ANÁLISIS DE LOS NIVELES DE COMPRENSIÓN DE LOS OBJETOS *f'(a)* Y *f'(x)* EN PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Badillo, Edelmira[1]; Azcárate, Carmen[1] y Font, Vicenç[2]
[1] Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona
[2] Departament de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica. Universitat de Barcelona
Edelmira.Badillo@uab.cat
Carmen.Azcarate@uab.cat
vfont@ub.edu

Resumen. En este artículo describimos los niveles de comprensión de la relación entre $f'(a)$ y $f'(x)$ de cinco profesores de matemáticas que desarrollaban la asignatura de Matemáticas con alumnos de 16-18 años en diferentes centros educativos de Colombia. La teoría APOE, ampliada con aportaciones semióticas, se utiliza como marco teórico fundamental. Los cinco profesores contestaron a un cuestionario indirecto sobre la comprensión de $f'(a)$ y $f'(x)$ y, posteriormente, fueron entrevistados con viñetas. Los resultados muestran que la comprensión de estos dos macro-objetos, $f'(a)$ y $f'(x)$ puede estar relacionada con la estructura de los esquemas gráfico y algebraico de los mismos, y con los conflictos semióticos asociados.

Palabras clave. Conocimiento del profesor, derivadas, teoría APOE, representaciones semióticas.

Analysis of Mathematics teachers' level of understanding of the objects *f'(a)* and *f'(x)*

Summary. This paper describes the level of understanding of the relation between $f'(a)$ and $f'(x)$ among five Mathematics teachers who were teaching classes to 16-18 year olds in different schools in Colombia. The analysis is based on the APOS framework, in this case with the addition of certain semiotic aspects. The five teachers responded to an indirect questionnaire about their understanding of $f'(a)$ and $f'(x)$, and were subsequently interviewed in relation to a series of vignettes. Results illustrate how the comprehension of these two macro-objects, $f'(a)$ and $f'(x)$, can be related to the structure of both graphic and algebraic schemes and the associated semiotic conflicts.

Keywords. Teacher's knowledge, Derivatives, APOS Framework, Semiotic Representations.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo nos situamos, básicamente, en un enfoque cognitivo, la teoría APOE (Dubinsky, 1991, 1996; Asiala et al., 1996; Asiala et al., 1997), para estudiar la comprensión de los profesores participantes en este estudio sobre los macroobjetos $f'(a)$ y $f'(x)$. Partiendo de dicha posición cognitivista, esta investigación pretende mediar entre las orientaciones cognitiva y semiótica de la comprensión. Dicho de otra manera, consideramos que el marco teórico cognitivo APOE es insuficiente para explicar la comprensión de los profesores si no se amplía con la mirada que nos ofrecen las perspectivas semióticas sobre la comprensión. Dentro de estas últimas, hemos tenido en cuenta la teoría de los registros semióticos de Duval (1995, 2006) y el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007; Font y Contreras, 2008).

La cuestión específica que abordamos en este trabajo es la siguiente: ¿Qué niveles de comprensión de los macroobjetos $f'(a)$ y $f'(x)$ tienen los profesores de matemáticas que participaron en el estudio?

Comenzamos el trabajo revisando, en la sección 2, la literatura sobre la descomposición genética de la derivada y, más en general, los trabajos realizados en el marco de la teoría APOE sobre la comprensión de la derivada. En la sección 3, explicaremos la metodología utilizada. En la sección 4, se presentan los resultados del estudio sobre los niveles de comprensión del esquema de la derivada exhibidos por los profesores. Y terminamos en la sección 5, con unas consideraciones finales.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Una aproximación teórica para reflexionar sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas: la teoría APOE

Una de las problemáticas que más ha interesado en el área de educación matemática es la de determinar cuál es el conocimiento didáctico-matemático del profesorado, requerido para enseñar matemáticas. Se han dado diversas respuestas; entre otras: «conocimiento pedagógico» (Moore, 1974), «conocimiento pedagógico del contenido» (Shulman, 1986) y «conocimiento matemático para la enseñanza» (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill et al., 2008).

La línea de investigación sobre el conocimiento del profesor ha evolucionado desde perspectivas más cognitivas (estudio del pensamiento del profesor), cuyas bases se cimentan en la psicología cognitiva (Shulman, 1986; Leinhardt y Greeno, 1986; Simon y Tzur, 1999; Moreno y Azcárate, 2003), hasta perspectivas más socioculturales (estudio del conocimiento y práctica profesional del profesor), cuyas bases se cimentan en principios antropológicos y epistemológicos del conocimiento (Espinoza y Azcárate, 2000; Lerman, 2001; Llinares, 2000; Sensevy et al., 2005; Gavilán, García y Llinares, 2007; Ramos y Font, 2008).

A partir de la última década del siglo pasado, se pasó a investigar el conocimiento del profesor en temas de contenido matemático específico, lo cual permitió comprender mejor el pensamiento matemático de los profesores y su influencia sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (García y Llinares, 1998; Norman, 1993; Even, 1993). En esta misma línea, nos ha interesado indagar la comprensión que tienen los profesores de los macroobjetos $f'(a)$ *y* $f'(x)$ cuando se enfrentan a la resolución de situaciones problema enunciadas en diferentes contextos y que requieren traducciones y relaciones entre diferentes representaciones semióticas. Dado que en el caso de la derivada intervienen dos funciones ($f(x)$ *y* $f'(x)$), utilizaremos la expresión «traducciones y relaciones» para indicar tanto los tratamientos y conversiones entre diferentes representaciones de la misma función (($f(x)$ o $f'(x)$) –siguiendo la terminología de Duval (1995, 2006)–, como el paso de un tipo de representación de la función a una representación de la función derivada.

Dado que la teoría APOE ha mostrado ser útil para describir la construcción por parte de estudiantes de varios conceptos matemáticos (Dubinsky, 1991, 1996; Asiala et al., 1996; Baker, Cooley y Trigueros, 2000; Trigueros y Martínez, 2010; Cooley, Trigueros y Baker; 2007; Sánchez-Matamoro, García y Llinares, 2006), consideramos que también podía resultar útil en la comprensión de cómo se estructura el concepto de derivada por parte de profesores de matemática en ejercicio y por esta razón la hemos utilizado como principal referente teórico.

APOE es un acrónimo de las iniciales de los siguientes términos: acciones, procesos, objetos y esquemas, que son las construcciones mentales que, en el marco de esta teoría, un sujeto realiza para construir significados a partir de las situaciones problemas. Una *acción* es una transformación de objetos que el sujeto percibe como algo externo. Dicha transformación se lleva a cabo como reacción a una indicación que da información precisa sobre los pasos que se van a realizar. Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, ésta puede *interiorizarse* en un *proceso*. El *proceso* es una transformación basada en una construcción interna, ya no dirigida por estímulos externos al individuo, de forma que éste puede describir los pasos involucrados en la transformación e incluso invertirlos. Los *objetos* se pueden construir cuando un sujeto reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones. Entonces está pensando en este proceso como un *objeto*. En este caso, el proceso se ha *encapsulado* en un *objeto*. Finalmente, una vez construidos, objetos y procesos pueden ser interconectados de varias formas: por ejemplo, dos o más procesos pueden ser *coordinados* ligándolos mediante una composición u otras formas; procesos y objetos se relacionan en virtud de que los primeros actúan sobre los segundos. Una colección de procesos y objetos puede ser organizada en una manera estructurada para formar *esquemas* (Asiala et al., 1996; Dubinsky, 1996). Los mecanismos mentales que permiten hacer estas construcciones son las *abstracciones reflexivas* (interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión). La propuesta teórica APOE permite delimitar y describir el camino hacia la construcción, de un concepto matemático, en la mente de un sujeto. La descripción teórica de los pasos que ha de seguir esta construcción se llama *descomposición genética*.

La teoría APOE se ha aplicado para describir e interpretar el desarrollo de un concepto en la mente de los estudiantes en el nivel preuniversitario –por ejemplo, el estudio de Clark y otros (1997) sobre la comprensión de los estudiantes de las reglas de derivación; y el estudio Baker y otros (2000) sobre la comprensión de estudiantes de un problema complejo del cálculo (gráfico)–. Estas investigaciones han desvelado que la teoría APOE era insuficiente para analizar sus datos sobre la comprensión de los estudiantes cuando los conceptos eran considerados como esquemas, pero que la tríada de Piaget y García (1982) en el desarrollo de un esquema (*intra*, *inter* y *trans)* era útil en la interpretación de los niveles de comprensión. El uso de la tríada aporta ventajas, en especial cuando un esquema puede depender mucho del desarrollo de uno o más esquemas. En tales casos, se ha de estar preparado para identificar esos esquemas componentes y su multidimensionalidad. Por consiguiente, en la comprensión del desarrollo de un esquema global, se deben identificar no sólo los esquemas componentes del desarrollo en términos de acciones, procesos y objetos, sino también su coordinación. Dentro del esquema global, su coordinación nos conduce a nuevas estructuras que se construyen sobre las propiedades de los esquemas componentes (niveles *inter*, *intra* y *trans*).

