COORDINACIÓN DE LOS PROCESOS DE APROXIMACIÓN EN LA COMPRENSIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Valls, Julia[1]**; Pons, Joan**[2] **y Llinares, Salvador**[3]
[1] Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante
[2] Departamento de Matemáticas. IES Mutxamel. Alicante
[3] Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante
julia.valls@ua.es
jpt11@alu.ua.es
sllinares@ua.es

Resumen. El objetivo de esta investigación es caracterizar el papel de la coordinación de los procesos de aproximación vinculados a la comprensión del límite de una función. Analizamos las respuestas de 64 estudiantes de bachillerato a 7 problemas considerando la concepción dinámica y métrica del límite de una función. Los resultados indican que la comprensión métrica del límite en términos de desigualdades se apoya en que el estudiante sea capaz de coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden, aunque no sea capaz de esta coordinación cuando las aproximaciones laterales no coinciden. Este hecho señala la diferencia cognitiva que para el estudiante tiene el que las aproximaciones laterales coincidan o no, e indica que la comprensión métrica del límite se inicia con la construcción previa de la concepción dinámica en el caso de la coincidencia de las aproximaciones laterales.

Palabras clave. Concepto de límite, coordinación procesos, análisis implicativo, modos de representación.

Coordination of approximations in secondary school students' understanding of the concept of limit

Summary. The aim of this study was to characterize the role of the coordination of the approximation processes in the understanding of the notion of limit. Answers of 64 postsecondary school students to 7 problems reflecting dynamic and metric conceptions of limit notion were analyzed. The results indicate that the metric understanding of limit in terms of inequality supported the coordination of the approximations in the domain and the range when the lateral approximations coincide, though students were not capable of making this coordination when the lateral approximations do not coincide. This fact indicates the cognitive difference between the coordinate of the approximation in the domain with the approximation in the range either in the case that the lateral approximations coincide or not. This finding suggests that the metric understanding of the limit begins with the previous construction of the dynamic conception in case of coincidence of the lateral approximations in the range.

Keywords. Concept of limit, coordination process, implicative analysis, modes of representation.

1. INTRODUCCIÓN

La compresión del esquema del límite de una función real de variable real es un aspecto importante para los estudiantes de educación postsecundaria (Tall, 1991). Sin embargo, las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite han puesto de manifiesto las dificultades que tienen los profesores para su enseñanza (Barbé, Bosch, Espinosa y Gascón, 2005; Fernández, 2000), así como las dificultades de los estudiantes en su comprensión (Blázquez y Ortega, 2000; Espinosa y Azcárate, 2000; Sierra, González y López, 2000; Blázquez y Ortega, 2001; Camacho y Aguirre, 2001; Blázquez, Ortega, Gaticia y Benegas, 2006; Valdivé y Garbin, 2008; Corica y Otero, 2009). Estas investigaciones han indicado cuatro características relevantes del proceso de comprensión del concepto de límite: (i) el papel de las concepciones espontáneas (Cornu, 1991; Monaghan, 1991; Williams, 1991; Williams, 2001; Elia, Gagatssi, Panaoura, Zachariades y Zoulinaki, 2009); (ii) la identificación de algunas dificultades específicas que presenta la comprensión del concepto de límite (Sierpinska, 1985; Cornu, 1991; Williams, 1991; Elia et al., 2009; Kim, Sfard y Ferrini-Mundy, 2005; Moru, 2009; Oehrtman, 2009; Roh, 2010); (iii) la influencia de las distintas representaciones en la manera en la que los estudiantes llegan a comprender el límite de una función (Blázquez y Ortega, 2001; Monaghan, 2001; Duval, 2006; Elia et al., 2009; Engler, Vrancken, Hecklein, Müller y Gregorini, 2007; Moru, 2009; Hardy, 2009); y (iv) la influencia de la concepción dinámica (Cornu, 1991; Cotrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendrf, Thomas y Vidakovic, 1996; Przenioslo, 2004; Roh, 2008; Oehrtman, 2009) dada por

> *«Sea "f" una función y "a" un número real, el número "L" es el límite de la función "f" en el punto "a", y se escribe* $\lim_{x \to a} f(x)$*, si cuando "x" se acerca al número "a", sus imágenes "f(x)" se acercan a "L"»*

en la comprensión de la concepción métrica dada a través de

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \partial > 0 : \forall x, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Estos resultados previos han puesto de manifiesto la necesidad de obtener más información del papel que desempeñan los modos de representación en la relación entre la concepción dinámica y métrica del límite. Esta información nos permitiría comprender mejor cómo los estudiantes de educación secundaria postobligatoria dotan de sentido a la noción de límite al permitirnos integrar y relacionar información procedente de dos ámbitos investigados de manera separada. En este sentido, la investigación sobre la relación entre la concepción dinámica y métrica de límite y el papel de los modos de representación pueden aportar elementos explicativos para fundamentar propuestas didácticas que favorezcan la comprensión del concepto de límite en estudiantes de 17-18 años.

Las distintas investigaciones indican que el primer encuentro de los estudiantes con la concepción dinámica de límite se lleva a cabo a través de la «*idea de aproximación*» (Cornu, 1991, p. 153; Oehrtman, 2009). Sin embargo, Cottrill y otros (1996) sugieren que la concepción dinámica del límite «como los valores de la función que van aproximándose al valor límite mientras los valores en el dominio se aproximan a un cierto número» es relativamente complicada para los estudiantes. Además, indican que, para adquirir una idea formal de límite, éste se debe visualizar, y para ello el estudiante debe construir «*un proceso en el dominio y un proceso en el rango y usar la función para coordinarlos*» (p. 187). Es decir, que los estudiantes deben ser capaces de relacionar lo que sucede en un intervalo en el rango y en un intervalo en el dominio a través de la función. Estos autores conjeturan que lo que hace tan inaccesible el concepto de límite a muchos estudiantes es la exigencia de coordinar dos procesos de aproximación con la cuantificación derivada de la aproximación métrica. En este sentido, indican que la dificultad de los estudiantes en construir la definición formal del límite, y en particular el desarrollo de una concepción métrica del límite de una función, es resultado de una comprensión insuficiente de la concepción dinámica del límite. Sin embargo, en contraposición Williams (1991) sugiere que la concepción dinámica del concepto de límite puede dificultar el progreso hacia el desarrollo de una concepción métrica y por tanto de la definición formal del concepto.

La controversia planteada sobre la predominancia de la concepción dinámica o de la concepción métrica en el proceso de construcción del significado del concepto de límite ha sido estudiada en el contexto de las sucesiones. Recientemente, Roh (2008) clasificó en tres grupos a los estudiantes dependiendo de las imágenes que tenían sobre límites de sucesiones: «*imaginan el límite de una sucesión como una asíntota*» –el gráfico de una sucesión se va acercando al límite, pero sin pasarse ni tocarlo– (p. 225), «*imaginan el límite como puntos de aproximación*» –infinitos términos de una sucesión están próximos a un valor, o están en una pequeña vecindad de un cierto valor que ellos consideran el límite– (p. 227) (cluster points), «*imaginan el límite como verdaderos puntos límite*» –observan un único valor L para el cual la diferencia entre cada término de la sucesión y L va disminuyendo hacia 0 o es igual a 0– (p. 229). Roh (2008) concluye que los estudiantes cuya imagen del límite de una sucesión ha sido conceptualizada como la imagen dinámica de una asíntota o como puntos de aproximación cometen errores al determinar la convergencia de una sucesión si las gráficas no son similares a la de una asíntota. Sin embargo, los estudiantes cuya imagen del límite es como puntos límite no tienen dificultades con la definición formal de límite al ser esta imagen métrica compatible con esta definición. Roh (2008) sugiere que «*la discusión real no es tanto si usar la imagen dinámica en la enseñanza, sino más bien cómo inducir imágenes dinámicas que sean compatibles con la definición de límite*» (p. 231).

