PLATAFORMA DE MATEMATIZACIÓN EN UN ENTORNO GEOGEBRA DENTRO DE UN PLANTEAMIENTO DIDÁCTICO «DESDE ABAJO HACIA ARRIBA»

Costa Llobet, Joaquim
Profesor de matemáticas y director del Institut Rocagrossa de Lloret de Mar, Girona
jcosta16@xtec.cat

Resumen. Este estudio forma parte de una investigación que analiza un enfoque didáctico innovador para la enseñanza de la geometría analítica en el primer curso de bachillerato. El planteamiento didáctico del trabajo consiste en una secuencia que se inicia con actividades que inducen la matematización en los alumnos, en el entorno del *software* GeoGebra, y que se completa con una posterior formalización de los contenidos. El análisis de la matematización que realizan los alumnos tiene una importancia central en la investigación. El estudio también analiza las valoraciones subjetivas de los alumnos sobre la realización de las actividades con GeoGebra. Estos análisis permiten constatar que, en comparación con una metodología tradicional, mejora el rendimiento en la matematización a la vez que aumenta la autoconciencia y la motivación de los alumnos en el proceso de aprendizaje.

Palabras clave. Geometría analítica, matematización, visualización, modelización, GeoGebra.

Mathematization platform in a GeoGebra environment within a didactic approach «from bottom to top»

Summary. This study is part of an investigation that analyzes an innovative approach for the teaching of Analytic Geometry in the first year of post-compulsory education in Catalonia (Spain). The didactic approach consists of a sequence that begins with activities that induce mathematization, and is completed with a further formalization of the contents. The analysis of the mathematization made by the students has a central role in this research. The study also examines the students' subjective assessments on the implementation of activities with GeoGebra. These analysis show that, compared to the traditional methodology, there is an improved performance in mathematization, as well as an increased self-awareness, motivation and involvement of students in the learning process.

Keywords. Analytic Geometry, mathematization, visualization, modeling, GeoGebra.

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Este trabajo forma parte de una investigación que implementa y analiza un enfoque didáctico innovador para la enseñanza de la geometría analítica en el primer curso de bachillerato.

El enfoque didáctico consiste en una secuencia que se inicia con actividades que inducen la matematización (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000) en los alumnos y que se completa con una posterior formalización de los contenidos. Nos referimos a la fase de matematización inducida con la expresión *plataforma de matematización*.

Se trata de un planteamiento «desde abajo hacia arriba»: a diferencia de la metodología tradicional, no parte de la presentación formal y perfectamente estructurada de los contenidos para pasar luego a los ejercicios de aplicación, sino que en primer lugar induce la matematización mediante actividades contextualizadas para luego emprender la fijación formal de los contenidos.

Con este planteamiento diseñamos e implementamos actividades de enseñanza y aprendizaje en el entorno visual y manipulativo del *software* de geometría dinámica GeoGebra, con los objetivos siguientes:

– Analizar, en la secuencia de implementación de las actividades, el desarrollo de la matematización para establecer diferentes tipologías de alumnos.

– Comparar estrategias de resolución de actividades en el entorno de GeoGebra con estrategias de resolución de actividades convencionales similares realizadas con lápiz y papel.

– Analizar también las valoraciones subjetivas de los alumnos sobre la realización de actividades con GeoGebra.

Los análisis de los datos objetivos de la matematización y de las percepciones subjetivas de los alumnos nos permiten hallar qué aporta el trabajo con GeoGebra en cuanto al rendimiento en la matematización (entendido como la consecución de resultados correctos) y en cuanto a la comprensión activa, la implicación y la motivación, en comparación con un planteamiento de tipo tradicional.

2. MARCO TEÓRICO

De E. Filloy, en su obra *Didáctica e historia de la geometría euclidiana* (1998, pp. 19-20), extraemos dos elementos que constituyen nuestro punto de partida. En primer lugar, la idea de que una presentación formal y tradicional de los contenidos matemáticos no es la más adecuada para la inmensa mayoría de los estudiantes:

«... es posible que para algún estudiante una presentación formal, lógicamente estructurada y altamente eficiente, en el sentido que rápidamente llega a ciertos resultados, sea no sólo la presentación adecuada, sino la necesaria; pero, francamente, tal estudiante será una "rara avis", en todos los niveles del sistema educativo…»

Y en segundo lugar, que nuestro enfoque didáctico tiene que estimular el aprendizaje «sin coacción»:

«... sabemos que los primeros resortes que hemos de accionar en el aprendizaje de las Matemáticas son los de la motivación, hecho que, por una parte, implica que el material presentado tenga la virtud de echar mano de todo aquello que "estimule" el aprendizaje, sin coacción alguna…»

De Van Reeuwijk (1997) tomamos la idea del planteamiento didáctico «desde arriba hacia abajo» como aquel que sigue una secuencia tradicional que empieza por la exposición formal de los contenidos y pasa luego a las actividades de aplicación; invertimos el orden y llamamos planteamiento «desde abajo hacia arriba» a aquel que empieza por las actividades contextualizadas y que posteriormente aborda la formalización de los contenidos.

Con respecto a la matematización, mencionamos que Van den Heuvel-Panhuizen (2000) expone cómo Treffers, entre 1978 y 1987, distinguió explícitamente dos tipos de matematización en el contexto educativo:

– La matematización horizontal, en la cual los estudiantes utilizan herramientas matemáticas que les ayudan a organizar y resolver un problema en el contexto de una situación realista. Implica transitar desde las situaciones en contextos realistas o verosímiles hasta el mundo de los símbolos.

– La matematización vertical, en la cual los estudiantes descubren conexiones entre conceptos y estrategias y aplican estos descubrimientos. Implica moverse en el mundo de los símbolos, con abstracción y generalización.

En el referente teórico presente en los textos de Treffers (1986) y Van den Heuvel-Panhuizen (2000) hallamos un aspecto que tiene una importancia fundamental en nuestro planteamiento: los alumnos matematizan (horizontal y verticalmente) mediante la realización de actividades (en nuestro caso en el entorno del *software* GeoGebra). La distinción entre la matematización horizontal y la matematización vertical, así como el análisis de éstas en las actividades realizadas por los alumnos, ocupan una posición central en nuestro trabajo.

Además, en el proceso de realización de las actividades, los alumnos van a abordar la construcción de modelos matemáticos sencillos, si atendemos a la secuencia que utiliza English (1999) para describir el proceso de modelización:

1. La situación de partida se sitúa en un contexto real o verosímil.

2. Los objetos y/o relaciones son idealizados. English (1999) utiliza el término «transformación». Gómez (1998) se refiere al «planteamiento del problema en términos técnicos».

3. Se produce la matematización (por lo tanto, añadimos, la matematización es un aspecto esencial del proceso de modelización).

4. Se llega a una solución para el problema matemático.

5. La solución es objeto de interpretación en el contexto idealizado y también en el contexto de la situación de partida.

Para modelos sencillos como los que corresponden a nuestro planteamiento, la «idealización» o «transformación» es muy visual, intuitiva y rápida. Y la interpretación de las soluciones es muy directa. Para los alumnos, la parte del proceso con mayor demanda de trabajo reside en la matematización (donde, precisamente, situamos el foco de nuestra atención).

De diversos referentes teóricos que se ocupan de la modelización matemática, extraemos que cuando los alumnos modelizan (y por lo tanto matematizan), realizan un trabajo que «puede evitar un aprendizaje incorrecto basado sólo en fórmulas y procesos estereotipados» (Niss, 1989) y que además «aumenta la motivación de los alumnos, que en matemáticas es tradicionalmente baja en numerosos casos individuales» (el mismo autor). Es decir: podemos conseguir que los alumnos comprendan mejor lo que hacen y estén más motivados cuando lo hacen. Lo primero (la mejora de la comprensión) queda también bien ilustrado por Biembengut y Hein (2004) cuando expresan que la modelización propicia «la mejora de la aprehensión de los conceptos matemáticos».