En la etapa *intra*, se construyen relaciones internas del objeto o fenómeno. Las explicaciones en este nivel son locales y particulares. Un objeto en el nivel *intra* no puede ser reconocido por el estudiante como debería ser y su forma es similar a la de una *generalización* simple (Baker et al., 2000). En este nivel el estudiante se concentra en una acción repetitiva o una operación, pero no tiene la capacidad para relacionar la acción con el sistema de condiciones a través del cual puede extender sus aplicaciones e incluirlas en un sistema de transformaciones interdependientes.

Posteriormente, en la etapa *inter*, el individuo construye relaciones entre los objetos y fenómenos de conocimiento. En el nivel *inter,* los estudiantes usan, comparan y reflexionan sobre ideas que ellos tienen aisladas y esto les lleva a construir relaciones y transformaciones (Baker et al., 2000). En este nivel los estudiantes pueden establecer relaciones y pueden deducir de una operación inicial, una vez la tienen comprendida, otras operaciones que están implicadas o que pueden coordinarse con operaciones similares. Este proceso lleva a los estudiantes a un grupo de sistemas utilizando un método que incluye nuevas transformaciones.

Y, finalmente, en la etapa *trans*, las relaciones construidas adquieren mayor coherencia y se estructuran las relaciones de la etapa anterior. En el nivel *trans,* el estudiante reflexiona sobre estas coordinaciones y relaciones desarrollando nuevas estructuras. A través de las *síntesis* de las transformaciones en el nivel *inter*, el estudiante construye y tiene conciencia de que el esquema está completo, y puede percibir nuevas propiedades globales que eran inaccesibles en otros niveles anteriores (Baker et al., 2000).

En cada etapa de la tríada el estudiante reorganiza el conocimiento adquirido durante la etapa anterior. La progresión es gradual y no necesariamente lineal. En el proceso de aprendizaje los individuos desarrollamos diferentes *esquemas*, y el crecimiento y cambio de cada *esquema* puede ser descrito utilizando la tríada. Mientras se desarrolla el conocimiento, las personas construyen muchos *esquemas* coexistentes y todos ellos están constantemente cambiando y varían en los niveles de evolución. Por tanto, en algunas situaciones problemáticas una persona puede necesitar coordinar varios *esquemas*. Cada *esquema* está constituido por acciones, procesos, objetos y otros *esquemas* y sus relaciones. En particular un *esquema* puede influir fuertemente en el desarrollo de uno u otros *esquemas*. En cada caso, se pueden identificar algunos componentes del *esquema* y su multidimensionalidad. Por tanto, en la comprensión del desarrollo del *esquema* en general, uno puede identificar no sólo el crecimiento de una de las componentes del *esquema*, sino también la coordinación. Entonces, en el *esquema* general esta coordinación lleva a nuevas estructuras que fueron construidas sobre las propiedades de las componentes de los *esquemas*.

2.2. Limitaciones de la teoría APOE

Somos conscientes de ciertas limitaciones que presenta la teoría APOE. En concreto hay dos que, en nuestra opinión, son muy relevantes:

1) En la teoría APOE, el constructo «objeto» se considera como el producto del proceso de reificación (encapsulación en la terminología de dicha teoría). Esta caracterización, que proviene básicamente de la tradición psicológica, es insuficiente para afrontar la problemática ontológica que presentan los objetos matemáticos. Para afrontar esta limitación resulta útil tener en cuenta la propuesta de caracterización de la emergencia de los objetos matemáticos a partir de las prácticas que ofrecen las perspectivas semióticas, en especial el enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007).

2) Los constructos de representación o «medio semiótico» no son considerados explícitamente en la teoría APOE. En el marco APOE se echa de menos un tratamiento específico del papel de las representaciones semióticas asociadas a los conceptos matemáticos.

2.3. Ampliaciones semióticas de la teoría APOE

Investigaciones recientes que han ampliado la teoría APOE con perspectivas semióticas recurren a la teoría de los registros semióticos (TRS) de Duval (Trigueros y Martínez, 2010) o bien al enfoque ontosemiótico (EOS) (Font et al., 2010).

Con relación a la TRS, Trigueros y otros (2010) en un estudio sobre el análisis de cómo los alumnos trabajan con funciones de dos variables, sostiene que,

> «En particular, el análisis de gráficas de funciones, junto con otras representaciones, es fundamental en la construcción de relaciones fuertes entre las componentes de un posible esquema para el concepto de función de dos variables. La descripción de los tratamientos y las conversiones como acciones o procesos para llevar a cabo con representaciones como gráficos o símbolos añade especificidad y un nuevo punto de vista de la descripción y el análisis utilizando la teoría APOE. Estos dos marcos conceptuales se pueden utilizar de una manera coherente y complementaria, tanto en

> el análisis de respuestas de los estudiantes y las estrategias cuando trabajan en las tareas y para diseñar la enseñanza en el futuro.» (Trigueros y Martínez, 2010, p. 5).

En este trabajo, tal como propone Trigueros y Martínez (2010), hemos tenido en cuenta la importancia de los registros semióticos. En especial, la siguiente manera de entender el cálculo de la función derivada (Font, 2005, p. 118).

> «(…) se considera que el cálculo de *f'*(*x*) a partir de (*x*) se puede interpretar como una práctica, en la que a su vez se han de considerar tres subprocesos:
> 1) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar *f(x)*
> 2) El paso de una representación de *f*(*x*) a una forma de representación de *f'*(*x*)
> 3) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar *f'*(*x*)»

Los diferentes tipos de representaciones que intervienen en estos tres subprocesos son cuatro representaciones de la función y cuatro de su función derivada (descripción verbal, gráfica, fórmula y tabla).

Más en general, en este trabajo hemos considerado tres aportaciones del EOS: 1) la reflexión sobre los registros semióticos realizada en Font (2005); 2) las ideas de complejidad semiótica, trama de funciones semióticas y conflicto semiótico (Font y Contreras, 2008); y, 3) la reflexión realizada por este marco teórico sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y su emergencia a partir de las prácticas.

Con relación al segundo aspecto, el EOS ha puesto de manifiesto la complejidad semiótica –concretada en tramas de funciones semióticas que deben ser activadas (Font y Contreras, 2008)– relacionada con el cálculo de la derivada en un punto y de la función derivada. Según como se gestione dicha complejidad semiótica en el proceso de instrucción, se puede facilitar (o no) la aparición de *conflictos semióticos*, entendidos como disparidad o desajuste entre los contenidos atribuidos a una misma expresión por el alumno y la institución. Por ejemplo, en algunos libros de texto se puede observar un conflicto semiótico potencial causado por la introducción implícita de la función derivada en la definición de la derivada en un punto, al usar la notación incremental

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}_{(en\ x\ =\ a)}$$

como primera notación (Badillo, Font y Azcárate, 2005; Font y Contreras, 2008).

La regularidad con la que se manifiestan en los alumnos los conflictos semióticos relacionados con la función derivada se considera en el EOS un indicador de un fenómeno relevante: la dificultad de comprensión de la noción de «derivada» y la principal variable explicativa que da este enfoque es la complejidad semiótica, concretada en una trama de funciones semióticas, asociada a esta noción.

Las nociones de complejidad semiótica, trama de funciones semióticas y conflicto semiótico nos han sido muy útiles para refinar la descomposición genética de los macroobjetos *f*(*x*) y *f'*(*x*) utilizada en esta investigación.

Con relación al tercer aspecto, el enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007) considera que el proceso por el cual los objetos matemáticos emergen a partir de las prácticas es muy complejo y que deben ser distinguidos, al menos, dos niveles de emergencia. En un primer nivel, emergen representaciones, definiciones, proposiciones, procedimientos, problemas y argumentos, mientras que, en un segundo nivel, emerge un objeto matemático, por ejemplo el objeto función, que es considerado como un objeto que puede ser representado por diferentes representaciones, que puede tener varias definiciones equivalentes, que tiene propiedades, etc. En nuestra opinión, esta manera de entender la emergencia de los objetos matemáticos mejora lo que se dice en la teoría APOE sobre los objetos.

