedad de la conjetura			
22			Intento de no considerar el concepto de ángulo de giro		
23					Instrumentación
30	Aceptación del error				

31			Verbalización de problema técnico		
32				Orquestación instrumental de barra deslizadora	
34					Uso de GeoGebra
35	Consideración de la excepción de un caso particular				
36				Cuestionamiento dirigido a reafirmar	
38				Conclusión de fallo de conjetura	
40	Consideración de un caso particular				
42	Reafirmación de que lo ve como caso particular				
43			Consideración de la excepción de un tipo de caso		

En los dos momentos de aprendizaje anteriores, los alumnos han pensado que han resuelto el problema para dos segmentos cualesquiera. Es entonces cuando el profesor filtra los contenidos matemáticos erróneos con una pregunta (línea 1, T2. *Aquí, ¿todos veis que podemos poner la máquina en cualquier punto de las mediatrices?).* El profesor se ayuda de la figura 4 que él mismo dibuja en la pizarra. En la sección siguiente pasamos a explicar de forma conjunta los dos momentos de aprendizaje porque por su naturaleza son difícilmente separables (ver tabla 3 –T3), aunque hemos preferido destacar su singularidad con un subtítulo para cada uno.

Figura 4
Mediatrices de puntos homólogos coincidentes.



Refutación general de conjetura con mediación de *software* y profesor

Al principio, tanto Elisabet como Matías dicen estar convencidos (línea 2, T3. *¡Sí, sí!*) de que cuando los dos segmentos están alineados, la máquina de giro se puede situar en cualquier punto de las mediatrices coincidentes. Elisabet contradice a Hugo, su pareja durante la sesión previa, quien opina lo contrario (línea 3, T3. *Tiene que estar en el punto medio de los dos…*), mientras esta alumna se reafirma en su opinión (línea 10, T3. *¡Sí que se puede! [poner en cualquier punto]*). Tras la orquestación del profesor, que enfatiza contenidos matemáticos e introduce el concepto de ángulos de giro (línea 15, T3. *¿Si giro el segmento 180º alrededor de este punto [uno cualquiera de la mediatriz], dónde voy a ir a parar?*), Elisabet acepta que el giro no sea de 180º (línea 19, T3. *Sí, pues no lo hagamos de 180º*). No se da cuenta, sin embargo, de la falsedad de su conjetura ya que sólo considera otro ángulo menor de giro. Cuando el profesor insiste en preguntar qué ángulo sería si no fuese 180º (línea 20, T3. *¿Cuánto lo haríais girar?*), Hugo intenta argumentar por qué tampoco podría ser un ángulo más pequeño de 180º (línea 21, T3. *No, pero es que entonces te quedará… Si haces menos ángulos te quedará… ¡así como hacia arriba!*) y Matías dice que eso no lo pregunta el enunciado (línea 22, T3. *Pero tampoco pide que… Pide que pongas la máquina donde se pueda girar, no pide que cuánto se puede girar…*), aludiendo a que no se puede determinar.

El hecho de insistir en que el centro de giro se pueda poner en cualquier punto tal vez deriva de que en la discusión anterior se ha dado una demostración empírica con un ejemplo supuestamente genérico (Figura 2). Sin embargo, a petición de algunos compañeros que seguramente empiezan a ver la falsedad de la conjetura, en este fragmento de la puesta en común se realizan experimentos cruciales (Balacheff, 1987; Gutiérrez, 2005) como por ejemplo, representar con GGB la situación de la figura 4 colocando el centro en distintos puntos de la mediatriz. Estos experimentos se usan de contraejemplos para refutar la conjetura.

Al haber propuesto construir la situación (Figura 4) con GeoGebra (línea 23, T3. *¿Por qué no lo hacemos con GeoGebra*?), Hugo ayuda a que Elisabet prevea que el segmento homólogo no coincidirá con el que buscan (línea 30, T3. *Entonces es imposible*). En síntesis, Elisabet ha tenido la influencia del *software*, que se ha utilizado para comprobar un hecho concreto y ver que es imposible colocar el centro de giro en cualquier punto de la mediatriz. También parecen haber sido decisivas las explicaciones de Hugo y las preguntas del profesor para hacer reflexionar.

