INFLUENCIA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD EN LA ENSEÑANZA DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN EL BACHILLERATO

Contreras de la Fuente, Ángel[1], Ordóñez Cañada, Lourdes[1] y Wilhelmi, Miguel R.[2]
[1] Universidad de Jaén
[2] Universidad Pública de Navarra
afuente@ujaen.es
lordonez@ujaen.es
miguelr.wilhelmi@unavarra.es

Resumen. La integral definida es considerada un tópico matemático central en el bachillerato. Un indicador empírico de este hecho son las pruebas de acceso a la universidad que masivamente proponen una cuestión, ejercicio o problema relacionado con esta noción matemática. En este trabajo describimos las configuraciones epistémicas de referencia en la institución y mostramos cómo se presenta esta noción en una muestra de libros de texto de editoriales de amplia difusión, así como el tipo de situaciones propuestas en las pruebas de acceso a la universidad. Se obtiene así una descripción de la realidad institucional con relación a la integral definida, que permite sugerir acciones para la mejora de procesos de estudio potenciales.

Palabras clave. Formalismo, experimentación, significados personales e institucionales, libros de texto, pruebas de acceso a la universidad.

The influence of university entrance examinations on teaching of the definite integral at High School

Summary. The definite integral is considered a main topic in High School mathematics. An empirical evidence of this fact is the frequent use of it in the inclusion of a question, exercise or problem involving this mathematical notion in the university entrance examination. In this paper we describe the epistemic configurations which constitute a fundamental point of reference in High School; we also show how this topic is presented in several textbooks from major publishing companies; and, moreover, we analyse the type of proposed problems in the university entrance examinations. Thus we have an adequate description of the institutional attitude in relation to the teaching of the definite integral, which allows to suggest actions for the improvement of potential instructional processes.

Keywords. Formalism, experimentation, institutional and personal meanings, textbooks, university entrance examination.

1. POSIBILIDADES Y RESTRICCIONES DE LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

Las prácticas matemáticas en la escuela están fuertemente condicionadas por las pruebas de evaluación, sobre todo si éstas son externas y vienen acompañadas de una buena cantidad de medidas de divulgación. Este hecho es especialmente notable en las evaluaciones internacionales (PISA[1], TIMSS[2]) y en las pruebas de acceso a la universidad (PAU)[3]. En este trabajo nos referiremos a las prácticas matemáticas en segundo de bachillerato en cálculo integral y a la influencia de las PAU en estas prácticas.

En bachillerato, de manera crítica en segundo, la formación matemática se fundamenta en muchos casos en la capacitación de los estudiantes para la prueba de selectividad. La presión social y política sobre las instituciones educativas hacen que la enseñanza pueda reducirse a un listado más o menos exhaustivo de ejercicios matemáticos prototípicos, que históricamente, en los últimos años, han sido seleccionados por los profesores universitarios, que ofician de evaluadores externos (ajenos al ámbito escolar). Este «deslizamiento» de los objetivos de enseñanza en el bachillerato hacia la búsqueda de éxito en las pruebas de selectividad hace que el núcleo de los proyectos educativos sea de origen y naturaleza *ecológicos*, esto es, de ajuste a condicionamientos del entorno en que se desarrolla. En muchos casos este deslizamiento lleva consigo el que se desatiendan otros aspectos esenciales de los procesos de estudio: *epistemológicos* (significados institucionales de los objetos matemáticos), *cognitivos* (significados personales de los objetos matemáticos) e *instruccionales* (relativos a las interacciones profesor-alumno, alumno-alumno y a la disposición y uso de los recursos materiales, temporales y personales disponibles).

Godino, Contreras y Font (2006) y Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) introducen criterios a tener en cuenta para valorar la idoneidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos según las dimensiones involucradas. Estas idoneidades son relativas a unas circunstancias temporales y contextuales cambiantes, lo que requiere una actitud de reflexión e indagación por parte del profesor y demás agentes que comparten la responsabilidad del proyecto educativo.

El objetivo de este trabajo es mostrar algunas posibilidades para la mejora de la idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje potenciales relativos al cálculo integral en el bachillerato. Este objetivo general se descompone en cuatro objetivos específicos.

1) Mostrar los significados de la integral definida que aparecen en una muestra representativa de los libros de texto de 2.º de bachillerato, según las entidades primarias y conflictos semióticos.

2) Mostrar los significados de la integral definida en una muestra de las PAU.

3) Poner en evidencia la ausencia de elementos lingüísticos y argumentativos de significado fundamentales en la enseñanza de la integral definida en 2.º de bachillerato.

4) Poner en evidencia que la introducción de elementos de significado ausentes posibilitaría la superación de ciertos conflictos semióticos.

Antes de esto, en la sección 2, introducimos unas nociones teóricas del «enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos» (EOS): sistemas de prácticas operativas y discursivas y objetos primarios matemáticos, configuraciones y conflictos semióticos. Estas nociones nos permitirán el análisis sistemático de la introducción y desarrollo del cálculo integral en libros de texto de bachillerato y de las PAU y su relación con las prácticas matemáticas (sección 3). En particular, la identificación de unos modos estereotipados de argumentación y de la ausencia de algunos tipos de lenguaje nos permitirá razonar una dirección de mejora de la idoneidad didáctica (sección 4).

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Sistemas de prácticas operativas y discursivas

Consideramos práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en dicha institución, sus normas (Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, 2009) y modos de funcionamiento.

En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestos de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas. Para responder a las preguntas ¿qué es el objeto matemático «integral definida»? o ¿qué significa o representa la expresión «integral definida»?, se propone una respuesta genérica del tipo «el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartido en el seno de una institución (significado institucional), para resolver un tipo de situaciones-problema cuya resolución precisa el objeto 'integral definida'». Estos sistemas de prácticas son relativos a una institución o contexto. Así, por ejemplo, en el bachillerato las situaciones se refieren en general al cálculo de áreas entre dos funciones, mientras que en la enseñanza universitaria en las facultades de ciencias las situaciones pueden referirse a la fundamentación teórica de la integral de Riemann.

La noción de «sistema de prácticas» es útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para el análisis de la actividad matemática introducimos una tipología de entidades primarias, que constituyen los sistemas de prácticas y que permiten describir dicha actividad.

2.2. Objetos matemáticos primarios, configuraciones y conflictos semióticos

De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas *emergen* nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura; de hecho, «el discurso matemático y sus objetos son mutuamente constitutivos» (Sfard, 2000, 47).

En el EOS (Godino, 2002; Contreras, Font, Ordóñez y Luque, 2005) el punto de partida es la formulación de una ontología de «objetos» matemáticos primarios.

La expresión 'objeto matemático' se refiere a cualquier entidad o cosa, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática. Se propone entonces una tipología de objetos matemáticos primarios compuesta por: *lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos); *situaciones* (problemas, aplicaciones extra o intra-matemáticas, ejercicios, etc.); *definiciones* o caracterizaciones de nociones matemáticas (número, punto, línea recta, media, función, etc.); *proposiciones*, propiedades o atributos, los cuales son dados usualmente como sentencias; *procedimientos* o acciones de sujetos cuando resuelven tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas, etc.); y *argumentos* usados para validar, justificar proposiciones o contrastar (validar o refutar) acciones.

«Tan importantes son los objetos matemáticos involucrados como: 1) los agentes que los movilizan y la significación (recta o no) que les asignan; 2) la materialidad de estos objetos y la referencia a entidades ideales; y 3) su función contextual y relacional con otros objetos matemáticos.» (Montiel, Wilhelmi, Vidakovic, Elstak, 2009, p. 141).

Las situaciones son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje permite representar las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos hacen inteligibles las definiciones y justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan las nociones entre sí.

Los objetos primarios se organizan en entidades más complejas llamadas *configuraciones epistémicas* (Godino, Contreras y Font, 2006; Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007a, 2007b) si se refieren a los significados institucionales, o *configuraciones cognitivas* si se refieren a los significados personales.

Godino (2002, p. 258) define *conflicto semiótico* como «la disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos –personas o instituciones– en interacción comunicativa». La identificación de conflictos es determinante en la evolución de todo proceso de estudio, puesto que determina momentos en los que la actividad no es rutinaria y, por lo tanto, precisa de intervenciones específicas para la superación de dichos conflictos.

La identificación y resolución de conflictos semióticos potenciales requiere medios de control de la actividad matemática. Con relación a la introducción y desarrollo de la integral definida en el bachillerato, la geometría elemental juega ese papel como resaltaremos más adelante.

2.3. Criterios de idoneidad

El enfoque ontológico y semiótico para el conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) establece diversas dimensiones para la valoración de la idoneidad de los procesos de estudio de las matemáticas. Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005, pp. 2-3) estructuran el análisis de la idoneidad didáctica según las tres dimensiones:

1. *Idoneidad epistémica*: adaptación entre los significados institucionales implementado y de referencia que, en particular, supondría la elaboración de una transposición didáctica *viable* (capaz de adaptar el significado implementado al pretendido) y *pertinente* (capaz de adaptar el significado pretendido al de referencia).

