

RAZONAMIENTO CONFIGURAL COMO COORDINACIÓN DE PROCESOS DE VISUALIZACIÓN

TORREGROSA GIRONÉS, G.; QUESADA VILELLA, H. y PENALVA MARTÍNEZ, M.C.

Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante

german.torregrosa@ua.es

hqv@alu.ua.es

carmina.penalva@ua.es

Resumen. Presentamos un estudio que identifica los procesos de visualización de estudiantes para maestro, cuando resuelven problemas de geometría, que requieren una prueba matemática, en un entorno de lápiz y papel. Los resultados muestran la influencia que tienen las figuras iniciales, que acompañan a los problemas, y las modificaciones posteriores de estas figuras en el desarrollo de las aprehensiones discursiva y operativa, que constituyen los vínculos entre los procesos de razonamiento matemático y la visualización en la resolución de problemas de geometría en contexto de lápiz y papel. Finalmente, identificamos posibles causas de las limitaciones que dificultan el desarrollo de dichas aprehensiones.

Palabras clave. Visualización, aprehensión, razonamiento configural, resolución de problemas, prueba matemática.

Configural reasoning as coordination of visualisation process

Summary. This study identifies visualisation processes in student primary teachers when they solve geometry problems requiring mathematical proof, in a pencil-and-paper environment. The results reveal the importance of the initial diagrams that accompany the problems, as well as subsequent modifications of these diagrams in the development of discursive and operative apprehension, constituting as they do links between mathematical reasoning processes and the visualisation of geometry-problem solving in a paper-and-pencil context. Finally, we identify the possible causes of those limitations that hinder the development of such apprehension.

Keywords. Visualisation, apprehension, configural reasoning, problem solving, mathematical proof.

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre la resolución de problemas geométricos está siendo ampliamente desarrollada en dos agendas de investigación. Una de ellas se centra en la prueba y en sus distintos desarrollos (Balacheff, 1988; Harel y Sowder, 1998; Ibañez, 2001). Estas investigaciones muestran distintas funciones de las pruebas que pueden identificarse en la resolución de problemas (verificación, explicación, iluminación, sistematización, comprobación, convencimiento, entre otros tipos). En esta agenda de investigación, Soucy y Martín (2006) indican que trabajar con pruebas en geometría ayuda a pensar de manera lógica y a desarrollar argumentos coherentes que expliquen por qué un resultado es cierto.

Sin embargo, las acciones para resolver un problema de geometría junto a la comprensión de la prueba que realiza el alumno y las demandadas por la disciplina matemática no son necesariamente las mismas.

La otra agenda de investigación se centra en caracterizar el desarrollo de los procesos cognitivos que ponen de manifiesto los estudiantes cuando resuelven problemas de geometría (Bishop, 1983; Fischbein, 1987; Del Grande, 1990; Hershkowitz, Parzysz y Van Dermolen, 1996; Zazkis, Dubinsky y Dautermann, 1996; Duval, 1998; Koleza y Kabani, 2006). En esta agenda de investigación, Duval (2007) afirma que debe considerarse el punto de

vista cognitivo en la enseñanza y el aprendizaje. Desde esta perspectiva se han planteado una amplia diversidad de modelos teóricos que han servido para avanzar en el estudio de estos procesos. En particular, Krutetskii (1976) identificó distintas habilidades en la resolución de problemas y clasificó a los individuos en tres tipos: analítico, geométrico y armónico dependiendo de las habilidades desarrolladas. En esta dirección, Bishop (1983, 1989) distingue dos acciones cognitivas (visual processing and interpreting figural information) que han servido a otros autores para organizar un modelo integrador para el estudio del papel desempeñado por las imágenes mentales, las representaciones externas, y los procesos, y habilidades en la resolución de problemas (Gutiérrez, 1996). Esta aproximación pone de relieve la importancia dada a la relación entre lo visual y lo analítico en el estudio de los procesos de resolución de problemas de geometría (Presmeg, 1986a, 1986b). En esta misma dirección, Fishbein (1993) desarrolla la teoría de los conceptos figurales resaltando algunas acciones cognitivas que amplían el modelo de Presmeg de la relación entre lo visual y lo analítico. Por otra parte, Zazkis, Dubinsky y Dautermann (1996) proponen un modelo analizador/visualizador (A/V) construido sobre la coordinación de estos procesos, asumiendo que es importante comprender cómo se combinan los enfoques visuales y los enfoques analíticos en la resolución de problemas matemáticos. Desde este punto de vista se asume que la coordinación entre lo visual y lo analítico puede ser relevante para el desarrollo de las pruebas matemáticas.

En esta línea apuntada, hemos empezado a desarrollar un modelo que pueda explicar la coordinación de los procesos cognitivos considerados, en este caso procesos de visualización, que desemboca, a su vez, en un proceso de razonamiento que hemos llamado *razonamiento configurado*.

Según el Diccionario de la Real Academia Española de la Lengua, coordinación es el acto o efecto de concertar medios, esfuerzos, etc. para una acción común. En nuestro trabajo, entendemos la coordinación como la interacción de procesos cognitivos –entendida como concertación de medios– para la resolución de problemas geométricos.

En nuestras investigaciones (Torregrosa y Quesada, 2007, 2008) se constató que hay alumnos que logran realizar esa coordinación para desarrollar pruebas matemáticas. Sin embargo, se generan cuestiones sobre las causas por las que otros estudiantes no consiguen realizar dicha coordinación.

El objetivo del estudio presentado en este artículo es identificar posibles causas por las que la coordinación no se da o se interrumpe en el proceso de resolución de problemas.

Para ello, describimos los procesos cognitivos de visualización y razonamiento generados por los estudiantes durante la resolución de problemas geométricos y, de manera específica, nos centramos en:

– Caracterizar la *coordinación* entre los procesos de visualización y el razonamiento en la resolución de problemas de geometría que demandan una prueba deductiva y

– Desarrollar posibles explicaciones que permitan comprender las acciones realizadas por los alumnos y las dificultades que parecen encontrar cuando resuelven problemas de geometría que demandan una prueba en contexto de lápiz y papel.

Es decir, el objetivo de esta investigación es identificar en las respuestas de los alumnos, a partir de los análisis realizados a la luz del modelo *razonamiento configurado*, posibles causas que expliquen la ausencia o interrupción de la coordinación de procesos. Esta información nos permitirá aportar datos que pueden ayudar a identificar características útiles para la interpretación de las acciones de los estudiantes cuando resuelven problemas de geometría.

MARCO TEÓRICO: VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO

La literatura muestra que conceptos como visión, capacidad espacial, razonamiento geométrico, pensamiento espacial, visión espacial... son en sí una dificultad añadida a la búsqueda de una definición de visualización, ya que distintos nombres hacen referencia al mismo concepto o, por el contrario, el mismo nombre hace referencia a diferentes conceptos (Bishop, 1983; Presmeg, 2006). No es extraño que en las investigaciones actuales sobre la resolución de problemas con «papel y lápiz» o con *software* de geometría dinámica aparezcan con frecuencia expresiones en las que interviene la palabra visualización o similares, y que tiene diferentes significados dependiendo del autor. Según Hershkowitz (1990) «la visualización, generalmente, se refiere a la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflexionar sobre la información visual». Para Zimmermann y Cunningham (1991) «Visualización es el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel o con la ayuda de tecnología) y usar tales imágenes para el descubrimiento y el conocimiento matemático». Los términos utilizados para definir la visualización se han concretado, empezando a entenderla como acto por el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo cuyo acceso es adquirido a través de los sentidos (Zazkis, Dubinsky y Dautermann, 1996). Con relación a este proceso de conexión, Hershkowitz, Parzys y Van Dermolen (1996) indican: «se entiende visualización como la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual o viceversa. Esto incluye también la transferencia de un tipo de representación visual a otra». Esta transferencia es la que consideramos relevante para describir los distintos procesos cognitivos derivados de la visualización.