Por su parte, Matías sigue argumentando que con la construcción con geometría dinámica no se ha podido comprobar lo que ocurre con ángulos distintos a 180º (línea 31, T3. *Vale, no es de 180º, pero será de otro ángulo que no podemos encontrar, por eso tampoco pide el ángulo de giro…*). Tras este turno, el profesor realiza una orquestación instrumental para que no tener un grado alto de instrumentación no acabe condicionando la fase ascendente (Arzarello, Micheletti, Olivero y Robutti, 1998) en la que los alumnos se encuentran. El profesor propone usar la barra deslizadora (línea 32, T3. *Yo crearía una barra deslizadora…*) y utiliza el programa para dar indicaciones sobre cómo se crea. Elisabet, después de ver que con la barra deslizadora de GeoGebra tampoco funciona, es decir, que no hay ningún grado de giro que lleve el segmento sobre su esperado homólogo, queda convencida y en distintos turnos transmite que cuando los segmentos están alineados, la solución será el punto medio de los puntos homólogos (línea 35, T3. *Entonces en este caso (situación de la figura 4) no se puede hacer en cualquier punto de la mediatriz, tiene que ser en el punto medio de la recta que une los dos segmentos*). Tras reflexionar ante la cuestión del profesor (línea 38, T3. *Pero ahora os acabáis de contradecir con vuestra hipótesis inicial de que, dados dos segmentos cualesquiera, podremos poner la máquina donde se corten las mediatrices de los puntos*), Elisabet considera la situación de la Figura 4 como una excepción (línea 40, T3. *Si son de la misma recta, sólo tendrá un punto como solución*).

Elisabet aprende el concepto de unicidad de centro de giro para la situación de la figura 4, pero no conecta esta solución con otras situaciones, es decir, no generaliza sino que ve como excepción esa situación (línea 42, T3. *Normalmente lo podemos poner en cualquier punto, menos cuando los segmentos están alineados*). En cambio, Matías ve esta excepción como un caso particular de todos los pares de segmentos simétricos (línea 43, T3. *¡Cuando son simétricos!*). Aquí sí que hay conexión con otros problemas similares, ya que se busca cómo serían todos los enunciados de pares de segmentos que tuviesen mediatrices coincidentes. Aunque ambos alumnos parten del mismo estado inicial, participan en la misma puesta en común y se hallan bajo las mismas variables de contexto, llegan a estados finales diferentes. La mediación en los dos aprendizajes es similar, pero ha influido en cada alumno de forma distinta. Se trata sobre todo de una mediación del *software*, ya que los alumnos lo usan como instrumento para comprobar ideas, y del profesor, ya que éste facilita la génesis instrumental y gestiona el filtrado de conceptos.

Discusión conjunta

En el análisis anterior hemos evidenciado cuatro momentos clave de aprendizaje, cuya caracterización resumimos en la tabla 4. La selección es relevante porque este conjunto de momentos incluye información suficiente para empezar a caracterizar el aprendizaje matemático en un entorno colaborativo de resolución de problemas de isometrías usando un programa de geometría dinámica.

Vemos, por ejemplo, que la cognición matemática se desglosa efectivamente en elementos de matematización vertical y horizontal. Se destacan aprendizajes en los que la evolución del conocimiento matemático tiene que ver con el aprendizaje de conceptos (en el tercer y cuarto momento), procesos (en el primero) y/o conexiones (en el segundo y cuarto). Vemos, además, que la mediación del *software* influye en la génesis instrumental del alumno (en el tercero y cuarto), o bien que la mediación del profesor tiene mucha incidencia en ciertos turnos, pudiendo consistir en: *a*) una implementación didáctica de la orquestación instrumental, para facilitar la génesis instrumental (en el tercero y cuarto) o bien *b*) un andamiaje para seguir el proceso de filtraje en alguna de sus fases: generación de ideas (en el segundo), evaluación, comparación de ideas y filtrado de conceptos (en el tercero y cuarto) y filtrado de procesos (en el primero). Por otra parte, las influencias entre turnos de alumnos emergen como elementos de gran relevancia, con frecuencia asociados a turnos en los que interviene el profesor.