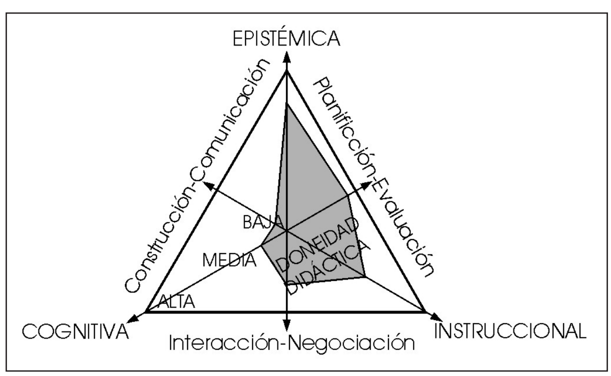
2. *Idoneidad cognitiva*: el «material de aprendizaje» está en la *zona de desarrollo potencial* (Vygotski, 1934) de los alumnos; con otras palabras, que el desfase entre los significados institucionales implementados y los significados personales iniciales sea el máximo abordable teniendo en cuenta las restricciones cognitivas de los alumnos y los recursos materiales y temporales disponibles.

3. *Idoneidad instruccional*: capacidad de las configuraciones y trayectorias didácticas para que el profesor o los alumnos identifiquen conflictos semióticos *potenciales* (a priori), *efectivos* (durante el proceso de instrucción) y *residuales* (a posteriori), para resolver dichos conflictos mediante la *negociación de significados* (utilizando los recursos materiales y de tiempo disponibles).

Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de pertinencia o adecuación al proyecto de enseñanza de un proceso de instrucción. La idoneidad didáctica supone la articulación coherente y armónica de las tres idoneidades parciales (epistémica, cognitiva e instruccional) y de los procesos que determinan las relaciones entre ellas (construcción-comunicación de conocimientos, interacción-negociación de significados, planificación-evaluación de saberes).

En la figura 1 sintetizamos los componentes de la noción *idoneidad didáctica* de un proceso de estudio matemático. Representamos mediante un triángulo equilátero la idoneidad correspondiente a un proceso de estudio pretendido o programado, donde a priori se supone un grado máximo de las idoneidades parciales. El hexágono irregular interno correspondería a las idoneidades efectivamente logradas y a la coherencia de los procesos desarrollados con el proyecto de enseñanza[4].

Figura 1
Componentes de la idoneidad didáctica.



3. CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS DE REFERENCIA

La valoración de los sistemas de prácticas en 2.º de bachillerato precisa la determinación de las configuraciones epistémicas de referencia, para lo cual hemos tenido en cuenta tanto el desarrollo histórico como diversas investigaciones en torno al concepto de integral definida. Dichos estudios, que corresponden a un trabajo más amplio de una memoria de tesis doctoral en elaboración y que no exponemos aquí por cuestiones de espacio, junto a nuestra propia labor como docentes, nos ha permitido determinar las diferentes maneras en que la integral definida se utiliza y sentidos atribuidos (*configuraciones epistémicas*), así como las dificultades y errores de los alumnos en su estudio (*conflictos semióticos asociados a esta noción*).

Identificamos, inicialmente, cuatro configuraciones epistémicas. En primer lugar, la integral definida aparece en la determinación del área bajo una curva y el eje de abscisas. Los cálculos de longitudes, áreas y volúmenes asociados hacen referencia a un contexto geométrico totalmente estático, ausente de movimiento. Históricamente, podemos considerar que Leibnitz es su principal valedor. Denominamos por «configuración epistémica *geométrica* (CE-geo)» a este uso, masivo hoy en día en los procesos de estudio de las matemáticas y que ha sido ampliamente investigado.

Turégano (1994) propone la integral como medio para la introducción al análisis, tomando como punto de partida el cálculo de áreas planas y basándose en la definición geométrica de integral presentada por Lebesgue en 1928. Para ello, Turégano justifica cómo la visualización a través del ordenador dota de significado al concepto.

En una línea similar, Azcárate y otros (1996) realizan una propuesta didáctica para presentar el concepto de integral definida a partir del concepto de área y su cálculo mediante un método de aproximaciones, combinando lo gráfico, lo numérico y lo algebraico por medio del uso de la tecnología (calculadoras u ordenador). En este caso, sin embargo, basada en la integral de Cauchy-Riemann. Camacho y Depool (2003) presentan un programa de utilidades basado en un programa de cálculo simbólico para estudiar el área bajo una curva y el eje de abscisas desde una perspectiva gráfica y numérica, cuyo objetivo es desarrollar el concepto para introducir, posteriormente, el cálculo algorítmico.

Sin embargo, Azcárate y otros (1996) afirman que los alumnos no reconocen cuándo el cálculo de una magnitud requiere una integración en situaciones más allá de áreas y quizás determinados volúmenes. Para poder resolver esta dificultad, Wenzelburger (1993) presenta una propuesta didáctica para la introducción de la integral definida tomando como punto de partida preconceptos de la *idea fundamental del cálculo*.

«Esta idea fundamental del Cálculo Integral es la determinación de *resultados o efectos de cambios o procesos*. Mientras que en el Cálculo Diferencial nos interesa el cambio instantáneo de una magnitud, usamos el Cálculo Integral para determinar los resultados totales de estos procesos de cambio» (pp. 110-111).

Así, consideramos todos aquellos casos en que la integral es necesaria para resolver situaciones de otras ciencias: la física, la probabilidad, la biología, etc., esto es, asociada a procesos no estáticos, de una realidad cambiante, siendo el flujo de tiempo uno de los aspectos cruciales. Newton puede ser considerado el gran propulsor de este significado. Todo ello nos lleva a establecer la «configuración epistémica *resultado de un proceso de cambio* (CE-RPC)».

Una tercera configuración proviene de la relación original entre derivada e integral que se puede asociar a los trabajos de Newton y Leibnitz. El conjunto de funciones integrables es cada vez más extenso (condiciones cada vez menos restrictivas), en este caso tenemos la «configuración epistémica *inversa de la derivada* (CE-invderiv)».

Por último, la cuarta «configuración epistémica es la de *aproximación al límite* (CE-aproxlim)», directamente relacionada con la formalización iniciada por Cauchy y que dio lugar a una nueva definición de integral definida.

En la tabla 1 se hace una descripción de estas cuatro configuraciones según las entidades primarias introducidas en la sección 2.

Se puede asociar *a priori* conflictos de significado a estas configuraciones.

Así, ligados a la CE-geo podemos destacar la inadecuada concepción «área de la integral» ligada al «área como contexto», que lleva a considerar la necesidad de que la integral definida debe ser positiva (Bezuidenhout y Olivier, 2000). En la misma línea, Turégano (1994) clasifica las imágenes de los estudiantes asociadas al concepto de integral definida en *primitiva* (la integral es una fórmula), *operativa* (la integral es un área y no consideran el signo) y *descriptiva*. Además, Schneider (1988) pone de manifiesto que los estudiantes recuerdan las reglas, pero no saben por qué son áreas o volúmenes, hecho debido a la identificación abusiva de la integral con un área geométrica descontextualizada.

En relación con esto último, Labraña (2001) observa que en los libros de texto se citan muy pocos contextos de aplicación. Por su parte, Tall (1991) aporta datos experimentales que apoyan la tesis según la cual los estudiantes son incapaces de reconocer la integral en situaciones donde no aparece explícitamente. Este hecho, unido a que la variación de una función cuando no depende del tiempo, es considerado por Schneider (1988) como un conflicto de significado en relación con la CE-RPC.

Los conflictos de CE-invderiv han sido vinculados ampliamente a la relación derivada-integral. Berry y Nyman (2003), al estudiar las conexiones entre el gráfico de una función derivada y la de la original, observan la limitada visión del concepto de función que tienen los estudiantes, hecho que determina una dependencia casi radical con las fórmulas algebraicas. Por su parte, Bezuidenhout y Olivier (2000) consideran que el error más frecuente proviene de confundir la función con la función integral.

Tabla 1
Configuraciones epistémicas asociadas a la integral definida.

	CONFIGURACIONES			
Entidades	CE-geo	CE-RPC	CE-invderiv	CE-aproxlim
Situaciones	Situaciones intramatemáticas: cálculo de áreas y volúmenes.	Situaciones extramatemáticas: modelización.	Situaciones intramatemáticas ligadas a la relación que existe entre la función derivada y la propia función.	Situaciones intramatemáticas: cálculo de áreas por procedimientos de paso al límite.
Lenguaje	Gráfico, algebraico y numérico.	Gráfico, algebraico y numérico.	Gráfico y algebraico	Gráfico y numérico
Definiciones	Integral como área de la región entre la gráfica de una función en un intervalo cerrado y el eje de abscisas.	Variación de una magnitud en el tiempo. La integral modeliza el cambio total.	Inversión integral derivada.	Número real acotado para toda pareja de sumas inferior y superior asociadas a una partición del intervalo $[a, b]$.
Proposiciones	Regla de Barrow. Métodos de integración.	Regla de Barrow. Métodos de integración.	Teorema fundamental del cálculo integral.	Límite de las sumas inferiores y el de las superiores coincide y es el área.
Procedimientos	Cálculo de puntos de corte. Representación gráfica de la función. Cálculo de las integrales definidas. Valor absoluto. Asignación de un valor al área o volumen.	Modelizar la situación a través de la integral definida. Cálculo de integrales y aplicación de la regla de Barrow. Interpretación del resultado.	Extraer propiedades de la función y de su primitiva identificándolas como función y derivada.	Dada una función o figura, realizar una partición y calcular una aproximación de su área, realizar mejores aproximaciones e identificar el área con el límite.
Argumentos	Retórica y heurística.	Retórica y heurística.	Retóricas.	Heurísticas.

Por su parte, Labraña (2001) obtiene que la reciprocidad derivada-integral es difícilmente asimilada por los estudiantes, aun cuando hayan recibido una instrucción específica y sean capaces de mostrar un conocimiento teórico de la misma.