En cuanto a la influencia del uso de GeoGebra, acudimos al referente proporcionado por Iranzo y Fortuny (2009) cuando afirman que la mayoría de estudiantes consideran que GeoGebra les ayuda a visualizar el problema y evitar obstáculos algebraicos. Asimismo, estos autores concluyen que el uso de GeoGebra «…promueve un pensamiento más geométrico y facilita un soporte visual, algebraico y conceptual a la mayoría de los alumnos», aunque con presencia de variedad de estrategias de resolución, las cuales pueden ser interpretadas en términos de tipologías de alumnos.

3. METODOLOGÍA

Hemos llevado a cabo la fase de implementación de nuestro planteamiento didáctico en un centro público de educación secundaria de Cataluña, sobre un grupo de 19 alumnos de primer curso de bachillerato científico y tecnológico, del cual éramos responsables en la docencia de matemáticas.

Hemos proyectado las actuaciones de la fase de implementación para integrarlas dentro del currículum, atendiendo a las exigencias de objetivos, de contenidos y de temporización previstas por la programación didáctica.

El conjunto completo diseñado para inducir la matematización en el entorno del *software* GeoGebra consta de ocho actividades que han ocupado siete sesiones de una hora cada una (una hora para cada actividad, excepto para las actividades 2 y 3, que se han realizado en una sola sesión). No las presentaremos todas aquí por razones de espacio, aunque sí ofreceremos unas muestras. Clasificamos las actividades en tres grupos:

1. Actividades 1, 2, 3 y 4: matematización que conduce a los alumnos hasta la ecuación vectorial de la recta. Planteamos a los alumnos situaciones en las que hay que encontrar con el uso de GeoGebra las coordenadas de puntos que marcan la división de un segmento de extremos A y B en varias partes de la misma longitud, para luego pedir puntos alineados con A y B pero no pertenecientes al segmento AB. Aquí están implicados los conceptos de suma de vectores, producto de un vector por un escalar, puntos alineados y dependencia lineal.

2. Actividades 5 y 6: matematización que conduce hacia la proyección de un vector sobre otro, el producto escalar de dos vectores y el ángulo entre dos vectores. Contextualizamos con la ayuda de otros contenidos del currículum del bachillerato, concretamente de la física: el trabajo realizado por una fuerza que provoca el desplazamiento de un objeto material se obtiene mediante el cálculo de un producto escalar.

3. Actividades 7 y 8: aplicación de lo aprendido en las seis primeras actividades a dos nuevas situaciones; construcción de cuadrados (actividad 7) y hallar un punto equidistante de tres puntos dados, es decir, construir el circuncentro de un triángulo (actividad 8).

Con esta secuencia de trabajo reorganizamos la lista de contenidos que aparece en una programación didáctica convencional, mediante un nuevo esquema:

Figura 1
Esquema del bloque I de contenidos.

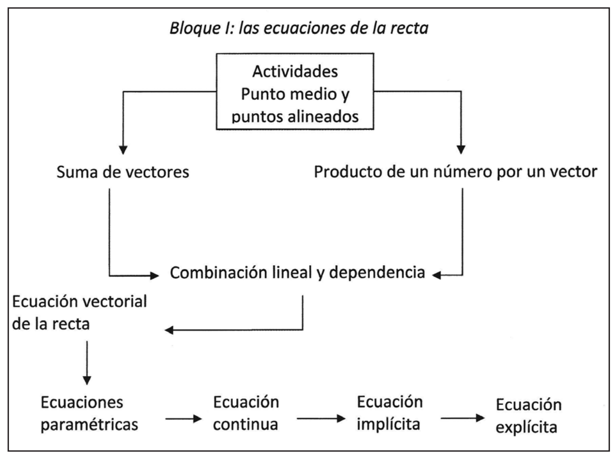
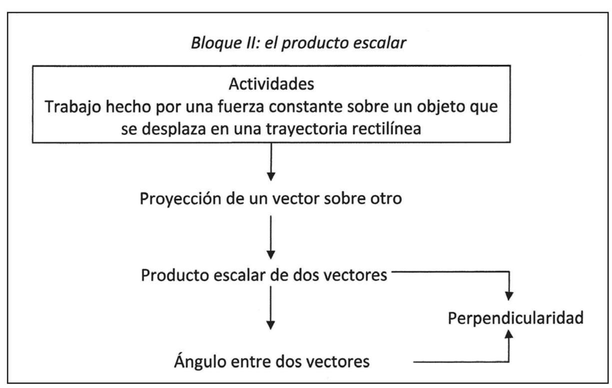


Figura 2
Esquema del bloque II de contenidos.



No seguimos un orden tradicional, que empezaría por los conceptos de puntos y vectores en un sistema de coordenadas, seguiría por las operaciones con vectores (producto de un escalar por un vector, suma de vectores, producto escalar de dos vectores), continuaría por el ángulo que forman dos vectores calculado mediante el producto escalar (con especial atención a la perpendicularidad), abordaría después la definición de la ecuación vectorial de la recta y, a partir de ella, introduciría las otras ecuaciones. En nuestro planteamiento los alumnos realizan una serie de actividades en las cuales matematizan sin contar con una exposición formal previa de los contenidos. A partir de este trabajo de matematización, el profesor suministra posteriormente la formalización.

Mostramos, completa, la actividad número 3. Los enunciados y los cuestionarios que contiene son los mismos que hemos entregado a los alumnos en el aula.

Actividad 3: ***también en fila***

La situación
En vez de plantar tres árboles entre los árboles *A* y *B* [como hacías en la actividad 2], ahora quieres plantar dos, *M1* y *M2*, en las mismas condiciones, es decir, que la distancia entre dos árboles consecutivos sea siempre la misma.

Con GeoGebra
Construye *M1* y *M2*. Guarda el fichero.

Por escrito

	SOBRE LA RESOLUCIÓN DE LA SITUACIÓN PLANTEADA	
a	¿Has construido el punto *M1*? Si lo has construido, sus coordenadas son:	☐ Sí ☐ No Coordenadas: (,)
b	¿Has construido el punto *M2*? Si lo has construido, sus coordenadas son:	☐ Sí ☐ No Coordenadas: (,)
c	¿Has construido algún vector?	☐ Sí ☐ No
d	¿Has sumado vectores?	☐ Sí ☐ No
e	¿Has multiplicado escalares por vectores?	☐ Sí ☐ No
f	Responde sólo si has construido el punto *M1*: ¿Es posible escribir un cálculo con las coordenadas de los puntos *A* y *B* que tenga como resultado las coordenadas del punto *M1*? Si has respondido que sí, escribe el cálculo.	☐ Sí ☐ No Cálculo:
g	¿Puedes escribir una fórmula general para el cálculo de *M1* en la cual aparezcan los símbolos *A*, *B* y *M1*? Si has respondido que sí, escribe la fórmula.	☐ Sí ☐ No Fórmula:
h	Contesta sólo si has construido el punto *M2*: ¿Es posible escribir un cálculo con las coordenadas de los puntos *A* y *B* que tenga como resultado las coordenadas del punto *M2*? Si has respondido que sí, escribe el cálculo.	☐ Sí ☐ No Cálculo:
i	¿Puedes escribir una fórmula general para el cálculo de *M2* en la cual aparezcan los símbolos *A*, *B* y *M2*? Si has respondido que sí, escribe la fórmula.	☐ Sí ☐ No Fórmula:
j	Contesta sólo si has escrito alguna de las dos fórmulas: ¿Has movido los puntos *A* o *B* para comprobar que tu sistema para calcular los puntos *M1* y *M2* sirve también para otras posiciones de *A* y *B*?	☐ Sí ☐ No

	SOBRE EL USO DE GEOGEBRA	
k	¿Usar GeoGebra te ha ayudado a representar y ver claro el planteamiento de la actividad?	☐Nada ☐Poco ☐Bastante ☐Mucho
l	¿Usar GeoGebra te ha ayudado a hallar las coordenadas de los puntos?	☐Nada ☐Poco ☐Bastante ☐Mucho
m	¿Usar GeoGebra te ha ayudado a entender lo que ibas haciendo y a avanzar en el proceso de resolución?	☐Nada ☐Poco ☐Bastante ☐Mucho
n	¿Usar GeoGebra te ha ayudado a resolver no solamente el problema concreto sino también a hallar fórmulas generales?	☐Nada ☐Poco ☐Bastante ☐Mucho
o	Comparado con el tipo de trabajo que realizas habitualmente en la clase de Matemáticas (con lápiz y papel) ¿usar GeoGebra te ha ayudado?	☐Nada ☐Poco ☐Bastante ☐Mucho

También mostramos el enunciado de la actividad 7 con GeoGebra puesto que en nuestro trabajo es objeto de un análisis comparativo con una actividad realizada con lápiz y papel por los alumnos (análisis que resumimos en la sección 4 de este artículo).