De nuestro análisis se desprende que tanto los aspectos de mediación y orquestación como los de cognición matemática son esenciales en la caracterización del aprendizaje en el contexto didáctico estudiado y son, además, suficientemente ricos y variables para contribuir a explicar el aprendizaje matemático en distintas situaciones de clase y con distintos alumnos. Aunque no aportamos datos de ello en este artículo, es importante mencionar que nuestra aproximación teórica y metodológica ha resultado ser también de gran utilidad para el análisis del resto de sesiones de clase, donde en general se repiten patrones similares de influencia.

CONCLUSIONES

Nuestro objetivo era encontrar un modo de caracterizar momentos clave del aprendizaje matemático en un entorno colaborativo de resolución de problemas de isometrías usando un programa de geometría dinámica y, por tanto, rico desde la perspectiva tecnológica. Nuestro supuesto inicial era que tenía sentido pensar dicha caracterización de acuerdo con los ejes de cognición matemática, mediación del *software* y orquestación del profesor. Las formas concretas de influencia de estos ejes en momentos de aprendizaje específicos han sido señaladas en la presentación de resultados. En esta última sección de conclusiones, lo que pretendemos es reflexionar sobre algunas de las relaciones emergentes entre los ejes de cognición, mediación y orquestación que se desprenden de nuestro análisis. Acabamos con consideraciones sobre la idoneidad de aspectos metodológicos utilizados para el desarrollo del estudio.

Desde nuestra aproximación teórica a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, damos prioridad al estudio de factores de influencia en el aprendizaje del alumnado y al mismo tiempo consideramos que existe una fuerte interrelación entre dichos factores. Por ejemplo, entendemos que el trabajo de matemáticas en entornos tecnológicos condiciona qué se aprende y cómo se aprende. Sin embargo, tal como se ha observado en la sección de resultados, los usos del programa de geometría dinámica están a su vez relacionados con las orquestaciones instrumentales del profesor y con las reacciones del alumnado a los esquemas de uso sugeridos para la herramienta. En el tercer momento de aprendizaje, el hecho de que Elisabet llegue a considerar la excepción como caso particular, tiene que ver con la sugerencia del profesor de usar la barra deslizadora en el entorno tecnológico; pero también el tipo de orquestación activada por el profesor tiene que ver con la atención prestada a los procesos de cognición matemática desarrollados por esta alumna en conversaciones con sus compañeros. En síntesis, puede decirse que los conectores de influencia trazados son difícilmente explicables de forma aislada, uno por uno. Debe hacerse referencia a ellos como un conjunto de flujos de información que sugiere, en su totalidad, una explicación plausible sobre qué aspectos han facilitado un cierto aprendizaje matemático. Aunque los conectores se representan con flechas unidireccionales, a menudo hay tiempos prácticamente simultáneos en los que se desarrollan acciones con influencia mutua. Son situaciones en las que cuesta distinguir si un tipo de cognición precede a un tipo de orquestación, o si más bien esto ocurre a la inversa. De acuerdo con nuestro enfoque, establecer estas distinciones no es realmente relevante, en comparación con la comprensión de las influencias –conectores– como conjunto.

En cuanto a la idoneidad de los métodos de análisis empleados, hay varios aspectos a valorar. En primer lugar, para la construcción y explicación de momentos clave de aprendizaje matemático ha sido esencial la triangulación de perspectivas y, por tanto, se ha requerido que el análisis de datos fuera un trabajo de equipo. A pesar de que un único investigador podría haber determinado con bastante precisión momentos de aprendizaje matemático a partir del visionado de vídeos de clase y archivos del alumnado, para convertir una interpretación cualitativa en una explicación plausible de estos momentos ha sido fundamental contar con la participación de los tres autores. En segundo lugar, la gran cantidad de datos de audio y vídeo recogidos para esta ocasión y el esfuerzo realizado en los procesos de reducción nos hacen pensar en la conveniencia de introducir un *software* profesional para manejar el análisis cualitativo de datos en estudios futuros. Por último y también para estudios futuros, queremos resaltar nuestro actual interés por centrar con mayor detalle el eje de la cognición matemática en comportamientos argumentativos del alumnado durante la resolución de problemas de geometría.