Ya sea desde el punto de vista matemático, en relación con el desarrollo de la prueba, o desde el punto de vista cognitivo, el alumno debe coordinar los distintos procesos y los distintos registros de representación para ordenar y construir pruebas en la resolución de problemas. Este proceso de coordinación es caracterizado por Duval (1993) mediante tres actividades relacionadas con la semiosis (o sea, aprehensión o producción de una representación semiótica):

- La *identificación* de una representación.
- El *tratamiento* de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada.
- La *conversión* que consiste en la transformación de una representación en un registro a otra representación realizada en otro registro.

Estas tres actividades son inherentes al desarrollo de pruebas matemáticas en la resolución de problemas geométricos y deben ser tenidas en cuenta para la comprensión y el análisis de las acciones que se realizan cuando se genera una prueba. En particular, el registro gráfico en el que se sitúan las distintas configuraciones de puntos en geometría no siempre ayuda al desarrollo de la prueba. Las dificultades que pueden surgir hacen referencia a cómo el individuo percibe las configuraciones, y cómo éstas poseen factores que pueden despertar o inhibir en el alumno la manera en que son percibidas y la capacidad de anclar determinadas propiedades geométricas a la configuración. Mesquita (1989), Padilla (1990) y Duval (1998), entre otros, describen en sus investigaciones factores que influyen en la manera en que es identificada y transformada la configuración en los procesos de probar. Algunos de estos factores son:

- La *convexidad de las subconfiguraciones relevantes*. Según Mesquita (1989), en una figura es más difícil destacar una subconfiguración no convexa que una subconfiguración convexa, ya que la no convexidad no respeta la ley gestaltica de simplicidad del contorno.
- La *complementariedad de las subconfiguraciones constituyentes*. La idea de que las subconfiguraciones deben ser identificadas como partes que se complementan para formar una configuración más compleja no es un proceso intuitivo fácil de detectar.
- La existencia de *subconfiguraciones visualmente predominantes*, como áreas sombreadas o líneas más gruesas en la configuración inicial, que obstaculizan la identificación de la subconfiguración relevante.
- La *congruencia semántica* que se da cuando las subconfiguraciones que la figura «muestra» son las mismas a las que el enunciado refiere.

Por otra parte, Duval (1998) define los procesos de visualización considerando los diferentes tipos de aprehensiones, entendiendo por aprehensión el acto por el que se capta la forma de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin afirmar ni negar. El estudio del papel de las aprehensiones en los procesos de prueba ha permitido caracterizarlas de la siguiente manera:

- La *aprehensión perceptiva* se caracteriza por ser la identificación simple de una configuración. Es la primera en aparecer en el desarrollo cognitivo del aprendiz y es la acción más intuitiva y evidente de todas las que se van a describir.

- La *aprehensión discursiva* es la acción por la que se produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (es decir: definiciones, teoremas, axiomas...). Esta asociación puede realizarse de dos maneras según la dirección de transferencia realizada, ya sea desde el discurso hacia la configuración o viceversa (cambio de anclaje). Véase ejemplo en el apartado Análisis.

- La *aprehensión operativa* viene determinada por realizar alguna modificación (física o mental) sobre la configuración inicial, pudiendo extraer, introducir o manipular las distintas subconfiguraciones. Dependiendo de la modificación producida, podemos distinguir dos tipos: la aprehensión operativa de cambio figural en donde a la configuración inicial se le añaden nuevos elementos geométricos (nuevas subconfiguraciones), y la aprehensión operativa de reconfiguración en la que las subconfiguraciones iniciales son manipuladas como las piezas de un puzle. Véase ejemplo en el apartado Análisis.

Identificar y caracterizar las distintas aprehensiones que los estudiantes generan cuando están resolviendo problemas de probar en geometría puede facilitar el análisis de las respuestas dadas y poner de manifiesto las acciones que desarrollan. Por otra parte, aunque la visualización es de gran importancia para la resolución de problemas en geometría, entendemos que los procesos de visualización están relacionados con los procesos de razonamiento, lo que ha hecho que la mayoría de las investigaciones de corte psicológico estén interesadas en observar los procesos de razonamiento (Gutiérrez, 1998). Nosotros entendemos razonamiento, en un sentido amplio, como cualquier procedimiento que nos permita desprender nueva información de informaciones previas, sean éstas proporcionadas por el problema o derivadas del conocimiento previo. En este sentido, el *razonamiento configural* es un tipo de razonamiento caracterizado por la coordinación entre la aprehensión discursiva y la aprehensión operativa. Esta coordinación debe ser comprendida como el conjunto de acciones que realiza el resolutor para razonar en geometría y debe distinguirse de las acciones que realiza en los procesos de comunicación. Es decir, el razonamiento configural es el desarrollo de las aprehensiones (aprehensión discursiva/aprehensión operativa) realizadas y coordinadas por el estudiante cuando está resolviendo un problema de geometría. En el estudio de Elia, Gagatsis, Deliyianni, Monoyiou y Michael (2009) se indaga sobre el papel de la modificación de las figuras geométricas, es decir, de la aprehensión operativa según Duval (1995), en los procesos de resolución de problemas de alumnos de educación primaria.

En nuestra investigación, la resolución de un problema de geometría de probar exige relacionar la configuración inicial y las posibles modificaciones de ésta con las afirmaciones matemáticas pertinentes, lo que permite identificar el razonamiento configural involucrado. Desde este punto de vista, la investigación se centra en la identificación y caracterización del razonamiento configural que puede ayudarnos a comprender mejor los procesos que permiten el desarrollo de la prueba.

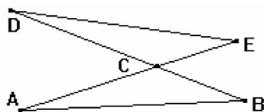
Metodología

Participantes e instrumentos

Los participantes en el estudio son 55 estudiantes para maestro que resolvieron 8 problemas geométricos en un entorno de lápiz y papel. Se han seleccionado 3 de estos problemas en los que era necesario modificar y/o construir la configuración inicial para determinar cuáles son las subconfiguraciones relevantes para resolver el problema y qué afirmaciones matemáticas permiten desarrollar la prueba. La elección de los problemas se realizó teniendo en cuenta la presencia o no de una configuración en el enunciado, el número de afirmaciones matemáticas (o número de pasos de inferencia) necesarias para resolverlo y la demanda de una prueba deductiva. Los problemas propuestos demandan al resolutor encadenar distintos pasos de inferencia en un proceso deductivo, con el fin de encontrar la solución al problema. En este artículo hemos elegido las respuestas que representan mejor el ejemplo que se quiere mostrar, máxime cuando el objetivo de nuestro estudio es cualitativo y tiene una intención descriptiva de las conductas identificadas.

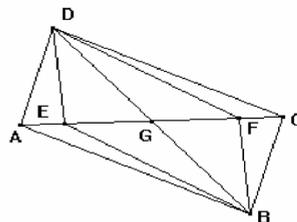
Para ello, la resolución del problema se apoya en posibles modificaciones de las configuraciones iniciales (aprehensión operativa) que el participante debe asociar con afirmaciones matemáticas (aprehensión discursiva) para generar el proceso deductivo. Los problemas utilizados son los siguientes:

P2. Dada la figura, con $\overline{CE} \equiv \overline{CB}$ y $\hat{E} \equiv \hat{B}$, probar que $\hat{D} \equiv \hat{A}$.



P6. En un plano, la recta L es mediatriz de QT. Sea P un punto del mismo semiplano, de recta borde L, que Q. La recta PT corta a L en el punto R. Probar que $d(P,R) = d(P,R) + d(R,Q)$.

P8. En la figura, DEBF es un paralelogramo y $\overline{AE} \equiv \overline{CF}$. Probar que ABCD es un paralelogramo.



Los estudiantes respondieron a estos problemas durante dos horas, como parte de una prueba para la evaluación de un módulo de geometría euclídea centrado en desarrollar aspectos de la visualización y la idea de probar.

