EL PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS Y LA CONSTRUCCIÓN DEL TEOREMA DE BAYES

Penalva Martínez, M. Carmen[1] **y Posadas García, José Adolfo**[2]
[1] Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Facultad de Educación. Universidad de Alicante
[2] Departamento de Fundamentos del Análisis Económico. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Alicante
carmina.penalva@ua.es
posadas@merlin.fae.ua.es

Resumen. Las tareas de resolución y planteamiento de problemas posibilitan indagar sobre aprendizajes específicos de los estudiantes. Plantear un problema significa idear un problema preconcibiendo un plan para su resolución. En la actualidad, sabemos poco de los procesos cognitivos usados por los estudiantes que pueden ser efectivos para plantear problemas de matemáticas. Para dar cuenta de cómo estudiantes universitarios construyen conocimiento relativo al teorema de Bayes cuando realizan tareas de planteamiento de problemas, usamos el modelo de la abstracción en contexto de acciones epistémicas anidadas de Hershkowitz, Schwarz y Dreyfus (2001). Los resultados muestran características distintas en el proceso de construcción del teorema de Bayes que ponen de manifiesto el potencial de las tareas de plantear problemas para desencadenar procesos de abstracción.

Palabras clave. Planteamiento de problemas, construcción de conocimiento, contexto, teorema de Bayes.

Problem posing and the contruction of Bayes' theorem

Summary. Problem posing and problem solving are suitable tasks for inquiring into the learning of specific concepts. Posing a problem involves setting up a text for the problem and thinking about a plan to solve it. Currently, we have scarce knowledge about students' effective cognitive process when posing mathematical problems. We have used the theoretical framework of nested epistemic actions (Hershkowitz, Schwarz and Dreyfus, 2001) in order to study how university students built knowledge about Bayes' Theorem when they solve problem posing tasks. We have identified different characteristics in the process of constructing Bayes' Theorem and the potential of posing problem activities to generate the abstraction process.

Keywords. Problem posing, constructing knowledge, context, Baye's theorem.

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

Esta investigación usa el modelo de abstracción en contexto de Hershkowitz, Schwarz y Dreyfus (2001) para dar cuenta de cómo estudiantes universitarios construyen el significado del teorema de Bayes. Este modelo ve la génesis de una abstracción como una entidad inicial que se desarrolla a través del uso de los significados en diferentes contextos y determinada mediante la interacción social a través de una dialéctica «*to and fro*» entre los concreto y lo abstracto (Monaghan y Ozmantar, 2006, p. 234).

En la investigación que presentamos el planteamiento de problemas es un contexto de aprendizaje que posibilita indagar sobre procesos de abstracción matemática que desarrollan los estudiantes cuando interactúan para resolver tareas matemáticas. Para Castro (2008), *«la invención de problemas es una actividad consustancial con la resolución de problemas»* (p. 120) y la identifica con distintos nombres: plantear un problema, reformular un problema dado, variaciones de un problema... Sin embargo, es poco lo que se sabe sobre los procesos cognitivos usados por los estudiantes o sobre las estrategias operativas que pueden ser efectivas planteando problemas de matemáticas. Los estudios realizados evidencian que la simple experiencia con planteamiento de problemas de matemáticas tiene un impacto positivo en el aprendizaje de los estudiantes (Cai, 2003; Silver y Cai, 1996) considerándose una componente clave de la exploración matemática.

Los procesos de abstracción han sido estudiados desde distintos ámbitos de conocimiento (Dreyfus y Gray, 2002). El modelo de Hershkowitz y otros (2001) ha sido utilizado para analizar procesos de abstracción en el aprendizaje de contenidos de probabilidad (Dreyfus et al., 2006; Hershkowitz et al., 2007; Ron et al., 2006; Schwarz et al., 2004) y en otros contextos diferentes. Por ejemplo, contenidos algebraicos (Tabach y Hershkowitz, 2002; Tabach et al., 2006) y de cálculo (Dreyfus y Kidron, 2006; Ozmantar y Monaghan, 2006). En particular, Ron, Dreyfus y Hershkowitz (2006) indican que los procesos de abstracción de contenidos de probabilidad son procesos complejos, y difíciles de identificar. Por otra parte, y considerando el papel de la interacción en la resolución de problemas, los investigadores han usado el modelo de la abstracción en contexto en sujetos individuales (por ejemplo, en Hershkowitz et al., 2001), a grupos formados por pares de estudiantes (Monaghan y Ozmantar, 2006), por tres componentes y por el grupo completo de clase (Hershkowitz et al., 2007).