Por último, para la CE-aproxlim nos encontramos con los diversos conflictos asociados a la noción de límite. Orton (1983) observa cómo los estudiantes aceptan afirmaciones del tipo «se aproxima más y más, pero no es el área exacta», pero son incapaces de aceptar que el límite del proceso de aproximación al área sea el valor «exacto» de dicha área. Estos resultados son corroborados por Czarnocha, Loch, Prabhu y Vidakovic (2001). Por su parte, Schneider (1988) estudia lo que denomina el obstáculo de heterogeneidad de las dimensiones que surge al elegir indivisibles como elementos intuitivos.

En las siguientes secciones describimos la presencia de estas configuraciones (CE-geo**,** CE-RPC**,** CE-invderiv y CE-aproxlim) en el bachillerato.

4. LA INTEGRAL DEFINIDA EN LOS LIBROS DE TEXTO

El análisis de manuales es una herramienta fundamental para obtener información sobre lo significados institucionales de los objetos matemáticos. Algunos investigadores han realizado trabajos de interés sobre este aspecto (Ortega e Ibañes, 2004; González y Sierra, 2004; Ordóñez y Contreras, 2003; Contreras y Ordóñez, 2006).

En esta sección describimos los significados institucionales de la integral definida en 2.º de bachillerato. Esta noción matemática es relevante en Didáctica del Análisis, como lo atestiguan las investigaciones clásicas y recientes, tanto españolas como internacionales, relativas a esta noción matemática (Orton, 1983; Turégano, 1994; Czarnocha, Loch, Prabhu y Vidakovic, 2001; Depool, 2004; González-Martín, 2006).

Como base empírica tomamos una muestra representativa de libros de texto y mapeamos las pruebas de acceso a la universidad (PAU) en Andalucía en el periodo 1999-2008. Para ello tomamos dos muestras significativas: una, de libros de texto y, otra, de PAU. Esta descripción de los significados institucionales nos permitirá identificar elementos pertinentes de significado ausentes o con una introducción o desarrollo no idóneo, que, en particular, puedan ser fuente de conflictos semióticos.

4.1. Entidades de las configuraciones epistémicas presentes y ausentes en los libros de texto

La ontología matemática introducida y las configuraciones epistémicas descritas permiten detectar disfunciones en la introducción y desarrollo de la integral definida. A continuación se muestra un análisis pormenorizado de cinco libros de 2.º de bachillerato. La muestra es intencional. El criterio es considerar las editoriales de gran difusión en Andalucía[5]:

– Abellanas, L.; García, J.C., Martínez, C. (1998). *Matemáticas*. Madrid: Mc Graw-Hill.

– Bescós, E., Pena, Z. (2003). *Matemáticas*. Madrid: Oxford.

– Colera, J., García, R., Oliveira, M.J. (2003). *Matemáticas II*. Madrid: Anaya.

– Monteagudo, M. F., Paz, J., Cámara, M. T. (1998). *Matemáticas*. Madrid: Edelvives.

– Negro, A., Benedicto, C. Poncela, J.M. (1997). *Matemáticas*. Madrid: Santillana.

Los textos son descritos según las entidades primarias introducidas.

4.1.1. Editorial Oxford (Bescós y Pena, 2003)

– *Situaciones*. Se introducen situaciones de todas las configuraciones excepto de «inversa de la derivada». Asimismo, a pesar de que se introduzcan situaciones que ejemplifican la configuración epistémica «aproximación al límite», éstas no son procedentes e incluso incoherentes con la definición de área dada como paso al límite.

Dada la definición «Sea f una función continua y positiva en el intervalo [a, b]. Se llama *integral definida* de la función f en el intervalo [a, b] al área A de la región R del plano limitada por la gráfica f, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$» (p. 168) y la regla de Barrow, se propone el cálculo de $\int_0^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ (p.173). La función

$f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x}}$ no es continua en [0,4]. Sin embargo, tiene primitiva y es posible determinar la integral definida en [0,4], a pesar de que no tiene sentido para ella la definición dada en el libro. Este conflicto semiótico institucional no es identificado ni por lo tanto resuelto. La representación gráfica de la función y la interpretación geométrica de la integral permitiría el progreso hacia la clarificación de la noción de integral definida y su uso para el cálculo de áreas.

Esto es, para afirmar que la regla de Barrow es adecuada para calcular la integral de definida, introducida mediante sumas de Riemann.

Por último, se muestra un conjunto de aplicaciones de la integral definida «en ámbitos de otras ciencias o para realizar aproximaciones de largas sumas» (p.182).

En resumen, todos los tipos de situaciones relativas a las CE son identificados, excepto aquellos relacionados con la CE-invderiv que están ausentes.

– *Lenguaje*. A pesar de la presencia de «números» para el cálculo de integrales definidas concretas, hay una ausencia de lenguaje numérico como vehículo de una argumentación numérica en cálculos de aproximación, ponderación, métodos de ensayo-error, etc. En la sección 6 se introducen los métodos de integración numérica de los trapecios y de Simpson; sin embargo, estos métodos no están integrados en el discurso: se realiza una mera exposición breve y se propone un ejemplo ilustrativo.

En resumen, el lenguaje gráfico y algebraico es utilizado, pero no el numérico.

– *Definiciones*. Todas las definiciones relativas a las CE son identificadas, excepto aquella relacionada con la CE-RPC que está ausente. De hecho, la configuración asociada es la que menos presencia tiene en la lección, sólo se exponen algunos ejemplos de modelización sin justificar la necesidad de la integral.

– *Proposiciones*. Esta entidad es la única que se desarrolla completamente según las cuatro configuraciones epistémicas. Esta decisión determina la orientación del tema. De hecho, 31 de las 35 actividades propuestas en la última sección se resuelven por la aplicación directa de un procedimiento introducido, sin que sea necesario una interpretación de los resultados, una justificación de la importancia, etc., ni siquiera una valoración de la pertinencia o de la eficacia de dichos procedimientos.

– *Procedimientos*. Excepto para la CE-geo, los procedimientos asociados a las CE están disminuidos. Esto se concreta en que:

- El cálculo de integrales en situaciones intramatemáticas y la aplicación de la regla de Barrow no son cuestionadas o puestas a prueba. De hecho, no se propone la comprobación de una integral indefinida por derivación, como paso previo a la aplicación de la regla de Barrow.
- No se introducen métodos de control sobre los cálculos, ni previos (p. ej., determinación de una aproximación mediante conocimientos geométricos elementales) ni posteriores (p. ej.:, derivada de la función primitiva antes de la aplicación de la regla de Barrow).
- Tampoco se utilizan métodos informáticos para la obtención de aproximaciones numéricas por particiones (aplicación de la definición integrable-Riemann) o para el cálculo numérico y estimación del error (método de los trapecios y de Simpson).
- No hay modelización ni interpretación de los resultados.
- No hay presencia de cálculos numéricos aproximados basados en geometría euclídea plana elemental o técnicas de análisis numérico (regla del trapecio, por ejemplo).

– *Argumentos*. No se introducen técnicas de indagación y descubrimiento (*heurística*). Tampoco se realiza un análisis del campo de validez de las técnicas, de su eficacia, de la importancia de la modelización y de la necesidad de precisión de los cálculos o de las restricciones de los instrumentos de medida[6]. La argumentación deductiva, proveniente de una configuración epistémica formal, ajena a la institución 2.º de bachillerato, se impone sin transposición didáctica alguna, determinando una brecha entre esta entidad primaria y el resto de entidades primarias que son indicadores de un proceso transpositivo.

En resumen, el discurso es formal-deductivo.

4.1.2. Editorial Mc-GrawHill (Abellanas, García y Martínez, 1998)

– *Situaciones*. Todos los tipos de situaciones relativas a las CE son identificados, excepto aquellos relacionados con la CE-RPC que están ausentes. Las situaciones propuestas son siempre intramatemáticas, excepto uno de los 18 problemas resueltos (en cuyo enunciado se da explícitamente la función que modeliza la situación) y uno de 19 de los problemas propuestos (que puede resolverse con el conocimiento del volumen de una pirámide de base cuadrada). No hay ninguna aplicación que no sea un cálculo de áreas totalmente geométrico.

– *Lenguaje*. Lenguaje gráfico y algebraico, pero no numérico. De manera más precisa, no hay un lenguaje numérico como vehículo para la argumentación en cálculos de aproximación, ponderación, métodos de ensayo-error, etc. De hecho las aproximaciones únicamente se realizan en algunos casos para dar un valor aproximado expresado en forma decimal del valor de una función transcendente en un punto.

– *Definiciones*. En primera instancia, dada una función continua positiva en un intervalo cerrado [a, b], se define la integral definida como el único número real acotado para toda pareja de sumas inferior y superior asociadas a una partición del intervalo [a, b]. A partir de este valor se define el área de la región comprendida entre el eje de abscisas y la gráfica de una función continua y positiva en un intervalo (Figura 2).

Figura 2

Definición de área (Abellanas, García y Martínez, 1998, p. 367).

✦ ***Definición de área***

Ahora ya estamos en condiciones de ofrecer una definición precisa de lo que entenderemos por área de la región no rectilínea comprendida entre el eje de abscisas y la gráfica de una función continua y positiva en un intervalo.

Sea R la región del plano bajo la gráfica de $y = f(x)$ entre los puntos de abscisas $x = a$ y $x = b$, donde $f(x)$ es una función continua y positiva en $[a, b]$. Llamaremos **área** de la región R al valor de la integral definida de $f(x)$ entre a y b:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Más adelante, se justifica que la noción matemática de integral definida verifica las propiedades que «intuitivamente cabe esperar del área» (pp. 368-369).