Análisis

El análisis se ha centrado en identificar evidencias de la forma en que interactúan los procesos de visualización durante la resolución de los problemas. Para ello hemos seguido un proceso de análisis en tres fases:

- Fase 1. Se transcribe el protocolo de resolución en una tabla con dos columnas dividiendo el protocolo en fragmentos.
- Fase 2. En cada protocolo se identifican los tipos de aprehensiones.
- Fase 3. Intentamos dar cuenta de cómo se desarrolla el proceso configural, entendido como la manera en la que los estudiantes coordinan la aprehensión discursiva y la aprehensión operativa.

Para realizar este análisis cada respuesta se dividió en fragmentos que proporcionaban información sobre el razonamiento configural seguido por los estudiantes. Estos fragmentos se numeraron para facilitar el análisis y su localización. Mostramos el proceso de análisis seguido a partir de una de las respuestas al problema P2:

Respuesta del alumno 2 al problema P2.

Esta respuesta se divide en los fragmentos que aparecen en la tabla 1. Cada uno de los fragmentos considerados se interpreta como un componente de un paso de inferencia en un discurso, es decir una hipótesis, una afirmación matemática o su conclusión. La tabla 1 muestra en la columna de la izquierda la transcripción y la división del protocolo en fragmentos, y en la columna de la derecha la interpretación dada.

Una vez transcrita la respuesta del problema de esta manera, los fragmentos se analizan desde el punto de vista del proceso de visualización identificando para ello las diferentes aprehensiones que se dan en el proceso de resolución. Así, en los fragmentos 2), 3) y 4) podemos observar una aprehensión discursiva. Las marcas realizadas sobre la configuración inicial son evidencias de esta aprehensión discursiva, ya que el alumno asocia las hipótesis del enunciado con los elementos geométricos (segmentos y ángulos) de la configuración inicial, pasando de un anclaje discursivo (el enunciado) a un anclaje visual (la configuración inicial). En el fragmento 5) el alumno considera dos triángulos $\triangle DCE$ y $\triangle ACB$ como subconfiguraciones de la configuración inicial. Esta acción se entiende como evidencia de una aprehensión operativa ya que identifica las subconfiguraciones de cada triángulo por separado (aunque sea mentalmente). Es decir, como si moviera ambas subconfiguraciones y las situara en un mismo nivel donde verifica las condiciones de la afirmación 1 (criterio A-L-A de congruencia de triángulos).

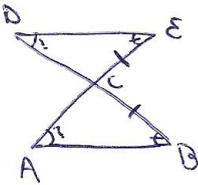
En la segunda fase del análisis tratamos de identificar si ha existido coordinación entre los tipos de aprehensión y cómo se ha producido. Así, en el fragmento (1) observamos la configuración inicial en la que el

alumno añade unas marcas de congruencia de ángulos y segmentos destacados en 2), 3) y 4). Esta manera de proceder se entiende como la realización de tres aprehensiones discursivas, al asociar la congruencia de ángulos y segmentos a la configuración inicial, evidenciadas mediante las distintas marcas. En 5), el resolutor considera dos triángulos que son dos configuraciones que constituyen la configuración inicial (aprehensión operativa). A estos triángulos les asocia el axioma de congruencia A-L-A (fragmento 9), con lo que de nuevo esta forma de proceder es evidencia de una aprehensión discursiva. Además, el alumno verifica las hipótesis necesarias para poder utilizar la afirmación A-L-A (fragmentos 6), 7) y 8) y mediante la tesis de la afirmación (fragmento 10) obtiene la conclusión del problema.

La solución viene derivada de la coordinación entre la asociación de afirmaciones matemáticas (en este caso el axioma de congruencias de triángulos Ángulo-Lado-Ángulo) y la manipulación de la configuración inicial, en la que se identifican los triángulos $\triangle DCE$ y $\triangle ACB$, probando que son congruentes, para llegar a la tesis pedida por el problema. Esta coordinación se convierte en clave en el proceso de prueba generado por el estudiante.

El resultado de este proceso de análisis siguiendo estas tres fases (transcripción en forma de tabla, identificación de diferentes tipos de aprehensiones e identificación de posible coordinación entre las aprehensiones) nos permitió identificar diferentes características de los procesos de coordinación que llevaban a diferentes desenlaces. Las características de estos desenlaces se describen en la siguiente sección.

Tabla 1

| TRASCRIPTIÓN DE LA RESPUESTA Y DIVISIÓN EN FRAGMENTOS | DESCRIPCIONES Y COMENTARIOS ANALÍTICOS PARA INDICAR PASOS DE INFERENCIA |
|--|--|
| <p>1)</p>  <p>2) $\overline{CE} \equiv \overline{CB}$ 3) $\hat{E} \equiv \hat{B}$ 4) $\hat{D} \equiv \hat{A}$? 5) 1) Considero $\triangle DCE$ y $\triangle ACB$ y tengo: 6) $\overline{CE} \equiv \overline{CB}$ por hipótesis 7) $\hat{E} \equiv \hat{B}$ por hipótesis 8) $\hat{DCE} \equiv \hat{ACB}$ por ser opuestos por el vértice 9) Por axioma A-L-A 10) $\rightarrow \triangle DCE \equiv \triangle ACB$ 11) $\rightarrow \hat{A} \equiv \hat{D}$</p> | <p>1) Figura con marcas. 2) y 3) Hipótesis dadas por el problema. 4) Tesis: hecho que debe ser probado. 5) Identifica dos subconfiguraciones en la configuración dada: los triángulos DCE y ACB 6) Asocia las hipótesis dadas por el problema a las dos configuraciones identificada en 5) 7) Asocia las hipótesis dadas por el problema a las dos configuraciones identificadas. 8) Asocia hecho geométrico a una subconfiguración. 9) Asocia el criterio A-L-A a la subconfiguración identificada con los hechos geométricos 10) que le permite concluir una tesis 11) Consecuencia de la tesis anterior y conclusión del problema.</p> |

RESULTADOS

El análisis realizado nos ha permitido identificar tres clases de desenlace en relación con la coordinación entre la aprehensión discursiva y la aprehensión operativa en la resolución de problemas que demandan una prueba. Estos tres desenlaces son:

- *Truncamiento*. Cuando la coordinación proporciona la «idea» para resolver deductivamente el problema. Es decir, el razonamiento configural se interrumpe cuando se obtiene la «idea» que resuelve el problema (la prueba). A partir de esa idea se genera el discurso deductivo.

- *Conjetura sin demostración*. Cuando el razonamiento configural permite al estudiante dar una respuesta al problema aceptando las conjeturas mediante percepción simple y expresando la solución mediante el lenguaje natural y no validando las relaciones ni afirmaciones usadas.

- *Bucle*. Proceso en el que se ha llegado a una situación de bloqueo que no permite el avance hacia la solución y por tanto un estancamiento del razonamiento producido.

A continuación mostramos características de estos tres

desenlaces mediante el análisis de las soluciones dadas por varios alumnos a los problemas 6 y 8.

Truncamiento

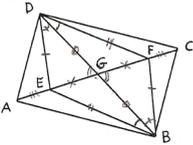
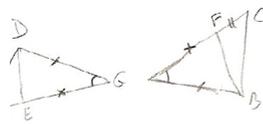
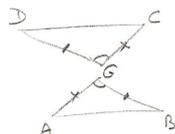
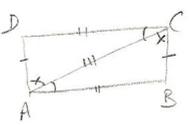
Para describir las características del truncamiento utilizaremos una respuesta dada al problema 8. Inicialmente se muestra la reproducción de las notas realizadas por el alumno, escritas a lápiz, alrededor del enunciado del problema, donde se puede observar que el sentido de la escritura no es el habitual de izquierda a derecha. Aquí se pone de manifiesto un esbozo de razonamiento configural impreciso, hasta que el alumno consigue la «idea» que resuelve el problema (logra probar la congruencia de dos lados opuestos del cuadrilátero ABCD, cuando escribe $DA = CB$). Interrumpe su razonamiento y genera un discurso deductivo, donde ya se puede identificar la coordinación característica del razonamiento configural, para lograr la prueba solicitada.