Se quiere delimitar una superficie, un campo de cultivo, con forma cuadrada. Dos de los vértices del cuadrado serán unos hitos naturales: un árbol *Q* que está a 370 m oeste y 150 m sur (-3,7, -1,5) y una roca *R* que está a 200 m oeste y 230 m norte (-2,0, 2,3). Los vértices *Q* y *R* definen uno de los lados del cuadrado.

a) Halla la posición de los dos vértices que faltan, *S* y *T*.

b) En el centro de este campo cuadrado se quiere construir una caseta para guardar utensilios. Halla la posición de este centro *M*.

En esta actividad los estudiantes también deben entregar un fichero de GeoGebra y algunas respuestas por escrito sobre el proceso de matematización, así como responder cuatro preguntas sobre su valoración subjetiva del uso de GeoGebra, las mismas que corresponden a las letras *k, l, m, o* de la tabla de la actividad 3.

De hecho, en toda la secuencia de actividades con GeoGebra se repiten cinco tipos de preguntas de valoración:

P1 (plantear): ¿Usar GeoGebra te ha ayudado a representar y ver claro el planteamiento de la actividad?

P2 (hallar): ¿Usar GeoGebra te ha ayudado a hallar lo que se te pide?

P3 (avanzar): ¿Usar GeoGebra te ha ayudado a poder entender lo que vas haciendo y a avanzar en el proceso de resolución?

P4 (generalizar): ¿Usar GeoGebra te ha ayudado a resolver no tan sólo el problema concreto sino a encontrar fórmulas generales?

P5 (mejor que la clase tradicional): Comparado con el trabajo que haces habitualmente en la clase de Matemáticas (con lápiz y papel), ¿usar GeoGebra te ha ayudado?

P1, P2, P3 y P5 aparecen en las ocho actividades de la secuencia didáctica, mientras que P4 está presente en las seis primeras, puesto que en las dos últimas no pedimos a los alumnos que elaboren generalizaciones.

Hay que señalar que no todas las preguntas (y las respuestas) tienen el mismo nivel de relevancia para el análisis. Algunas preguntas están diseñadas específicamente para dar pistas y orientaciones (no instrucciones concretas) o para provocar reflexión. Bajo el aspecto de preguntas, en realidad funcionan como elementos que contribuyen a la inducción de la matematización. Por ejemplo: ¿Has sumado vectores? ¿Has movido los puntos *A* o *B* para comprobar que tu sistema para calcular los puntos *M1* y *M2* sirve también para otras posiciones de *A* y *B*?

Las respuestas relevantes para el tratamiento de los datos y los posteriores análisis son aquellas que corresponden a preguntas diseñadas con el objetivo de obtener información sobre la matematización. Dentro de este grupo de preguntas, distinguimos tres tipos:

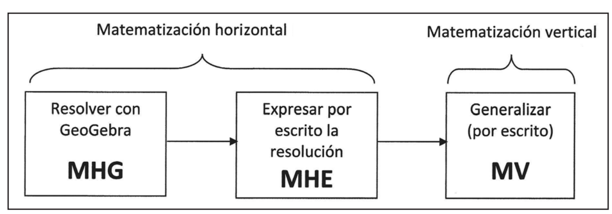
1. Preguntas diseñadas para recoger información sobre si (mediante GeoGebra) se ha resuelto la situación planteada. Por ejemplo: ¿Has construido el punto *M1*? Si lo has construido, sus coordenadas son: ...

2. Preguntas diseñadas para recoger información sobre si el alumno es capaz de expresar por escrito las operaciones concretas que conducen a un determinado resultado. Por ejemplo: ¿Es posible escribir un cálculo con las coordenadas de los puntos *A* y *B* que tenga como resultado las coordenadas del punto *M1*?

3. Preguntas diseñadas para recoger información sobre si el alumno es capaz, a partir de la actividad, de escribir una expresión algebraica general. Por ejemplo: ¿Puedes escribir una fórmula general para el cálculo de *M1* donde aparezcan los símbolos *A*, *B* y *M1*? Si has respondido que sí, escribe la fórmula.

Las respuestas a los dos primeros tipos de preguntas nos dan información sobre si se ha producido una matematización horizontal que haya alcanzado el resultado pedido. Etiquetamos el primer tipo con las letras MHG para indicar que la matematización horizontal se ha realizado en el entorno visual y manipulativo de GeoGebra. Usamos las letras MHE en el segundo tipo para indicar que la respuesta es producto de la matematización horizontal, pero no en una forma que se pueda leer directamente sobre la pantalla de GeoGebra: el alumno tiene que organizar y escribir sobre el papel una expresión para la situación concreta planteada. Con respecto al tercer tipo de preguntas, las respuestas dan información sobre si se ha producido una generalización a partir de la situación concreta de la actividad, en forma de expresión algebraica de validez general. Usamos la etiqueta MV.

Figura 3
Los tres tipos de matematización presentes en las actividades.



4. ANÁLISIS

La fase de implementación genera un gran volumen de información, la cual queda registrada en:

1. Respuestas escritas de cada alumno en cada una de las actividades de matematización con GeoGebra. Estas respuestas escritas (a mano sobre papel) recogen información de dos aspectos esenciales en nuestro trabajo. Por una parte, información sobre el proceso de matematización de los alumnos en la realización de las actividades. Por otra parte, información referente a sus valoraciones subjetivas sobre el uso de GeoGebra. Obtenemos los datos sobre las

valoraciones subjetivas mediante respuestas cerradas, en multiopción. Obtenemos los datos sobre el proceso de matematización combinando las respuestas cerradas en multiopción con las respuestas de tipo abierto, pero tenemos que aclarar que cuando permitimos una respuesta abierta en realidad pedimos un fragmento breve de información: unas coordenadas, un cálculo, una fórmula, una ecuación.

2. Un fichero de GeoGebra para cada alumno y cada actividad. En cada fichero podemos observar si el alumno ha resuelto satisfactoriamente la situación que le hemos planteado y también podemos seguir cuáles han sido los pasos que ha realizado. Es imprescindible acudir a la información de los ficheros de GeoGebra para comprobar si las respuestas escritas de los alumnos sobre el proceso de matematización corresponden a la realidad de lo que han hecho, puesto que el análisis de la matematización se tiene que basar en información totalmente objetiva.

3. Una prueba escrita convencional. Al final de la unidad didáctica de geometría analítica los alumnos realizan una prueba del mismo estilo que habrían realizado si hubieran trabajado bajo una metodología totalmente tradicional. Esto proporciona una muy interesante información para comparar con la información obtenida durante el proceso de matematización en las actividades con GeoGebra. En particular, permite la comparación entre los procesos que los alumnos siguen en situaciones parecidas a algunas que ya han abordado anteriormente en las actividades con GeoGebra, pero que en la prueba escrita adquieren un aspecto convencional y cuya resolución deben expresar por escrito también de forma convencional.