En esta controversia, emerge con un papel primordial la influencia que desempeñan los modos de representación para favorecer o limitar la construcción del significado de límite. Desde una perspectiva general, se asume que el cambio de registros entre representaciones y la coordinación en las distintas representaciones es relevante para alcanzar una determinada comprensión (Duval, 2006). De esta manera, emerge una cuestión de investigación relativa a cómo el cambio de registro o la coordinación entre distintas representaciones influye en la comprensión del doble proceso de aproximación en el dominio y en el rango, y su coordinación posterior. Esta cuestión tiene su razón de ser, ya que los diferentes papeles que desempeñan los modos de representación no son equivalentes, porque una determinada concepción de límite puede ser sugerida en una representación pero no en otra. Engler y otros (2007), partiendo de esta hipótesis, diseñaron una secuencia de actividades para analizar el desarrollo de la comprensión de la idea de límite de una función usando los modos de representación verbal, tabular (numérico), analítico y gráfico. Los resultados indican que si bien los alumnos no tuvieron dificultades en comprender los límites cuando la representación es tabular (numérica) o gráfica, un alto porcentaje de ellos no interpretaron el significado de límite al trabajar con la representación algebraica. En esta misma dirección, Blázquez y Ortega (2001) indican que «*la utilización de distintos sistemas de representación a la hora de trabajar el concepto de límite choca con las dificultades del cambio de sistema de representación, que puede ser un obstáculo didáctico, por el abuso del registro algebraico en la enseñanza tradicional*» (p. 231).

Además, algunos resultados de investigaciones previas indican que la idea de límite presentada en una situación gráfica es más fuerte que la presentada de forma numérica (Monaghan, 2001), si bien la comprensión del concepto de límite en una de las representaciones no necesariamente implica la comprensión de la idea de límite en la otra representación (Elia et al., 2007). En esta línea, Moru (2009) realizó una investigación con 264 estudiantes sobre los obstáculos epistemológicos que aparecen en la comprensión del concepto de límite de una función en diferentes modos de representación: algebraico, geométrico, descriptivo y numérico. De esta investigación, en una de las cuestiones en la que se intentaba encontrar el límite de una función representada en modo algebraico cuando $x \rightarrow 0$, después de sustituir el valor de x por 0 en la función y obtener la indeterminación 0/0, se preguntaba por la conclusión que podían sacar de dicho resultado y se les daban seis opciones. El 24% de los estudiantes eligieron como respuesta «el límite no existe», y entre los estudiantes que utilizaron la regla de L'Hôpital unos cometieron errores al derivar y otros al simplificar una raíz cuadrada. Como consecuencia, Moru (2009) concluye que los estudiantes en el modo algebraico dan una respuesta sobre la existencia o no existencia de límite en una situación indeterminada (0/0) aunque sea incorrecta. Por otra parte, en el modo de representación geométrico, los estudiantes negaban la existencia de límite donde la función no estaba definida, o no interpretaban de forma adecuada la función definida a trozos, o necesitaban una fórmula para encontrar el valor del límite. Sin embargo, cuando se les pedía que escribieran lo que entendían por límite de una función en un punto, los estudiantes confundían el valor del límite con el valor de la función. Finalmente, en relación con el modo de representación numérico, la existencia o no de límite se debía responder a partir de una tabla de valores de x con los correspondientes valores de f(x). El 24% de los estudiantes dieron una respuesta correcta. Moru (2009) explica sus resultados indicando varias posibles causas entre las que indica que los estudiantes consideraban la aproximación como el proceso al límite, o a la propia ambigüedad del lenguaje al interpretar frases como «próximo a» y que los estudiantes tomaban como límite los límites inferiores o superiores.

Las investigaciones anteriores nos han proporcionado cierta información sobre las características de la comprensión del concepto de límite en los estudiantes y en particular sobre el papel desempeñado por las traslaciones entre los diferentes modos de representación, pero no aportan información sobre el papel relevante que desempeña la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango al establecer relaciones significativas entre la concepción dinámica y métrica del concepto de límite. Por lo tanto, estos resultados han puesto de manifiesto la necesidad de comprender mejor cómo se desarrolla la coordinación de los procesos de aproximación que deben desarrollarse en el rango y el dominio en la constitución del esquema de límite de una función y, en particular, del papel que desempeñan los diferentes modos de representación en el desarrollo de esta coordinación. Por ello hemos planteado las siguientes preguntas:

– ¿Cuál es el papel que desempeña la coordinación de los procesos de aproximación en el rango y en el dominio en la construcción de la relación entre la concepción dinámica y métrica del límite?

– ¿Cómo influyen las distintas representaciones en la comprensión de la coordinación de los procesos de aproximación?

2. MÉTODO

2.1. Participantes y contexto

En la investigación han participado 64 estudiantes de segundo curso de bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud (17-18 años). El currículum del primer curso de bachillerato incluye el concepto de límite de una sucesión dentro del capítulo de Aritmética y Álgebra; y en el capítulo de Análisis se introducen las funciones reales de variable real y cuestiones relativas al dominio, recorrido, crecimiento y decrecimiento, extremos de una función, operaciones y composición de funciones, aproximación al concepto de límite, estudio de las discontinuidades, derivada de una función y representación gráfica de funciones. Por lo tanto, en cierta medida estos estudiantes ya habían tenido una primera aproximación a la idea de límite de una función.

2.2. Instrumentos de recogida de datos

Se utilizó un cuestionario de 7 problemas con un total de 19 ítems. El diseño del cuestionario se realizó en tres etapas. En la primera, con el objetivo de considerar los elementos matemáticos y las características de la comprensión evidenciadas por otras investigaciones, se hizo una revisión de las investigaciones previas sobre comprensión del concepto de límite de una función, se analizaron libros de texto y diferentes materiales curriculares y se tuvo en cuenta la propia experiencia docente de los autores. En la segunda etapa, se analizaron las nociones de aproximación dinámica y métrica de límite de una función a fin de identificar los elementos matemáticos necesarios que la constituyen. Los elementos matemáticos considerados se muestran en la tabla 1.

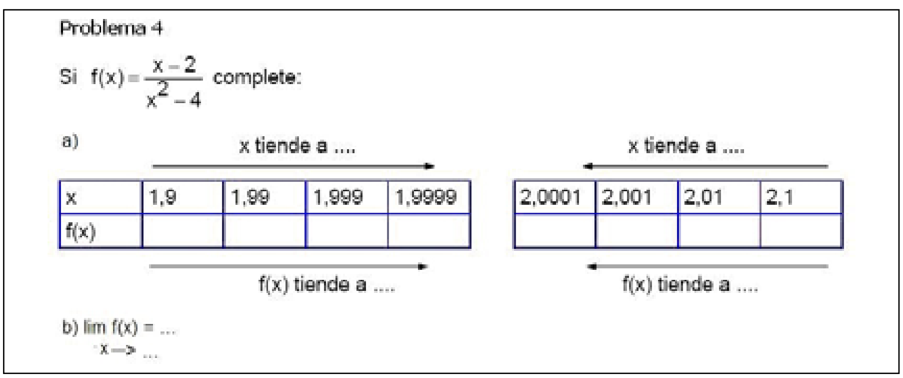
Tabla 1
Elementos matemáticos considerados en el esquema límite de una función.