La presentación tiene un error formal: explícitamente se afirma que se define el área de una región «no rectilínea», cuando, evidentemente, la definición no excluye funciones lineales ($y = ax + b$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$) ni constantes ($y = a$, $a \in \mathbf{R}$). Otra cosa bien distinta es que la «potencia» de la integral definida para el cálculo de áreas se perciba cuando las funciones no son lineales ni constantes.

La definición de la noción de área se extiende a funciones negativas y funciones definidas a trozos. La primera no es problemática, puesto que la función $|f|$ es continua. Sin embargo, en las funciones no continuas definidas a trozos se pierde la intuición original que motivó el discurso (aproximaciones mediante rectángulos).

En resumen, la única definición totalmente ausente es la asociada a la CE-RPC. Además, con relación a la CE-geo, se define el área como la integral, no al revés.

– *Proposiciones*. Esta entidad tiene presencia en las cuatro configuraciones, pero todos los problemas propuestos se resuelven mediante métodos de integración (inmediatas, cambio de variable, etc.) y la regla de Barrow.

– *Procedimientos*. A pesar de que en la introducción se explicite como procedimiento la «aplicación de la regla de Barrow y la comparación con estimaciones mediante trapecios», no hay presencia de cálculos numéricos aproximados basados en geometría euclídea plana elemental o técnicas de análisis numérico (regla del trapecio o Simpson, por ejemplo). De hecho, tampoco se presentan técnicas de control tales como la comprobación de una integral indefinida por derivación, como paso previo a la aplicación de la regla de Barrow. La modelización está ausente y tampoco se presentan recursos para la interpretación de los resultados.

– *Argumentos*. El discurso meramente formal se hilvana mediante una argumentación retórica o mayéutica socrática, donde el estilo interrogativo es anecdótico y «no vinculante» para el estudiante.

¿Cómo evitar efectuar cálculos tan molestos cada vez que tengamos que calcular un área? La solución va a venir de la mano de un hecho completamente inesperado: la derivación, el procedimiento creado para hallar la recta tangente en un punto de una gráfica, y la integración, introducido mediante la sumatoria para calcular el área bajo una gráfica, son operaciones inversas una de otra (Abellanas, García y Martínez, 1998, p. 370).

4.1.3. Editorial Edelvives (Monteagudo, Paz y Cámara, 1998)

– *Situaciones*. Todas son intramatemáticas, excepto dos de los 42 ejercicios propuestos que son dos modelizaciones del área mediante la integral. Además, de los 40, 29 corresponden a la determinación del área entre dos curvas o entre una curva y el eje de las abscisas en lo que corresponde a una aplicación directa de la configuración epistémica geométrica.

Por otro lado, a pesar de que hay dos ejercicios de modelización (38 y 39, p. 341), no se puede considerar la presencia de la configuración «resultado de un proceso de cambio», puesto que estos ejercicios modelizan el área y no hay un proceso a lo largo del tiempo cuyo resultado total modeliza la integral. La configuración «inversa de la derivada» también está ausente.

No hay situaciones referidas a las CE-RPC y CE-inv-deriv.

– *Lenguaje*. Lenguaje gráfico y algebraico, pero no numérico (como vehículo para la argumentación en cálculos de aproximación, ponderación, métodos de ensayo-error, etc.).

– *Definiciones*. En primera instancia, dada una función continua positiva en un intervalo cerrado [a, b], se define la integral definida como el límite común de las sumas superiores e inferiores asociadas a particiones del intervalo [a, b] cada vez más finas. La extensión a funciones no positivas se enuncia sin justificación alguna y la extensión a funciones definidas a trozos se sigue de un ejemplo propuesto a continuación de la definición y de la supuesta intervención del profesor (Figura 3).

Figura 3

Extensión a funciones no positivas y no continuas (Monteagudo, Paz y Cámara, 1998, p. 331).

Dada una función f continua en [a, b], llamamos **integral definida de** f en [a, b] al límite común de las sumas superiores e inferiores, y lo expresamos de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_{Sup}(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} S_{Inf}(f, P_n)$$

Se dice que una función es **integrable** si:

$$\lim_{n\to\infty} S_{Sup}(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} S_{Inf}(f, P_n)$$

Esta igualdad se conserva aunque la función no sea positiva.

Actividades

1. Determina el área encerrada por las rectas $x = -1$, $x = 1$, el eje de abscisas y la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

2. Halla las aproximaciones por exceso y por defecto del área de la región comprendida entre la función $f(x) = x^3$, las rectas $x = 0$, $x = 3$ y el eje de abscisas, considerando una partición del intervalo [0, 3] en tres subintervalos de la misma amplitud.

Las definiciones asociadas a las CE-RPC y CE-invderiv están ausentes.

– *Proposiciones*. Esta entidad tiene presencia en las cuatro configuraciones, pero todos los problemas propuestos se resuelven mediante métodos de integración (inmediatas, cambio de variable, etc.) y la regla de Barrow.

– *Procedimientos*. La interpretación de los resultados queda en manos del profesor. El libro se estructura más como «guión de clase» que como un texto autocontenido: las explicaciones de las propiedades y técnicas son sucintas y los ejemplos están descritos someramente. De hecho, propiamente hablando, únicamente aparecen procedimientos propios de la CE-geo.

– *Argumentos*. Discurso meramente formal.

4.1.4. Editorial Santillana (Negro, Benedicto y Poncela, 1997)

– *Situaciones*. Situaciones intramatemáticas (cálculo de longitudes, áreas y volúmenes) y extramatemáticas (aplicaciones físicas de la integral: velocidad, aceleración, trabajo).

– *Lenguaje*. No hay un lenguaje numérico como vehículo para la argumentación en cálculos de aproximación, ponderación, métodos de ensayo-error, etc.

– *Definiciones*. Se justifica la existencia de funciones reales de una variable real que no son integrables Riemann (Figura 4).

Figura 4

Función no integrable Riemann (Negro, Benedicto y Poncela, 1997, p. 340).

4

Comprueba que la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in Q \\ 0 \text{ si } x \notin Q \end{cases}$$

***no es integrable en ningún intervalo* [a, b].**

Esta función, llamada función característica de $\mathbb{Q}$, no es continua en ningún punto (pág. 238). En cualquier intervalo [a, b], por pequeño que sea, el máximo de la función es 1 y el mínimo es 0. Las expresiones [9] y [10] de las sumas superiores e inferiores (pág. 331) son entonces siempre:

$$s_n = (b-a)/n \cdot (0 + 0 + \overset{(n \text{ veces}}{\cdots} + 0) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = 0$$

$$S_n = (b-a)/n \cdot (1 + 1 + \overset{(n \text{ veces}}{\cdots} + 1) = b-a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = b-a$$

Como los dos límites no coinciden, la función no es integrable.

– *Proposiciones*. Esta entidad tiene presencia en las cuatro configuraciones. Se relacionan teóricamente los métodos de integración con métodos geométricos elementales de geometría plana, pero estos últimos métodos no son utilizados para el control de la actividad matemática (cálculos previos aproximados).

– *Procedimientos*. Únicamente de las configuraciones geométrica y resultado de proceso de cambio, si bien las interpretaciones quedan sugeridas más que abordadas.

– *Argumentos*. Discurso meramente formal. Se utiliza una heurística general para no importa qué contenido matemático, que consiste en aplicar de manera sistemática los siguientes cuatro pasos:

- *Análisis del enunciado e identificación de términos*. Interpretación del enunciado en términos informales.
- *Diseño de resolución*. Interpretación del enunciado en términos formales, ligados a los métodos de resolución introducidos.
- *Resolución*. Aplicación de un método de resolución, suponiendo «transparente» su pertinencia y adecuación.
- *Valoración*. Comentarios al problema, antes que una interpretación o una comprobación.

4.1.5. Editorial Anaya (Colera, García y Oliveira, 2003)

– *Situaciones*. Situaciones intramatemáticas y extramatemáticas. Estas últimas para introducir de manera contextualizada la integral definida y como aplicaciones al final del capítulo.

– *Lenguaje*. Lenguaje gráfico y algebraico, pero no numérico (como vehículo para la argumentación en cálculos de aproximación, ponderación, métodos de ensayo-error, etc.).

– *Definiciones*. La definición de integral definida como aproximación al límite se explicita como un procedimiento algorítmico de cálculo (Figura 5), siendo la introducida la noción de integral definida como área.

Figura 5
Cálculo de áreas por paso al límite (Colera, García y Oliveira, 2003, p. 358).

Conclusión

Si f es continua en $[a, b]$, para calcular el área $\int_a^b f$ podemos proceder del siguiente modo:

1. Definir una sucesión de particiones $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$, tales que la distancia entre cada dos puntos consecutivos tienda a 0 cuando $n \to +\infty$.
2. Tomar un punto c_i en cada subintervalo.
3. Obtener el término general de la sucesión $s_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$.
4. Calcular $\lim_{n \to +\infty} s_n = \int_a^b f$

– *Proposiciones*. Esta entidad tiene presencia en las cuatro configuraciones. Se relacionan teóricamente los métodos de integración con métodos geométricos elementales de geometría plana, pero estos últimos métodos no son utilizados para el control de la actividad matemática (cálculos previos aproximados), sino como ilustraciones o curiosidades (Figura 6).

Figura 6
Métodos geométricos y de paso al límite (Colera, García y Oliveira, 2003, pp. 358-359).

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Las siguientes integrales se pueden calcular reconociendo la curva cuya ecuación está bajo el signo integral y calculando, por métodos de geometría elemental, el área pedida:*

a) $\int_0^4 2x\,dx$

b) $\int_1^5 (x+1)\,dx$

c) $\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx$

d) $\int_{-2}^{2} \sqrt{16-4x^2}\,dx$

2. *Si* $f(x) = x$, *calcular* $\int_0^1 f(x)\,dx$ *mediante el límite de la suma de las áreas de rectángulos.*

Como f es continua, su integral es el área que, por ser un triángulo, es, evidentemente, $\frac{1}{2}$. Por tanto, $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\,\text{u}^2$.