Para Hershkowitz y otros (2001), la abstracción se considera como una actividad de reorganizar verticalmente las matemáticas construidas anteriormente dentro de una nueva estructura matemática en un contexto específico. El término actividad se usa para enfatizar que la abstracción es un proceso en el que las historias de los estudiantes y las tareas diseñadas para provocar abstracciones tienen un papel relevante (Dreyfus et al., 2001) al generarse tres tipos de acciones epistémicas que son frecuentemente perceptibles: *reconocimiento, building-with y construcción*.

El *reconocimiento* de una estructura matemática familiar ocurre cuando el estudiante en una situación de resolución de problemas se da cuenta de que el uso de dicha estructura es pertinente en la situación que está resolviendo. Se utiliza el término *reconocimiento* para hacer hincapié en que no es la primera vez que dicha estructura «entra en la mente» del estudiante.

Combinar estructuras elementales para lograr una meta dada es la segunda acción epistémica, *building-with*. Cuando el estudiante realiza esta acción no se enriquece con estructuras de conocimiento nuevas o más complejas, sino que combina conocimiento disponible para obtener una solución viable al problema. La acción *building-with* es identificable cuando los estudiantes están interpretando y explicando una situación o reflexionando sobre un proceso. Para estos propósitos los estudiantes pueden recurrir a estrategias, reglas o teoremas. Por ejemplo, cuando modifican un método existente para aplicarlo a una situación de complejidad mayor.

Lo novedoso implica *construcción*. El nuevo conocimiento matemático tiene que ser construido desde estructuras más simples. Desde esta perspectiva construir nuevo conocimiento implica una reorganización vertical del conocimiento. La acción de construcción puede ser bastante larga y contener segmentos más pequeños que son ellos mismos acciones de construcción. Cuando los estudiantes construyen nuevo conocimiento, generalmente desarrollan un lenguaje para expresarlo.

Una de las características asumidas de las acciones epistémicas es que están *anidadas*. Las acciones de *reconocimiento* están anidadas con las otras dos y las de *building-with* con las de *construcción*, pero la *construcción* refiere a un nuevo «constructo» que es diferente a los considerados en las acciones de *reconocimiento* y *building-with* (Dreyfus, 2007). En este sentido, la acción de *construcción* es el primer paso de la abstracción, es una acción emergente, frágil, que requiere ser consolidada. La consolidación implica ir reconociendo con mayor facilidad el nuevo conocimiento en diferentes situaciones de resolución de problemas (Kydron, 2008). Por otra parte, las investigaciones están indicando que las construcciones iniciales que realizan los estudiantes no siempre se ajustan perfectamente a los contenidos matemáticos (Ron, Dreyfus y Hershkowitz, 2006).

Por otra parte, las investigaciones sobre los procesos cognitivos a través de los cuales los estudiantes universitarios construyen los significados de la probabilidad condicional están poniendo de manifiesto que estos procesos son complejos y lejos de ser lineales (Batanero, 2001; Díaz y De la Fuente, 2006; Jones y Thornton, 2005; Watson, 2005). Por lo tanto, es necesario identificar características de los procesos de abstracción de los conceptos de probabilidad que nos ayuden a comprenderlos mejor. De manera específica, en este documento exponemos la identificación y análisis de la acción epistémica *construcción* que conlleva acciones de *reconocimiento* y de *building-with* relativas a la manera en la que estudiantes universitarios de estudios económicos abstraen la idea de probabilidad condicional en contextos vinculados al teorema de Bayes.

METODOLOGÍA

Participantes

32 estudiantes de 2º curso de la Diplomatura de Ciencias Empresariales recibieron durante 13 horas docencia relativa al experimento aleatorio, su espacio muestral, los sucesos y las operaciones con sucesos; interpretaciones de la probabilidad, regla de Laplace y la definición axiomática de probabilidad con las consecuencias de los axiomas. Estos alumnos llegan a la universidad sin los conocimientos básicos en probabilidad y es preciso comenzar el programa repitiendo contenidos que debieran haber asimilado en el bachillerato (Batanero, 2008). Asimismo, se les impartió la definición formal de probabilidad condicionada y los conceptos de sucesos depen-

dientes e independientes, la generalización de la noción de independencia y el teorema de la multiplicidad. Esta parte dedicada a la probabilidad concluyó con los teoremas de la probabilidad total y de Bayes. Los estudiantes realizaron tareas de resolución de problemas que fueron posteriormente discutidas en el aula. En el contexto de esta investigación se diseñaron tareas de resolución y planteamiento de problemas que los estudiantes resolvieron por grupos. De manera adicional, se entrevistó a los grupos de estudiantes que las entregaron resueltas con el fin de generar contextos de reflexión sobre el proceso de resolución realizado y que permitieran poner de manifiesto los procesos de abstracción generados con algunos contenidos de probabilidad (Posadas, 2008).