- Sea *f* una función y x_0 un número real. El valor de la función f en $x = x_0$ (E0)
- Idea de aproximación
  - – *x* se aproxima al número *a* (E1)
  - – *f(x)* se aproxima a *L* (E1)
- Coordinación en la concepción dinámica: cuando *x* se aproxima al número *a*, sus imágenes *f(x)* se aproximan a *L* (E2)
- Coordinación en la concepción métrica: si se puede encontrar para cada ocasión *un x suficientemente cerca de a* tal que el valor de *f(x) sea lo suficientemente próximo a L* (E4)
- Formalización como una manifestación de ser consciente de la existencia del límite L de la función f(x) en el punto *a*, escribiendo lím f(x) = L (E3)

Tabla 2
Elementos matemáticos implicados en los ítems de los problemas.

	P1	P2				P3				P4				P5	P6				P7
	1	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	3d	4a	4ax	4af(x)	4b	5	6a	6b	6c	6d	7
E0		X	X							X									
E1	X					X	X				X	X		X	X	X			
E2				X				X									X		
E3					X				X				X					X	
E4																			X
R	N	G	G	G	G	N	N	N	N	A	N	A	A	N	N	N	N	N	N

Figura 1
Problema 4.



En la tercera etapa, seleccionamos 7 problemas (con un total de 19 ítems) en los que para su resolución debían usarse distintos elementos matemáticos considerados en tres diferentes representaciones (R): numérica (N), gráfica (G), algebraica (A) (Tabla 2).

A continuación, describimos dos de los siete problemas indicando la relación entre los elementos matemáticos del concepto de límite y los modos de representación. El problema 4 (Figura 1) procede de la investigación de Engler y otros (2007) y tiene por objetivos (a) mostrar si los estudiantes son capaces de coordinar las aproximaciones a un valor del dominio con las aproximaciones a un valor en el rango de la función en un contexto numérico; y (b) determinar en qué medida los estudiantes asocian la coordinación de las dos aproximaciones con la existencia del límite en la representación algebraica (A). Es decir, evaluar si los estudiantes:

a) Calculan el valor de la función en modo algebraico (E0).

b) Construyen un proceso de aproximación a un número determinado (x = 2) en el dominio a partir de los valores de x por la derecha, y por la izquierda (E1).

c) Construyen un proceso de aproximación a un número determinado (f(x) = 0,25) en el rango a partir de los valores de f(x) por la derecha y por la izquierda (E1).

d) Trasladan a lenguaje formal lo descrito en la tabla. Entendiendo que de esta manera asocian la coordinación de los dos procesos de aproximación (E2) con la existencia del límite de la función (E3).

Por otra parte, el problema 7 (Figura 2) tiene por objetivo evaluar si los estudiantes coordinan o no las aproximaciones en el dominio con las aproximaciones en el rango en términos de desigualdades (E4). La respuesta a la pregunta del problema (en modo numérico) exige que el estudiante ponga de manifiesto si es capaz o no de *«leer e interpretar correctamente la relación entre: las diferencias entre los valores del dominio y 0,5 y las diferencias entre los valores de la función y 1,5»* y, en consecuencia, su capacidad de coordinación o no de las aproximaciones en términos de diferencias.

2.3. Análisis

El análisis de las respuestas se ha realizado en dos fases:

Fase I
En primer lugar, tres investigadores realizaron una lectura conjunta de las respuestas a cada ítem con el objetivo de generar criterios y unificar la codificación dicotómica asignando respuesta correcta (1) e incorrecta (0). A continuación, ejemplificamos este proceso a partir de las respuestas dadas por tres estudiantes a los 4 ítems del problema 4 (Figura 1). El ítem 4a refleja el cálculo de los valores de la función en diferentes puntos, el ítem 4ax la aproximación en el dominio, el ítem 4afx la idea de aproximación en el rango y el ítem 4b la formalización. La respuesta al problema 4 del estudiante 36 (Figura 3) fue codificada como (1,1,0,0) ya que responde de forma correcta al ítem *4a y 4ax* al completar la tabla calculando los valores de la función y asociar la aproximación numérica por la derecha y por la izquierda en el dominio a

Figura 2
Problema 7.

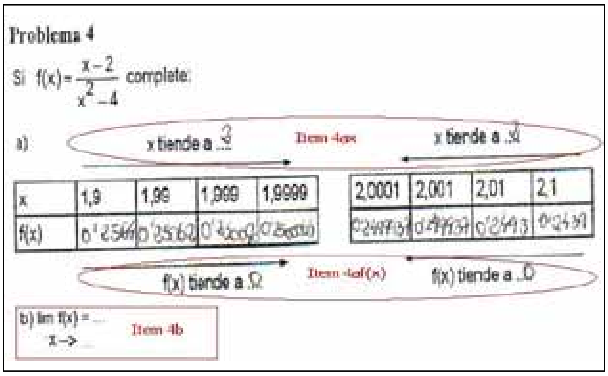
Alba, una estudiante de primero de bachillerato, ha ido sustituyendo valores en una función y ha obtenido las dos primeras columnas de la tabla. Después ha construido dos columnas más de diferencias.

X	f(x)	0,5 - x	1,5 - f(x)
0,3	0,994118	0,2000000	0,50588235
0,4	1,225000	0,1000000	0,27500000
0,45	1,356452	0,0500000	0,14354839
0,49	1,470265	0,0100000	0,02973510
0,499	1,497003	0,0010000	0,00299734
0,4999	1,499700	0,0001000	0,00029997
0,49999	1,499970	0,0000100	0,00003000
0,499999	1,499997	0,0000010	0,00000300
...	...	...	...
0,7	2,223077	-0,2000000	-0,72307692
0,6	1,828571	-0,1000000	-0,32857143
0,55	1,656897	-0,0500000	-0,15689655
0,51	1,530268	-0,0100000	-0,03026846
0,501	1,503003	-0,0010000	-0,00300267
0,5001	1,500300	-0,0001000	-0,00030003
0,50001	1,500030	-0,0000100	-0,00003000
0,500001	1,500003	-0,0000010	-0,00000300

Considerando únicamente los valores de la tabla, ¿cómo de próximos han de estar los valores de x de 0,5 para que la diferencia 1,5 – f(x) sea menor que 0,001? Explica el porqué.

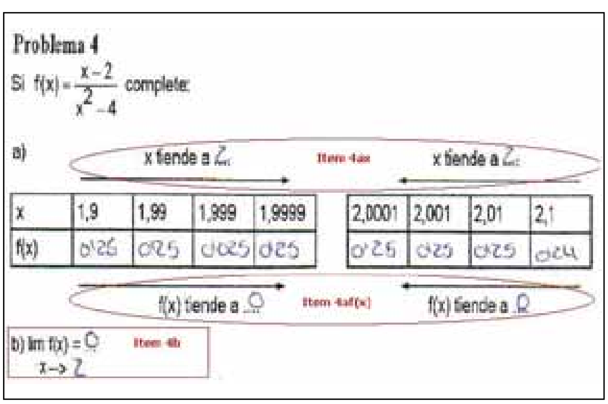
un número natural determinado (x = 2), pero responde de forma incorrecta al ítem 4a f(x) al no indicar correctamente la aproximación numérica de los valores de la función. Finalmente, el ítem 4b se codificó 0 al no haber sido contestado.