Vamos a obtenerla ahora, como curiosidad, siguiendo el **método de sumar rectángulos**.

– *Procedimientos*. Centrados en el cálculo de áreas y volúmenes.

– *Argumentos*. El discurso es formal, utilizando recursos retóricos. Se presentan razonamientos de tipo geométrico, pero éstos no se utilizan como instrumentos de control de la actividad. Se explicita una heurística para el cálculo de áreas, que no establece ningún mecanismo de control, tal y como derivada de la primitiva antes de aplicar la regla de Barrow, aproximación por métodos geométricos o numéricos, etc. Los pasos indicados son:

- Representación de la función.
- Determinación de los puntos de corte, en su caso.
- Cálculo de la integral definida.

4.2. Descripción general de los libros de texto: configuración epistémica algebraica

La descripción realizada muestra concordancias en la forma de introducir y desarrollar las nociones, procesos y significados asociados a la integral definida. En la tabla 2 se indica la presencia o ausencia de todas las entidades primarias (total) o de algunas de ellas (parcial, con indicación de cuáles), según las configuraciones.

De la tabla 2 se deduce que:

– *Situaciones*. En general son intramatemáticas (cálculo de áreas y volúmenes). Las situaciones extramatemáticas son utilizadas como aplicaciones transparentes, sin discurso explicativo ni interpretación de las magnitudes involucradas y su relación con los objetos matemáticos. No se introducen apenas situaciones con datos discretos donde la integral serviría de modelo.

– *Lenguaje*. No hay un lenguaje numérico como vehículo para la argumentación en cálculos de aproximación, ponderación, métodos de ensayo-error, etc. El lenguaje geométrico es utilizado de manera descriptiva, nunca para el análisis preliminar de las situaciones o para la validación (parcial o total) de los resultados.

Tabla 2
Distribución de las CE en los libros de texto.

EDITORIAL	CE-GEO	CE-RPC	CE- INVDERIV	CE-APROXLIM
Oxford	Presencia total	Ausencia definición	Ausencia situación	Presencia total
Mc-GrawHill	Presencia total	Ausencia situación y definición	Presencia total	Ausencia procedimiento y argumentación
Edelvives	Presencia total	Ausencia total	Presencia situación y definición	Ausencia procedimiento y argumentación
Santillana	Presencia total	Ausencia definición	Presencia situación, definición y procedimiento	Ausencia situación y procedimiento
Anaya	Presencia total	Presencia total	Ausencia procedimiento	Ausencia proposición

– *Definiciones*. Las definiciones son introducidas, pero no problematizadas. Esto es, no son en general objeto de análisis (según la naturaleza de las distintas funciones), sino simplemente de ejemplificación antes de introducir de manera sistemática procedimientos de cálculo de integrales definidas y su uso para la resolución de problemas estereotipados.

– *Proposiciones*. Se introduce la regla de Barrow y métodos los estándares de integración. No se introducen funciones complejas en los que los métodos clásicos de integración no funcionen y sea necesarios o bien otros métodos analíticos o bien una integración numérica aproximada.

– *Procedimientos*. Centrados en la asignación de valores a áreas o a volúmenes asociadas a funciones elementales, fundamentalmente polinómicas, racionales o con radicales. Los métodos numéricos están prácticamente ausentes.

– *Argumentos*. El discurso es eminentemente formal, con cuestiones retóricas que enseguida encuentran respuesta en el propio texto. Las heurísticas son prácticamente inexistentes y obedecen más a indicaciones generales, no específicas del contenido introducido y desarrollado.

De esta forma, los análisis hechos en la sección 4.1 nos permiten afirmar que en los libros de texto coexiste una configuración epistémica adicional, que denominamos *configuración epistémica algebraica* (CE-alg), fruto de la transposición didáctica. En el bachillerato se emplea gran parte del tiempo para rutinizar las reglas de integración. Así, una parte importante del significado implementado está exclusivamente dedicado al manejo de estas reglas. Por ello en ocasiones sólo se evalúa si el alumno sabe aplicar los métodos explicados. Todo esto da lugar a otra configuración epistémica escolar, que no tiene una vinculación con la histórica de las matemáticas, y que, brevemente, consiste en las reglas de integración y la regla de Barrow. De manera más precisa, las entidades primarias asociadas a esta configuración son:

– *Lenguaje*. Algebraico.

– *Situaciones*. Calcular el valor de una integral.

– *Definiciones*. La integración y la derivación son operaciones inversas.

– *Proposiciones*. Tabla de integrales inmediatas. Métodos de integración (inmediatas, por partes, cambios trigonométricos, etc.). Regla de Barrow.

– *Procedimientos*. Dada una integral definida, aplicar el método oportuno para calcular su valor.

– *Argumentaciones*. Heurística.

En esta configuración no se identifican conflictos de significado, puesto que, desgraciadamente, no se dota a la integral de significado alguno, reduciéndose al manejo técnico de reglas y propiedades. El problema es que se crea la ilusión de que esta configuración es representativa de las otras y, por lo tanto, se crean conflictos de significado «extra-configuración» y no «intra-configuración (algebraica)».

5. LA INTEGRAL DEFINIDA EN LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

En esta sección describimos los significados institucionales de la integral definida en 2.º de bachillerato presentes en las pruebas de acceso a la universidad (PAU). Se analizan las pruebas de acceso a las universidades andaluzas del periodo de 1999 a 2008, donde se estudian las configuraciones epistémicas que aparecen tanto en las pruebas propuestas a los estudiantes como aquellas otras que no salieron en el sorteo. Teniendo en cuenta que son seis pruebas A y seis pruebas B por año y diez los años, son 120 las pruebas analizadas.

La tabla 3 muestra las configuraciones epistémicas que se utilizan en dichas pruebas, especificándose si los ejercicios propuestos suponen un uso «directo» de las configuraciones, esto es, la tarea a realizar explícitamente se relaciona con la configuración, o una «aplicación», la tarea no explicita la configuración, pero el éxito en su realización implica su uso.

Tabla 3
Configuraciones epistémicas en las PAU.

No hay Integral Definida			**28**
Integral Definida	CE-alg	Directa	**26**
		Aplicación	**3**
	CE-geo	Directa	**49(+4)***
		Aplicación	**10**
	CE-invderiv		**4**
			120

* Nota: CE-geo aparece en otros cuatro casos, pues está compartida en cuatro ejercicios.

En la figura 7 se muestran ejemplos de los distintos tipos de configuraciones que aparecen en las PAU. La identificación de CE en las PAU se fundamenta en que las situaciones propuestas utilizan un lenguaje y su resolución (exitosa) presupone una actividad (acciones de sujetos) que pondrá en juego unas propiedades, una forma de comunicar (lenguaje) y de argumentar (en muchas ocasiones evanescente del lado de los estudiantes), vinculando todos estos objetos a una definición prototípica de la integral definida.

Según la tabla 3, la primera cuestión a destacar es la ausencia de las CE «aproximación al límite» y «resultado de un proceso de cambio», lo que se corresponde con la escasa presencia en los libros de texto de dichas configuraciones.

– CE-aproxlim aparece en la mayoría de los libros de texto como introducción a la integral definida buscando una justificación formal que, salvo casos muy puntuales y descontextualizados, no se pone en práctica en los ejercicios de dichos libros.

– CE-RPC aparece en los textos únicamente como una aplicación sin justificar de la integral definida, dando por sentado que el estudiante es capaz de aplicar este concepto a otros contextos que no sean los puramente geométricos estáticos. Además, en los textos que se utiliza esta configuración, que no son todos, se hace a través de unos ejercicios al final del tema de forma casi anecdótica. Solamente en un libro se trabajan dichos «ejercicios de aplicación» como un último apartado, pero sin justificación alguna, como se ha dicho anteriormente.

Figura 7
Ejemplos de configuraciones epistémicas en las PAU.

•CE-alg Directa: Selectividad 2005

Ejercicio 2. [2'5 puntos] Calcula $\int_{-1}^{0} \mathrm{Ln}(2+x)\,dx$, siendo Ln la función logaritmo neperiano.

•CE-alg Aplicación: Selectividad 2008

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

Se sabe que f tiene un máximo local en $x=1$, que el punto $(0,1)$ es un punto de inflexión de su gráfica y que $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{9}{4}$. Calcula a, b, c y d.

•CE-geo Directa: Selectividad 2008

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Dadas las funciones $f:[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ y $g:[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=\sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x)=\sqrt[3]{x}$$

calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

•CE-geo Aplicación: Selectividad 2007

Ejercicio 2.- [2'5 puntos]
Calcula $\beta>0$ para que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=x^2 \quad \text{y} \quad g(x)=-x^2+2\beta^2$$

sea 72 (unidades de área).

•CE-invderiv Selectividad 2002 en la que también se pone en juego CE-geo

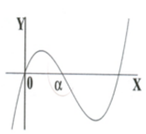
Ejercicio 1. Consideremos $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

(a) **[1'5 puntos]** Si f fuese la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando la respuesta:

i) $F(\alpha)=0$.

ii) $F'(\alpha)=0$.

iii) F es creciente en $(0,\alpha)$.



(b) **[1 punto]** Calcula $F(1)$ siendo $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t+1}}$.

Por otra parte, de las 120 pruebas analizadas aparece la integral definida en 92 de ellas, lo que supone un 77% aproximadamente.