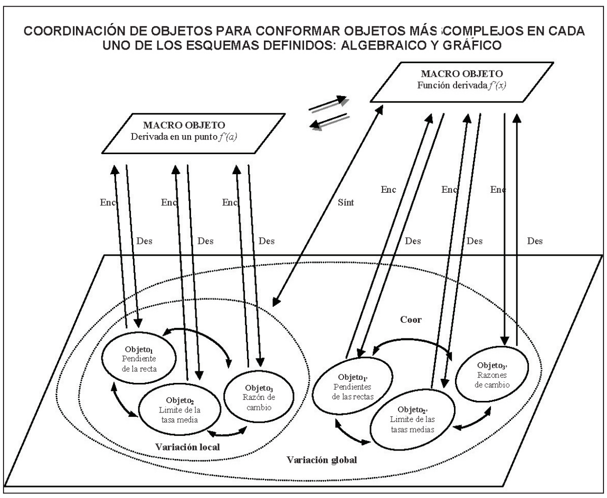
Nuestra opción ha sido mantenernos en el marco de la teoría APOE pero ampliando nuestra manera de entender los objetos matemáticos que forman los esquemas en la dirección que sugiere el EOS. En concreto hemos postulado la siguiente hipótesis: el esquema del concepto de derivada está conformado por la coordinación de varios objetos matemáticos. Concretamente, en este estudio nos centraremos en describir el esquema de la derivada como la conexión interna de dos objetos complejos o macroobjetos, como son: el macroobjeto derivada en un punto *f'*(*a*) y el macroobjeto función derivada *f'*(*x*). Estos dos macroobjetos, a su vez, son el resultado de la coordinación, consciente o inconsciente, de tres objetos: pendiente de la recta (O_1), límite de las tasas medias de variación (O_2) y razón de cambio (O_3).

La elección de considerar el esquema de la derivada conformado por los dos *macro*objetos *f'*(*a*) y *f'*(*x*), los cuales a su vez son el resultado de la conexión interna de tres objetos previos (O_1, O_2 y O_3), la hicimos basándonos en la información que nos proporcionan tres fuentes. En primer lugar, el análisis teórico inicial del concepto de derivada que nos lleva a la construcción de la descomposición genética del concepto de derivada, la cual toma en cuenta, entre otras cosas, la historia, la epistemología del mismo concepto y la ampliación ontosemiótica comentada en el párrafo anterior. En segundo lugar, la información que aportan las diferentes investigaciones en didáctica de la matemática que se han centrado en el estudio tanto del aprendizaje como de la enseñanza del concepto de derivada (Azcárate, 1990), las cuales han revelado la complejidad y riqueza que tiene el concepto y las dificultades que tiene la comprensión del mismo cuando un sujeto se enfrenta a la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios. Y, finalmente, el análisis preliminar de las respuestas que han dado los profesores que participan en este estudio a los dos instrumentos que diseñamos para analizar su comprensión sobre el concepto de derivada (Anexos 1 y 2), que han evidenciado diferentes grados de comprensión de los objetos definidos, dependiendo del contexto en el que se enuncia el problema y las representaciones semióticas asociadas a dichos problemas.

2.4. El esquema y los niveles de comprensión de los macroobjetos *f'(a)* y *f'(x)* en esta investigación

La coordinación de los *macro*objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios enunciados en diferentes contextos nos permite describir el nivel de comprensión del esquema de la derivada que tienen los sujetos. Para llegar a tener un esquema coherente del concepto de derivada se requiere coordinar dos esquemas previos, uno *algebraico* y otro *gráfico*, los cuales son el resultado de la coordinación de los macroobjetos $f'(a)$ y $f'(x)$, que requieren a su vez de la coordinación interna de tres objetos: O_1, O_2 y O_3 (Figura 1).

Figura 1
Coordinación de los macroobjetos *f'(a)* y *f'(x)*.



En las tablas 1, y 2, presentamos las categorías de cada uno de estos dos esquemas. Para ello, se ha utilizado la descomposición genética que hemos construido para la relación de los *macro*objetos $f'(a)$ y $f'(x)$. Dicha descomposición genética no se detalla en este trabajo por cuestiones de espacio.

3. METODOLOGÍA

En este artículo analizamos la comprensión que muestran cinco profesores de matemáticas de secundaria de diferentes institutos, públicos y concertados, del Departamento del Atlántico de Colombia, que aceptaron de manera voluntaria formar parte de la investigación sobre el conocimiento profesional del profesor de matemática. Estos profesores enseñaban la derivada en primero y segundo curso de bachillerato (16-18 años). Se trata de un estudio de casos.

Se diseñó un instrumento, que hemos denominado *cuestionario indirecto* (ver anexo 1), en el cual se les pedía a los profesores que trataran de explicitar por escrito, lo más detalladamente posible, lo que consideraban que debería responder uno de sus estudiantes que hubiera comprendido el concepto de derivada, como resultado del proceso de estudio que ellos hubieran impartido. Para lo cual, previamente, tenían que resolver los problemas propuestos. Este formato nos permitió acceder indirectamente, de manera integrada y por separado, a las formas de conocer el concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje.

Todos los profesores resolvieron por escrito los problemas propuestos. Para determinar si los datos obtenidos realmente reflejaban el nivel de comprensión del concepto de derivada que tenían los profesores, realizamos una triangulación de datos y les propusimos una entrevista semiestructurada sobre las respuestas del cuestionario. En ese ambiente de intercambio, aprovechamos para presentar un segundo cuestionario, de cinco problemas, en viñetas (ver anexo 2), con el que pudimos indagar directamente, aspectos conceptuales de los *macroobjetos* $f(x)$, $f'(a)$ y $f'(x)$ que nos permitieran validar y contrastar los resultados obtenidos en el primer cuestionario (Badillo, 2003).

La selección de las tareas del cuestionario 1 y de las viñetas de la entrevista se realizó en dos etapas. En la primera, se confeccionó una lista de tareas cuya resolución implicaba la coordinación de los macroobjetos $f'(a)$ y $f'(x)$ en contextos algebraicos y gráficos. En la segunda, se reelaboró la muestra de manera que las tareas fuesen similares a las que el grupo de profesores proponían a sus alumnos. Una de las consecuencias de este proceso fue que algunas tareas que se han considerado relevantes en otras investigaciones no se contemplaron en los instrumentos utilizados –por ejemplo, tareas de construcción de gráficas a partir de ciertas condiciones que cumple la función, algunas de las cuales son sobre discontinuidades (García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2010).

La metodología implementada para el análisis de esta componente del conocimiento profesional fue la siguiente:

Primera fase:
Elaboración del constructo «niveles de comprensión de los esquemas gráfico y algebraico de la derivada» (Tablas 1 y 2), a partir de la descomposición genética elaborada por los autores, la cual tuvo en cuenta descomposiciones genéticas previas, aportes de la historia y epistemología de este concepto y los resultados de una investigación previa (Badillo, 1999).

Tabla 1
Niveles de comprensión del *esquema algebraico* de la derivada.