NOTA

1. El estudio forma parte del Proyecto «Contribución al análisis y mejora de las competencias matemáticas en la enseñanza secundaria con un nuevo entorno tecnológico», EDU2008-01963, Ministerio de Ciencia e Innovación, España. Para la realización de este Proyecto, se colabora con el equipo del Proyecto EDU2009-07113, «Estudio sobre el desarrollo de competencias discursivas en el aula de matemáticas». La primera autora posee la beca BES-2009-022687. Los investigadores son miembros del Grupo 'Educació i Competència Matemàtica', SGR2009-00364, Departament d'Innovació, Universitats i Empresa.

Tabla 4
Resumen de la caracterización de momentos de aprendizaje.

MOMENTOS DE APRENDIZAJE	COGNICIÓN MATEMÁTICA	MEDIACIÓN TECNOLÓGICA	ORQUESTACIÓN DEL PROFESOR
1. Generalización con filtraje de procesos.	Procesos de generalización matemática (inclusión de un caso particular en uno general) para matematización vertical.		Andamiaje del profesor: filtra ideas generadas por alumnos; prioriza procesos sin corregir errores conceptuales.
2. Conexión de ideas con generación de nuevas propuestas.	Conexión de ideas matemáticas (posiciones relativas de rectas) para matematización horizontal.		Andamiaje del profesor: incita la generación de nuevas ideas para iniciar el ciclo de filtraje; prioriza procesos sin corregir errores conceptuales.
3. Refutación particular de conjetura con mediación de *software* y profesor.	Aprendizaje del concepto de unicidad del centro de giro en una situación particular.	Mediación del *software* en el uso del programa para comprobar conjetura y facilitar instrumentación.	Orquestación instrumental del profesor recordando cómo se construye la barra deslizadora para la génesis instrumental de los alumnos. Andamiaje del profesor para filtrar conceptos erróneos de alumnos.
4. Refutación general de conjetura con mediación de *software* y profesor.	Aprendizaje del concepto de unicidad del centro de giro en segmentos orientados simétricos y conexiones entre ellos.		

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANGHILERI, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(1), pp. 33-52.

ARZARELLO, F., MICHELETTI, C., OLIVERO, F. y ROBUTTI, O. (1998). A model for analyzing the transition to formal proofs in geometry. En A. Olivier y K. Newstead (eds.). *Proceedings of 22th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 2, pp. 24-31. Stellenbosch, República de Sudáfrica: PME.

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, pp. 147-176.

COBO, P. y FORTUNY, J.M. (2005). El sistema tutorial AgentGeom y su contribución a la mejora de las competencias de los alumnos en la resolución de problemas de matemáticas, en Maz, A., Gómez, B. y Torralbo, M. (eds.). *Actas del 9.º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, pp. 55-70. Córdoba: SEIEM.

DRIJVERS, P., DOORMAN, M., BOON, P. y GISBERGEN, S. (2010). Instrumental orchestration: theory and practice, en Durand-Guerrier, V., Soury-Lavergne, S. y Arzarello, F. (eds.). *Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education,* pp. 1349-1358. Lyon, Francia: ERME.

DRIJVERS, P., DOORMAN, M., BOON, P., REED, H. y GRAVEMEIJER, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), pp. 213-234.

GUTIÉRREZ, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica, en Maz, A., Gómez, B. y Torralbo, M. (eds.). *Actas del 9.º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, pp. 27-44. Córdoba: SEIEM.

IRANZO, N. y FORTUNY, J.M. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(3), pp. 433-446.

JONES, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-3), pp. 55-85.