Figura 3
Respuesta dada por el alumno 36 al problema 4.



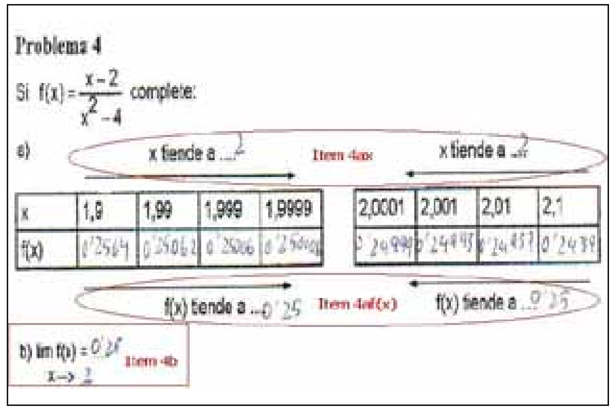
La respuesta del alumno 42 (Figura 4) fue codificada como (1,1,0,1). El alumno responde de forma correcta al ítem 4a, al completar la tabla calculando los valores de la función, y al ítem 4ax, asociando la aproximación numérica por la derecha y la izquierda, a un número natural determinado (x = 2) en el dominio. Y responde de forma incorrecta al ítem 4af(x) ya que no indica correctamente la aproximación numérica de los valores de la función. Finalmente, el ítem 4b, aunque es una respuesta incorrecta, fue codificado como 1 al estar la respuesta dada en consonancia con las respuestas de los ítems 4ax y 4af(x).

Figura 4
Respuesta dada por el alumno 42 al problema 4.



Por último, la respuesta dada por el alumno 8 al problema 4 (Figura 5) fue codificada como (1,1,1,1) ya que respondió de forma correcta a los cuatro ítems del problema.

Figura 5
Respuesta dada por el alumno 8 al problema 4.

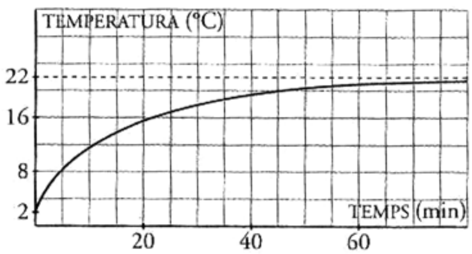


Fase II

Con el objetivo de ver si la coordinación de los procesos de aproximación en el rango y en el dominio favorece la comprensión de la concepción dinámica y métrica del límite y determinar cómo influyen las distintas representaciones en este proceso de coordinación, se llevó a cabo un análisis estadístico implicativo (Gras, Suzuki, Guillet y Spagnolo, 2008). Trigueros y Escandon (2008) señalan que, partiendo de una población E y de un conjunto de variables, en nuestro caso los estudiantes y los ítems del cuestionario, el análisis implicativo «*busca dar sentido estadístico a una implicación no estricta a ⇒ b*» (p. 66), pudiendo asignar un valor a la relación implicativa aunque algunos estudiantes puedan responder a y no b. Para ello, la implicación $a \Rightarrow b$ será admisible en una experiencia si el número de individuos de *E* que la contradicen es muy pequeño, en términos probabilísticos, en relación con el número de individuos esperado bajo la hipótesis de ausencia de relación. Si esto ocurre, se puede decir que *A,* que es el conjunto de observaciones que satisfacen la característica *a,* está «casi» contenido en *B*. Para realizar el análisis estadístico implicativo usamos el *software* CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) (Gras, Suzuki, Guillet y Spagnolo, 2008). Este análisis traduce gráficamente el conjunto de las relaciones cuasi-implicativas entre las variables en distintos niveles de significación.

Los elementos matemáticos del esquema del límite de una función (Tabla 1) puesto de manifiesto en cada ítem y el modo de representación usado en la redacción de cada problema configuran un total de 19 variables. Las variables han sido simbolizadas mediante un código. En dicho código, la letra Ei (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5) indica el elemento matemático que se pone de manifiesto en el ítem, la letra que le sigue hace referencia a la inicial del modo de representación usado en la presentación del problema (gráfico, numérico, algebraico) y, por último, el número y la letra en minúscula hacen referencia, respectivamente, al problema y al ítem al que se hace referencia. Por ejemplo, la codificación «E3G2d» hace referencia al elemento E3 «(no) existe límite de una función, L, en el punto a» y a que el problema se presenta de forma gráfica (G) en el ítem d del problema 2 siguiente:

«Hemos sacado de la nevera un vaso de agua y lo hemos dejado encima de la mesa de la cocina. Este gráfico muestra la temperatura del agua en grados centígrados a medida que pasa el tiempo.



a) ¿Qué temperatura alcanza el agua a los 20 minutos? ¿Y a los 40 minutos?
b) ¿Hay cambios en la temperatura del agua? ¿Cómo cambia en el intervalo 40-60 minutos?
c) ¿Qué temperatura alcanzará el agua a los 79,9 minutos, a los 79,99 minutos, a los 79,999 minutos…? ¿Qué temperatura alcanzará a los 80,1 minutos, 80,01 minutos, 80,001 minutos…?
d) La temperatura en el exterior de la nevera es de 22º C. ¿Alcanzará el agua la temperatura del exterior de la nevera?
e) Describe con tus palabras el cambio que ha sufrido la temperatura del agua.

La codificación de las respuestas de los 64 estudiantes fue organizada en una tabla de doble entrada, 19 x 64.

El análisis implicativo realizado con diferente nivel de significación estadística muestra diferentes ideas que indican de qué manera se articula la comprensión de la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango para construir el significado de la idea de límite y su formalización, así como la manera en que intervienen los diferentes modos de representación en este proceso. En este sentido, los niveles de significación estadística de las relaciones implicativas permite visualizar diferentes estructuras implicativas que muestran cómo se construye el significado de la idea de límite de una función.

3. RESULTADOS

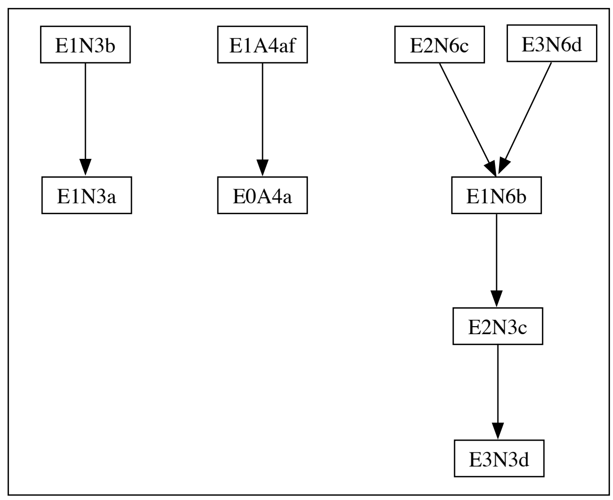
Los resultados están organizados en tres secciones. En la primera sección se describen las relaciones implicativas considerando los distintos modos de representación en el acceso al concepto y la formalización. En la segunda sección describimos la relación entre la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango con la comprensión métrica del límite. En la tercera sección mostramos el papel desempeñado por los modos de representación en la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y el rango y la información sobre la concepción dinámica del límite.

3.1. Acceso al concepto y formalización. El papel de los modos de representación

En el gráfico implicativo del 99% (Figura 6) aparecen tres estructuras implicativas independientes. En dos de ellas se relacionan elementos matemáticos en modo numérico (N) y, en la otra, elementos matemáticos en modo algebraico.