NIVEL INTRA	NIVEL INTER	NIVEL TRANS
– No existe una clara coordinación entre los objetos f'(a) y f'(x),lo cual se detecta en las aplicaciones concretas (cuando utilizan el objeto razón de cambio o bien el objeto pendiente de la recta tangente). – Se necesita tener o construir la expresión simbólica de la función para obtener el valor de la derivada en un punto: ES f (x) ⇨ ES f'(x) X – Se tiene una perspectiva proceso de la diferenciación de funciones, lo cual implica que para obtener la expresión simbólica de f'(x) a partir de f (x) se aplican correctamente las técnicas de derivación directa (definición formal del concepto en términos del límite) y de derivación indirecta (reglas de derivación), pero sin justificación alguna de las mismas, y luego para calcular f'(a) se calcula f'(x) en x = a. – No existe una coordinación de los objetos: razón de cambio, pendiente de la recta tangente y límite de las tasas medias de variación (O_1, O_2 y O_3). – Dado que los objetos O_1, O_2 y O_3 no están coordinados no han llegado a construir el objeto f'(x) como síntesis de estos tres objetos, lo cual lleva a cometer errores, como por ejemplo: confundir la f'(x) con la expresión simbólica de la recta tangente a la curva en un punto. – El objeto razón de cambio sólo se sabe aplicar en situaciones de la cinemática para resolver la velocidad instantánea [$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t}$]. – En determinados problemas en los que es necesario calcular el límite de las razones de cambio se aplica correctamente tanto las reglas de derivación como la definición de la función derivada en términos de límite. Esto lleva a considerar la posibilidad de que hay una coordinación entre estos dos objetos, pero cuando se les pregunta sobre esta relación dan respuestas que muestran que no son conscientes de ella o que no la tienen elaborada.	– Dependiendo del contexto de la situación relacionan los objetos f'(a) y f'(x), como elemento y clase. – La función derivada se entiende como la función que asocia, a cada valor *x* del dominio de la función, el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. La pendiente de la recta tangente que es entendida básicamente como el coeficiente de la *x* en la ecuación de la recta tangente (coeficiente angular). – Dependiendo del contexto de la situación puede darse una coordinación entre los objetos: pendiente de la recta tangente, razón de cambio y límite de las tasas medias de variación. Pero en otros contextos esta relación no se da. – El objeto razón de cambio ahora se puede aplicar a situaciones donde la magnitud que depende del tiempo no es sólo el espacio [$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t}$; $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta mag}{\Delta t}$]. – Se aplican correctamente las técnicas de derivación directa (definición formal del concepto en términos del límite) y de derivación indirecta (reglas de derivación), justificando el uso de las mismas, y aparecen algunas técnicas de aproximación (función *pendiente*), mostrando una perspectiva objeto de la diferenciación de funciones. – En algunos contextos para calcular el límite de las razones de cambio aplican correctamente tanto reglas de derivación como la definición de función derivada en términos de límite, mostrando una coordinación entre estos dos objetos, pero en determinados casos puede no darse esa coordinación.	– El objeto f'(x), según la situación, se puede entender como una clase de objetos los cuales son la derivada de la función en cada punto del dominio, o bien como un objeto en el que se pueden realizar nuevas acciones, p. e.: la segunda derivada. – La expresión simbólica de objetos f'(x) es el modelo matemático que les permite asociar, a cada punto del dominio, el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto; y obtener el límite de las razones de cambio y el límite de las tasas medias de variación. – Independientemente del contexto de la situación se coordinan los tres objetos: pendiente de la recta tangente, límite de las razones de cambio y límite de las tasas medias de variación. – El objeto razón de cambio se puede aplicar ahora a situaciones donde se puede considerar las variaciones de dos magnitudes cualesquiera, sin necesidad de limitarse a variaciones donde la variable independiente sea el tiempo [$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t}$; $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta mag}{\Delta t}$; $\lim\limits_{\Delta mag \to 0} \frac{\Delta mag}{\Delta mag'}$]. – Se hacen traducciones entre diferentes representaciones de funciones. – Se coordinan algunas representaciones de la función y la función derivada y se hacen algunas traducciones entre diferentes representaciones de la función derivada . – Se manejan y coordinan justificadamente todas las técnicas directas e indirectas de derivación: utilizando límites, reglas de derivación, ecuaciones diferenciales, y aproximación gráfica y numérica.

Tabla 2

Niveles de comprensión del *esquema gráfico* de la derivada.

NIVEL INTRA	NIVEL INTER	NIVEL TRANS
– Se tiene una única interpretación de la representación gráfica de la recta tangente a la gráfica de una curva, como el límite de las rectas secantes. – Se interpreta gráficamente f'(x) como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, y la gráfica de f'(x) se tiende a confundir con la gráfica de esta recta tangente a la gráfica de la función en un punto. – Los objetos O_1, O_2 y O_3 son analizados aisladamente en términos de las condiciones analíticas. Más concretamente, se puede utilizar la inclinación de la recta tangente para determinar el signo de la derivada de la función en algunos puntos concretos (intuitivamente se aplica el criterio de la primera derivada), pero no se generaliza esta técnica para hacer la representación gráfica de f'(x). – Para obtener la gráfica de f'(x) a partir de la gráfica de la función se requiere hacer las siguientes traducciones y relaciones: $G\ f(x) \rightarrow ES\ f(x) \Rightarrow ES\ f'(x) \rightarrow G\ f'(x)$ – Dado que no hay una coordinación entre los objetos O_1, O_2 y O_3, se tiene dificultad para resolver problemas que involucran el objeto razón de cambio a partir de la información que le proporciona la gráfica de la función. – La interpretación de la derivada como velocidad instantánea le permite saber en una gráfica los puntos en los que la velocidad es máxima, mínima o nula. Sin embargo, sólo lo puede hacer en un punto o varios puntos y no en infinitos puntos (sean intervalos o bien todo el dominio). – En situaciones que involucran razones de cambio se tiende a confundir la variación media con la variación instantánea.	– Se tienen dos, o más, interpretaciones de la representación gráfica de la recta tangente a la gráfica de una curva: como el límite de las rectas secantes y como la recta más próxima a la gráfica de la función (curva) en el entorno del punto. – Se coordinan el objeto de pendiente de la recta tangente a la gráfica en un punto con el objeto límite de las razones de cambio en un punto, estas últimas aplicadas ahora a la variación de magnitudes diferentes del espacio que dependen del tiempo. – Se maneja con propiedad el criterio de la primera derivada para describir la variación local y global de la función expresada gráficamente, y por tanto, pueden hacer la gráfica de f'(x) a partir de la gráfica de f (x). – Se comienza a distinguir los objetos f'(a) de f'(x), pero dependiendo del contexto de la situación aún se tiene dificultad para diferenciarlos. – De manera incipiente y especialmente en los puntos de inflexión se utiliza gráficamente el criterio de la segunda derivada coordinadamente con el criterio de la primera derivada, pero no pueden justificar gráficamente que si f''(x) >0 en un intervalo del dominio de la función, entonces la función es cóncava hacia arriba en dicho intervalo. – Pueden obtener la gráfica de f '(x) a partir de la gráfica de la función ($G\ f(x) \rightarrow G\ f'(x)$), sin tener que hacer las siguientes traducciones y relaciones: $G\ f(x) \rightarrow ES\ f(x) \Rightarrow ES\ f'(x) \rightarrow G\ f'(x)$ – Se diferencia la variación media de la variación instantánea, en problemas representados en diferentes contextos.	– Se coordinan los objetos O_1, O_2 y O_3. Por tanto, se puede entender la pendiente de la recta tangente como: 1. La inclinación de la recta tangente. 2. Límite de las pendientes de las rectas secantes. 3. Cuando la situación se relaciona con la variación de dos magnitudes cualesquiera, representadas gráficamente, pueden entender que la pendiente de la recta tangente es el límite de las razones de cambio. – El objeto razón de cambio es aplicado ahora a la variación de dos magnitudes cualesquiera. – Se agrupa en una nueva función todas las derivadas en cada punto, como el valor de las pendientes de la recta tangente a la gráfica de la función en cada punto del dominio, como el límite de las tasas medias de variación y como el límite de las razones de cambio en cada punto del dominio. – Se maneja con propiedad los criterios de la primera y la segunda derivada para describir la variación local y global de la función representada gráficamente, lo cual le permite hacer las siguientes relaciones entre representaciones de la función y de la función derivada: $G\ f(x) \rightarrow G\ f'(x)$; $G\ f'(x) \rightarrow G\ f(x)$; $DV\ f'(x) \rightarrow G\ f(x)$; $DV\ f(x) \rightarrow G\ f'(x)$ – Se discrimina entre aquellas relaciones y propiedades que están incluidas y aquellas que no están incluidas en la coordinación de los tres objetos, demostrando una *coherencia* en el esquema.

Segunda fase:

1. Transcripción literal de la entrevista sobre la justificación del proceso de resolución de los problemas del cuestionario, incorporando la respuesta de cada una de las preguntas del mismo.

2. Transcripción literal de la entrevista con viñetas.

3. Primera síntesis de la información: elaboración de unas tablas resumen donde se destacaban los aspectos más significativos en las respuestas de los profesores del concepto de derivada como objeto matemático.

4. Construcción de las redes sistémicas (Bliss, Monk y Ogborn, 1983), de las respuestas de los profesores a cada uno de los problemas del cuestionario y de las viñetas, a partir de las categorías de los niveles de comprensión del esquema algebraico y gráfico definidos en las tablas 1 y 2.

5. Triangulación de la información para construir las líneas de coherencia del proceso de resolución (Garbin, 2005; Garbin y Azcárate, 2002). En total construimos tres líneas de coherencias, clasificando los problemas de la siguiente manera:
   – Línea de coherencia 1: relación entre los objetos pendiente de la recta tangente y razón de cambio en la construcción del *macroobjeto f'(a)*. Se tuvieron en cuenta las respuestas de cada profesor a los problemas 3 y 4 del cuestionario, y la parte de la entrevista en la que el profesor comentaba estos dos problemas y el problema V de las viñetas.
   – Línea de coherencia 2: la relación gráfica entre los *macroobjetos f'*(*a*) y *f'*(*x*). Se tuvieron en cuenta las respuestas de cada profesor a los problemas 1 y 2 del cuestionario, y la parte de la entrevista en la que el profesor comentaba estos dos problemas y el problema IV de las viñetas.
   – Línea de coherencia 3: la relación algebraica entre los *macroobjetos f'*(*a*) y *f'*(*x*). Se tuvieron en cuenta las respuestas de cada profesor al problema 5 del cuestionario, y la parte de la entrevista en la que el profesor comentaba este problema y los problemas I, II y III de las viñetas.