KOLB, D.A. (1984). *Experiential learning: experience as the source of learning and development*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

KRUMMHEUER, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 26(1), pp. 60-82.

MORERA, L. (2010). *Momentos clave en el aprendizaje matemático en un contexto de trabajo de las isometrías usando un entorno tecnológico.* Trabajo de maestría. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

PLANAS, N. e IRANZO, N. (2009). Consideraciones metodológicas para la interpretación de procesos de interacción en el aula de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *2*(12), pp. 179-213.

RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. París, Francia: Armand Colin.

RABARDEL, P. y BOURMAUD, G. (2003). From computer to instrument system: a developmental perspective. *Interacting with Computers*, 15, pp. 665-691.

SHERIN, M.G. (2002). A balancing act: developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(3), pp. 205-233.

TREFFERS, A. (1978). *Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction -The Wiskobas Project*. Dordrecht, Holanda: Reidel (consultado en la versión publicada por Springer en 1987).

TROUCHE, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), pp. 281-307.

VERILLON, P. y RABARDEL, P. (1995). Cognition and artifacts: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), pp. 77-101.

WELLS, G. (1996). De la adivinación a la predicción: discurso progresivo en la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia, en Coll, C. y Edwards, D. (eds.). *Enseñanza, aprendizaje y discurso en el aula: aproximaciones al estudio del discurso educacional*, pp. 75-98. Madrid: I&A.

WERTSCH, J.V. (1998). *Mind as action*. Oxford, Reino Unido: Oxford University Press.

[Artículo recibido en noviembre de 2010 y aceptado en julio de 2011]

Key moments when learning isometries in a collaborative and technological context

Morera, Laura; Fortuny, Josep M. y Planas, Núria
Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona
Laura.Morera@uab.cat
JosepMaria.Fortuny@uab.cat
Nuria.Planas@uab.cat

Summary

The aim of the present paper is to present the notion of key moments of mathematical learning concerning problem solving and collaborative environments. In particular, the problems were designed to study isometries, working with dynamic geometry software. In our work, the learning key moments match with precise instants where an educative opportunity is presented in a natural and interesting way in order to take advantage of the knowledge along the conversation and discussion.

Based on the literature, this paper considers mathematical cognition, technological mediation and teacher orchestration, which are the main foundations of our study. The purpose of the investigation is to consider these three aspects as a whole to study the key moments of mathematical learning.

To develop this study, an experiment on secondary school (14-15 years-old students) was carried out. A didactical sequence centered in translations, symmetries and rotations was designed. On the one hand, all the activities of the sequence were designed from a problem solving perspective. On the other hand, from the cultural classroom point of view, a collaborative environment was promoted such as, having interest in sharing their solutions, or sharing the responsibility to overcome individual and group challenges.

The analysis was based on identifying, describing and explaining the progresses and changes of the students' mathematical knowledge during the discussions. Four mathematical learning key moments were identified, and analyzed under the perspective presented in the theoretical section. These four moments are detailed in the exemplification section (see a summary characterization in Table 4). The attention was focused on the description of each moment, pointing to the relationship between the three crucial aspects in our framework: mathematical cognition, technological mediation and teacher orchestration. These moments are relevant for further research because it includes enough information to start characterizing the mathematical learning in a collaborative environment with the use of dynamic geometrical software.

Our analysis shows that the mediation and orchestration aspects and the mathematical cognition aspects, are both essential in the characterization of the learning in the context studied. Furthermore, the selected moments have a high cognitive level which is useful to explain mathematical learning in different classroom situations and with different students. Our theory and methodology approximation also seems to be useful for further classrooms analysis, which in general, appears in similar patterns.

To conclude, we would like to discuss the different relationships between cognition, mediation and orchestration aspects that emerge from our analysis. It seems that influential connectors that have been identified during the interactions are difficult to be explained by themselves. It is necessary to observe them as information which suggests an explanation of the aspects that have provided a certain mathematical learning. According to our approach, the most important aim is to understand the influential connectors as a whole, instead of separated characteristics of the discussion.