Una de las estructuras muestra la relación implicativa entre el proceso de aproximación a un número cuando las aproximaciones laterales son iguales (la del rango implica la del dominio) en un contexto numérico (N). Por su parte, con el modo de representación algebraico (A) aparece la implicación entre el proceso de aproximación a un número en el rango con el cálculo del valor de la función en un punto.

Figura 6
Gráfico implicativo del 99%.



La otra estructura muestra relaciones implicativas entre diferentes elementos en el modo numérico (N). Así muestra la relación entre la aproximación a un número en el rango (cuando las aproximaciones laterales son diferentes), la coordinación entre la aproximación en el dominio con la aproximación en el rango y manifestaciones de la existencia del límite. Las relaciones descritas en este nivel de significación indican que el modo numérico determina un cauce inicial para el desarrollo del proceso de coordinación en el dominio y en el rango incluso cuando las aproximaciones laterales son diferentes.

La figura 7 muestra la estructura implicativa que sale al 90% de significación estadística. Su análisis permite identificar dos ideas relevantes relativas al papel de los modos de representación en la formalización y acceso al concepto de límite de una función. En primer lugar, la relación entre la coordinación de la aproximación en el dominio con la aproximación en el rango cuando las aproximaciones laterales no coinciden en representación numérica (E2N6c) con la aproximación a un número en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden en la representación algebraica (E1A4af) (Figura 8). En segundo lugar, la relación ser consciente de la existencia del límite a través de la formalización en modo algebraico (E3A4b) con la aproximación a un número en el dominio (E1N4ax), en modo numérico (Figura 9). Estas dos ideas indican que los estudiantes empiezan a coordinar los procesos de aproximación en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales no son coincidentes a partir de la representación numérica. Y a esta coordinación se añade la existencia de límite cuando las aproximaciones laterales coinciden, relacionándose ya a la consciencia de la existencia o no de límite puesta de manifiesto por la formalización.

Figura 7
Gráfico implicativo del 90%.

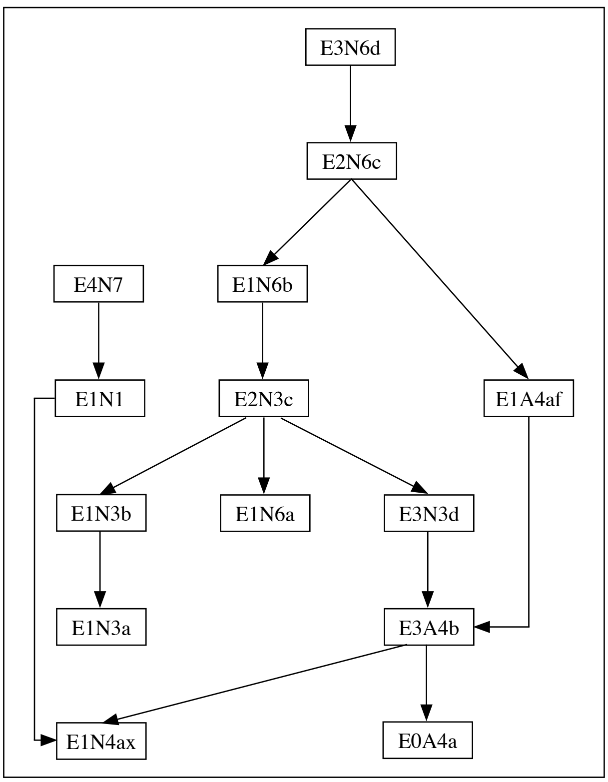


Figura 8
Relación implicativa entre la coordinación en modo numérico y la aproximación en modo algebraico.

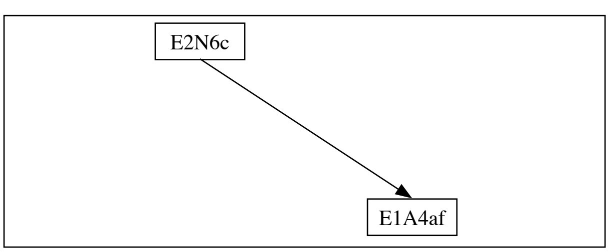
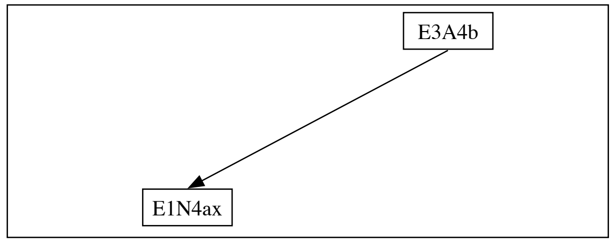


Figura 9
Relación implicativa entre ser conscientes de la existencia del limite en modo algebraico y la aproximación en modo de representación numérico.

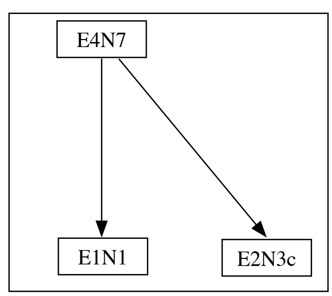


Los dos niveles de significación estadístico indican que el modo de representación numérico apoya el proceso de coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango, tanto si las aproximaciones laterales coinciden o no, y que el modo algebraico apoya el llegar a ser consciente de esta coordinación puesta de manifiesto a través de su formalización.

3.2. La coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango y la comprensión métrica de límite

Sólo en el nivel de significación 90% se establecen relaciones implicativas entre la comprensión métrica del límite en términos de desigualdades y la coordinación entre la aproximación en el dominio y en el rango. La comprensión métrica en términos de desigualdades en el modo numérico (E4N7) tiene dos implicaciones: (i) la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango (cuando aproximaciones laterales coinciden) (E2N3c), y (ii) la aproximación a un número (E1N1) (Figura 10).

Figura 10
La concepción métrica de límite en el gráfico implicativo del 90%.



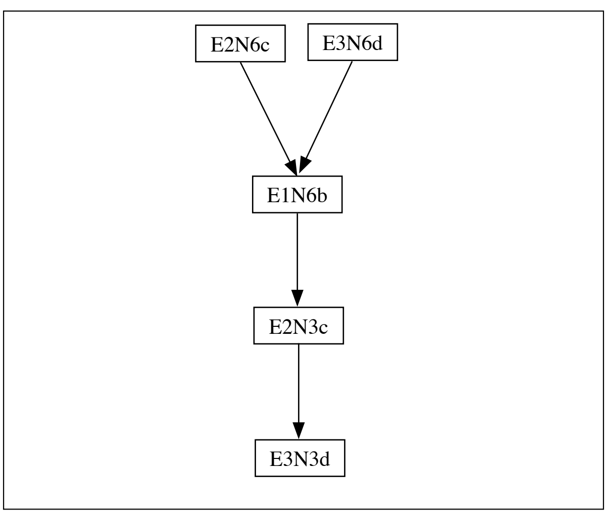
La doble relación implicativa en modo de representación numérico, E4N7 ⇒ E2N3c y E4N7 ⇒ E1N1 indica que la comprensión métrica del límite en términos de desigualdades implica el ser capaz de coordinar la aproximación en el dominio con la aproximación en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden, pero no implica necesariamente ser capaz de realizar esta coordinación cuando las aproximaciones laterales no coinciden.