La tabulación de las respuestas a preguntas sobre el proceso de matematización en las actividades con GeoGebra se basa en una idea simple: cada pregunta hace referencia a un aspecto o fragmento lo bastante elemental (lo bastante pequeño) de la realización de la actividad como para poder ser respondido mediante una marca en una casilla (entre varias respuestas preestablecidas) o mediante una respuesta escrita muy breve (un cálculo o una fórmula), lo que permite que cada respuesta se pueda traducir en un número y que baste con dos valores numéricos: 0 y 1. Efectivamente, si el fragmento que es objeto de la pregunta es lo bastante pequeño, se puede contabilizar con cero (respuesta negativa; no alcanzado) o con 1 (respuesta positiva; alcanzado).

Pero en el sistema de contabilizar las respuestas sobre la valoración subjetiva del uso de GeoGebra, trabajar sólo con dos valores, 0 y 1, es una manera demasiado maniquea de contemplar la realidad. Hay que tener en cuenta que en pocos casos una valoración subjetiva se puede plantear sólo en términos extremos. Es mucho más razonable permitir unos ciertos matices. En concreto, permitimos escoger una opción entre cuatro: nada, poco, bastante, mucho. Para el análisis cuantitativo les asignamos, respectivamente, los valores numéricos: 0; 1/3; 2/3; 1.

Todas las respuestas quedan tabuladas con valores entre 0 y 1 (normalizadas).

Mostramos a continuación una tabla de valores numéricos que corresponde a la tercera actividad con GeoGebra (la misma cuya tabla de preguntas hemos presentado en la sección 3); las ausencias de valores en algunas casillas se deben a que no todos los alumnos estaban presentes en esta sesión o no respondieron alguna pregunta (cosa que sucedió en muy pocas ocasiones).

Tabla 1

Ejemplo de tabla de resultados de una actividad (actividad 3).

	RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS SOBRE LA RESOLUCIÓN																RESPUESTAS SOBRE GEOGEBRA				
	a		b		c	d	e	f		g		h		i		j	k	l	m	n	o
	sí / no	coordenadas	sí / no	coordenadas	sí / no	sí / no	sí / no	sí / no	cálculo	sí / no	fórmula	sí / no	cálculo	sí / no	fórmula	sí / no	n-p-b-m	n-p-b-m	n-p-b-m	n-p-b-m	n-p-b-m
Manel	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	2/3	1/3	2/3
Youssef	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2/3	2/3	1/3	1/3	2/3
M. Carmen	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2/3	2/3	2/3	2/3	1
Toni	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	2/3	2/3	2/3	1/3	1/3
Raquel	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2/3	1	2/3	2/3	2/3
Angelo	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2/3
Marta	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	2/3	2/3	1
Juan																					
Jesús																					
Alba	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2/3	2/3	2/3	1/3	2/3
Federico	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0					
Neus	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2/3	1	2/3	2/3
Iván	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	2/3	1/3	1	2/3	1
Tanya	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	2/3	2/3	1
Dídac	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1/3	2/3	2/3	2/3	1/3
Soslan																					
Alberto	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	2/3	1	1	2/3
José	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	2/3	1	2/3	2/3	2/3
Erik	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2/3	1	2/3	2/3	2/3

Para cada alumno contamos, en la secuencia completa de actividades con GeoGebra, la consecución de resultados correctos en cada uno de los tres tipos de matematización. Nuestro sistema de recogida de datos y su traducción a valores numéricos nos permite convertir este proceso en un sencillo recuento de ceros y unos. Disponemos de 48 columnas de datos para el análisis, de las cuales 20 corresponden a MHG, 14 a MHE y 14 a MV. Teniendo en cuenta las esporádicas ausencias de algunos alumnos en algunas sesiones y la presencia de unas pocas preguntas sin responder, en la práctica disponemos de un total de 831 valores numéricos: 346 para MHE, 245 para MHE y 240 para MV.

Para cada alumno y cada tipo de matematización calculamos el valor medio, en tanto por uno. Así, por ejemplo, el alumno Iván obtiene 0,94 en MHG; 0,58 en MHE y 0,55 en MV.

Adoptamos el criterio según el cual un resultado «alto» en la consecución de un tipo de matematización se refleja en un valor medio igual o superior a 2/3. Los datos revelan que para todos los alumnos, excepto dos, la consecución presenta un orden muy claro, de mayor a menor: MHG, MHE, MV. Esto nos permite clasificar a los alumnos en cuatro tipologías según hayan obtenido resultados altos en los tres tipos de matematización; sólo en MHG y MHE; sólo en MHG; o en ninguno (mostramos las características de cada una de las tipologías en la sección 5).

Procedemos de modo similar en el recuento de los valores de las respuestas a preguntas de valoración subjetiva sobre el uso de GeoGebra y en la obtención de valores medios (en tanto por uno), con la diferencia de que en este caso no contamos ceros y unos, sino cuatro posibles valores: 0; 1/3; 2/3; 1. Hallamos que los resultados medios para los alumnos en cada tipo de pregunta (P1, P2, P3, P4 y P5) difieren poco. El grupo de alumnos se comporta homogéneamente en cuanto a las valoraciones subjetivas; no es posible establecer tipologías en este caso.

Por lo que se refiere al análisis cualitativo de las resoluciones en la prueba escrita convencional, señalamos que uno de sus problemas (el número 5) plantea una situación muy similar a la que aparece en la actividad 7 realizada con GeoGebra (cuyo enunciado hemos mostrado en la sección 3). El enunciado del problema es el siguiente:

Los puntos $A(0, -4)$; $B(-2, 0)$; $C(4, 3)$ son tres vértices consecutivos de un rectángulo.

a) Comprueba (con cálculos) que efectivamente los lados AB y BC son perpendiculares.

b) Halla las coordenadas del cuarto vértice del rectángulo, D.

c) Calcula el perímetro del rectángulo.

d) Halla las coordenadas del centro M del rectángulo (donde se cortan las dos diagonales).

Las similitudes con la actividad 7 resultan evidentes. En la actividad 7 con GeoGebra los alumnos tienen que completar un cuadrado (apartado *a*; en realidad hay dos soluciones, es decir, dos cuadrados que comparten el lado QR) y en el problema 5 de la prueba escrita tienen que completar un rectángulo (apartado *b*). Tanto en la actividad 7 como en el problema 5 tienen que hallar las coordenadas del centro de la figura: el punto donde se cortan las dos diagonales (apartados *b* y *d* respectivamente).

En ninguno de los dos enunciados presentamos a los alumnos ninguna representación gráfica adjunta al texto. Sin embargo, existe una gran diferencia entre la resolución con GeoGebra y la resolución que pide la prueba escrita. La resolución con GeoGebra permite una rápida representación muy intuitiva, visual y manipulativa, mientras que en la prueba escrita los alumnos tienen que confiar en su mayor o menor destreza para representar gráficamente sobre el papel los puntos dados y ver cómo se completa la figura, con menor precisión respecto a la representación con GeoGebra (no disponen de papel cuadriculado) y sin posibilidad de manipulación.

En nuestro trabajo hemos analizado cualitativamente, con detalle, cuatro casos, pertenecientes a las distintas tipologías de matematización, comparando las resoluciones con GeoGebra y las resoluciones convencionales por escrito. Presentamos dos de ellos como muestras suficientemente representativas de los análisis realizados.

El análisis de cada caso consiste en desmenuzar el proceso de resolución de la actividad 7 a partir de la información contenida en el correspondiente fichero de GeoGebra y examinar en la resolución del problema 5 de la prueba convencional cada paso y sus consecuencias, para establecer si las resoluciones difieren en función de la tipología a la cual pertenece el alumno y si la consecución de resultados correctos con GeoGebra se corresponde con un grado similar de consecución con lápiz y papel. Exponemos el procedimiento de análisis en esta sección; comentamos sus resultados en la sección 5.