Llegados a este punto se produce el *truncamiento* del razonamiento configural; el alumno escribe con bolígrafo: *Solución*. Seguidamente genera el discurso cuya transcripción se ha analizado en la tabla 2 de la página siguiente.

- En la figura, $\square DEBF$ es un paralelogramo y $\overline{AE} = \overline{CF}$. Probar que $\square ABCD$ es un paralelogramo.

$\triangle AEG = \triangle CFG$
 $\triangle DEG = \triangle BFG$
 ... en un paralelogramo \rightarrow los lados opuestos son iguales
 $\overline{GD} = \overline{GB}$ y $\overline{EG} = \overline{GF}$
 ... ang opuestas por vértices son cong.
 $\overline{AG} = \overline{GC}$
 $\overline{GD} = \overline{GB}$
 $\overline{AD} = \overline{CB}$

Tabla 2

| TRANSCRIPCIÓN DE LA RESPUESTA Y DIVISIÓN EN FRAGMENTOS | DESCRIPCIONES Y COMENTARIOS ANALÍTICOS PARA INDICAR PASOS DE INFERENCIA |
|--|---|
| <p>1) En un paralelogramo, las diagonales se bisecan 2) $\rightarrow \overline{GD} \equiv \overline{GB}$ y $\overline{EG} \equiv \overline{GF}$ del DEBF. 3) Aplicando: ángulos opuestos por el vértice son congruentes 4) $\rightarrow DGA \equiv CGB$ (Figura 3)</p>  | <p>1) Afirmación 1: En un paralelogramo, las diagonales se bisecan. 2) Tesis de la afirmación 1. 3) Afirmación 2: Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes. 4) Aplica la afirmación 2 a la configuración inicial obteniendo un hecho geométrico.</p> |
| <p>5) Considerando los dos triángulos $\triangle ADG$ y $\triangle GCB$ (Figura 4)</p>  <p>6) $m\overline{GA} = m\overline{AE} + m\overline{EG}$ 7) Por hipótesis $\overline{AE} \equiv \overline{CF}$ 8) $m\overline{GC} = m\overline{GF} + m\overline{FC}$ 9) Por lo tanto $m\overline{GA} = m\overline{GC}$ 10) Como $\overline{GA} \equiv \overline{GC}$, 11) $DGA \equiv CGB$, 12) $\overline{GD} \equiv \overline{GB}$ 13) Aplicando LAL 14) Los 2 triángulos son congruentes. Por lo tanto $\overline{AD} \equiv \overline{CB}$</p> | <p>5) Figura 4. Identificación de dos subconfiguraciones.</p> <p>6), 7) y 8) Asocia los datos que posee a la configuración identificada y aplica la propiedad de la adición de segmentos.</p> <p>9) Infiere la afirmación 3. 10), 11), 12) y 13) Asocia los datos que posee a la configuración identificada y aplica el axioma congruencia Lado-Ángulo-Lado a la figura 4. 14) Infiere la afirmación 4, lo que le permite concluir un hecho geométrico (afirmación 5). 15) Identifica subconfiguraciones relevantes para el objetivo propuesto (figura 5).</p> |
| <p>15) Haciendo lo mismo con los triángulos $\triangle DGC$ y $\triangle BGA$ (Figura 5)</p>  <p>16) $\overline{DG} \equiv \overline{GB}$, 17) $\overline{GA} \equiv \overline{GC}$, 18) $\triangle DGC \equiv \triangle BGA$. Ángulos opuestos por el vértice son congruentes</p> | <p>16), 17) y 18) Asocia a las subconfiguraciones datos inferidos desde el enunciado del problema (afirmación 1), hechos obtenidos con anterioridad (afirmación 3), y hechos geométricos generales. Esto permite tener una figura (configuración con hechos geométricos vinculados).</p> |
| <p>19) LAL 20) \rightarrow Obtenemos $\overline{DC} \equiv \overline{AB}$ 21) Así tenemos dos pares de lados opuestos \equiv del paralelogramo $\square ADCB$.</p> <p>22) Para comprobar que tienen los ángulos iguales dos a dos;</p> | <p>19) Asocia a la figura 5 el criterio de congruencia de triángulos LAL. 20) Infiere un hecho geométrico (afirmación 4). 21) Realiza una constatación de lo que ha obtenido.</p> |
| <p>23) Comparando los 2 triángulos (Figura 6);</p>  | <p>22) Genera una nueva hipótesis (hecho geométrico a ser probado, Propiedad de los paralelogramos). 23) Realiza una nueva configuración para resaltar los elementos que pueden ser considerados (figura 6). Genera una cuestión vinculada a la figura 6, lo que le permite fijar la atención en una subconfiguración de la figura 6.</p> |
| <p>24) $\overline{DC} \equiv \overline{AB}$, 25) $\overline{DA} \equiv \overline{CB}$, 26) \overline{AC} lado común 27) LLL 28) Son congruentes por lo que $\triangle CAB \equiv \triangle DCA$, $\triangle CBA \equiv \triangle ADC$, $\triangle DAC \equiv \triangle ACB$.</p> | <p>24), 25), 26) Asocia los hechos geométricos a la subconfiguración. 27) Asocia a la figura (configuración geométrica más los hechos geométricos) la congruencia de triángulos Lado-Lado-Lado. 28) El hecho derivado de la aplicación del criterio de congruencia le permite inferir tres nuevos hechos geométricos.</p> <p>Tesis de la afirmación 7 y confirmación de la propiedad que se quiere comprobar (afirmación 6).</p> |

En el fragmento 1) el alumno enuncia un hecho geométrico (afirmación 1) que asocia en 2) a la configuración inicial mediante una aprehensión discursiva con cambio de anclaje de discursivo (a partir del enunciado) a visual (marcas en los segmentos correspondientes del dibujo). En 3) realiza otra aprehensión discursiva asociando la afirmación 2 a la configuración inicial permitiendo inferir el hecho geométrico 4. En 5) identifica dos triángulos, $\triangle ADG$ y $\triangle GCB$, aislándolos y separándolos en la figura 4. Esta acción caracteriza lo que llamamos aprehensión operativa de reconfiguración (mueve las subconfiguraciones como si fueran piezas de un puzzle). En 6), 7) y 8) aplica la propiedad de la adición de segmentos. De nuevo hay evidencia de una aprehensión discursiva, pero el cambio de anclaje ahora es de visual a discursivo, lo que le permite concluir en 9) un nuevo hecho geométrico (que $\overline{GA} \equiv \overline{GC}$).

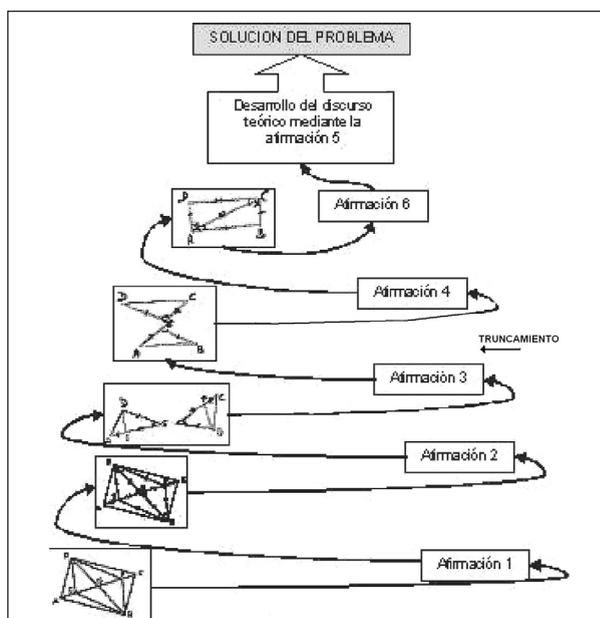
En 10), 11), 12) y 13) asocia los datos que posee a la configuración identificada y aplica el axioma congruencia Lado-Ángulo-Lado a la figura 4, concluyendo en 14) que los dos triángulos son congruentes, por lo que $\overline{AD} \equiv \overline{CB}$. Nuevamente se observan las asociaciones entre las afirmaciones matemáticas y los elementos geométricos correspondientes, que tienen que ser identificados previamente de manera individual. Es decir, en 10) afirma: «como $\overline{GA} \equiv \overline{GC}$ », entonces tiene que identificar de manera aislada los segmentos GA en un triángulo y GB en el otro (lo que constituye una aprehensión operativa de reconfiguración) marcándolos con los mismos signos (lo que es evidencia de la asociación entre la propiedad de ser congruentes y los elementos geométricos que verifican dicha propiedad), realizando una aprehensión discursiva con cambio de anclaje de discursivo a visual. En 15) el alumno dice: «haciendo lo mismo con ...». Esta frase nos permite afirmar que la «idea» que le ha llevado a la prueba solicitada ha sido conseguir demostrar que dos lados opuestos del cuadrilátero ABCD son congruentes. En ese momento, el alumno interrumpe su razonamiento configural (evidenciado imprecisamente a través de sus notas escritas con lápiz) y genera el discurso deductivo que estamos analizando.