3.3. La coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango y la comprensión dinámica de límite

En el diagrama implicativo del 99% de significación (Figura 6), la estructura implicativa E1N3b ⇒ E1N3a, en modo numérico, indica que si un estudiante comprende la aproximación a un número en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden, también comprenderá la aproximación a un número en el dominio. La comprensión de estos elementos es necesaria para poder establecer con posterioridad su coordinación. La estructura implicativa E1A4af ⇒ E0A4a en modo algebraico indica que comprender la aproximación a un número en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden está vinculado al cálculo de valores de la función en un punto necesario para la construcción de la sucesión de números que muestran la tendencia. Esta última implicación debe ser entendida en el contexto del tipo de ítems que constituían el cuestionario presentado a los estudiantes. Consideradas conjuntamente las dos estructuras implicativas anteriores, indican que la comprensión de las aproximaciones a un número cuando las aproximaciones laterales coinciden no implica necesariamente ser capaz de coordinar las dos aproximaciones. Este hecho establece la diferencia cognitiva entre el proceso de aproximación y el de coordinación. Estos datos indican que la coordinación de los procesos de aproximación cognitivamente es diferente de la mera compresión de la idea de tendencia que está en los procesos de aproximación.

Figura 11

La coordinación de los procesos de aproximación en el gráfico implicativo del 99%.



La tercera estructura implicativa identificada al 99% (Figura 11) relaciona cinco variables en modo numérico (N). Las relaciones implicativas entre las variables E2N6c, E3N6d y E1N6b muestran que la comprensión de la coordinación de las dos aproximaciones cuando las aproximaciones laterales no coinciden (E2N6c) o ser conscientes de la no existencia de límite cuando los límites laterales no coinciden (E3N6d) implica la comprensión de la aproximación en el rango cuando las aproximaciones laterales no coinciden (E1N6b). Esta implicación aporta nuevas evidencias sobre la relación entre los procesos de aproximación y la coordinación de estos procesos, pero ahora en el contexto de aproximaciones laterales no coincidentes. A su vez, la relación implicativa E1N6b ⇒ E2N3c muestra que la comprensión de la aproximación en el rango cuando las aproximaciones laterales no coinciden (E1N6b) implica la comprensión de la coordinación de las dos aproximaciones cuando las aproximaciones laterales coinciden (E2N3c). En otras palabras, estos datos indican que la comprensión de las aproximaciones cuando las aproximaciones laterales no coinciden implica ser capaz de coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden. Es decir, la no coincidencia de las aproximaciones laterales a un número en el rango «incide» en la generación de relaciones implicativas.

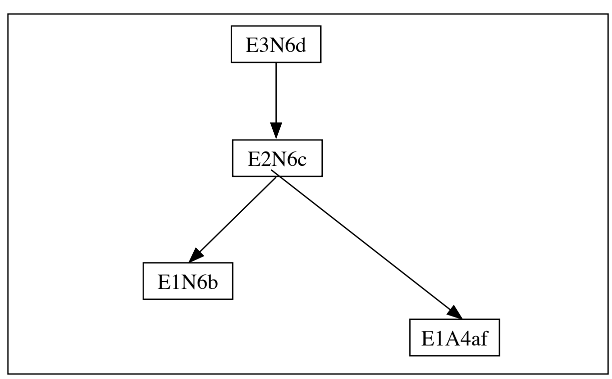
Esta estructura implicativa muestra que la relación entre los procesos de aproximación y su coordinación en el modo numérico se construye de manera paulatina en los contextos en los que las aproximaciones laterales coinciden y en los que no coinciden.

Finalmente, la relación implicativa E2N3c ⇒ E3N3d muestra que ser capaz de coordinar las dos aproximaciones cuando las aproximaciones laterales coinciden implica ser conscientes de la existencia de límite (cuando los límites laterales coinciden).

Por otra parte, en el diagrama implicativo del nivel de significación del 90% (Figura 7) la relación E3N6d ⇒ E2N6c (Figura 12) indica que en el modo de representación numérico (N), ser consciente de la no existencia del límite cuando los límites laterales no coinciden implica ser capaces de coordinar las dos aproximaciones. A su vez, la comprensión de esta coordinación tiene dos implicaciones: (i) la comprensión de la aproximación a un número en el rango cuando las aproximaciones laterales no coinciden (E1N6b) en representación numérica, y (ii) la comprensión de la aproximación a un número en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden (E1A4af) en representación algebraica.

Figura 12

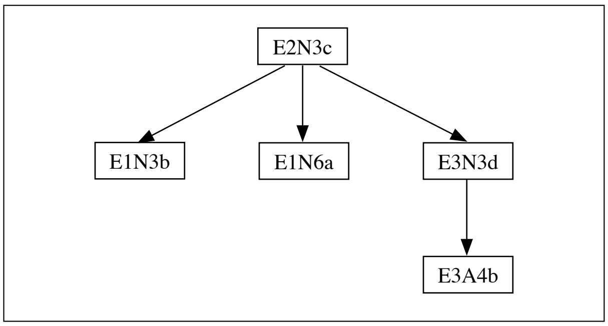
La coordinación de los procesos de aproximación en el gráfico implicativo del 90%



Esta doble relación implicativa, E2N6c ⇒ E1N6b y E2N6c ⇒ E1A4af (Figura 12), indica que ser capaz de coordinar la aproximación en el dominio con la aproximación en el rango cuando las aproximaciones laterales no coinciden se apoya en la comprensión de la aproximación en modo numérico y algebraico tanto si las aproximaciones laterales coinciden como si no coinciden.

Figura 13

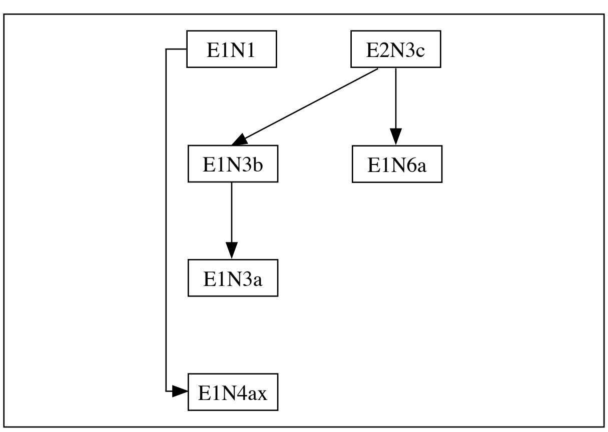
Implicaciones de la comprensión en modo numérico de la coordinación cuando las aproximaciones laterales coinciden.



A su vez, la comprensión en modo numérico de la coordinación cuando las aproximaciones laterales coinciden (E2N3c) tiene tres implicaciones (Figura 13): (i) la comprensión de la aproximación en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden (E1N3b), (ii) la comprensión de la aproximación en el dominio (E1N6a), y (iii) ser consciente de la existencia del límite cuando los límites laterales coinciden (E3N3d). Por otra parte, cuando los límites laterales coinciden, ser consciente de la existencia del límite (E3N3d) en modo numérico implica ser consciente del límite (E3A4b) en modo algebraico.

Figura 14

Comprensión de la idea de aproximación en el dominio en modo de representación numérico como inicio de comprensión de la concepción dinámica.



Las relaciones implicativas, E2N3c ⇒ E1N6a; E1N1 ⇒ E1N4ax y E1N3b ⇒ E1N3a (Figura 14) indican que la comprensión de la idea de aproximación en el dominio, en el modo de representación numérica, es el punto de partida sobre el que se construye el conocimiento de la concepción dinámica del concepto de límite.

4. CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación fue aportar información sobre cómo los estudiantes de bachillerato construyen la concepción dinámica y métrica del límite de una función en un punto a partir de la coordinación de los procesos de aproximación en el rango y en el dominio, y cuál es el papel que desempeñan los diferentes modos de representación en establecer relaciones entre estas concepciones. El análisis implicativo usado nos ha permitido identificar características de la comprensión del concepto de límite en dos niveles de significación, aportando información sobre el papel de los modos de representación numérico y algebraico en la coordinación de los procesos de aproximación que constituyen la comprensión de la idea de límite. Los resultados indican que la comprensión métrica del límite en términos de desigualdades se apoya en que el estudiante sea capaz de coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden, aunque no sea capaz de esta coordinación cuando las aproximaciones laterales no coinciden.

4.1. La coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango y la comprensión métrica de límite

Al intentar dar una respuesta a la primera pregunta que nos hemos planteado en esta investigación, podemos sugerir que la construcción de la concepción dinámica del límite se realiza de forma paulatina. En un primer momento, al observar el gráfico implicativo del 99%, hemos visto como punta del iceberg que la idea de aproximación en el rango cuando los límites laterales coinciden se apoya, por una parte, en el cálculo de valores de la función en modo algebraico y, por otra, en la idea de aproximación en el dominio en modo numérico. Esta idea de aproximación en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden es cognitivamente diferente de la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango. En el mismo gráfico implicativo del 99%, la idea de aproximación en el rango, cuando las aproximaciones laterales no coinciden, se apoya en la coordinación de la aproximación en el dominio con la aproximación en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden. La construcción paulatina de la concepción dinámica del límite se realiza mediante los procesos de aproximación diferenciando cuando las aproximaciones laterales coinciden y cuando no lo hacen. En un segundo momento, el gráfico implicativo del 90% indica que (i) la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales no coinciden se apoya tanto en la aproximación en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden como cuando no coinciden; (ii) el ser consciente de la existencia del límite a través de la formalización se apoya en la comprensión de la aproximación a un número en el dominio; y (iii) la concepción métrica del límite en termino de desigualdades se apoya, por una parte, en la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden, y, por otra parte, en la comprensión de lo que significa la aproximación a un número. Por tanto, la construcción paulatina de la concepción dinámica del límite se realiza mediante la coordinación de la aproximación en el dominio con la aproximación en el rango diferenciando cuando las aproximaciones laterales coinciden y cuando no lo hacen. Sin embargo, un hecho importante puesto de manifiesto por nuestros resultados es que la comprensión métrica del límite en términos de desigualdades implica ser capaz de coordinar la aproximación en el dominio con la aproximación en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden, pero no implica necesariamente ser capaz de establecer esta coordinación cuando las aproximaciones laterales no coinciden. La importancia de este hecho radica en que podría señalar la diferencia cognitiva que para el estudiante resulta tener que coordinar la aproximación en el dominio y el rango coincidan o no las aproximaciones laterales, y que la comprensión métrica del límite se podría iniciar con la construcción previa de la concepción dinámica pero en el caso de la coincidencia de las aproximaciones laterales en el rango.

Los resultados indican la dificultad que los estudiantes tienen para coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango en términos de desigualdades. De forma similar, Cottrill y otros (1996) indicaron que «*solo unos pocos estudiantes*» fueron más allá de la coordinación de los dos procesos y que sólo tenían una vaga idea sobre desigualdades, y que «*no hubo estudiantes*» que manifestaran una comprensión métrica del límite. De la misma forma, Blázquez y Ortega (2000) conjeturaron que a los estudiantes «*les cuesta interpretar desigualdades*», y que manifestaban una «*interpretación errónea de tablas numéricas*».

4.2. Modos de representación y la coordinación de los dos procesos de aproximación en el dominio y en el rango en la comprensión de la concepción dinámica de límite

Nuestros resultados indican que el modo de representación de mayor nivel implicativo para la comprensión de la coordinación de la aproximación en el dominio con la aproximación en el rango es el modo de representación numérico. En este mismo sentido Moru (2009) indicó que en un problema en modo numérico el 24% de los estudiantes comprendieron las aproximaciones en el dominio y en el rango, y además, indica que la mayoría de los estudiantes coordinaban los dos procesos de aproximación, $f(x) \rightarrow L$ cuando $x \rightarrow a$, «*al colocar los valores de L y a, correctos o incorrectos, en el lugar apropiado*» (p. 449). Pero el gráfico implicativo del 90% indica que el modo de representación numérico apoya el proceso de coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango tanto si las aproximaciones laterales coinciden o no, y que el modo algebraico apoya el llegar a ser consciente de esta coordinación puesta de manifiesto a través de su formalización.

Finalmente, el hecho de que en los gráficos implicativos del 99% y del 90% no se observen relaciones implicativas en las que intervengan las variables «coordinación de la aproximación en el dominio con la aproximación en el rango (E2G2c)» o «ser consciente de la existencia del límite (E3G2d)», en modo gráfico, pensamos que se debe a la presentación en modo gráfico del problema 2. La gráfica que se muestra en este problema presenta una función asintótica. En consecuencia, la ausencia de las variables en modo gráfico podría estar justificada por su vinculación a la idea «gráfica de asíntota» que según Cornu (1991) es un obstáculo epistemológico en el desarrollo histórico del concepto de límite (Kidron, 2010). En este sentido, los resultados obtenidos deben ser interpretados considerando este hecho. En posteriores trabajos será necesario plantear tareas que lleven a los estudiantes a activar también el modo gráfico, y poder estudiar así cómo el modo gráfico puede llegar a influir en el desarrollo de la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango y en la relación entre la concepción dinámica y métrica del concepto de límite de una función en un punto. Además, es necesario estudiar la influencia de las distintas representaciones en la comprensión del concepto de límite de una función mediante entrevistas posteriores a la resolución del cuestionario con la finalidad de recabar una mayor y mejor información. Por otra parte, dos recomendaciones para la enseñanza emergen del estudio realizado, (i) la necesidad de utilizar el modo numérico para la introducción del concepto de límite de una función como aproximación dinámica, y (ii) introducir la no existencia del límite cuando los límites laterales son distintos en diferentes modos de representación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBÉ, J., BOSCH, M., ESPINOSA, L. y GASCÓN, J. (2005). Didactic Restrictions on the Teacher's Practice: The case of Limit of Functions in Spanish High Schools. *Educational Studies in Mathematics*, 59, pp. 235-268.

BLÁZQUEZ, S. y ORTEGA, T. (2000). El concepto de límite en la Educación Secundaria, en Cantoral, R. (ed.). *El futuro del cálculo infinitesimal,* pp. 331-354. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

BLÁZQUEZ, S. y ORTEGA, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 4(3), pp. 219-236.

BLÁZQUEZ, S., ORTEGA, T., GATICA, S. y BENEGAS, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 9(2), pp. 189-209.

CAMACHO, A. y AGUIRRE, M. (2001). Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 4(3), pp. 237-265.

CORICA, A. R. y OTERO, M.R. (2009). Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de la evaluación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 12(3), pp. 305-331.

CORNU, B. (1991). Limits, en D. Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 153-166. Dordrecht: Kluver.

COTTRILL, J., DUBINSKY, E., NICHOLS, D., SCHWINGENDORF, K., THOMAS, K. y VIDAKOVIC, D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning whit a Coordinated Process Scheme. *Journal of Mathematical Behavior,* 15, pp. 167-192.