6. Determinación del nivel de comprensión de cada uno de los profesores participantes (Tabla 3).

4. RESULTADOS DEL ESTUDIO: NIVELES DE COMPRENSIÓN DEL ESQUEMA DE LA DERIVADA EXHIBIDOS POR LOS PROFESORES

El análisis particular de los cinco casos nos permite ver una pluralidad en los niveles de comprensión que tienen los profesores que participaron en este estudio sobre el concepto de derivada, tal y como se ilustra en la tabla 3. Por cuestiones de espacio nos limitaremos a presentar de manera global la clasificación de los profesores de la tabla 3 y justificaremos la caracterización de los profesores A y B, citando textualmente algunos fragmentos de las entrevistas, donde justifican las respuestas dadas a los problemas planteados, que fueron significativos para definir el nivel de comprensión del esquema de la derivada.

Así, encontramos dos profesores que tienen un nivel *intra* algebraico-*intra* gráfico (*intra-intra*) caracterizado por tener una perspectiva proceso de los macroobjetos *f(x), f'*(*a*) y *f'*(*x*), que no son coordinados en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios enunciados en diferentes contextos. Esta perspectiva proceso de los macroobjetos *f'(a)* y *f'(x)* está determinada a su vez por la no coordinación interna de los objetos O_1, O_2 y O_3 que engloba el macroobjeto *f'(a)*; y por no llegar al proceso de síntesis de estos tres objetos O_1, O_2 y O_3 en los objetos O'_1, O'_2 y O'_3 que engloba el macroobjeto f'(x). Igualmente, en los procesos de resolución de problemas que involucran los objetos anteriores, los procesos cognitivos que activan estos profesores son la coordinación de acciones externas y de procesos, y la interiorización de estas acciones en procesos.

Tal como se ha dicho, la ubicación de un profesor en un determinado nivel de comprensión es el resultado de la triangulación del análisis de las tres líneas de coherencia. Si consideramos el caso del profesor A, y tomamos, por ejemplo, la información que nos proporciona el análisis de la línea de coherencia 2 –situaciones de aplicación de la comprensión gráfica de los macroobjetos *f(x)*, *f'(a)* y *f'(x)*–, vemos que este profesor necesita recurrir a la expresión simbólica de la función para poder hacer traducciones y relaciones entre diferentes representaciones de estos tres macroobjetos. Este hecho nos permite inferir que tiene una perspectiva proceso del concepto de función en la que a partir del objeto expresión simbólica de *f(x)*

Tabla 3

Análisis general de los niveles de comprensión del concepto de derivada que exhiben los profesores.

Nivel del esquema *algebraico* / **Nivel del esquema *gráfico***	***INTRA***	***INTER***	***TRANS***
INTRA	A, E	C	?
INTER			D
TRANS		?	B

hace transformaciones mentales dinámicas a este objeto produciendo nuevos objetos, pero evidencia dificultades en desarrollar acciones (mentales) sobre el objeto matemático función que la transformen globalmente (Dubinsky et al., 1996). Esta perspectiva proceso del concepto de función tiene más peso que la propia interpretación gráfica del concepto como *y = f (x)* a la hora de resolver problemas.

Un indicador de que este profesor necesita recurrir a la expresión simbólica de la función lo tenemos en el siguiente segmento de la entrevista realizada sobre la respuesta al ítem *a)* del problema 1 del cuestionario:

> «Calculo la pendiente de la recta L, luego la ecuación. Obtenida la ecuación calcula f (5) en la ecuación que debe darle 3 (...) Bueno, yo creo que el alumno lo realizaría así, porque con el proceso comprobaría que f (5) le debe dar 3, tal y como se ve en el gráfico.»

La ubicación del profesor A en el nivel de comprensión *intra-intra* se justifica también por otras respuestas. Por ejemplo, analizando su respuesta a los ítems *b)* y *c)* del mismo problema, consideramos que el profesor A exhibe una perspectiva proceso de *f'(a)* y de *f'(x)*, donde para calcular el valor de *f'(a)* a partir de la información que le proporciona la gráfica necesita: (1) encontrar la expresión simbólica que representa la función, o en su defecto la expresión simbólica de la recta tangente; (2) aplicar técnicas indirectas de derivación para encontrar la expresión simbólica de *f'(x)*; y (3), sustituir el valor de *x = a* en la expresión simbólica de *f'(x)* para obtener el valor de *f'(a)*. Esto nos permite inferir, por un lado, que el profesor A tiene dificultad para coordinar, tanto gráfica como algebraicamente, los objetos derivada de la función en un punto y el objeto pendiente de la recta tangente de la gráfica de la función en ese punto; y por otro lado, que deja como responsabilidad del alumno la comprensión de los macroobjetos *f'(a)* y *f'(x)* como elemento y clase, lo cual puede ser un indicador de la dificultad que tiene el profesor para relacionar y coordinar estos macroobjetos.

> «En la ecuación de la recta tangente hallada calcula dy/dx en x = 5, que representa la derivada de la función en el punto de tangencia, seguramente el alumno deducirá que *f'(x)* = m_L, *f'(5)* será la pendiente de la recta L que en este caso da 2/5. (...) Sí, porque el *f'(5)* como interpretación es la pendiente de la recta tangente en ese punto.»

Creemos conveniente decir que, si bien es cierto que a los profesores A y E los hemos ubicado en este mismo nivel de comprensión, en el análisis particular de cada uno de los casos se describen sutiles diferencias en los procesos de resolución de los problemas; pero encontramos en sus esquemas dificultades y errores comunes, tales como reducir el macroobjeto *f'(x)* al macroobjeto *f'(a)*, e incluso confundir la expresión simbólica de *f'(x)* con la expresión simbólica de la recta tangente a la curva en un punto, o bien, la gráfica de *f'(x)* con la gráfica de la recta tangente a la curva en un punto.

Encontramos un solo profesor en el nivel de comprensión *inter* algebraico-*intra* gráfico (*inter-intra*). El nivel *inter-intra* que tiene el profesor C está caracterizado por una perspectiva proceso de los macroobjetos *f'(a)* y *f'(x)* que, dependiendo del contexto de la situación, son coordinados en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios. Esta perspectiva proceso de los macroobjetos *f'*(*a*) y *f'*(*x*) está determinada a su vez dependiendo del contexto de la situación, por la coordinación interna de los objetos O_1, O_2 y O_3 que engloba el macroobjeto *f'(a)*; y, dependiendo del contexto del problema, se da el proceso de síntesis de estos tres objetos O_1, O_2 y O_3 en los objetos O'_1, O'_2 y O'_3 que engloba el macroobjeto *f'(x)*. Igualmente, los procesos cognitivos que activa el profesor C en la resolución de problemas relacionados con el concepto de derivada son la coordinación de acciones y procesos, la interiorización de estas acciones en procesos; y sólo podríamos hablar de los procesos cognitivos de encapsulación de procesos en objetos y desencapsulación de objetos en procesos con relación a la diferenciación de funciones (esquema algebraico), puesto que encontramos que el profesor C hace un uso justificado de las técnicas de derivación.

En el nivel de comprensión *trans* algebraico-*inter* gráfico tenemos al profesor D (*trans-inter*). Este nivel está caracterizado por tener una perspectiva objeto de los macroobjetos *f'(a)* y *f'(x),* que son coordinados en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios, pero dependiendo del contexto en que son enunciados. Esta perspectiva objeto de los macroobjetos *f'*(*a*) y *f'*(*x*) está determinada a su vez por la coordinación interna de los objetos O_1, O_2 y O_3 que engloba el macroobjeto *f'(a)*; y por el proceso de síntesis de estos tres objetos O_1, O_2 y O_3 en los objetos O'_1, O'_2 y O'_3 que engloba el macroobjeto *f'(x)*. Igualmente, encontramos que el profesor D en los procesos de resolución de los problemas planteados activa, dependiendo del contexto de la situación, una serie de procesos cognitivos complejos como son interiorización de acciones en procesos, encapsulación de procesos en objetos y desencapsulación de objetos en procesos, síntesis de procesos en esquemas y coordinación de acciones y procesos. Un aspecto clave para haber ubicado el esquema del profesor D en el nivel *inter* gráfico está en las dificultades que hemos detectado en la comprensión gráfica de las funciones acumulativas y algunas contradicciones entre los razonamientos algebraicos y gráficos aplicados al objeto tasa media de variación (simultáneamente usaba argumentos del cálculo diferencial y del cálculo integral).