Ahora, a partir del fragmento 15), el alumno trata de probar la congruencia de los otros dos lados del cuadrilátero ABCD. Para ello, vuelve a aislar (aprehensión operativa de reconfiguración) dos triángulos, $\triangle DGC$ y $\triangle BGA$, en la figura 5. En 16), 17) y 18) verifica las hipótesis del criterio de congruencia L-A-L, mediante la asociación (realizando aprehensiones discursivas) de las afirmaciones matemáticas con los elementos geométricos pertinentes que debe identificar y aislar, aunque sea mentalmente, de manera individual (realizando aprehensiones operativas). En 20) concluye que el otro par de lados opuestos del cuadrilátero ABCD también son congruentes. En 21) asocia al cuadrilátero ABCD, del que ya conoce que tiene los dos pares de lados opuestos congruentes, un teorema de caracterización de los paralelogramos. Esta asociación es una aprehensión discursiva con cambio de anclaje de visual a discursivo. Con ello concluye que ABCD es un paralelogramo. A partir de 22) el alumno afirma: «para comprobar que tiene los ángulos iguales dos a dos», entonces dibuja la figura 6 que le sirve para demostrar que ABCD cumple la propiedad de los paralelogramos que dice que los ángulos opuestos son congruentes.

Nuevamente se observa la identificación de subconfiguraciones que aísla (aprehensión operativa de reconfiguración) el paralelogramo ABCD y la diagonal AC. Asocia afirmaciones matemáticas (las hipótesis del criterio L-L-L de congruencia) con los elementos geométricos (los lados del paralelogramo) adecuados –realizando aprehensiones discursivas– que deben ser identificados y aislados previamente, aunque sea mentalmente, mediante las correspondientes aprehensiones operativas.

La configuración inicial del problema aporta información al resolutor facilitando su visión conjunta. En este sentido, las acciones que realiza sobre la configuración inicial –extrayendo los pares de triángulos ADG-GCB, DGC-AGB, ADC-CBA–, las distintas marcas que realiza sobre ella, la asociación del teorema de caracterización de paralelogramos junto con las propiedades aditivas de segmentos y los axiomas Lado-Ángulo-Lado y Lado-Lado-Lado, nos permiten identificar evidencias de una interacción entre las asociaciones de las afirmaciones matemáticas mencionadas y las configuraciones obtenidas mediante la modificación de la configuración inicial. Esta manera de proceder evidencia una coordinación entre las aprehensiones operativas y las aprehensiones discursivas. Esta coordinación es un ejemplo de razonamiento configural que se demuestra clave en el proceso de articular las propiedades geométricas con los aspectos de la configuración identificados como relevantes por el estudiante. La figura 7 nos sirve para mostrar gráficamente las características de esta manera de proceder que se apoya en la coordinación de los procesos de visualización: aprehensión operativa y aprehensión discursiva. Esta coordinación permite al resolutor obtener las ideas claves y, con éstas, generar un discurso teórico. En la figura 7, la aplicación de la afirmación 3 indica el momento en que se produce el truncamiento del proceso empezándose a generar un discurso teórico.

Figura 7



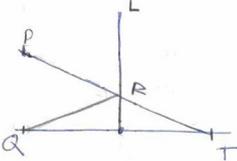
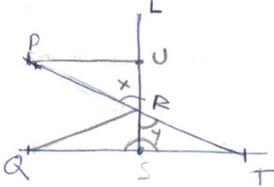
Conjetura sin demostración

El proceso de resolución que hemos denominado *Conjetura sin demostración* se da cuando el razonamiento configural permite dar al estudiante una respuesta al problema aceptando las conjeturas mediante percepción simple

y expresando la solución mediante el lenguaje natural y no siendo validadas. Las características de esta manera de proceder las ejemplificamos a través de una respuesta dada al problema P6.

La respuesta se analiza en la tabla 3 siguiente.

Tabla 3

| TRANSCRIPCIÓN DE LA RESPUESTA Y DIVISIÓN EN FRAGMENTOS | PASOS DE INFERENCIA |
|---|---|
| <p>1)</p>  <p>Figura 8</p> | <p>1) Figura 8.</p> |
| <p>2) $\overline{QS} \equiv \overline{ST}$ → Ya que, al estar cortada por la mediatriz, la corta en dos partes iguales.</p> <p>3) Por lo tanto deducimos que $\overline{QR} \equiv \overline{RT}$</p> | <p>2) Afirmación 1: Definición de mediatriz como lugar geométrico.</p> <p>3) La deducción del hecho geométrico $\overline{QR} \equiv \overline{RT}$ puede suponerse que se ha realizado asumiendo que el punto R, al estar en la mediatriz de QT, equidista de los extremos del segmento $\overline{QS} \equiv \overline{ST}$ y $\overline{QR} \equiv \overline{RT}$,</p> |
| <p>4)</p>  | <p>4) Figura 9.</p> |
| <p>5) Para demostrar $\overline{PR} \equiv \overline{RT}$ → $\overset{\Delta}{PRU} \equiv \overset{\Delta}{RST}$</p> | <p>5) Conjetura un hecho $\overline{PR} \equiv \overline{RT}$, que si se da le permite derivar otro hecho $\overset{\Delta}{PRU} \equiv \overset{\Delta}{RST}$. Ello se apoya en la identificación de un punto U sobre la mediatriz que cumple ciertas condiciones. La configuración creada le permite identificar dos triángulos $\overset{\Delta}{PRU}$ y $\overset{\Delta}{RST}$ como subconfiguraciones de la configuración dada. (En este caso hay que indicar que la conjetura realizada es falsa al no tenerse en cuenta que el punto P puede ser cualquiera).</p> |
| <p>6) $\overline{RU} \equiv \overline{RS}$,</p> | <p>6) Asume una condición que cumple el punto U introducido en la configuración inicial.</p> |
| <p>7) $\overline{ST} \equiv \overline{PU}$ por lados opuestos a ángulos congruentes,</p> | <p>7) En la nueva configuración creada, identifica un hecho geométrico general, que nos indica que ha construido una recta paralela a QT y que pasa por P.</p> |
| <p>8) $\overset{\Delta}{PXU} \equiv \overset{\Delta}{TYS}$</p> | <p>8) Es la indicación del hecho usado en el apartado anterior (ángulos opuestos por el vértice). Ante la configuración construida asume hechos geométricos que no son verdad al confiar en la información procedente de la percepción de la configuración geométrica construida.</p> |
| <p>9) LAL, por lo que $\overset{\Delta}{PRU} \equiv \overset{\Delta}{RST}$ → $\overline{PR} \equiv \overline{RT}$</p> | <p>9) Aplica el criterio de congruencia L-A-L a la configuración realizada y a los hechos geométricos asumidos, lo que le permite concluir $\overset{\Delta}{PRU} \equiv \overset{\Delta}{RST}$ (afirmación 2).</p> |
| <p>10) Por lo que $\overline{RT} \equiv \overline{RQ}$</p> | <p>10) De la afirmación 2 deriva un hecho geométrico (Se deduce de 9).</p> |
| <p>11) $m\overline{PT} = m\overline{PR} + m\overline{RT}$, $m\overline{PT} = m\overline{PR} + m\overline{RQ}$. Ya que $\overline{RT} \equiv \overline{RQ}$.</p> | <p>11) Afirmación 3: propiedad aditiva de segmentos, para obtener la tesis del problema.</p> |