Instrumentos de recogida de datos y procedimiento de aplicación

Una de las tareas propuestas fue la siguiente:

Figura 1
Tarea planteamiento de problemas.

Enuncia un problema donde aparezcan, entre otros, sucesos que tengan que ver con «visitar el museo MARQ» y «visitar el museo MUA». Para la resolución del problema debe ser necesario utilizar la diferencia de sucesos, alguna de las leyes de De Morgan, la ley de las probabilidades compuestas y el teorema de Bayes. Justifica que el problema propuesto reúne las condiciones pedidas.

La tarea presenta dos sucesos y los estudiantes deben plantear un problema dando una interpretación probabilística a algunas de las operaciones con sucesos, diferencia de sucesos y leyes de De Morgan. Con la exigencia de uso de la ley de las probabilidades compuestas, pretendemos ver de qué manera dotan de significado a la probabilidad condicionada y a la dependencia-independencia de sucesos. La incorporación de información adicional respecto de un suceso puede modificar la probabilidad de que dicho suceso ocurra. La dependencia-independencia de sucesos puede concluirse con la ley del producto de las probabilidades y relacionarse con la probabilidad condicionada.

Con el teorema de Bayes intentamos ver si enuncian alguna cuestión donde aparezca alguna probabilidad «*a posteriori*» a partir del conocimiento de las probabilidades «*a priori*». Para manejar esta propiedad los estudiantes deben suponer un suceso en relación con las hipótesis del problema que planteen y a partir de la realización de dicho suceso argumentar sobre la realización de alguno de los sucesos que forman las hipótesis, de esta forma la ocurrencia de otro suceso puede modificar las creencias sobre las probabilidades iniciales al transformar estas probabilidades iniciales en otras probabilidades «mejoradas» por la información proporcionada por dicho suceso. Esta característica puede causar extrañeza a los estudiantes debido a sus creencias probabilísticas. Por otra parte, el hecho de que la tarea requiera que se enuncie un problema abierto a muchas posibilidades puede facilitar la manifestación de procesos de construcción de conocimiento. La tarea no introduce datos numéricos, lo que permite que los estudiantes definan las probabilidades y las relaciones para que los distintos conceptos sean puestos en evidencia.

Los estudiantes tenían que resolver la tarea por grupos. Estos estaban formados por dos, tres o cuatro estudiantes y se formaron once grupos. Los estudiantes tenían que resolver dos tareas, una tarea de planteamiento (Fig. 1) y otra de resolución de problemas que configuró una práctica docente. Tuvieron una semana para realizar la práctica. Después se realizó a cada grupo una entrevista semiestructurada sobre las dos tareas. En la entrevista participaron todos los componentes del grupo y se hizo un seguimiento de las respuestas de los estudiantes a cada una de las tareas. El entrevistador intentó que los estudiantes pusieran de relevancia el porqué de los procedimientos utilizados en la resolución de los problemas, qué significados tenían para ellos cada uno de los conceptos implicados en las tareas, cómo habían ideado los enunciados de los problemas, intentando indagar en los conceptos que habían utilizado y en los procesos de abstracción que habían seguido. La entrevista tuvo una duración aproximada en cada caso de unos cuarenta y cinco minutos. Todas las entrevistas se grabaron en audio y posteriormente fueron transcritas en su totalidad.

Análisis

Las respuestas de los estudiantes a las tareas y los datos aportados por la entrevista han sido el vehículo para indagar sobre la abstracción. El análisis se realizó en dos fases. La primera fase tenía como objetivo identificar el uso de los conceptos matemáticos implicados en las tareas por parte de los estudiantes y las relaciones establecidas entre los conceptos y procedimientos utilizados. Posteriormente realizamos un estudio conjunto de toda la información para identificar las características que parecían mostrar la manera en la que los estudiantes resolvían y planteaban problemas.

En una segunda fase, centramos la atención en identificar aspectos del proceso de abstracción matemática puesto de manifiesto durante la resolución y reflexión posterior considerando las acciones epistémicas según el modelo RBC (Hershkowitz et al., 2001). En este artículo damos cuenta de la acción de *construcción* en una tarea específica de planteamiento de problemas, lo que nos permite también hacer mención a las otras dos acciones para mostrar cómo el *reconocimiento* está anidado en las acciones de *building-with* y de *construcción* y que la acción *building-with* está anidada en la acción *construcción* (Hershkowitz et al., 2001, Dreyfus, 2007).