DUVAL, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 61, pp. 103-131.

ELIA, A., GAGATSSI, A., PANAOURA, A., ZACHARIADES, T. y ZOULINAKI, F. (2009). Geometric and Algebraic Approaches in the Concept of «Limit» and the Impact of the «Didactic Contract». *International Journal of Science and Mathematics Education,* 7(4), pp. 765-790.

ENGLER, A., VRANCKEN, S., HECKLEIN, D., MÜLLER, D. y GREGORINI, M.I. (2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita. *UNIÓN,* 11, pp. 113-132.

ESPINOSA, L. y AZCÁRATE, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de «límite de función»: Una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias,* 18(3), pp. 355-368.

FERNÁNDEZ, M. (2000). Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema de límite de funciones con el uso de un asistente matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 3(2), pp. 171-187.

GRAS, R., SUZUKI, E., GUILLET, F. y SPAGNOLO, F. (eds.) (2008). *Statistical Implicative analysis. Theory and Applications*. Londres: Springer.

HARDY, N. (2009). Students' Perception of Institutional Practices: The Case of Limits of Functions in College Level Calculus Courses. *Educational Studies in Mathematics,* 72(3), pp. 341-358.

KIDRON, I. (2010). Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education*, DOI: 10.1007/s10763-010-9258-8.

KIM, D., SFARD, A. y FERRINI-MUNDY, J. (2005). Students' Colloquial and Mathematical Discourses on Infinity and Limit, en Chick, H.L. y Vincent, J.L. (eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 3, pp. 201-208. Melbourne: PME.

MONAGHAN, J. (1991). Problems whit the Language of Limits. *For the learning of Mathematics,* 11(3), pp. 20-24.

MONAGHAN, J. (2001). Young Peoples' Ideas of Infinity. *Educational Studies in Mathematics,* 48, pp. 239-257.

MORU, E.K. (2009). Epistemological Obstacles in Coming to Understand the Limit of a Function at Undergraduate Level: A Case from the National University of Lesotho. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 7, pp. 431-454.

OEHRTMAN, M. (2009). Collapsing Dimensions, Physical Limitation, and Other Students Metaphors for Limit Concepts. *Journal for Research in Mathematics Education,* 40(4), pp. 396-426.

PRZENIOSLO, M. (2004). Images of the Limit of a Function in the Course of Mathematical Studies at the University. *Educational Studies in Mathematics,* 55, pp. 103-132.

ROH, K.H. (2008). Students' Images and their Understanding of Definitions of the Limit of a Sequence. *Educational Studies in Mathematics,* 69, pp. 217-233.

ROH, K.H. (2010). An empirical study of students' understanding of a logical structure in the definition of limit via the ε-strip activity. *Educational Studies in Mathematics,* 73, pp. 263-279.

SIERPINSKS, A. (1985). Obstacles Epistemologiques Relatives a la Notion de Limite. *Recherches en Didactique de la Mathematique,* 6(1), pp. 5-67.

SIERRA, M., GONZÁLEZ, M.T. y LÓPEZ, C. (2000). Concepciones de los alumnos de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria sobre el Límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 3(1), pp. 71-85.

TALL, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking, en Tall, D. (ed.). *Advanced mathematical thinking*, pp. 3-21. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

TRIGUEROS, M. y ESCANDON, C. (2008). Los conceptos relevantes en el aprendizaje de la graficación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa,* 13(36), pp. 59-85.

VALDIVÉ, C. y GARBIN, S. (2008). Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 11(3), pp. 413-450.

WILLIAMS, S.R. (1991). Models of Limit Held by College Calculus Students. *Journal for Research in Mathematics Education, 22* (3), 219 – 236.

WILLIAMS, S.R. (2001). Predications of the Limit Concept: An Application of Repertory Grids. *Journal for Research in Mathematics Education, 32* (4), 341-367.

[Artículo recibido en febrero de 2011 y aceptado en junio de 2011]

Coordination of approximations in secondary school students' understanding of the concept of limit

Valls, Julia[1]; Pons, Joan[2] y Llinares, Salvador[3]
[1] Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante
[2] Departamento de Matemáticas. IES Mutxamel. Alicante
[3] Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante
julia.valls@ua.es
jpt11@alu.ua.es
sllinares@ua.es

Summary

Previous research about post-secondary students' understanding of the concept of limit of a real function has shown the influence of the dynamic conception on the metric conception. The dynamic conception of limit concept can be characterized by the following idea: «if x approaches a, its images [$f(x)$] approach L» and it could be expressed by $\lim_{x \to a} f(x)$where f is a function, a a real number and L the limit of the function. On the other hand, the metric conception of limit is given by

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \partial > 0 : \forall x, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Although the first students' approach to the limit concept is the «idea of approximation», Cottrill et al. (1996) suggest that the dynamic conception can be relatively complicated for the students. These authors suggest what makes the concept of limit inaccessible to many students is the requirement of coordinating two processes of approximation with the quantification derived from the metric conception. In this sense, they indicate that the difficulty of the students in constructing the formal definition of the limit, and especially the development of a metric conception of the limit of a function can be the result of an insufficient development of the dynamic conception. Nevertheless, Williams (1991, 2001) suggests that the dynamic conception of the limit concept can make the progress difficult towards the development of a metric conception. In this controversy, the issues about the influence of the different representation modes for supporting or limiting the meaningful construction of limit concept emerge. Some previous investigations indicate that the idea of limit presented in a graphical situation is stronger than the presented in a numerical form. However, the understanding of the concept of limit in one of the representations not necessarily implicates its understanding in another representation. This previous research points out the relevant role played by the coordination of approximation in the domain and in the range in order to generate significant relations between the dynamic and metric conception of the concept of limit.

The aim of this study was to characterize the role of the coordination of the approximation processes in the understanding of limit notion.

The test we developed and provided to the students consists of 7 problems with 19 items. It was solved by 64 post-secondary school students (16-18 years old). The different items considered the mathematical elements from limit concept and the numerical (N), graphical (G) and algebraic (A) representations. The answers to the seven problems reflecting dynamic and metric conceptions of the limit notion were analyzed by three researchers. Afterwards, a statistical implicative analysis was carried out (Gras, Suzuki, Guillet, & Spagnolo, 2008) using the software CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive). From this analysis, implicative diagrams were derived, which involve relations between students' answers and the items of the test.

The relations described in the implicative diagram indicate that the numerical representation mode determines the start for the development of the process of coordination in the domain and in the range even when the lateral approximations are different. The results indicate that the metric understanding of the concept of limit in terms of inequality supported the coordination of the approximations in the domain and in the range when the lateral approximations coincide, though students were not capable of making this coordination when the lateral approximations do not coincide. This fact indicates the cognitive differences between the coordinationof the approximation in the domain with the approximation in the range in the case of the lateral approximations coincide or not.

This finding suggests that the metric understanding of the concept of limit begins with the previous construction of the dynamic conception in case of coincidence of the lateral approximations in the range. An important fact revealed by these results is that the metric comprehension of the concept of limit in terms of inequalities involves being capable of coordinating the approximations in the domain and the range when the lateral approximations coincide, but it does not necessarily imply the student to becapable of establishing this coordination when the lateral approximations do not coincide. The results also show the important role developed by the numerical representation in the coordination of approximation processes and as a previous step to the coordination in the algebraic representation and in becoming awareof the existence of limit or not. Finally, the algebraic representation seems to support this process of awarenessof this coordination revealed across its formalization.