En 1), en la construcción de la figura 8 el resolutor asocia la definición de mediatriz a la configuración inicial, por lo que, al representar la mediatriz del segmento \overline{QT} , genera una aprehensión discursiva con cambio de anclaje de discursivo a visual. También dibuja el segmento \overline{QR} que no viene dado, directamente, en el enunciado del problema, lo que constituye una aprehensión operativa de cambio figural. En 2), cuando toma S como punto medio de \overline{QT} , hay una aprehensión discursiva con cambio de anclaje de visual a discursivo, si bien no etiqueta el punto. En 3) se produce una aprehensión discursiva puesto que asocia a la configuración inicial la definición de la mediatriz: lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento \overline{QT} . Luego. En 4), el alumno introduce nuevas subconfiguraciones, como el segmento \overline{PU} y los ángulos \hat{x} e \hat{y} –figura 9– que no son elementos geométricos dados en el enunciado del problema. Estas acciones se consideran evidencias de una aprehensión operativa. A partir de esta nueva configuración y debido a la situación «adecuada» del punto P, el resolutor «acepta» en 5) que los dos triángulos $\triangle PRU$ y $\triangle RST$ tienen que ser congruentes. La predominancia visual de ambos triángulos en la configuración elaborada por el alumno es evidente, ya que el razonamiento que sigue no es válido para la prueba pedida, pero sigue esa línea de pensamiento que distrae su atención y le dificulta la identificación de la subconfiguración realmente útil para la solución del problema.

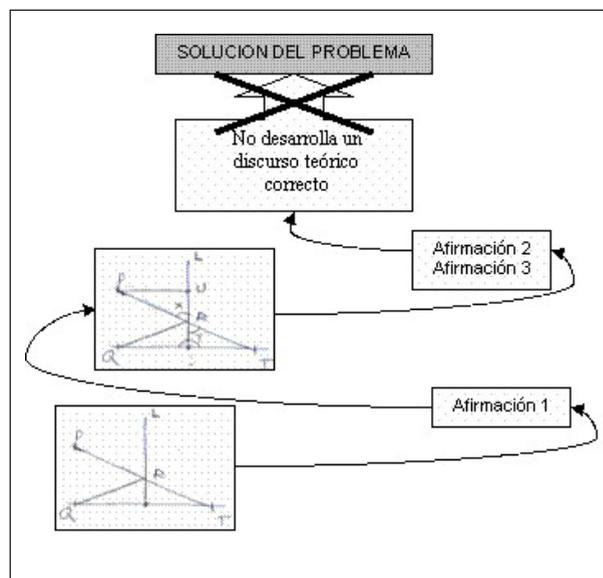
En 6), 7) y 8) el alumno verifica las hipótesis del criterio Lado-Ángulo-Lado, realizando aprehensiones operativas, pues aísla, aunque sea mentalmente, esta configuración de los dos triángulos y los pares de elementos geométricos correspondientes (pares de lados y ángulos en ambos triángulos). Pero en la verificación de las condiciones utiliza una afirmación que no es cierta (Los lados opuestos a ángulos congruentes son congruentes «en un triángulo», pero no en dos triángulos diferentes, como afirma el estudiante), lo que implica que la configuración realizada le aporta a partir de este momento unas condiciones impuestas por la colocación del punto P. También indica que $\overline{RU} = \overline{RS}$, lo que es consecuencia también de la situación adecuada que ha dado al punto P. En 9), asocia el criterio L-A-L a la subconfiguración formada por los dos triángulos y concluye que son congruentes, realizando una aprehensión discursiva con cambio de anclaje de discursivo a visual. Deduce que $\overline{PR} = \overline{RT}$, que no vuelve a utilizar más y, además, no tiene por qué ser cierta. Es decir, su validez está determinada por la posición del punto P.

En 10) afirma: «Por lo que $\overline{RT} = \overline{RQ}$ », como si este resultado siguiera lógicamente del fragmento 9), cuando en realidad es un resultado conocido desde el fragmento 3). Esta forma de proceder parece indicar que no coordina las aprehensiones realizadas. Todo el discurso realizado tiene «apariencia» de razonamiento deductivo pero, en realidad, se trata de aprehensiones realizadas una detrás de otra, determinadas por la construcción de una configuración que no respeta las condiciones de generalidad indicadas por el enunciado del problema. A continuación, recupera en 10) un resultado conocido desde el punto 3) que asocia (aprehensión discursiva) a

la subconfiguración relevante (los segmentos \overline{RT} y \overline{RQ} , que debe aislar, aunque sea mentalmente, mediante una aprehensión operativa) y da una respuesta al problema en 11) a partir de la asociación (aprehensión discursiva) del concepto de suma de segmentos a la configuración adecuada (aprehensión operativa).

Este tipo de discurso vinculado a una información precedente de la configuración creada, y la no coordinación adecuada de las aprehensiones realizadas por el alumno, caracterizan un determinado perfil de resolutor. En este caso, el alumno dibuja el punto P y la situación del punto «cualquiera» P en ese lugar tan «adecuado» tiene consecuencias en la solución que presenta el alumno, ya que le hace asumir que $\triangle PRU$ y $\triangle RST$ son congruentes, con lo que elabora una subconfiguración que le desvía la atención. Esto es un ejemplo de subconfiguración visualmente predominante: dificulta la identificación de la configuración relevante para la solución del problema (Mesquita, 1989). En la figura 10 se representa de manera simplificada la coordinación de las aprehensiones discursivas y operativas realizadas por el alumno, pero que en este caso no le permiten generar un discurso teórico correcto.

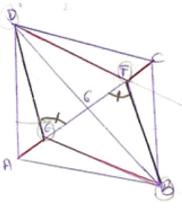
Figura 10



Bucle

Un tercer perfil de resolutor viene caracterizado por un proceso en el que se llega a una situación de bloqueo que no permite el avance hacia la solución y por tanto un estancamiento del razonamiento producido. A esta forma de proceder la hemos denominado bucle. Las características de esta manera de proceder se muestran mediante otra respuesta al problema 8, siendo un ejemplo de cómo dificultades en las aprehensiones impiden el avance del proceso de razonamiento. La transcripción del proceso de resolución se describe en la siguiente tabla 4.