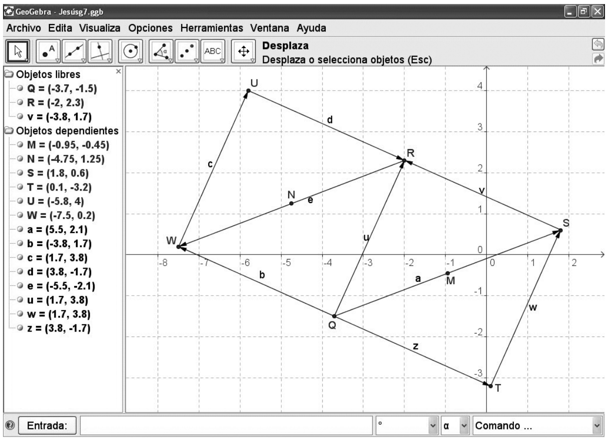
El caso de Jesús

Jesús es un alumno que obtiene resultados altos en los tres tipos de matematización; es capaz de resolver situaciones concretas con GeoGebra, escribir sobre el papel expresiones algebraicas correspondientes a la resolución y hallar generalizaciones. Posee aptitudes naturales para la matematización, es rápido en la comprensión y cuenta con una notable retentiva. Sin embargo, no es un alumno que lleve a cabo un trabajo disciplinado y constante en casa. Confía en exceso en sus cualidades.

En la página siguiente se presenta la pantalla final correspondiente a la actividad 7 con GeoGebra realizada por Jesús.

Figura 4

Pantalla de GeoGebra con la resolución del alumno Jesús para la actividad 7.



Nos hemos permitido la licencia de realizar algunos retoques estéticos (sin que el contenido quede afectado en absoluto) con el objetivo de mejorar la presentación para el lector: desplazar la construcción y modificar su tamaño para que ocupe toda el área gráfica de GeoGebra, aumentar el tamaño de la tipografía y mover las etiquetas para que aparezca con claridad a qué elemento corresponden.

Relatamos la construcción de sólo uno de los dos cuadrados, puesto que el procedimiento que sigue el alumno es esencialmente el mismo para los dos. Jesús empieza por la colocación de los puntos Q y R y la construcción del vector QR. A continuación construye un vector v mediante el teclado, en la barra de entrada algebraica de GeoGebra. Las componentes de v son el resultado de permutar las componentes del vector QR y cambiar el signo de una de ellas. Una vez ha introducido, en la barra de entrada algebraica de GeoGebra, las componentes del vector v perpendicular al vector QR, encuentra las posiciones de los vértices S y T mediante unas sencillas operaciones que también introduce en la barra de entrada algebraica: $S = R - v$; $T = Q - v$. Finalmente, le queda hallar la posición del centro M del cuadrado. Primero construye el vector QS sobre una de las diagonales y a continuación determina la posición de M usando un cálculo en el cual también intervienen un punto y un vector: $M = Q + (1/2)\ QS$. En realidad, sabemos que «sumar puntos y vectores» es una manera no muy rigurosa de expresar la suma de vectores: $OM = OQ + (1/2)QS$; donde OM y OQ son los vectores con origen en (0,0) y extremos en M y Q respectivamente. Sin embargo, y a pesar de los defectos en el rigor, «sumar puntos y vectores» resulta un procedimiento muy útil e intuitivo para los alumnos (tan útil e intuitivo como pueda ser la también poco rigurosa explicación de que un sumando en un miembro de una ecuación «pasa» al otro miembro cambiando su signo).

Hemos podido observar que la resolución de Jesús está enteramente basada en las operaciones con puntos y vectores. Incluso cuando ya ha obtenido los vértices S y T, cierra la figura utilizando vectores que van de un vértice a otro. El enfoque que utiliza está muy influenciado por su trabajo anterior en las actividades 1-4 (ecuación vectorial de la recta: «punto más parámetro por vector») y en las actividades 5-6 (construcción de un vector perpendicular a otro dado).

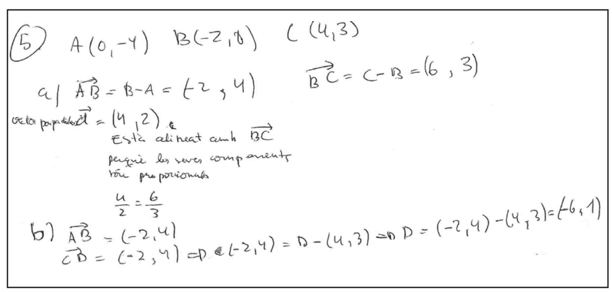
Mostramos también la resolución con lápiz y papel correspondiente al problema 5 de la prueba escrita, concretamente en los apartados *a*, *b* y *d*, para los cuales es posible establecer una comparación con los procedimientos seguidos por el alumno en la actividad 7 con GeoGebra.

La alta consecución que Jesús obtiene en la matematización en actividades con GeoGebra no se traslada en un grado similar hacia la resolución con lápiz y papel. En una situación convencional Jesús comete errores que serían fácilmente detectables en un entorno visual y manipulativo pero que, oscurecidos por la mecánica del desarrollo algebraico de la solución, le pasan inadvertidos.

Ésta es su resolución manuscrita:

Figura 5

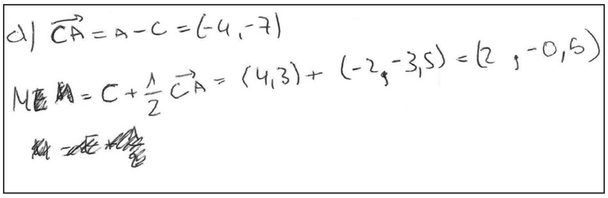
Resolución manuscrita del alumno Jesús para el problema 5 (apartados *a* y *b*).



En el apartado *a* Jesús calcula correctamente los vectores AB y BC, mediante «extremo menos origen», $AB = B - A$, $BC = C - B$. Determina que son perpendiculares, pero no usa el procedimiento convencional, que consiste en calcular el producto escalar $AB \cdot BC$ y comprobar que da cero, sino que construye un vector perpendicular a AB mediante la técnica de permutar las coordenadas y cambiar el signo de una de ellas. Es una técnica que él y otros alumnos ya utilizaron por primera vez en la actividad 6 con GeoGebra. Después, comprueba que este vector, que es perpendicular a AB, es paralelo a BC porque sus componentes son proporcionales a las de BC. Por lo tanto, AB y BC son perpendiculares.

En el apartado *b* Jesús determina erróneamente que AB y CD son iguales. La igualdad cierta es $AB = DC$. Al hacer AB y CD iguales, comete un error en un signo, ya que en realidad $AB = -CD$. Cuando, a partir de este error, calcula $D = AB - C$, obtiene unas coordenadas de D con el signo cambiado respecto de las coordenadas correctas. En realidad, es $AB = C - D$ y por lo tanto $D = C - AB$.

Figura 6
Resolución manuscrita del alumno Jesús para el problema 5 (apartado *d*).



En el apartado *d*, para el cálculo del centro del rectángulo, Jesús utiliza el mismo recurso que él y otros alumnos utilizaron para determinar las coordenadas de los puntos pedidos en las actividades 1, 2, 3 y 4 con GeoGebra, y especialmente en las actividades 3 y 4 (de nuevo aparece la muy fuerte influencia del trabajo en actividades anteriores con GeoGebra). Consiste en calcular un punto a partir de las coordenadas de un punto dado al cual se suma un vector director multiplicado por un escalar (es el mismo procedimiento que permite escribir, como caso general, la ecuación vectorial de la recta). En concreto, Jesús toma uno de los vértices conocidos del rectángulo, el punto *C*, calcula las componentes del vector *CA* que corresponde a una de las diagonales y determina correctamente que el centro del triángulo es $M = C + (1/2)CA$.

Llama la atención que Jesús no realiza ninguna representación gráfica para el problema 5, ni aparece intento o borrador alguno por ninguna parte de las hojas que entrega. Se fía de su imagen mental del problema, lo cual indica hasta qué punto confía en sus habilidades, y también hasta qué punto prescinde del trabajo disciplinado y organizado que supone tomarse la molestia de representar la situación para después abordar los pasos de la resolución algebraica. El hecho de fiarse de una imagen mental en vez de dibujar provoca que un simple error de signo le lleve a unas coordenadas erróneas para el vértice *D*.