Como Hershkowitz y otros (2001), consideramos los protocolos documentaciones ingenuas de las acciones de los estudiantes mientras hacen matemáticas sin hacer hipótesis *a priori*.

RESULTADOS

Los resultados del análisis muestran que la acción *construcción* se ha manifestado en la tarea de planteamiento de problemas de tres formas distintas. Consideramos los casos de Sonia y Carlos, Alberto y David y el de Laura y Ana como prototipos de los resultados obtenidos. El estudio de estos tres casos que ejemplifican los resultados obtenidos en el análisis de las producciones de los grupos de estudiantes muestran diferencias en el proceso de construcción de conocimiento.

Caso de Sonia y Carlos

Los dos estudiantes trabajaron cada tarea por separado y se comunicaron por Internet. Más tarde se juntaron para dar forma definitiva a sus respuestas. Sonia y Carlos han planteado un problema con un enunciado largo y «complejo». Según comentan en la entrevista, cada uno elaboró un problema distinto y al reunirse eligieron el de Carlos y lo trabajaron juntos. El problema que enunciaron es el siguiente:

Figura 2
Enunciado del problema de Sonia y Carlos.

Te encanta un programa de radio, y siempre lo escuchas a todas horas en casa y en el coche. Durante las cinco horas que van a emitir el programa, van a sortear un premio. Para optar por el premio has de llamar y concentrarte lo suficiente para poder responder a una pregunta. Y tienes cinco minutos para responder. Tú eres muy listo y tu probabilidad de responder bien desde un teléfono en la tranquilidad de tu casa es = 6/8. Pero si estás en el coche tu probabilidad de hacerlo bien mientras conduces y hablas por el móvil (tienes un manos libres) es menor, ya que tienes una probabilidad de acertar = 3/9. Vas a estar de viaje en el coche una hora de las cinco del programa de radio. Si aciertas, los del programa tiran un dado y si sale un 1, 2, 3 o 6 recibes dos invitaciones para el MUA. Si sale 4, 5 o 6 recibes dos invitaciones para el MARQ.
a) P(A) = Probabilidad de acertar. Probabilidad total de acertar
b) Probabilidad de fallar P(A^c)
c) Has ganado sólo ir a MARQ
d) Has ganado ir a ambos

En el enunciado del problema, Sonia y Carlos no realizan preguntas, sólo indican las probabilidades que van a calcular y hechos: *probabilidad de acertar*, *has ganado sólo ir a MARQ*… y asignan directamente unas *probabilidades condicionadas* y las probabilidades iniciales o *a priori* del problema las indican en función del tiempo de duración del programa de radio y el tiempo que permanecen en casa o en el coche. Además, proponen un experimento adicional, *lanzar un dado*, para determinar las probabilidades de ir a un museo o al otro, e incluso, sin referirlo directamente, la probabilidad de ir a los dos museos. Dan también un dato, *cinco minutos* para responder, irrelevante para el problema que de alguna forma explica también que no utilizan un razonamiento lineal. Hay que resaltar el valor que asignan a las *verosimilitudes* (6/8, 3/9) que son probabilidades subjetivas y las expresan con fracciones no irreducibles.

La resolución que realizan al problema planteado se recoge en la figura 3:

Figura 3
Resolución de Sonia y Carlos

a) P(A) = Probabilidad de acertar. Probabilidad total de acertar
((4/5) · (6/8)) + ((1/5) · (3/9)) = 24/40 + 3/45 = (1.080/1.800) + (120/1.800) = 1.200/1.800 = 0,6667 *Probabilidad total*

b) Probabilidad de fallar P(A^c)
P(A^c) = 1 − *P(A)* = 1 − 0,6667 = 0,3333

c) Has ganado sólo ir a MARQ
P(U) = Ganar ir a MUA
P(M) = Ganar ir a MARQ
P(U ∩ M) = Ganar ir a ambos
P(M) − P(U ∩ M) = 3/6 − 1/6 = 2/6 · P(A)
Sólo ir a MARQ = (1/3) · (1.200/1.800) = 0,2222

d) Has ganado ir a ambos = 1/6 · (1.200/1.800) = 0,1111 *entonces, ¿cuál es la probabilidad de estar en el coche? Teorema de Bayes.*
(1/5 · 3/9) / 0,1111 = 0,6

Lo primero que llama la atención es lo *extenso* del enunciado frente a lo conciso de la resolución. Aunque se les indicó que debían explicar y justificar sus decisiones, la resolución planteada carece de cualquier tipo de explicación. Sonia y Carlos, al formular su problema, parece que han querido dejar abiertas las posibilidades de plantear diversas cuestiones. De hecho en el enunciado del apartado d) sólo pone *has ganado ir a ambos* y aquí añaden *¿cuál es la probabilidad de estar en el coche?*