Finalmente, el profesor B tiene un nivel de comprensión del esquema de la derivada *trans* algebraico-*trans* gráfico (*trans-trans*) caracterizado por tener una perspectiva objeto de los macroobjetos *f'(a)* y *f'(x),* que son coordinados en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios enunciados en diferentes contextos. Esta perspectiva objeto de los macroobjetos *f'(a)* y *f'(x)* está determinada a su vez por la coordinación interna de los objetos O_1, O_2 y O_3 que engloba el macroobjeto *f'(a)* y por el proceso de síntesis de estos tres objetos O_1, O_2 y O_3 en los objetos O'_1, O'_2 y O'_3 que engloba el macroobjeto *f'(x)*. Igualmente, encontramos que el profesor B en los procesos de resolución de los problemas planteados activa una serie de procesos cognitivos complejos como son: interiorización de acciones en procesos, encapsulación de procesos en objetos y desencapsulación de objetos en procesos, síntesis de procesos en esquemas y coordinación de acciones y procesos.

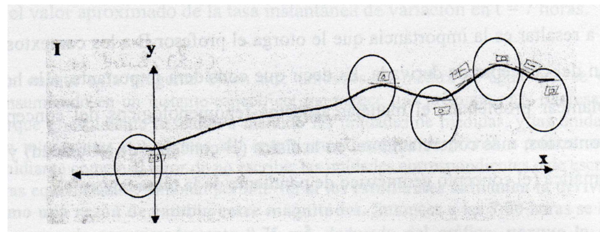
En el caso del profesor B, tomaremos, por ejemplo, la información que nos proporciona el análisis de la línea de coherencia 1 –situaciones de aplicación de la relación entre los objetos pendiente de la recta tangente y razón de cambio (O1 y O2 de la figura 1)–; vemos que este profesor para analizar la derivada en un punto (visión local) coordina los objetos O_1, O_2 y O_3; sintetiza el macroobjeto derivada en un punto en el macroobjeto función derivada; y coordina estos dos macroobjetos en el análisis tanto de la variación global de la función como en el análisis de la variación local de la misma. Por ejemplo, en las repuestas a los ítems *c)* y *d)* del problema 3-C se aprecia la forma en que el profesor B coordina los objetos pendiente de la recta tangente y razón de cambio, y a su vez los relaciona con el macroobjeto *f '(a)*.

> «Entonces en la pregunta en que me detendría a explicarte sería la c), qué es mayor la cantidad de agua que se estaba consumiendo a las 9 horas o a las 14 horas... Entonces miramos la inclinación que tiene la recta tangente a las 9 y la que tiene a las 14 horas, entonces al trazar estas tangentes en este instante, vemos que a las 9 horas tiene una mayor inclinación, lo que indica que hay un mayor consumo. Ah, y en cuanto a la d), bueno, lo mismo la tangente que tenga mayor inclinación.»

La ubicación del profesor B en el nivel de comprensión *trans-trans* se justifica también por otras respuestas. Por ejemplo, analizando su respuesta al ítem *a)* del problema V-v, refleja una coordinación entre los objetos pendiente de la recta tangente y el macroobjeto *f'(a)*. El profesor B, utiliza con propiedad el criterio de la primera derivada para encontrar los puntos de pendiente máxima, mínima y nula. Además, relaciona el crecimiento y el decrecimiento de la función con el signo de la derivada primera; sin embargo, no verbaliza la relación entre los puntos máximos o mínimos con el valor nulo de la derivada en ese punto, pero sí que los representa en el registro escrito. A continuación presentamos un fragmento de la entrevista y los apuntes por escrito del proceso de resolución.

> «Bueno, primero buscando los puntos donde la tangente es cero, encontramos varios puntos... Yo los identifico con la recta tangente, si es horizontal (paralela al eje de las x), tiene pendiente cero. Ahora un punto donde la tangente a la recta sea máxima, espera, creo que aquí *(y va señalando en el folio que le proporcionamos)*, porque aquí veo que la tangente tiene la máxima inclinación y ahora, decrecimiento, aquí va creciendo, crece, decrece y aquí decrece, o sea sería menor, o sea aquí la pendiente es más inclinada, o sea aquí es menos, aquí la pendiente es mínima, porque la pendiente tiene una inclinación y la curva está decreciendo y la inclinación está en sentido contrario al positivo, en sentido contrario, es decir, los valores de la pendiente son negativos.»

Figura 2
Registro gráfico del proceso de resolución del profesor B al ítem *a)* del problema V-v.



5. CONSIDERACIONES FINALES

Una de las principales aportaciones de este estudio es de tipo teórico y consiste en una caracterización a priori de los niveles de comprensión del esquema de la derivada. Dicha caracterización se ha conseguido ampliando la teoría APOE con aportaciones de la perspectiva semiótica. Esto nos ha permitido describir el esquema de la derivada como resultado de la coordinación de dos esquemas previos, uno *algebraico* y otro *gráfico*, los cuales son el resultado de la coordinación de los macroobjetos *f'*(*a*) y *f'*(*x*), cada uno de los cuales requiere a su vez de la coordinación interna de tres objetos (ver figura 1). Los niveles de comprensión de los esquemas gráfico y algebraico de la derivada (Tablas 1 y 2) se han construido como resultado, sobre todo, de la descomposición genética del concepto de derivada, que ha sido complementada por el análisis semiótico y por el análisis de las respuestas de los profesores que participan en este estudio.

A partir de los datos empíricos analizados, podemos concluir que: (1) en el conjunto de profesores elegidos, sólo hemos encontrado algunos de los niveles definidos; (2) la riqueza de los resultados nos lleva a validar algunas de las categorías teóricas de los niveles de la doble tríada, tales como, *intra-intra* (profesores A y E), *inter-intra* (profesor C), *trans-inter* (profesor D), y *trans-trans* (profesor B); (3) ha quedado cuestionada la viabilidad de otras categorías; entre éstas tenemos el nivel *intra* algebraico-*trans* gráfico (*intra-trans*) y los niveles *trans* algebraico-*intra* gráfico (*trans-intra*) e *inter* algebraico-*trans* gráfico (*inter-trans*). En efecto, llegamos a la conclusión de que el nivel de comprensión *intra* algebraico-*trans* gráfico es imposible que se dé en la realidad. Es decir, no es cognitivamente viable, puesto que la interpretación gráfica de los macroobjetos *f'(a)* y *f'(x)* requiere de una complejidad en el manejo del aparato formal de estos objetos que no se tiene construida en el nivel *intra* algebraico. Mientras que consideramos que el nivel *trans* algebraico-*intra* gráfico es cognitivamente más factible de encontrar, porque está influenciado por la enseñanza tradicional de los conceptos matemáticos, en donde prima la algebrización de los conceptos matemáticos en detrimento de la interpretación gráfica de los mismos. En lo que respecta a los niveles *inter* algebraico-*inter* gráfico (*inter-inter*) e *inter* algebraico-*trans* gráfico (*inter-trans*), podrían ser encontrados, pero en nuestra investigación no surgieron.

Se ha constatado en la respuesta de alguno de los profesores, de los niveles *intra-intra*, la confusión o la no diferenciación entre los macroobjetos *f'(a)* y *f'(x)*. Dicha confusión también se observa en muchos de los libros de texto de matemática que usan los profesores que participaron en este estudio (Badillo et al., 2005).

Algunos indicadores de esta confusión son: (1) la dificultad en la comprensión gráfica de los macroobjetos *f(x), f'(a)* y *f'(x)* de algunos profesores (A, E y C); (2) algunos profesores reproducen inconsistencias con relación a estos macroobjetos que han sido reseñadas por investigaciones centradas en el aprendizaje de los mismos, tales como: (a) la confusión de los macroobjetos *f'(a)* y *f'(x)* −A, E−; (b) la reducción de la expresión simbólica del macroobjeto *f'(x)* a la ecuación de la recta tangente y la gráfica del macroobjeto *f'(x)* a la gráfica de la recta tangente −A, E y C−; y, (c) la no justificación del uso de las técnicas de derivación directas e indirectas (definición en término del límite y las reglas de derivación) −A, E, C y D−.

Las aproximaciones semióticas nos proporcionan una primera explicación a este fenómeno: la compleja trama de funciones semióticas que deben activarse para comprender los macroobjetos *f'(a)* y *f'(x)* es un factor importante para justificar las dificultades en la comprensión de algunos profesores (Font, 2005; Font y Contreras, 2008). En el caso estudiado, en el que los profesores explican, simultáneamente, conceptos de física y matemática, la complejidad de dicha trama aumenta por la opción prioritaria que hacen los profesores del uso de la notación incremental en las definiciones de *f'(a)* y *f'(x)*.