Centrándonos en las pruebas en que aparece la integral definida, en 29 de los 92 casos la configuración epistémica requerida para la solución de la cuestión planteada es la algebraica, que es lo más parecido a una integral indefinida ya que sólo se le exige al alumno un cálculo rutinario de una primitiva y el valor de ésta en unos valores numéricos concretos (Regla de Barrow). De las 67 pruebas en las que podrían aparecer verdaderamente configuraciones de la integral definida (geométrica, inversa de la derivada, aproximación al límite y resultado de un proceso de cambio), únicamente figuran las dos primeras. Además, en 63 de las 67 pruebas la configuración epistémica tratada es la geométrica; por tanto, se obtienen unos resultados del 94% de esta CE, lo cual supone un sesgo muy importante que va en detrimento de las otras tres CE.

Se observa asimismo que la CE-geo solamente en 10 de las 63 pruebas en las que aparece es utilizada como aplicación. En los demás casos se trata de una aplicación directa.

Las consecuencias didácticas de estos comportamientos institucionales son nefastas, ya que el alumno que se enfrenta posteriormente a materias de tipo científico en la universidad, donde debe utilizar las cuatro CE de la integral definida y aplicarla a situaciones en las que interviene el movimiento, en estos casos, necesariamente tendrá dificultades, pues sólo conoce la configuración geométrica, que es estática. Además, de los cuatro sistemas de representación semiótica correspondientes a la integral definida, el estudiante prácticamente ha trabajado uno solo, no cumpliéndose la hipótesis de que «aprender un objeto matemático significa saber coordinar los distintos sistemas de representación semiótico del mismo» (Duval, 2000) y, en el caso de la integral definida, difícilmente pueden coordinarse si no se conocen.

Todas estas apreciaciones quedan ilustradas en la tabla 4 que muestra la distribución de CE en los ejercicios finales del tema dedicado a la integral definida en cada uno de los textos de 2.º de bachillerato analizados.

Tabla 4
Distribución de CE en los ejercicios propuestos en los libros de texto.

		Oxford	Mc Graw-Hill	Edelvives	Santillana	Anaya
CE-geo	Directa	21	6	36	15	29
	Aplicación	4	—	8	—	14
	Otras	—	—	7	—	4
CE-invderiv		—	2	7	1	10
CE-aproxlim		—	—	2	—	
CE-RPC		2	—	—	—	2
CE-alg	Directa	1	—	7	2	4
	Aplicación	1	—	1	2	2

Como puede observarse en la tabla 4, la CE-geo es la más utilizada en los ejercicios, lo que se corresponde con la presencia de dicha configuración en los libros de texto (tabla 2), así como la ausencia casi total de las configuraciones CE-aproxlim y CE-RPC. Además, dentro de la geométrica, son los casos de aplicación directa los más numerosos, lo que muestra la influencia de las PAU en los textos, convirtiéndose en una verdadera restricción institucional.

6. VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA EN LOS PROCESOS DE ESTUDIO MATEMÁTICOS EN TORNO A LA INTEGRAL EN EL BACHILLERATO

El análisis prospectivo realizado en las secciones precedentes permite afirmar un «desequilibrio» evidente entre las configuraciones epistémicas introducidas, así como un privilegio de los procedimientos algebraicos y analíticos (en general, introducidos y utilizados de manera aislada). En esta sección discutimos estos resultados, identificando y describiendo ciertos aspectos clave que pueden tenerse en cuenta en la mejora de la idoneidad didáctica:

1. Ideoneidad instruccional: necesidad matemática y realizaciones banales. La introducción y desarrollo de un tópico matemático debe fundamentarse en un *principio de necesidad*, según el cual una noción, proceso o significado matemáticos son necesarios para el cálculo de un ejercicio, la resolución de un problema o el análisis de una situación, cálculo, resolución o análisis que de otra forma sería muy costoso realizar e incluso inviable. La necesidad matemática se mide entonces en términos de costo, eficiencia o viabilidad.

2. Idoneidad cognitiva: geometría elemental y cálculo de áreas. La geometría plana elemental puede jugar un papel fundamental en la introducción y desarrollo de la integral definida. En concreto, la determinación de cálculos aproximados aporta información de control sobre la actividad matemática que contribuye a la resolución de conflictos semióticos.

3. Idoneidad epistémica: resolución analítica versus *resolución numérica*. Wilhelmi (2003) aporta datos experimentales y justifica teóricamente la tesis según la cual el cálculo numérico juega un papel integrador para la introducción y desarrollo de nociones, procedimientos y significados propios del análisis matemático. El cálculo numérico no es un mero compendio de métodos que deba enseñarse después de introducidos y desarrollados los «aspectos clave» del análisis matemático. Es deseable una teoría de funciones y un cálculo diferencial e integral que bascule entre métodos analíticos y numéricos.

A continuación describimos estos aspectos tomando ejemplos de los libros de texto seleccionados.

6.1. Ideoneidad instruccional: necesidad matemática y realizaciones banales

Bescós y Pena (2003) introducen la integral definida por medio de las sumas de Riemann. El primer ejemplo es: «Sea $f(x) = x$, demostrar que el área delimitada por su gráfica, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$ es 1/2» (p. 167). «Demostrar» es en este caso sinónimo de «utilizar las sumas de Riemann», método en este caso innecesario. El área solicitada es un triángulo rectángulo de base y altura 1. ¿Por qué, por ejemplo, no se ha ejemplificado el cálculo de la integral mediante las sumas de Riemann con una función cuadrática? El cálculo mediante la definición de integral de Riemann responde a una necesidad *pedagógica*, a saber, responder a un requerimiento externo (en este caso, de un libro de texto) cuando se tienen medios matemáticos para dar la respuesta de una manera más eficaz y económica. No hay pues necesidad matemática alguna.

6.2. Idoneidad cognitiva: geometría elemental y cálculo de áreas

Para el cálculo de la integral definida (Bescós y Pena, 2003, p. 173):

$$\int_1^e \ln x dx$$

Se podría proceder de la siguiente manera:

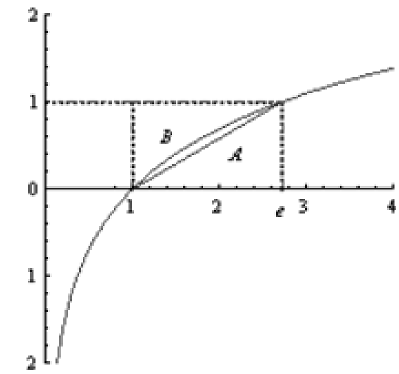
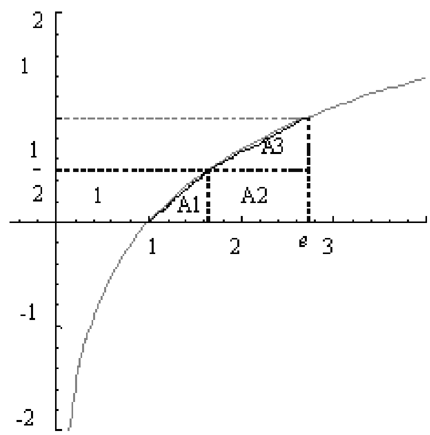
1. Cálculo aproximado de cotas superior e inferior mediante rectángulos y triángulos (cálculo A, figura 8).

2. Cálculo aproximado de cota inferior mediante descomposición en rectángulos y triángulos (cálculo B, figura 8).

3. Cálculo analítico de la integral. Comparación del resultado analítico con los resultados aproximados obtenidos y revisión de los resultados en su caso.

Figura 8

Cálculo aproximado de $\int_1^e \ln x dx$.

CÁLCULO	REPRESENTACIÓN	CÁLCULO
A		Límite inferior: $A = \frac{(e-1)\cdot 1}{2} = \frac{(e-1)}{2} \approx 0{,}86$ Límite superior: $B = (e-1)\cdot 1 = (e-1) \approx 1{,}82$ De esta forma se concluye que: $0{,}86 < \int_1^e \ln x dx < 1{,}72$
B		Búsqueda de una mejor aproximación: $A1 = \frac{(\sqrt{e}-1)\cdot(1/2)}{2} = \frac{(\sqrt{e}-1)}{4} \approx 0{,}16$ $A2 = (e-\sqrt{e})\cdot(1/2) = \frac{(e-\sqrt{e})}{2} \approx 0{,}53$ $A3 = \frac{(e-\sqrt{e})\cdot(1/2)}{2} = \frac{(e-\sqrt{e})}{4} \approx 0{,}27$ De esta forma se concluye que 0,96 es una mejor aproximación (por defecto).

6.3. Idoneidad epistémica: resolución analítica *versus* resolución numérica

El siguiente problema ha sido extraído de un examen de selectividad de la opción A «Ciencias» (Andalucía, 2003).

Sean las funciones $y = x^2$ e $y = \lambda x$. Determina el valor λ tal que el área comprendida entre ambas funciones es 1.

A continuación damos dos formas de resolver el problema: resolución analítica y resolución numérica. Luego hacemos una discusión sobre estos modos en relación con la actividad matemática y las prácticas usuales en el bachillerato.