Dado que nuestro interés es mostrar el proceso de abstracción de estos estudiantes, vamos a detenernos en la secuencia de cómo llevan a cabo el enunciado de esta tarea. Durante la entrevista, el entrevistador fue leyendo el enunciado que habían propuesto y haciendo algunos comentarios sobre los significados implicados y sobre lo que parecía asumirse de manera implícita en el texto, a los que contestaba fundamentalmente Carlos. Una de las características de estos estudiantes es la de dejar cosas sobrentendidas o implícitas: En ningún momento dicen en el enunciado que exista la posibilidad de ganar un premio para ir a los dos museos. Definen el suceso M «ir al MARQ» y U «ir al MUA» y dejan entrever el suceso «ir a los dos museos» cuando en el enunciado dicen: *Si aciertas... recibes dos invitaciones para el MARQ.*

Carlos en la entrevista ante el comentario del entrevistador: *...si se acierta se lanza un dado y el resultado nos da entradas para ir a un museo o a otro o a los dos,* recalca enseguida: *O a los dos. Sí, sí, hemos puesto un valor que está en los dos que es el seis.*

Los datos iniciales del enunciado que formulan los exponemos a continuación. Hemos añadido letras para simbolizar los sucesos y hacer inteligible la exposición ya que estos estudiantes, añadiendo una nueva característica a su compleja forma de abstraer los conceptos, apenas representan los sucesos que utilizan en algún momento del problema. Llamamos H: «contestar desde casa» y C: «contestar desde el coche». De la misma forma que han hecho los estudiantes, llamamos A: «acertar la pregunta». Según esto, los datos de su enunciado son:

$P(A/H) = 6/8$
$P(A/C) = 3/9$
$P(H) = 4/5$
$P(C) = 1/5$
$P(H), P(C)$ $(\Sigma = 1)$

Desde los datos del enunciado propuesto también obtienen las siguientes probabilidades:

$P(U/A) = 4/6$
$P(M/A) = 3/6$
$P((U \cap M)/A) = 1/6$ (dato implícito al que hemos hecho referencia).

De la manera en la que Sonia y Carlos han enunciado el problema, se infiere que han reconocido previamente las condiciones que deben darse para poder aplicar el teorema *de la probabilidad total* y han expresado dos sucesos, «*contestar desde casa*» y *«contestar desde el coche»*, que según el enunciado son incompatibles y sus probabilidades suman uno. Este hecho es corroborado durante la entrevista en relación con el teorema de la probabilidad total, que ponen en evidencia en primer lugar:

Figura 4
Fragmento 1 entrevista Sonia y Carlos.

1. E (haciendo mención a la manera en la que han resuelto el apartado a)*: En el apartado a) preguntáis la probabilidad de acertar y ponéis unas operaciones sin explicar qué es cada uno de los valores que aparecen.*
2. Carlos: Pero yo ponía las probabilidades, las tenía todas en una hoja y…
3. E: Ya, pero me entregáis a mí esta tarea y yo la tengo que entender. [Risas].
4. E: ¿Y por qué no lo habéis expresado aquí?
5. Carlos: No los quise poner, iba, iba haciendo…
6. E: ¿Por qué es una probabilidad total?
7. Carlos: De acertar, porque ahí están todas las posibilidades de acertar…
8. Sonia: Puedes acertar estando en el coche o estando en tu casa, ¿no?
9. E: Sí.
10. Carlos: Esta probabilidad es estando en casa y la otra será en el coche porque es menor. Luego sumas y ya está.

Los estudiantes, tras preparar primero la tarea por su cuenta, decidieron profundizar en el problema propuesto por Carlos. Aun así, en la entrevista Carlos habla en singular (*yo ponía… no las quise poner*…). Debido al protagonismo de Carlos, nos centramos en la manera en la que parece haber desarrollado el proceso de abstracción. Desde esta perspectiva, consideramos que la participación de Sonia es parte del contexto en el que se desarrolla el proceso de abstracción de Carlos (Ron et al., 2006).