Las categorías teóricas y analíticas adaptadas de la teoría APOE y los niveles de desarrollo del esquema nos permiten explicar por qué algunos profesores pueden convivir con la complejidad semiótica asociada a los macroobjetos *f'(a)* y *f'(x)* y otros tienen dificultad para hacerlo. El nivel de desarrollo y la coordinación de los esquemas *algebraico* y *gráfico* son las causas que pueden explicar la emergencia de este fenómeno.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los Proyectos de Investigación con referencia EDU 2008-05254 y EDU 2009-08120 del Ministerio de Ciencia e Innovación del Plan Nacional I+D+i del Gobierno español.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASIALA, M., BROWN, A., DEVRIES, D. J., DUBINSKY, E., MATHEWS, D. y THOMAS, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education*. 2, pp. 1-32.

ASIALA, M., COTTRILL, J., DUBINSKY, E. y SCHWINGENDORF, K. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivate. *Journal of Mathematics Behavior,* 16(4), pp. 399-430.

AZCÁRATE, C. (1990). La velocidad: introducción al concepto de derivada. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

BADILLO, E. (1999). *Estudio del conocimiento profesional de profesores de secundaria en Colombia: el caso de la relación entre derivada y velocidad*. Tesis de maestría. Universitat Autònoma de Barcelona.

BADILLO, E. (2003). *La Derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

BADILLO, E. FONT, V. y AZCÁRATE, C. (2005). Conflictos semióticos relacionados con el uso de la notación incremental y diferencial en libros de física y de matemáticas del bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, Número extra, pp. 1-6.

BAKER, B., COOLEY, L. y TRIGUEROS, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education,* 31, pp. 1-23.

BALL, D., LUBIENSKI, S.T. y MEWBORN, D.S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge, en Richardson, V. (ed.). *Handbook of Research on Teaching*, Washington, D.C., EEUU. American Educational Research Association, pp. 433-456.

BLISS, J., MONK, M. y OGBORN, J. (1983). *Qualitative Data Analysis for Educational Research*. London: Croom Helm.

CLARK, J., CORDERO, F., COTTRILL, J., CZARNOCHA, B., DEVRIES, D., ST. JOHN, D., TOLIAS, G. y VIDAKOVIÉ, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule? *Journal of Mathematical Behavior,* 16, pp. 345-364.

COOLEY, L. TRIGUEROS, M. y BAKER, B. (2007). Schema thematization: a framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education,* 38(4), pp. 370-392.

DUBINSKY, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, en Tall, D. (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Press, pp. 95-123.

DUBINSKY, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática,* 8(3), pp. 24-41.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et penseé humaine*. Berna: Peter Lang.

DUVAL, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 61(1), pp. 103-131.

ESPINOZA, L. y AZCÁRATE, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto «límite de una función»: una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias,* 18, (3), pp. 355-368.

EVEN, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, pp. 94-116.

FONT, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada, en Maz, A., Gómez, B. y Torralbo, M. (eds.). *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática,* pp. 109-128. Córdoba: Universidad de Córdoba.

FONT, V. y CONTRERAS, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,* 69, pp. 33-52.

FONT, V., MONTIEL, M., VIDAKOVIC, D. y WILHELMI, M. R. (2011). Analysis of Dimensional Analogy by Means of Different Theoretical Perspectives, en Roberta V. Nata (ed.). *Progress in Education*, 19, pp. 39-76. Hauppauge, Nueva York: Nova.

GARBIN, S. (2005). Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: el caso de estudiantes con conocimientos previos de cálculo diferencial e integral. *Enseñanza de las Ciencias,* 23(1), pp. 61-80.

GARBIN, S. y AZCÁRATE, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las Ciencias,* 20(1), pp. 87-113.

GARCÍA, M. y LLINARES, S. (1998). Un método para el análisis del contenido y estructura del conocimiento profesional del profesor de matemática de secundaria. *UNO,* 17, pp. 65-81.

GARCÍA, M., LLINARES, S. y SÁNCHEZ-MATAMORO, G. (2010). Characterizing Thematized Derivative Schema by the Underlying Emergent Structures. *International Journal of Science and Mathematics Education*. DOI: 10.1007/s10763-010-9227-2.

GAVILÁN, J.M., GARCÍA, M.M. y LLINARES, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(2), pp. 157-170.

GODINO, J.D., BATANERO, C. y FONT, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM-*The International Journal on Mathematics Education,* 39(1-2), pp. 127-135.

HILL, H.C., BLUNK, M., CHARALAMBOUS, C., LEWIS, J., PHELPS, G., SLEEP, L. y BALL, D.L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction,* 26(4), pp. 430-511.

LEINHARDT, G. y GREENO, J.G. (1986). The Cognitive Skill of Teaching. *Journal of Educational Psychology*, 78(2), pp. 75-95.

LERMAN, S. (2001). Cultural, Discursive Psychology: a Sociocultural Approach to Studying the Teaching and Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 46(1-3), pp. 87-113.

LLINARES, S. (2000). Secondary school mathematics teacher's professional knowledge. A case from the teaching of the concept of function. *Teachers and Teaching: theory and practice,* 6, pp. 41-62.

MORENO, M. y AZCÁRATE, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias,* 24(1), pp. 85-98.

MOORE, T.W. (1974). *Introducción a la Teoría de la Educación*. Madrid. Alianza Editorial.

NORMAN, A. (1993). Integrating Research on Teachers' Knowledge of Functions and their Graphs. In Romberg, Fennema, and Carpenter (eds.). *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*. Londres: LEA.

PIAGET, J. y GARCÍA, R. (1982). *Psicogénesis e historia de las ciencias*. México D.F.: Editorial Siglo XXI (4.ª edición).

RAMOS, A.B. y FONT, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática Educativa,* 11(2), pp. 233-265.

SÁNCHEZ-MATAMORO, G., GARCÍA, M.M. y LLINARES, S. (2006). El desarrollo del esquema de la derivada. *Enseñanza de las Ciencias,* 18(3), pp. 355-368.

SENSEVY, G., SCHUBAUER-LEONI, M.L., MERCIER, A., LIGOZAT, F. y PERROT, G. (2005). An Attempt to Model the Teacher's Action in the Mathematics Class. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1-3), pp. 153-181.

SHULMAN, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,* 15(2), pp. 4-14.

SIMON, M.A. y TZUR, R. (1999). Explicating the Teachers' Perspective from the Researchers' Perspectives: Generating Accounts of Mathematics Teachers' Practice. *Journal for-Research in Mathematics Education,* 30(3), pp. 252-264.

TRIGUEROS M. y MARTÍNEZ-PLANELL, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics,* 73(1), pp. 3-19.

[Artículo recibido en septiembre de 2010 y aceptado en marzo de 2011]

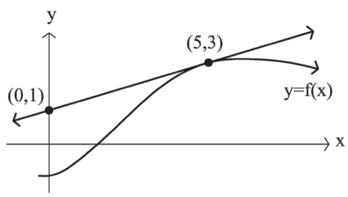
ANEXO 1

Evaluación del concepto derivada.

«Ésta es la evaluación realizada por un profesor de matemática de secundaria para examinar el grado de comprensión del concepto de *derivada* por parte de sus estudiantes, después de haber terminado la unidad didáctica relacionada con este concepto. Tu colaboración consiste en tratar de explicitar por escrito, lo más detalladamente posible, lo que consideras que debe responder uno de tus estudiantes después de haber estudiado el concepto de derivada, para afirmar que éste comprende y maneja el concepto de derivada».

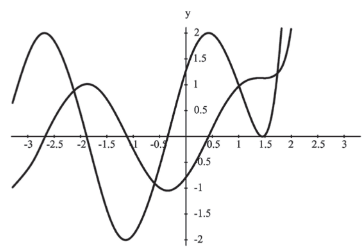
NOMBRE: ____
CURSO: _______________________ FECHA: ______________________________________

1. La recta L es tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto (5,3)

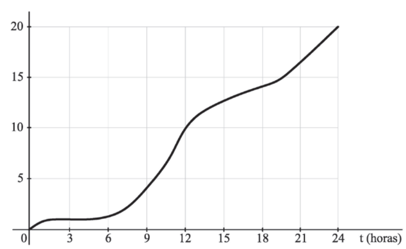


a. Encuentra $f(5)$. Explica y justifica cada paso en la solución.
b. Encuentra $f'(5)$. Explica y justifica cada paso en la solución.
c. ¿Cuál es el valor de la función $f(x)$ en $x = 5{,}08$? Sé lo más exacto posible y explica cómo lo haces.