La resolución que se espera de los estudiantes es:

1. Determinación de los puntos de corte de las funciones $y = x^2$ e $y = \lambda x$:

$$x^2 = \lambda x \Rightarrow x(x-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \lambda \end{cases}$$

2. Imposición de la condición (área 1) y determinación de λ:

$$\int_0^\lambda (\lambda x - x^2)dx = \left[\lambda \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^\lambda = \frac{\lambda^3}{2} - \frac{\lambda^3}{3} = \lambda^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\lambda^3}{6} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{6}$$

Es posible proponer a los estudiantes una resolución numérica previa, que enlace la resolución de integrales definidas en intervalos concretos. Esta resolución se apoya en un procedimiento por ensayo-error y acotaciones sucesivas. Un posible proceso sería:

1. Supongamos que $\lambda = 1$:

$$\int_0^1 (x - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} < 1 \Rightarrow \lambda > 1$$

2. Supongamos que $\lambda = 2$:

$$\int_0^2 (2x - x^2)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} > 1 \Rightarrow \lambda < 2$$

3. De los puntos 1 y 2 se deduce que $1 < \lambda < 2$. Por acotaciones sucesivas, se determinaría una aproximación para λ con tantos decimales como se quisiera y, asimismo, se obtendrían indicadores empíricos de que el resultado de la integral es siempre $\frac{\lambda^3}{2} - \frac{\lambda^3}{3}$.

El método numérico descrito sirve de apoyo para la resolución analítica pretendida en la institución. Por *inducción empírica* se concluye que:

$$\int_0^\lambda (\lambda x - x^2)dx = \frac{\lambda^3}{6}$$

Por lo tanto, para que la integral definida valga 1 es suficiente resolver la igualdad:

$$\frac{\lambda^3}{6} = 1 \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{6} \approx 1{,}817121$$

De esta forma, el método numérico engloba en cierto sentido el método analítico previsto en la institución. El método numérico introducido tiene la ventaja adicional de que puede ser automatizado mediante la edición de un programa. En la figura 9 se muestra un programa editado con la calculadora TI-81. De hecho, una de las innovaciones que la enseñanza preuniversitaria debe afrontar es la de la inclusión de las nuevas tecnologías (las calculadoras científicas, gráficas y programables en particular), para la mejora de la idoneidad instruccional.

La resolución numérica de integrales determinadas podría sistematizarse mediante la introducción de la regla del trapecio, bien como instrumento de control de cálculos, bien como medio de resolución de integrales de funciones para las cuales no se dispone en la enseñanza preuniversitaria (o no existe) de un método analítico de cálculo (por ejemplo, la función gaussiana para la determinación de la función de distribución normal en estadística).

Figura 9

Programa editado en TI-81.

```
Prgm1:INTEGRAL
:Disp «TOLERANCIA»
:Input T
:Disp «RAIZ»
:Input X
:1->I
:Lbl 3
:X^3/6->A
:If abs(A-1)<T
:Goto 1
:If (A-1)<0
:Goto 2
:I+1->I
:X-1/10^(I-1)+1/10^I->X
:Goto 3
:Lbl 2
:X+1/10^I->X
:Goto 3
:Lbl 1
:Disp «APROXIMACIÓN»
:Disp X
:Disp «ÁREA»
:Disp A
:Disp «TOLERANCIA»
:Disp T
```

Por otro lado, tanto en el método analítico como en el numérico, la representación en el plano cartesiano de las funciones $y = x^2$ e $y = \lambda x$ permite interpretar λ como la pendiente de las rectas que pasan por el origen. La introducción de las calculadoras gráficas facilitaría el uso de las gráficas de funciones como instrumentos de control, indagación e interpretación de situaciones donde intervengan funciones. Así el análisis numérico, la posible automatización y la interpretación gráfica introducen aspectos clave para la mejora de la idoneidad didáctica del proceso, incluyéndolo en un proyecto global de enseñanza.

7. SÍNTESIS E IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

El diseño, implementación y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es una tarea compleja abordada por los profesores en el ejercicio de su actividad cotidiana. También es el centro de atención al que confluyen los esfuerzos de investigación didáctica.

La noción de *idoneidad didáctica* de un proceso de estudio matemático (Sección 2.3) tiene por objetivo la intención de orientar el análisis y valoración de dicho proceso, ya sea efectivo o potencial. En nuestro caso, hemos analizado la idoneidad de procesos potenciales basados en la utilización de distintos libros de texto. De hecho, la *idoneidad cognitiva* no se restringe a los «comportamientos observados»: los libros de texto constituyen el referente institucional del «material de aprendizaje».

Uno de los aspectos cruciales que determinan el nivel de idoneidad de un proceso de estudio es la integración o no de las nociones, procesos o significados. El análisis de los libros de texto y de las PAU ha mostrado una reducción generalizada a métodos algebraicos y un aislamiento de las técnicas de resolución. Esta reducción y este aislamiento son indicadores de una baja idoneidad epistémica.

Las tablas 2 y 4 muestran la presencia de las CE en los libros de texto y el tipo de ejercicios propuestos en ellos. Estas tablas son indicadoras de la predominancia de la CE-geo. Este hecho tiene su correlato con las CE identificables en las PAU: el 77% de las pruebas tiene un ejercicio relacionado con la integral definida y de ellas el 66% de se refieren a la CE-geo.

Aún más, la CE-geo es la única CE que es íntegramente introducida en todos los libros de texto, esto es, todas las entidades primarias (situación, lenguaje, definición, proposición, procedimiento y argumentación) aparecen explícitamente. Por el contrario, la CE-RPC es la que menos presencia tiene en los libros de texto, tanto en el desarrollo teórico del tema como en los ejercicios propuestos. De hecho es la única CE ausente totalmente en alguno de los textos (Monteagudo, Paz y Cámara, 1998) y, asimismo, una de las dos que no tiene presencia en las PAU (junto con la CE-aproxlim).

Esta predominancia de la CE-geo refuerza las analogías visuales y físicas que los estudiantes intuitivamente realizan. Czarnocha, Dubinsky, Loch, Prabhu y Vidakovic (2001) realizan, desde la perspectiva de la teoría APOS, un estudio del desarrollo histórico de la noción de área hasta la construcción de Riemann y cómo los estudiantes desarrollan ideas relativas a esta construcción, concluyendo que:

«El redescubrimiento de la intuición de los indivisibles por los estudiantes mientras analizan el concepto de un área bajo una curva irregular [en el plano cartesiano], es un testimonio de la persistencia del punto de vista puntual sobre la estructura del espacio (y posiblemente del tiempo). Las analogías físicas que parecen influir en la comprensión de la estructura del espacio matemático también son importantes en los propios pensamientos [de los estudiantes].» (p. 108).

La inclusión de situaciones cuya resolución está prevista con calculadoras gráficas o programables está ausente, así como el uso de *software* especializado. Estas ausencias son indicadoras de una baja idoneidad en la utilización de los medios materiales que permitirían tanto una mayor idoneidad instruccional. De hecho, en las PAU es norma la prohibición en el uso de calculadoras gráficas o programables, que modificarían la relación con los objetos matemáticos y que presupondrían un proceso instruccional de otra naturaleza.

Se podría llegar a pensar que esta «simplificación», es decir, el no poner situaciones cuya dificultad resida más en la interpretación que en el cálculo, se realiza para maximizar la idoneidad cognitiva, pero esto es una ilusión. La idoneidad cognitiva no se valora en términos dicotómicos «fácil-difícil», sino según la «ubicación» de los significados institucionales pretendidos o implementados respecto a la zona de desarrollo potencial de los alumnos, y según la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos o implementados. Las propuestas se alejan «a la baja» de la zona de desarrollo próximo y se alejan del significado pretendido que presupone, en particular, la capacidad de los estudiantes de interrelacionar las diferentes configuraciones epistémicas implementadas. De hecho, se tiene la ilusión de que los alumnos serán capaces de establecer conexiones entre dichas configuraciones. Sin establecer configuración didáctica alguna para asegurar este objetivo o, en todo caso, valorar su logro.

El análisis de los libros de texto y de las PAU nos lleva a determinar ciertos aspectos que tendrían que tomarse en consideración:

1. Proponer procesos de estudio relativos a la integral definida cuyo control precise un tránsito flexible entre las distintas CE.

2. Instar a las instancias universitarias a que propongan en las PAU situaciones que precisen un conocimiento de la integral definida más allá de un conjunto de técnicas estereotipadas asociadas a la CE- geo y CE-algebraica.

3. El cálculo numérico y la geometría elemental deberían utilizarse como medios de control y predicción, en situaciones complejas de modelización e interpretación.

4. Es preciso introducir las calculadoras gráficas y programables tanto en 2.º de bachillerato como en las PAU, sin incurrir en el riesgo de realizar una «discriminación positiva», a saber, que para todas las pruebas sean necesarias dichas calculadoras.

NOTAS

1. PISA: acrónimo de *Programme for International Student Assessment* (Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos).
2. TIMSS: acrónimo de *Third International Mathematics and Science Study* (Tercer estudio internacional en matemáticas y ciencias), hoy conocido como *Trends in Math and Science Study* (Estudio de tendencias en matemáticas y ciencia).
3. En el marco del EEES el sistema de ingreso a los nuevos grados tendrá que ser regulado por la universidad, que, en todo caso, es previsible que establezca una prueba de evaluación de los conocimientos previos de los candidatos.
4. Los lados del hexágono son percibidos, en general, por las carencias observadas. Los lados del triángulo, que supone el grado máximo de idoneidad, son por definición un ideal relativo a una institución en un momento histórico concreto de la misma y su delimitación es formal, según convenios, principios y estándares establecidos previamente y de manera arbitraria (con el tamiz del fundamento teórico y el contraste experimental).
5. Los libros de texto han sido utilizados en el periodo de análisis de las pruebas de acceso a la universidad analizadas (sección 5).
6. Los estudiantes deben distinguir entre medida «instrumental» y «teórica». No tiene sentido, por ejemplo, calcular la superficie de una tabla de madera para la confección de una mesa con precisión de «número real» si luego hay que cortarla en la «realidad» con un instrumento cuya unidad mínima de medida determina la precisión máxima posible.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AZCÁRATE, C., CASADEVALL, M., CASELLAS, E. y BOSCH, D. (1996) *cálculo diferencial e integral*. Editorial Síntesis. Madrid.