El *proceso de abstracción* de la probabilidad total queda de manifiesto cuando sin utilizar fórmulas Carlos construye el teorema de la probabilidad total. La manifestación de la acción epistémica *building-with* se realiza cuando Carlos usa las probabilidades iniciales de los sucesos y las verosimilitudes para obtener la solución del problema al reconocer las probabilidades de los sucesos: *Esta probabilidad es estando en casa y la otra en el coche. Luego sumas y ya está.* Con esta manera de proceder Carlos construye el teorema de la probabilidad total cuando, pese a no expresar fórmula alguna, indica que *...están todas las posibilidades de acertar.* Durante la entrevista Carlos indica que ha expresado todas las probabilidades en una hoja de papel y han operado para resolver el problema. Lo que han construido es el teorema de la probabilidad total (utilizando la expresión formal que ellos han omitido, H es estar en casa, C es estar en el coche)

$$P(A) = P(C) \times P(A/C) + P(H) \times P(A/H)$$

Es en el apartado c) donde ponen en evidencia la diferencia de sucesos, *has ganado sólo ir a MARQ,* y la ley del producto. Operan combinando operaciones en una misma expresión probabilística:

$$P(M) - P(U \cap M) = 3/6 - 1/6 = 2/6 \cdot P(A)$$

La identidad debe acabar en 2/6 pero aparece multiplicada por *P(A)*. Cuando el entrevistador pregunta por qué multiplican por esta probabilidad, Carlos contesta: *Porque para que te toque ir al MARQ primero has de haber acertado*. Entendemos que estamos ante una *construcción* de la ley de las probabilidades compuestas ya que relacionan probabilidades de sucesos con sucesos que deben darse previamente. Nuevamente han resuelto el problema utilizando y relacionando estructuras más simples, la diferencia de sucesos y la probabilidad de acertar lo que puede ser considerado manifestaciones de *building-with*. El 2/6 que obtienen es $P(M \cap \bar{U}/A)$, es decir, la probabilidad de la diferencia «suponiendo que se haya acertado». Al multiplicar por $P(A)$, realmente evidencian la ley de las probabilidades compuestas, formalmente lo que calculan es:

$$P[A \cap (M \cap \bar{U}) = P(A) \cdot P(M \cap \bar{U}/A)]$$

Además, en vez de plantear el teorema de Bayes utilizando la probabilidad total, la de acertar, enuncian un apartado donde aparece una nueva probabilidad total, la de ir a ambos museos, y utilizan el algoritmo del teorema de Bayes sin recurrir a formulación. Parece, tal como se desprende del enunciado inicial donde sólo han puesto *d) has ganado ir a ambos,* que habían pensado en calcular la probabilidad de haber ganado ir a los dos museos y que luego se les ocurrió plantear el teorema de Bayes a partir de aquí. En la entrevista reconocen que están ante una cuestión que puede ser resuelta mediante este teorema porque, como afirma Sonia, parten de la probabilidad inicial de estar en el coche (*la probabilidad de un suceso anterior*) y modifican esta probabilidad añadiendo más información (al saber que han acertado y les ha correspondido ir a ambos museos *es una información*).

Su enunciado/resolución ha sido:

d) Has ganado ir a ambos = 1/6 · (1.200/1.800) = 0,1111 *entonces ¿cuál es la probabilidad de estar en el coche? Teorema de Bayes*.

(1/5 · 3/9) / 0,1111= 0,6

Y de manera formal, si llamamos $B = A \cap (M \cap U)$, lo que preguntan es la

$$P(C/B)=\frac{P(C)\cdot P(B/C)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{3}{9}\cdot\frac{1}{6}\right)}{0{,}1111}$$

Es decir, obtienen la probabilidad de haber contestado desde el coche en el supuesto de que hayan acertado y les haya correspondido ir a los dos museos. Les ha faltado multiplicar por 1/6, que es la probabilidad de ganar ir a los dos museos en caso de haber acertado, para que la resolución fuera totalmente correcta.

El conocimiento de los conceptos de la probabilidad de Sonia y Carlos han jugado un papel importante en el proceso de construcción de nuevo conocimiento cuando están enunciado un problema no estándar con determinados contenidos de probabilidad. La forma correcta de entender los sucesos «*contestar desde casa*» y «*contestar desde el coche*» junto con el uso adecuado de las relaciones de estructuras probabilísticas simples han propiciado el éxito de estos dos estudiantes en la resolución de la tarea. En este sentido, el caso de Sonia y Carlos puede ser considerado prototípico de la acción de construcción cuando ocurre *a través de todo el proceso*.

Caso de Alberto y David

Alberto y David resolvieron la tarea conjuntamente proponiendo el enunciado siguiente:

Figura 5
Enunciado del problema de Alberto y David.

Los estudiantes de la universidad van a realizar una excursión a un museo. Hay dos museos para visitar, el museo MARQ y el museo MUA, la probabilidad de visitar el MARQ es 0,4 y el MUA 0,6 y la de visitar ambos es el 0,15. Se sabe que el 30% de los que visitan el MARQ y el 50% de los que visitan el MUA estudian ciencias empresariales. Si se tiene un estudiante, se pide:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya visitado el MARQ y no el MUA?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya visitado ninguno de los dos museos?
c) ¿Cuál es la probabilidad de visitar el MARQ sabiendo que ya ha visitado el MUA?
d) Un alumno se pierde durante la excursión y al preguntarle en recepción dice que estudia empresariales, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el museo MUA?