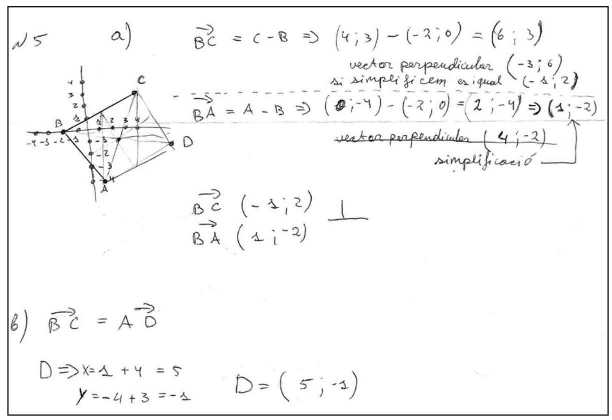
El caso de Iván

Iván obtiene un resultado alto en MHG en el conjunto de la secuencia de actividades con GeoGebra. Sin embargo, sus resultados en MHE y MV son discretos. Se incorporó al sistema educativo en la etapa de la Educación Secundaria Obligatoria, proveniente del extranjero. Es un alumno que obtiene buenas calificaciones en las materias científicas y tecnológicas pero que tiene dificultades con las lenguas oficiales en Cataluña: su expresión, oral y escrita, dista de ser satisfactoria tanto en catalán como en castellano.

Su proceso de resolución para la actividad 7 con GeoGebra es prácticamente idéntico al de Jesús: construcción de un vector perpendicular al vector *QR*; determinación de las posiciones de los vértices *S* y *T*; determinación de la posición del centro mediante operaciones con puntos y vectores.

Pero su resolución con lápiz y papel de la situación similar que plantea el problema 5 de la prueba escrita difiere cualitativamente de la de Jesús. Su enfoque es mucho más visual, aunque no exento de errores. Ésta es la resolución manuscrita del alumno Iván:

Figura 7
Resolución manuscrita del alumno Iván para el problema 5 (apartados *a* y *b*).

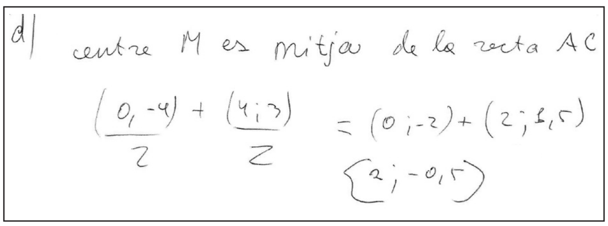


En el apartado *a* Iván construye un esquema gráfico de la situación. Se equivoca cuando sitúa el punto *A*, ya que lo coloca erróneamente en las coordenadas (1, -4) en vez de las correctas (0, -4). Este error tendrá consecuencias negativas en el apartado *b*. Para comprobar que los vectores *AB* (en realidad usa *BA*) y *BC* son perpendiculares, Iván despliega un razonamiento que se sale del camino convencional, ya que no calcula el producto escalar. Calcula correctamente las componentes de *BA* y *BC*, de modo que le quedan los vectores (6, 3) y (2, -4). A continuación, divide las componentes por su máximo común divisor (utiliza la palabra “simplificación”) y, entonces, recurre a la propiedad por la cual si a un vector del plano le permutamos las componentes y cambiamos el signo de una de ellas, el vector resultante es perpendicular al vector original. Si, por esta propiedad, estos vectores (2, 1) y (1, -2) son perpendiculares, es evidente que *BA* y *BC* también lo tienen que ser. Su razonamiento se sigue perfectamente, aunque no va acompañado de ningún texto explicativo.

En el apartado *b*, Iván se basa en la igualdad $BC = AD$ (que es cierta) y utiliza la representación gráfica para partir del punto *A* y sumarle el vector *BC* «contando cuadraditos», es decir: coordenada *x* de *A* más componente *x* de *BC*, y lo mismo para la vertical. Es evidente que se basa en la representación gráfica porque parte del punto *A* mal situado, lo que provoca que la coordenada *x* de *D* sea errónea (la coordenada *y* es correcta). Si hubiera utilizado las coordenadas del punto *A* que ha copiado correctamente del enunciado, este error no se habría producido. Su razonamiento para la resolución tiene, pues, una base visual, que Iván justifica con los cálculos que presenta, separando las componentes. No usa la escritura de la suma de coordenadas y componentes entre paréntesis, lo cual refuerza la interpretación de que realiza un razonamiento basándose en el dibujo que ha hecho y en los movimientos en horizontal y en vertical sobre este dibujo.

Continuamos con la resolución escrita para el apartado *d*:

Figura 8
Resolución manuscrita del alumno Iván para el problema 5 (apartado *d*).


d| centre M es mitjà de la recta AC

$$\frac{(0,-4)}{2} + \frac{(4;3)}{2} = (0;-2)+(2;1,5)$$

$$(2;-0,5)$$

Iván explica y calcula correctamente, con concisión, que el centro del rectángulo es el punto medio del segmento *AC*.

Como hemos mostrado en el relato de su resolución escrita para el problema 5, Iván realiza sus razonamientos sobre la base de la representación gráfica que ha trazado. La referencia visual es muy importante para él, lo cual le ayuda a no extraviarse por caminos exclusivamente algebraicos. Iván ha sido disciplinado para realizar una preparación convencional, a base de ejercicios y problemas estándar, para la prueba escrita, y ha obtenido una puntuación bastante buena. En el problema 5 ha podido convertir en virtud su necesidad de visualizar y resolver a partir de la visualización, sin perder nunca la referencia gráfica.

Jesús e Iván pertenecen a tipologías distintas y, sin embargo, sus resoluciones para la actividad 7 con GeoGebra son muy parecidas, con consecución completa de resultados correctos. Representan la situación, visualizan, manipulan, utilizan la barra de entrada algebraica (por lo tanto usan el lenguaje algebraico) y hallan sin mayor dificultad los resultados. En realidad, de los 19 alumnos, 17 de ellos no se diferencian en la consecución mediante GeoGebra; las diferencias surgen cuando deben anotar cálculos y fórmulas concretos (MHE) o generalizaciones (MV). Son estas diferencias las que nos permiten establecer las tipologías.

En la resolución por escrito del problema 5 Jesús e Iván ya no son casi indistinguibles como eran en la resolución del problema 7 con GeoGebra. Sus diferencias responden a un fondo que la clasificación en tipologías ya apunta: Jesús se puede sentir cómodo con un procedimiento muy algebraico y poco visual, mientras que Iván necesita siempre un soporte visual para desenvolverse, tanto en las actividades con GeoGebra (donde la visualización es intrínseca al entorno de trabajo) como en resoluciones con lápiz y papel (donde la visualización no es intrínseca al entorno).

5. RESULTADOS

El análisis de los resultados en los diferentes tipos de matematización con GeoGebra nos permite clasificar a los 19 alumnos en cuatro categorías:

1. Matematizadores completos (7 alumnos con resultados altos en MHG, MHE y MV: valores medios iguales o mayores que 2/3).

Pueden contemplar las situaciones en sus aspectos matemáticos concretos y también pueden elevarse hasta la generalización. Con una alta consecución:

– Resuelven mediante GeoGebra las situaciones concretas que plantean las actividades.

– Expresan correctamente por escrito los cálculos que conducen hacia las soluciones.

– A partir de situaciones concretas que han resuelto, escriben expresiones algebraicas generales. (El alumno Jesús pertenece a esta categoría.)

2. Matematizadores horizontales (7 alumnos).

Resuelven mediante GeoGebra y lo expresan por escrito, ambas cosas con altas consecuciones, pero obtienen una consecución mucho más discreta en la generalización. Se mueven con comodidad dentro de situaciones concretas, pero les cuesta el movimiento vertical hacia las generalizaciones.