Tabla 4

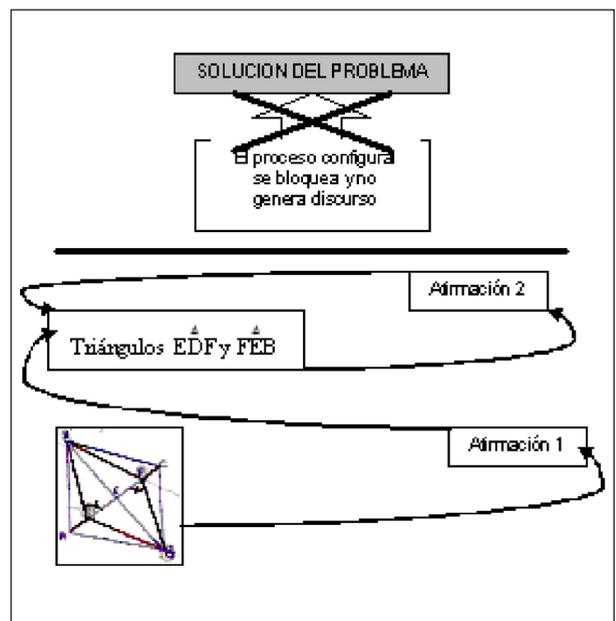
| TRANSCRIPCIÓN DE LA RESPUESTA Y DIVISIÓN EN FRAGMENTOS | PASOS DE INFERENCIA |
|--|---|
| <p>1) </p> <p>2) ¿□ ABCD es un paralelogramo?</p> <p>3) Tenemos el □ DFEB. Por ser paralelogramo los lados opuestos son congruentes, luego</p> <p>4) $\overline{DE} \equiv \overline{FB} \wedge \overline{DF} \equiv \overline{EB}$</p> <p>5) Tomemos los triángulos $\triangle EDF$ y $\triangle FEB$</p> <p>6) $\overline{DE} \equiv \overline{FB}$ (por ser EDFB paralelogramo)</p> <p>7) $\overline{BE} \equiv \overline{DF}$ (por ser EDFB paralelogramo)</p> <p>8) $\overline{EF} \equiv \overline{EF}$ (lado común)</p> <p>9) Aplicamos L-L-L</p> <p>10) $\triangle EDF \equiv \triangle FEB$ de aquí $\angle DEF \equiv \angle FEB$</p> | <p>1) Figura 11.</p> <p>2) Tesis del problema a demostrar.</p> <p>3) Afirmación 1: lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.</p> <p>4) Conclusión de la afirmación 1.</p> <p>5) Identifica la subconfiguración $\triangle EDF$ y $\triangle FEB$.</p> <p>6) Hipótesis de la afirmación 2: Axioma L-L-L de congruencia.</p> <p>7) Hipótesis de la afirmación 2.</p> <p>8) Hipótesis de la afirmación 2.</p> <p>9) Afirmación 2.</p> <p>10) Tesis de la afirmación 2.</p> |

En la figura 11 se observa que, a diferencia del proceso que hemos denominado «conjeturas sin demostración», las asociaciones realizadas (aprehensiones discursivas), que se evidencian por las marcas en el dibujo, se reducen al mínimo. Además, las únicas marcas que se observan no son relevantes para la solución del problema. En 3), el alumno realiza una aprehensión discursiva al asociar una característica de los paralelogramos con los elementos geométricos (lados opuestos) del dibujo. El cambio de anclaje es de discursivo a visual. En 5) identifica una subconfiguración, el paralelogramo EBFD, pero constituido por los dos triángulos $\triangle EDF$ y $\triangle FEB$. Esta acción es una aprehensión operativa de reconfiguración ya que divide, aunque sea mentalmente, el paralelogramo en dos subconfiguraciones constituyentes (los dos triángulos). En 6), 7) y 8) verifica las hipótesis de la afirmación 2 (L-L-L) y concluye en 9) que los triángulos considerados son congruentes. Como consecuencia deduce la congruencia de los ángulos DEF y EFB y no escribe nada más.

Al igual que en los protocolos anteriores, podemos observar que en 6), 7) y 8) el alumno realiza aprehensiones discursivas cuando asocia las hipótesis del criterio L-L-L a los elementos geométricos correspondientes. Además, estos elementos geométricos deben ser identificados y aislados, aunque sea mentalmente, mediante aprehensiones operativas. En otras palabras, este alumno ha realizado aprehensiones discursivas y operativas, pero no ha sido capaz de coordinarlas para avanzar hacia la solución del problema. El hecho de hacer una deducción más o menos útil y no ser capaz de continuar indica que ha llegado a lo que hemos denominado «situación de bloqueo» que no le permite seguir su razonamiento configural. Esta situación podría haberse superado de varias formas, por ejemplo

identificando otras subconfiguraciones relevantes que podrían provocar nuevas asociaciones que ayudaran a llegar a la solución, pero el alumno ya no añade nada más. En la figura 12 se representa esquemáticamente el razonamiento configural observado en el protocolo. En el esquema, la línea gruesa horizontal en negrita indica el momento en el que el alumno entra en la situación de bloqueo.

Figura 12



DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

En los tres desenlaces del razonamiento configural que hemos identificado, se observa que los alumnos realizan aprehensiones discursivas y operativas. Sin embargo, el alumno no siempre consigue generar la prueba pedida. Para tratar de explicar este hecho, el punto de partida ha consistido en estudiar la coordinación entre dichas aprehensiones como un factor clave en el desarrollo del razonamiento configural. La manera en que se analiza esta interacción está determinada por las acciones realizadas por el alumno, que se ponen de manifiesto a lo largo del registro escrito de su respuesta. Consideramos que la relación mostrada en el registro escrito entre uno y otro tipo de aprehensión proporciona información suficiente para valorar esta coordinación. En el caso mostrado para el *truncamiento* es posible seguir la coordinación entre las diferentes aprehensiones (el razonamiento configural) realizado por el alumno. Sin embargo, en los otros dos casos, *conjetura sin demostración* y *bucle*, la coordinación entre las aprehensiones operativas y discursivas ya no se aprecia con claridad, faltando en algunos casos. Se trata entonces de buscar causas que expliquen las disfunciones observadas cuando el alumno debe realizar las coordinaciones adecuadas entre los diferentes tipos de aprehensiones.

El proceso de resolución del problema, y por tanto la generación de una prueba adecuada, se puede considerar como el resultado de realizar un tipo de aprehensión, por ejemplo operativa, que provoca la realización del otro tipo de aprehensión, discursiva, y que la misma secuencia debe repetirse de manera coordinada. Por tanto, las causas que parecen favorecer/limitar el desarrollo de la coordinación en este tipo de problemas pueden ser de tres tipos:

- Causas que obstaculizan la realización de aprehensiones operativas.
- Causas que expliquen la ausencia de aprehensiones discursivas.
- Causas que evidencien la falta de coordinación entre ambos tipos de aprehensión.

Entre las causas que obstaculizan la realización de aprehensiones operativas en el protocolo correspondiente a *conjetura sin demostración*, la colocación del punto P en un lugar tan particular ha provocado la distracción del alumno y ha desviado su atención hacia subconfiguraciones no relevantes. Éste es un ejemplo de cómo una configuración visualmente predominante (Mesquita, 1989; Padilla, 1990; Duval, 1998), obstaculiza la identificación de la subconfiguración relevante para la solución del problema y por tanto impide la generación de la coordinación adecuada. En la caracterización de la conducta que hemos denominado *conjetura sin demostración*, aunque existen aprehensión operativa y aprehensión discursiva, el resolutor tiene dificultades para coordinarlas

no generando una prueba matemática correcta. La causa suele ser un conocimiento deficiente de las relaciones lógicas. Por ejemplo, cuando el resolutor en el protocolo que hemos usado como ejemplo afirma, en el fragmento 10): «Por lo que...» presentando como consecuencia un hecho que conoce desde el inicio. Este es un ejemplo de no congruencia semántica (Mesquita, 1989; Padilla, 1990; Duval, 1998).

En la caracterización que hemos denominado *bucle*, se muestran las dificultades para la identificación y manipulación de las subconfiguraciones iniciales que, junto al desconocimiento de afirmaciones matemáticas (conocimiento geométrico), justifican la no realización de marcas en el dibujo ni las asociaciones necesarias para avanzar hacia la solución. Este tipo de comportamiento destaca la importancia del conocimiento básico de los hechos geométricos en el desarrollo de las diferentes aprehensiones que constituyen el razonamiento configural. Aquí el alumno muestra dificultades para identificar las configuraciones relevantes o las subconfiguraciones constituyentes (Mesquita, 1989; Padilla, 1990; Duval, 1998).