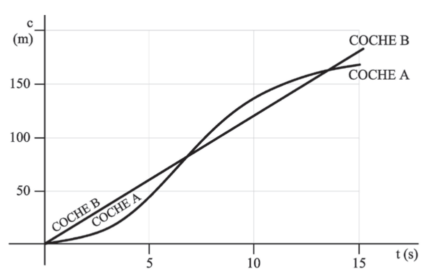
2. Compara las gráficas de las dos funciones de la siguiente figura y razona detalladamente si una de ellas es la función derivada de la otra. Argumenta la respuesta.



3. El hotel Alps tiene 156 habitaciones. Su consumo de agua caliente es bastante elevado. La función $Q: t \rightarrow Q(t)$, cuya gráfica aparece junto a ese enunciado, nos da el total de agua caliente consumida desde medianoche (0 horas), hasta las t horas.
   a. ¿Cuál fue el consumo total de agua a lo largo del día?
   b. ¿Cómo es el consumo de agua caliente entre las 20 y las 24 horas?
   c. ¿Qué es mayor, la cantidad de agua caliente que se estaba consumiendo a las 9 horas o la que se estaba consumiendo a las 14 horas?
   d. ¿Cuándo crees que se estaba consumiendo más agua caliente? Justifica la respuesta.
   e. ¿Cuánta agua se está consumiendo a las 7:00 y en qué unidades se medirá esto?



4. El siguiente gráfico representa el movimiento de dos coches durante 15 segundos. Haz una descripción comparada de su movimiento. Para ello:
   a. ¿Qué crees que ocurre en el punto *P* de la gráfica?
   b. ¿Cómo son las velocidades de los dos coches en el punto *P*? Justifica tu respuesta.
   c. ¿Crees que en algún momento los coches *A* y *B* tienen la misma velocidad? ¿Por qué?
   d. ¿Cuándo crees que el coche *A* tiene mayor velocidad? Justifica tu respuesta.



5. Halla la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función:

$f(x) = 3x^2 - 2x$ en el punto de abscisa 2.

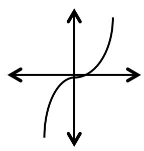
ANEXO 2

Viñetas para la entrevista.

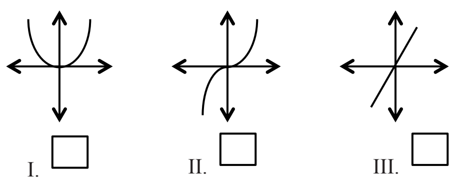
I	II	III
¿Qué es una derivada? Defínelo o explícalo como desees	¿Qué significa que la derivada de la función $y = x^2$ sea la función $y = 2x$? Explica y justifica la solución.	Usando sólo una calculadora, puedes conseguir un método para calcular el valor aproximado de la derivada de $f(x) = 4x$, en $x = 2$. Explica y justifica la solución.

IV

Si tienes el gráfico de la siguiente función:



a. Escoge la función derivada que le corresponde entre los gráficos de las funciones representadas a continuación:

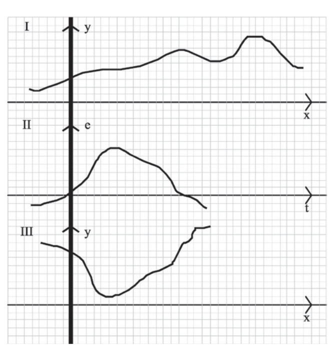


b. Justifica la respuesta escogida y por qué la noelección de las otras dos opciones.

V

Observa las siguientes gráficas:
Gráfica I: Indica el punto de la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es máxima (positiva) y el punto donde es mínima (negativa). Indica también los puntos donde es cero.
Gráfica II: Indica el punto de la gráfica donde la velocidad del móvil es máxima (positiva) y el punto donde la velocidad del móvil es mínima (negativa). Indica también dónde vale cero.
Gráfica III: Indica el punto de la gráfica donde la función crece más deprisa y el punto donde decrece más rápidamente. Indica los puntos donde la tasa instantánea de variación es cero.
Nota: Utiliza los siguientes indicadores para señalar los puntos de las gráficas:

- Para valores mayores (de crecimiento más rápido) +
- Para valores menores (de decrecimiento más rápido) −
- Para valores nulos 0



Analysis of Mathematics teachers' level of understanding of the objects *f'(a)* and *f'(x)*

Badillo, Edelmira[1]; Azcárate, Carmen[1] y Font, Vicenç[2]
[1] Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona
[2] Departament de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica. Universitat de Barcelona
Edelmira.Badillo@uab.cat
Carmen.Azcarate@uab.cat
vfont@ub.edu

Summary

This paper describes the levels of understanding of the relation between *f'*(*a*) and *f'*(*x*) among five Mathematics teachers who were teaching classes to 16-18 year olds in different schools in Colombia. The analysis is based on the APOS framework, in this case with the addition of certain semiotic aspects. The five teachers responded to an indirect questionnaire about their understanding of *f'*(*a*) and *f'*(*x*), and were subsequently interviewed in relation to a series of vignettes. The specific question addressed by this study is: What levels of understanding of the macro-objects *f'*(*a*) and *f'*(*x*) do these five teachers have?

One of the main contributions of the study is theoretical in nature and consists in characterizing *a priori* the levels of understanding of the derivative schema. This characterization was achieved by extending APOS theory through contributions from the semiotic perspective. This enabled us to describe the derivative schema as resulting from the coordination of two previous schemas, one *algebraic* and the other *graphical*, which themselves result from the coordination of the macro-objects *f'*(*a*) and *f'*(*x*), each of which requires in turn the internal coordination of three objects: the slope of the straight line (O_1), the limit of the mean rates of variation (O_2) and the ratio of change (O_3). The levels of understanding of the graphical and algebraic schemas of the derivative are presented as the result, above all, of the genetic decomposition of the derivative concept, which is complemented here by the semiotic analysis and by the analysis of the responses given by the five participating teachers.

On the basis of the empirical data analysed we conclude the following: (1) only some of the defined levels of understanding were found among these five teachers; (2) the richness of the results enables us to validate some of the theoretical categories referring to levels of the dual triad, for example, *intra*/*intra* (teachers A and E), *inter*/*intra* (teacher C), *trans*/*inter* (teacher D) and *trans*/*trans* (teacher B); and (3) the viability of other categories remains doubtful, for example, the *intra* algebraic/*trans* graphical (*intra*/*trans*) level and the levels *trans* algebraic/*intra* graphical (*trans*/*intra*) and *inter* algebraic/*trans* graphical (*inter*/*trans*). Indeed, we consider that the *intra* algebraic/*trans* graphical level of understanding is not possible in reality. In other words, it is not cognitively viable, since the graphical interpretation of the macro-objects *f'(a)* and *f'(x)* requires a degree of complexity in handling the formal apparatus of these objects that is not present in the *intra* algebraic level. By contrast, we believe that one is more likely to find the *trans* algebraic/*intra* graphical level of understanding because it is influenced by the traditional teaching of mathematical concepts, in which priority is given to the algebraization of mathematical concepts, to the detriment of their graphical interpretation. The *inter* algebraic/*inter* graphical (*inter*/*inter*) and *inter* algebraic/*trans* graphical (*inter*/*trans*) levels of understanding could, in theory, be found, although they did not appear in the present analysis.

The responses of some of the teachers at the *intra*/*intra* levels revealed confusion about or a lack of differentiation between the macro-objects *f'(a)* and *f'(x)*. This confusion can also be observed in many of the Mathematics textbooks used by the participating teachers (Badillo, Font & Azcárate, 2005). Some of the indicators of this confusion are: (1) the difficulty experienced by some teachers (A, E and C) as regards the graphical understanding of the macro-objects *f(x), f'(a)* and *f'(x)*; and (2) some teachers reproduced inconsistencies in relation to these macro-objects that have been previously highlighted by research into how such objects are learnt, specifically: (a) they confused (teachers A and E) the macro objects *f'(a)* and *f'(x)*; (b) they reduced (teachers A, E and C) the symbolic expression of the macro-object *f'(x)* to the equation of the tangential line, and the graph of the macro-object *f'(x)* to the graph of the tangential line; and (c) they failed to justify (teachers A, E, C and D) the use of direct and indirect derivation techniques (definition in terms of the limit and the rules of derivation).

The theoretical and analytical categories adapted from APOS theory, together with the levels of development of the schema, enable us to explain why some teachers are able to manage the semiotic complexity associated with the macro-objects *f'(a)* and *f'(x)*, while others have difficulty in doing so. This phenomenon is due to the level of conceptual development and the coordination of the *algebraic* and *graphical* schemas.