3. Matematizadores tecnológicos (3 alumnos).

Resuelven con alta consecución mediante GeoGebra pero presentan un rendimiento significativamente más bajo cuando expresan por escrito, algebraicamente, los resultados. Y todavía tienen mayores dificultades para generalizar. Se mueven con comodidad en un entorno visual y manipulativo pero no muestran igual desenvoltura por escrito sobre el papel. (El alumno Iván pertenece a esta categoría.)

4. Matematizadores débiles (2 alumnos).

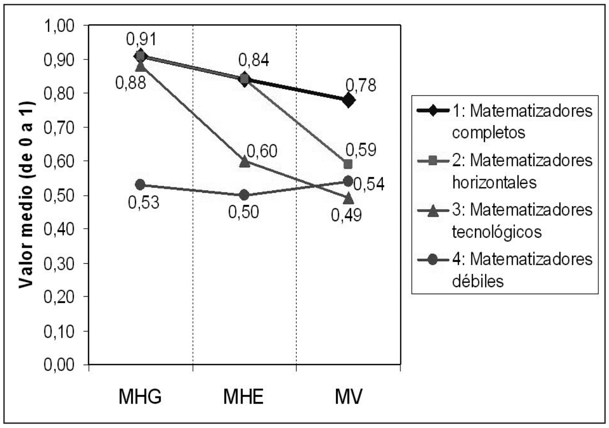
Obtienen resultados bajos o discretos en todos los tipos de matematización. Ni siquiera en un entorno visual, manipulativo e interactivo matematizan con cierta desenvoltura.

Una vez establecidas las tipologías, obtenemos cuáles son sus perfiles como subgrupos de alumnos: calculamos los valores medios del conjunto de datos de cada subgrupo en cada tipo de matematización.

Mostramos estos perfiles en el gráfico siguiente:

Figura 9

Representación gráfica de los resultados medios de cada categoría para cada tipo de matematización.



Apreciamos que cuando los alumnos trabajan en el entorno interactivo GeoGebra y resuelven las actividades con el ratón y el teclado, visualizando y manipulando los elementos geométricos que aparecen en la pantalla, los resultados son muy altos para casi todos (categorías 1, 2 y 3; 17 alumnos sobre 19).

Observamos que cuando los alumnos reflejan por escrito, sobre el papel, aspectos de la resolución con GeoGebra, la consecución de resultados correctos cae 7 puntos porcentuales para las categorías 1 y 2, y 18 puntos porcentuales para la categoría 3 (la categoría 4 presenta valores con pocas diferencias en los tres tipos de matematización).

Y cuando estos alumnos tienen que formular una generalización a partir de las situaciones concretas que plantean las actividades, el éxito cae, respecto de los resultados de la resolución con ratón, teclado y pantalla, 13 puntos porcentuales para la categoría 1, 32 puntos para la categoría 2 y 39 puntos para la categoría 3.

¿Los alumnos saben resolver las situaciones que plantean las actividades? Si nos basamos en la resolución con GeoGebra, tenemos que responder que sí, dado el alto grado de éxito que muy mayoritariamente alcanzan. ¿Matematizan? Sin duda que sí: los alumnos transfieren situaciones presentadas en contexto hacia un problema matemático, las cuales visualizan y manipulan interactivamente.

El hecho de que los resultados en la MHE (expresión por escrito de la matematización horizontal) y en la MV (generalización a partir de resoluciones para casos concretos) sean menores que para la MHG (matematización visual y manipulativa con GeoGebra), no significa que los alumnos no sepan resolver. De hecho, el éxito es muy alto cuando los alumnos resuelven las actividades mediante el uso de GeoGebra. Sucede que, en primer lugar, la comunicación por escrito (algebraica) les resulta más difícil que la manipulación visual e interactiva de los elementos geométricos mediante el ratón, el teclado y la pantalla. Y, en segundo lugar, que la generalización a partir de las resoluciones concretas les cuesta todavía más.

Con respecto al estudio de cuatro casos (comparando resoluciones con GeoGebra y resoluciones por escrito, de los cuales hemos mostrado dos: Jesús e Iván), nos damos cuenta de que en las resoluciones con GeoGebra se produce una tendencia hacia la homogeneidad. Los alumnos resuelven la actividad 7 con GeoGebra mediante estrategias muy parecidas, independientemente de la categoría de matematización a la cual pertenecen. En cambio, en las resoluciones por escrito afloran las diferencias. El rendimiento es mayor para la matematización horizontal en actividades con GeoGebra que para la resolución convencional con lápiz y papel, aunque se trate de actividades muy similares y aunque la resolución convencional sea posterior en el tiempo a la resolución con GeoGebra.

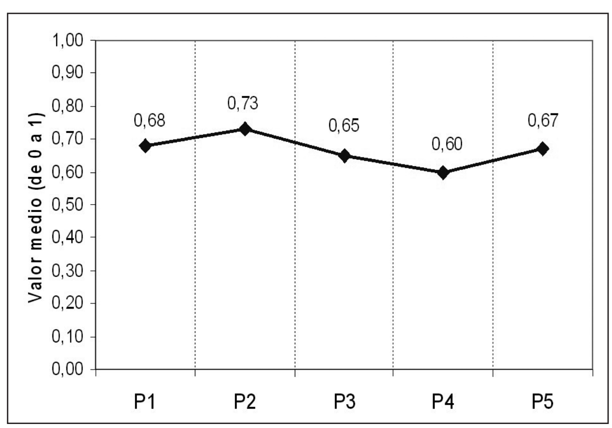
Con respecto a las valoraciones subjetivas de los alumnos para las actividades con GeoGebra, observamos un comportamiento mucho más uniforme que en la matematización: tanto los alumnos que obtienen altos rendimientos como los que no emiten valoraciones muy parecidas, por lo cual no es posible establecer categorías de percepción subjetiva.

Los valores medios grupales de valoración para toda la secuencia de actividades, en una escala de 0 a 1, han sido 0,68 (P1); 0,73 (P2); 0,65 (P3); 0,60 (P4); 0,67 (P5). Estas cifras revelan percepciones positivas cercanas al valor 2/3 (correspondiente a la respuesta «bastante») con algunas oscilaciones. Por lo tanto, los alumnos consideran globalmente que el uso de GeoGebra les ayuda. La mejor valoración corresponde a P2 (hallar) y la peor a P4 (generalizar), lo cual nos indica que los alumnos perciben una especial utilidad en el trabajo visual y manipulativo que les permite llegar a resultados concretos, mientras que perciben menor utilidad en el uso de GeoGebra para generalizar.

Visualizamos estos resultados en el gráfico siguiente:

Figura 10

Representación gráfica de los resultados medios para cada pregunta de valoración subjetiva.



Resumiendo, apreciamos que la matematización con GeoGebra obtiene su mayor rendimiento en el nivel más visual y manipulativo de la resolución de actividades. A medida que el trabajo de los alumnos se aleja de la visualización y de la manipulación más inmediatas, los rendimientos descienden, aunque no con la misma intensidad para todos los estudiantes. La percepción subjetiva de los alumnos refleja la diferencia entre la visualización con manipulación y la generalización; sin embargo, se trata de una diferencia atenuada, cuya intensidad no depende de la tipología de matematización a la cual pertenece el alumno. Todos los alumnos emiten valoraciones (positivas) muy similares sobre el uso de GeoGebra, pero los rendimientos objetivos difieren notablemente. Y, en todo caso, el grado de consecución en la resolución de actividades con GeoGebra es mayor que el grado de consecución en actividades similares pero presentadas y resueltas en un entorno convencional (tradicional).

6. CONCLUSIONES

La interpretación de los resultados obtenidos nos conduce a presentar una serie de motivos por los cuales el uso de las actividades de la plataforma de matematización (es decir, las actividades de matematización inducida en el entorno GeoGebra, dentro de un planteamiento didáctico «desde abajo hacia arriba») resulta ventajoso en comparación con un planteamiento tradicional:

1. Motivación.

Los alumnos muestran una alta motivación. Efectivamente, «aumenta la motivación de los alumnos» (Niss, 1989). En un planteamiento tradicional, ésta suele ser un problema.