Finalmente, la prueba deductiva se nutre en parte de las afirmaciones matemáticas, de las modificaciones que se realizan sobre la configuración del problema y de la capacidad del participante para coordinar estas acciones. Pero como hemos observado, algunos resolutores tienen dificultades para desarrollar estas acciones correctamente. Como hemos destacado, estas dificultades pueden ser debidas a los factores que favorecen o inhiben la visualización de las distintas configuraciones y al conocimiento de los hechos geométricos pertinentes. Debido a estas dificultades, el proceso configural, entendido como la coordinación entre la aprehensión operativa y la aprehensión discursiva, puede no desembocar en la solución deseada. En este contexto, la falta de coordinación parece explicar las situaciones de bloqueo que los estudiantes experimentan, en ocasiones, cuando tratan de probar cuestiones geométricas. La caracterización derivada de nuestros resultados complementa el modelo V/A de Zaskis y sus colaboradores (1996), para explicar los distintos desenlaces que hemos observado en nuestros datos, permitiéndonos adaptar la idea de coordinación entre distintas aprehensiones que intervienen en la resolución de problemas. En este sentido, la caracterización que hemos obtenido del *razonamiento configural*, a partir del marco propuesto por Duval, aporta instrumentos para explicar los distintos desenlaces que se dan en el desarrollo de la prueba matemática en geometría, en un entorno de lápiz y papel. Consideramos que esta caracterización es un paso más hacia el reconocimiento y la comprensión de las interacciones entre lo visual y lo analítico en la resolución de problemas de geometría. De esta manera, la caracterización obtenida de los tres tipos de desenlaces y las causas que los pueden provocar nos ayudan a comprender qué acciones desarrolla el alumno, cómo razona y qué dificultades obstaculizan el proceso de coordinación y, por tanto, el posible desarrollo de la prueba en problemas de geometría, en contexto de lápiz y papel.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BALACHEFF, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics, en Pimm, D. (ed.). *Mathematics, teachers and children*, pp. 216-235. Londres: Hodder&St.
- BISHOP, A.J. (1983). Space and geometry, en Lesh, R. y Landau, M. (eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*, pp. 125-203. Nueva York: Academic Press.
- BISHOP, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), pp. 7-16.
- DEL GRANDE, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37(6), pp. 14-20.
- DUVAL R. (1993). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive?. *Petit x*, 3. Grenoble, Francia: Irem.
- DUVAL, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes, en Sutherland, R. y Mason, J. (eds.). *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education*, pp. 142-157. Berlín, Germany: Springer.
- DUVAL R. (1998). Geometry from a cognitive point of view, en Mammana, C. y Villani, V. (eds.). *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century*, pp. 37-52. Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Publishers.
- DUVAL, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof, en Boero, P. (ed.). *Theorems in School. From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice*, pp.137-162. Róterdam, Netherland: Sense Publishers.
- ELIA, I., GAGATSIS, A., DELIYIANNI, E., MONOYIOU, A. y MICHAEL, S. (2009) A Structural Model of Primary School Students' Operative Apprehension of Geometrical Figures, en Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. y Sakonidis, H. (eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, pp. 1-8. Thessaloniki, Greece: PME.
- FISCHBEIN, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrech, Netherland: Reidel.
- FISCHBEIN, E (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), pp. 139-162.
- GUTIÉRREZ, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. *Proceedings of the 20th PME Conference*, 1, pp. 3-19. Valencia, España.
- HAREL, G. y SOWDER, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies, en A.H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (eds.). *Research in collegiate mathematics education*, 3, pp. 234-283. Providence, USA: American Mathematical Society.
- HERSHKOWITZ, R.(1990). Psychological aspects of learning Geometry, en P. Neshet y J. Kilpatrick (eds.). *Mathematics and cognition*, pp. 70-95. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- HERSHKOWITZ, R., PARZYSZ, B. y VAN DERMOLEN, J. (1996). Space and Shape, en Bishop and others, A.J. (eds.). *International handbook of Mathematics Education*, pp. 161-204 (1). Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Publishers.
- IBÁÑES, M. J. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. PhD dissertation. Valladolid, Spain: Universidad de Valladolid.
- KOLEZA, E. y KABANI, E. (2006). The use of reasoning in the resolution of geometry. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 11(3), pp. 31-56.
- KRUTESKII, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, EE.UU: The University of Chicago Press.
- MESQUITA, A. (1989). *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie: Elements pour une typologie*. Thèse de Doctorat. Strasbourg, France: Université Louis Pasteur.
- PADILLA, V. (1990). *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux sur l'apprentissage des mathématiques*. Thèse de Doctorat. Strasbourg, France: Université Louis Pasteur.
- PRESMEG, N.C. (1986a). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), pp. 297-311.
- PRESMEG, N. C. (1986b). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), pp. 42-46.
- PRESMEG, N. (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics, en Gutierrez, A. y Boero, P. (eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, pp. 205-235. Róterdam/Taipei: Sense Publishers
- SOUICY, S. y MARTÍN, T. (2006). Going beyond the rules: making sense of Proof, en Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M. y Méndez, A. (eds.). *Proceedings of the Twenty Eight Annual Meeting of the North American Chapter of the International group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 235-236. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.
- TORREGROSA, G. y QUESADA, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *Relime*, 10(2), 275-300.
- TORREGROSA, G. y QUESADA, H. (2008). The Coordination of Cognitive Processes in Solving Geometric Problems Requiring Formal Proof, en Figueras, O. y Sepúlveda, A. (eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, and the XX North American Chapter*, 4, pp. 321-328. Morelia, México: Cinvestav-UMNSH.
- ZAZKIS, R., DUBINSKY, E. y DAUTERMANN, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: a students' understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematical Education*, 27(4), pp. 435-457.
- ZIMMERMANN, W. CUNNINGHAM S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington DC., EE.UU.: The Mathematical Association of America Inc.

[Artículo recibido en mayo de 2009 y aceptado en mayo de 2010]

Configural reasoning as coordination of visualisation process

TORREGROSA GIRONÉS, G.; QUESADA VILELLA, H. y PENALVA MARTÍNEZ, M.C.

Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante

german.torregrosa@ua.es

hqv@alu.ua.es

carmina.penalva@ua.es

Summary

The aim of this research is to improve our understanding and description of pupils' behaviour when they attempt to solve geometry problems requiring a deductive proof, in a pencil-and-paper environment. We have taken as our starting-point the Theoretical Framework proposed by Duval (1998) regarding Visualisation and Reasoning processes.

This study identifies visualisation processes in preservice Primary teachers when they solve geometry problems requiring mathematical proof, in a pencil-and-paper environment.

The data for this research consist of the answers given by 55 Primary trainee teachers to a set of 8 geometry problems in a pencil-and-paper environment. The analysis was carried out in two stages. In the first stage we tried to discover what actions of the Configural Reasoning model (Torregrosa & Quesada, 2008) had not been carried out correctly. In the second stage of the analysis we tried to identify the causes of deficiencies in the actions the student was expected to carry out.

The analyses obtained enabled us to identify certain regularities which describe Configural Reasoning as a kind of reasoning which does not appear in Duval's work. Configural Reasoning is the process which the

pupil uses when coordinating discursive and operative apprehensions in order to solve a problem or generate a mathematical proof. From this viewpoint, we can distinguish three possible outcomes when a geometry problem is approached: truncation, unproven conjecture and closed loop.

The existence of these three outcomes in problem-solving raises questions regarding the causes (pupils' acts or omissions) which can provoke the mental-block situations which some pupil experience. More specifically, the question lies in determining what factors enhance or reduce the actions involved in Configural Reasoning: Operative and Discursive Apprehension and the coordination between them.

The results reveal the importance of the initial diagrams that accompany the problems, as well as subsequent modifications of these diagrams in the development of discursive and operative apprehension.

We have provided examples of a patent lack of the skills required both in using the two kinds of Apprehension and in coordinating them. The analyses reveal how visual predominance tends to inhibit the visualisation of the configuration which is relevant in arriving to the required proof or solution. This factor is also responsible, sometimes to a high degree, for the inoperation of the Operative Apprehensions.