BERRY, J. y NYMAN, M.A. (2003). Promoting studen' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior,* 22, pp. 481-497.

BEZUIDENHOUT, J. y OLIVIER, A. (2000) *Student's conceptions of the integral*. Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, pp. 273, 280.

CAMACHO, M. y DEPOOL, R. (2003). Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la integral definida utilizando el programa de cálculo simbólico (PCS) derive. *Educación Matemática*, 15(3), pp. 119-140.

CONTRERAS, A., FONT, V., LUQUE, L. y ORDÓÑEZ, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 25(2), pp. 151-186.

CONTRERAS, A. y ORDÓÑEZ, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *RELIME*, 9(1), pp. 65-84.

CZARNOCHA, B., LOCH, S., PRABHU, V. y VIDAKOVIC, D. (2001). The Concept of definite integral: coordination of two schemas, en Van den Heuvel-Penhuizen, M. (ed.). *Proceedings of the XXV Conference of the International Group of Mathematics Education*, pp. 12-17. Utrecht: Freudenthal Institute.

CZARNOCHA, B., DUBINSKY, E.; LOCH, S., PRABHU, V. y VIDAKOVIC, D. (2001). Conceptions of Area: en Students and in history. *The Collage Mathematics Journal,* 32(2), pp. 99-109.

DEPOOL, R.A. (2004). *La Enseñanza y el Aprendizaje del Cálculo Integral en un Entorno Computacional. Actitudes de los Estudiantes hacia el uso de un Programa de Cálculo Simbólico (PCS)*, tesis doctoral. Tenerife: Universidad de la Laguna.

DUVAL, R. (2000), Basic Issues for Research in Mathematics Education (Plenary Address), en Nakahara, T. y Koyama, M. (eds.). *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (tome I),* pp. 55-69. Hiroshima (Japón): Hiroshima University.

GODINO, J.D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* 22(2/3), pp. 237-284.

GODINO, J.D., BENCOMO, D., FONT, V. y WILHELMI, M.R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,* XXVII (2), pp. 221-252.

GODINO, J.D., CONTRERAS, A. y FONT, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 26(1), pp. 39-88.

GODINO, J.D., FONT, V., WILHELMI, M.R. y DE CASTRO, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), pp. 59-76.

GODINO J. D., WILHELMI M. R. y BENCOMO D. (2005). Suitability criteria for a mathematical instruction. A teaching experience with the function notion. *Mediterranean journal for research in mathematics education*, 4(2), pp. 1-26.

GONZÁLEZ, M.T. y SIERRA, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza de secundaria en España durante el siglo xx. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), pp. 389-408.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A.S. (2006). *La Generalización de la Integral Definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica en entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje*. Tenerife: Servicio de Publicaciones, Universidad de la Laguna.

LABRAÑA, P.A. (2001). *Avaliación das concepcións dos alumnos de cou e bacharelato acerca do significado do integral*. Tesis doctoral, Universidad de Santiago de Compostela.

MONTIEL, M., WILHELMI, M., VIDAKOVIC, D. y ELSTAK, I. (2009). Using the Onto-Semiotic Approach to Identify and Analyze Mathematical Meaning when Transiting between Different Coordinate Systems in a Multivariate Context, *Educational Studies in Mathematics*, 72(2), pp. 139-160. DOI 10.1007/s10649-009-9184-2.

ORDÓÑEZ, L. y CONTRERAS, A. (2003). El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida, en Castro, E., Flores, P., Rico, L. y Vallecillos, A. (eds.). *Actas del VII Simposio de la SEIEM*, pp. 277-287.

ORTEGA, T. e IBAÑES, M.J. (2004). Un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de Bachillerato. *Números*, 57, pp. 19-32.

ORTON, A. (1983). Students' Understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14(1), pp. 1-18.

SFARD, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being – Or how mathematical discourse and mathematical objects create each other, en Cobb, P., Yackel, E. y McCain, K. (eds.). *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classroom*, pp. 37-97. Londres: LEA.

SCHNEIDER, M. (1988). *Des objets mentaux «aire» et «volume» au calcul des primitives*, tesis doctoral, Universidad Católica de Lovaina.

TALL, D. (1991). Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. En Zimmermann e Cunnighman (eds.). *Visualization in Mathematics*, pp. 105-119.

TURÉGANO, P. (1994). *Los Conceptos en torno a la Medida y el Aprendizaje del Cálculo Infinitesimal*, tesis doctoral. Universitat de València, Facultat de Ciències Matemàtiques, Departament de Didàctica de la Matemàtica.

VYGOTSKI, L. (1934). *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires: Paidós, 1995.

WENZELBURGER, E. (1993). Introducción de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial e integral-una propuesta didáctica. *Educación matemática*, 5(3), pp. 93-123.

WILHELMI, M.R. (2003). *Análisis epistemológico y didáctico de nociones, procesos y significados de objetos analíticos*. Sección 2: Tesis doctorales, n.º 23. Pamplona: Universidad Pública de Navarra.

WILHELMI, M.R., GODINO, J.D.y LACASTA, E. (2007a). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27(1), pp. 77-120.

WILHELMI, M. R., GODINO, J.D. y LACASTA, E. (2007b). Didactic effectiveness of mathematical definitions: the case of the absolute value. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2(2), pp. 72-90.

[Artículo recibido en abril de 2009 y aceptado en mayo de 2010]

The influence of university entrance examinations on teaching of the definite integral at high school

Contreras de la Fuente, Ángel[1], Ordóñez Cañada, Lourdes[1] y Wilhelmi, Miguel R.[2]
[1] Universidad de Jaén
[2] Universidad Pública de Navarra
afuente@ujaen.es
lordonez@ujaen.es
miguelr.wilhelmi@unavarra.es

Summary

The definite integral is a key mathematical subject matter in Optional Secondary Education (*Bachillerato* henceforth). An empirical sign of this fact is related to the University Entrance Examination (*Prueba de Acceso a la Universidad –PAU* henceforth–) in which, very frequently (approximately in 77% of the exams) a question, an exercise or a problem dealing with this mathematical notion is included. Besides, the *PAU* is an external examination and, for this reason, it influences the teaching and, consequently, the learning of this mathematical object. The main purpose of this paper is to determine how the *PAU* influences the teaching and learning of the definite integral in *Bachillerato*. This general aim is subdivided into four specific objectives:

1) To show the meanings of the definite integral which appear in a representative simple of 2nd year *Bachillerato* textbooks.

2) To show the meanings of the definite integral in a *PAU* sample.

3) To prove the absence of linguistic and argumentative elements of meaning which are crucial in the teaching of the definite integral in the 2nd year of *Bachillerato*.

4) To evidence that the introduction of the missing elements of meaning would help to overcome certain semiotic conflicts.

We will adopt the ontosemiotic approach of mathematical cognition (*EOS* from now onwards) as a theoretical framework. The first issue we tackle is to define the theoretical elements in order to establish the research tools clearly.

According to *EOS*, it is necessary to establish, first of all, the global meaning of the definite integral by determining the different situations, languages, definitions, properties and procedures involved in this mathematical object, that is to say, the *epistemic configurations*. In this paper the five configurations which constitute the global meaning of the definite integral are established and they will be used to compare them with given meanings such as those in the *PAU* or in textbooks. In this way, it will be possible to determine biases and restrictions in the teaching of this mathematical object.

Next, we will make an analysis of the reality of the definite integral in *Bachillerato* and *PAU*. With this purpose, first we study five 2nd year *Bachillerato* textbooks in order to determine the elements of meaning which are presented. We observe the configurations which are worked with and the way in which this is done. From this analysis we conclude that the meaning of the textbooks is biased since the *geometric configuration* is strongly present, relegating or even forgetting others such as the *configuration as a result of a change process*, which is necessary in all modeling processes.

Likewise, the study of the *PAU* from 1999 to 2008, which has been done by classifying the proposed situations according to the epistemic configuration necessary to solve it, establishes important regularities and biases which can be extracted from such tests, ranging from the most frequently used epistemic configurations to those which are relegated or, even, the most frequent processes and those which are never used. All this determines the meaning which has emanated from the *PAU* in the last ten years.

The comparison between the texts analyzed and the classification of the exercises included in them, by using the same categories as in the *PAU*, shows the powerful influence that these have on the teaching and learning of the definite integral in the 2nd year of *Bachillerato*. We can assert that the *PAU* are a real restriction for the teaching and learning of the definite integral.

The prospective analysis allows us to state that there is an evident «imbalance» between the epistemic configurations which are introduced, as well as a privileged treatment of the algebraic and analytic procedures. We can observe that in most exercises students are asked for the direct calculation of an area or the application of a method to calculate the definite integral but there is no application of the integral to other fields. Therefore, students will obtain a partial view of the notion, which can partly explain the wide gap between *Bachillerato* and University, as shown in different research studies.

Last, the *EOS* establishes different dimensions to value the suitability of the study processes in Mathematics, among which *didactic suitability* is found. This is structured into *epistemic, cognitive and instructional suitability*. This study leads us to the conclusion that the *didactic suitability* for this mathematical object is not the appropriate one. In addition, cases of *epistemic, cognitive and instructional suitability* are exemplified by providing concrete instances from the textbooks, and suggestions are made for the improvement of the teaching of this mathematical object.