2. Implicación activa.

Los alumnos matematizan, reflexionan y comprenden activamente. Apreciamos que existe «la mejora de la aprehensión de los conceptos matemáticos» (Biembengut y Hein, 2004). Los alumnos, por propia iniciativa, representan y manipulan con GeoGebra. Algunos realizan diversos intentos y otros hallan enseguida el camino. Todos se dedican concienzudamente al trabajo que tienen que hacer. En un planteamiento tradicional, a menudo se limitan a ser receptores pasivos: los casos de alumnos activos y participativos suelen ser minoritarios.

3. Matematización alcanzada.

La gran mayoría de alumnos presenta una alta consecución de resultados correctos mediante la matematización inducida en el entorno visual y manipulativo de GeoGebra. En un planteamiento tradicional, algunos alumnos (en condiciones favorables, la mayoría, pero a veces una minoría) aprenden a resolver ejercicios y problemas estandarizados, pero no hay ninguna garantía de que realicen un trabajo autónomo de reflexión y comprensión.

4. Mejor rendimiento en el entorno visual y manipulativo.

La comparación que hemos realizado entre los procesos de resolución con GeoGebra y en una situación convencional señala que para actividades muy parecidas el rendimiento (medido según la consecución de resultados correctos por parte de los alumnos) es claramente más alto con GeoGebra.

5. Mejor valoración por parte de los alumnos que un planteamiento tradicional.

En cada actividad hemos pedido a los alumnos una valoración sobre si consideraban que usar GeoGebra es más útil que trabajar con un planteamiento didáctico tradicional. Actividad tras actividad, las valoraciones han sido mayoritariamente positivas: efectivamente, los alumnos manifiestan que usar GeoGebra «les ayuda» (Iranzo y Fortuny, 2009).

Cuando los estudiantes desarrollan la matematización inducida en el entorno que les ofrece GeoGebra, se desenvuelven en un nivel básico y muy inmediato de las competencias matemáticas: el de la visualización y la manipulación. Sin embargo, cuando emprenden la concreción por escrito, usan otro tipo de competencia: la competencia comunicativa (con lenguaje matemático). En el entorno de GeoGebra, la gran mayoría de los alumnos hace uso de su competencia visual y manipulativa con un grado muy alto de consecución de resultados correctos. Pero cuando los estudiantes deben desplegar la competencia comunicativa para trasladar su trabajo al lenguaje simbólico, su rendimiento desciende. Luego la traducción algebraica, con lápiz y papel, de la matematización realizada con medios tecnológicos visuales y manipulativos no es un simple automatismo para los alumnos; en este paso existe una brecha: la que separa los dos tipos de competencia. Para algunos alumnos esta brecha es leve, pero para otros es más profunda.

Cuando los estudiantes abordan situaciones muy similares pero desarrolladas en contextos visuales por una parte y en situaciones convencionales «de lápiz y papel» por otra parte, el rendimiento es superior en contextos que facilitan el uso de la competencia visual y manipulativa, mientras que es inferior cuando las situaciones se abordan ya desde su inicio mediante el uso por escrito del lenguaje algebraico, es decir, mediante la aplicación de la competencia comunicativa en su forma convencional.

Estas consideraciones anteriores nos llevan a concluir que el trabajo en un entorno GeoGebra con actividades de matematización inducida (en lo que llamamos una *plataforma de matematización*) es especialmente adecuado para una primera fase donde domina la competencia visual y manipulativa (alta consecución de resultados correctos, motivación y comprensión activa) mientras que la concreción por escrito, para la cual es necesaria la competencia comunicativa, y la generalización de los resultados demandan un posterior trabajo en el cual la intervención del profesor como suministrador de contenidos es muy necesaria, dentro de unos parámetros más convencionales. De este modo, se completa la secuencia «desde abajo hacia arriba», que es la secuencia fundamental de nuestro planteamiento didáctico.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BIEMBENGUT, M.S. y HEIN, N. (2004). *Modelación matemática y los desafíos para enseñar Matemática*. *Educación Matemática*, 16(2), pp. 105-125.

ENGLISH, C. (1999). *Modeling for the New Millennium*, en Hoyles, C., Morgan, C. y Woodhouse, G. (eds.). *Rethinking the Mathematics Curriculum*. Londres: Falmer Press.

FILLOY, E. (1998). *Didáctica e historia de la geometría euclidiana*. México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

GÓMEZ, J. (1998). *Contribució a l'estudi dels processos de modelització a l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques a nivell universitari*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

IRANZO, N. y FORTUNY, J.M. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(3), pp. 433-446.

NISS, M. (1989). *Aims and Scope of Applications and Modeling in Mathematics Curricula*, en Blum, W., Berry, J.S., Biehler R., Huntley, I.D., Kaiser-Messmer, G. y Profke, L. (eds.). *Applications and Modeling in Learning and Teaching Mathematics*. Chichester: Ellis Horwood.

TREFFERS, A. (1986). *Three Dimensions*. Dordrecht: Reidel.

VAN DER HEUVEL-PANHUIZEN, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: a Guided tour. Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9*. Utrecht: Utrecht University.

VAN REEUWIJK, M. (1997). *Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas*. *UNO Revista de didáctica de las Matemáticas*, 12, pp. 9-16.

[Artículo recibido en agosto de 2010 y aceptado en octubre de 2010]

Mathematization platform in a GeoGebra environment within a didactic approach «from bottom to top»

Costa Llobet, Joaquim
Profesor de matemáticas y director del Institut Rocagrossa de Lloret de Mar, Girona
jcosta16@xtec.cat

Summary

Mathematization platform in a GeoGebra environment within a didactic approach «from bottom to top» is part of an investigation that analyzes an innovative approach for the teaching of Analytic Geometry in the first year of post-compulsory education in Catalonia (Spain).

The theoretical references come from texts by various authors and are grouped into four areas: contextualization, mathematization, mathematical modeling, and the influence of the use of GeoGebra in problem solving. The main authors of reference are: Biembengut and Hein; English; Filloy; Iranzo and Fortuny; Niss; Treffers; Van den Heuvel-Panhuizen; Van Reeuwijk. Under the terms of this study, contextualization, mathematization and modeling are different aspects of a unique educational reality in which students carry out contextualized activities. All this takes place in the realm of the interactive software GeoGebra. The activities induce mathematization and construction of simple mathematical models.

The didactic approach consists of a sequence that begins with contextualized activities that induce mathematization, and is completed with a further formalization of the contents. Specifically, we use the expression «mathematization platform» to refer to the phase of induced mathematization. Unlike the traditional methodology, the sequence does not start with formal presentations and perfectly structured contents. The completion comes after the mathematization induced by contextualized activities that have paved the way for the formal establishment of the contents.

The analysis of the mathematization made by the students has a central role in this research. The study analyzes group results and individual results of the students in the process of induced mathematization and performs a classification of students into different categories. It also examines the students' subjective assessments on the implementation of activities with GeoGebra, and compares solving strategies in the GeoGebra environment with strategies in similar activities carried out with pencil and paper.

From the detailed analysis of mathematization, the subjective ratings of the students and the comparison between conventional and GeoGebra solving process, the work makes a number of considerations. Compared to the traditional methodology, there is an improved performance in mathematization, as well as an increased self-awareness, motivation and involvement of students in the learning process. In the GeoGebra environment, the vast majority of students make use of visual and manipulative competences with a very high level of achievement. But when it comes to using the mathematical communication skills to write their work down, their performance decreases. Therefore the GeoGebra environment is especially suitable to induce high performance mathematization at a visual and manipulative first stage, but recording the solving process in a conventional way requires a subsequent work in which the intervention of the teacher as a provider of content is very necessary.

Keywords: Analytic Geometry, Mathematization, Visualization, Modeling, GeoGebra.