Formalmente, los datos iniciales que aparecen en el enunciado son:
$P(M)$, $P(U)$, $P(M \cap U)$
y
$P(C/M)$, $P(C/U)$, siendo C: «Estudiar Ciencias Empresariales».

El entrevistador supone que los estudiantes utilizan los sucesos M: «visitar el MARQ» y U: «visitar el MUA» como sucesos iniciales del teorema de Bayes y que han pretendido para ello que sus probabilidades sumen uno y entiende también que al asignar el valor de 0,15 a la probabilidad de visitar los dos museos no han tenido en cuenta que deben ser incompatibles. Para indagar sobre el razonamiento que habían seguido y poner en juego los supuestos anteriores, les pregunta cómo han ido pensando el enunciado y las probabilidades que han establecido para los sucesos. David, dice: *Nos fijamos en lo que nos pedían… íbamos inventando lo que sería el enunciado*. Posiblemente por ello, y pensando en plantear una probabilidad condicionada, han asignado un valor a la probabilidad de visitar ambos museos aunque esto impida posteriormente aplicar correctamente los teoremas de la probabilidad total y Bayes.

Por otro lado, Alberto y David han asignado probabilidades advirtiendo que los dos sucesos M: «visitar el MARQ» y U: «visitar el MUA» han de formar un sistema completo para poder utilizar el teorema de la probabilidad total, sólo que no han tenido en cuenta que los sucesos deben ser además incompatibles, lo que no es posible con su enunciado al haber asignado una probabilidad al suceso «visitar ambos museos». Alberto y David habían supuesto que todos los estudiantes de la universidad que van a la excursión visitan alguno de los dos museos, aunque luego son conscientes de que esto no es posible ya que han puesto el dato de 0,15 a la probabilidad de visitar ambos museos. Esto pone de manifiesto que el conocimiento que exponen del teorema de Bayes es *parcial* en el sentido de que el enunciado tiene en cuenta sólo parcialmente las condiciones matemáticas que debe cumplir el teorema (Ron et al, 2006).

Por otra parte, para dar significado a la diferencia de sucesos el apartado que plantean con su resolución es el siguiente:

Figura 6
Resolución del apartado a) de Alberto y David.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya visitado el MARQ y no el MUA?
¿$P(M \cap U^c)$?
$M \cup U = P(M \cap U^c) + (M \cap U) + (M^c \cap U)$
$P(M \cup U) = P(M \cap U^c) + P(M \cap U) + P(M^c \cap U)$.
De aquí sacamos que:
$P(M) = P(M \cap U^c) + P(M \cap U)$
Y despejando de aquí $P(M \cap U^c)$ *obtenemos:*
$P(M \cap U^c) = P(M) - P(M \cap U) = 0{,}4 - 0{,}15 = 0{,}25$

El planteamiento y su resolución son correctos. Alberto y David parece que *reconocen* la diferencia de sucesos con el suceso $M \cap U^c$. Es decir, con que se visite un museo y el otro no. En esta forma de proceder podemos identificar la acción *building-with* cuando en la resolución expresan la unión de los dos sucesos $M \cap U$ como unión de otros tres (aunque han puesto el signo más en vez del signo de la unión) y obtienen una relación adecuada para resolver el problema. Estos estudiantes comprenden bien los sucesos que utilizan y usan bien las relaciones matemáticas, pero ¿podemos identificar la acción de *construcción* en este proceso de plantear y resolver el problema?

En la entrevista se les pregunta por qué el apartado a) que han enunciado corresponde a una diferencia de sucesos y entonces dibujan un diagrama de Venn, muestran la diferencia e interpretan su significado: (*Alberto*) *Si dibujamos dos sucesos cualesquiera* (dibuja dos sucesos) *esto es A y no B, esto es la intersección A y B. Y esto es no A y B* (señala cada sección de forma adecuada). (*David*) *Es que se realiza un suceso y no se puede realizar el otro, más o menos*. Corroboran en la entrevista que *reconocen* la diferencia de sucesos con «A y no B» es decir, «se realiza un suceso y no se puede realizar el otro» y también hacen un uso adecuado de las leyes de De Morgan:

Figura 7

Resolución del apartado b) de Alberto y David.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya visitado ninguno de los dos? *¿$P(M^c \cap U^c)$?* *Leyes de De Morgan:* $P(M \cup U)^c = P(M^c \cap U^c)$ $P(M \cap U)^c = P(M^c \cup U^c)$ $P(M \cup U) = P(M) + P(U) - P(M \cap U) = 0{,}4 + 0{,}6 - 0{,}15 = 0{,}85$ $P(M \cup U)^c = 1 - P(M \cup U) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$

Identifican el suceso «no ha visitado ninguno de los dos museos» con $(M^c \cap U^c)$ según se desprende de la tarea, pero además en la entrevista demuestran comprender bien los significados de parejas de sucesos con operaciones con uniones, intersecciones y sucesos contrarios:

Alberto: $(M \cap U)^c$ sería lo contrario de visitar los dos museos

$(M^c \cup U^c)$ es que al menos no haya visitado uno de los dos

lo que nos dice que además de reconocer diversas formas de expresar leyes de De Morgan y entender bien su significado, usan y relacionan una de las leyes de De Morgan con el suceso contrario de la unión de dos sucesos, lo que podemos interpretar como una manifestación de una acción de *building-with*, estar relacionando y adaptando un conocimiento previo a una nueva situación.

En el tercer apartado plantean una probabilidad condicionada de forma muy sencilla.

Figura 8

Resolución del apartado c) de Alberto y David.

c) ¿Cuál es la probabilidad de visitar el MARQ sabiendo que ya han visitado el MUA? *¿$P(M / U)$?* $P(M / U) = P(M \cap U) / P(U) = 0{,}15 / 0{,}6 = 0{,}25$

Alberto y David comprenden el significado de la probabilidad condicionada y obtienen debidamente su resultado, por lo que manifiestan *reconocer* la probabilidad condicionada cuando identifican bien la $P(M / U)$ con el enunciado que han realizado y usan adecuadamente el concepto para su cálculo.

Por último, han planteado un enunciado de la probabilidad total y de Bayes, en principio correctamente, pero al no ser incompatibles los sucesos que forman las hipótesis del problema su aplicación no es acertada. Sin embargo, han utilizado adecuadamente el algoritmo para su resolución, lo que nos pone de manifiesto que a falta de la incompatibilidad de los sucesos iniciales *reconocen* la forma que debe tener el enunciado de un problema para poder calcular la probabilidad total y aplicar el teorema de Bayes. De la misma forma han identificado y usado correctamente las probabilidades necesarias para utilizar el teorema de Bayes.

Figura 9

Resolución del apartado d) de Alberto y David.

d) Un alumno se pierde durante la excursión y al preguntarle en recepción dice que estudia empresariales, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el museo MUA? *¿$P(U / C)$?* *Probabilidad total:* $P(C) = P(M) \cdot P(C/M) + P(U) \cdot P(C/U) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}42$ Teorema de Bayes: $P(U/C) = P(M) \cdot P(C/M) + P(U) \cdot P(C/U) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 / 0{,}42 = 0{,}7143$

Alberto y David plantean la probabilidad de que un estudiante del que sabemos que estudia Ciencias Empresariales se encuentre en el MUA y que tal como enuncian el problema el estudiante o está en el MUA o está en el MARQ (Fig. 9). Esto se cumple ya que supuestamente no puede estar en los dos museos a la vez, con lo que la probabilidad total y el teorema de Bayes estarían adecuadamente planteados, pero esto que es aparentemente correcto entra en contradicción, como hemos dicho, con asignar al principio del problema una probabilidad a «visitar los dos museos» aunque ellos entiendan este suceso de forma secuencial.

Alberto y David han planteado y resuelto un problema de forma que manifiestan una buena comprensión de los conceptos involucrados en la tarea, y han usado bien las relaciones matemáticas necesarias para su resolución de forma que *reconocen* bien los conceptos y contenidos matemáticos manifestándose además la acción de *building-with* al relacionar distintos conceptos de forma conveniente para la resolución de los diversos apartados del problema.

Con la forma de proceder de Alberto y David, las acciones de *reconocimiento* y *building-with* han aparecido claramente. Si observamos el planteamiento y la resolución del apartado d) de forma compartimentada, ambas cosas parecen ser adecuadas y sólo el análisis de los pormenores del problema (errónea interpretación de los datos iniciales) conduce a darnos cuenta de su incorrección, de forma que tenemos respuestas aparentemente correctas, tal como acabamos de ver, que posiblemente esconden lagunas de conocimiento (Ron et al., 2006). Por ello, identificamos una acción de *construcción parcial* sólo en el planteamiento del teorema de Bayes, ya que Alberto y David han ideado un enunciado para poder aplicar el teorema de Bayes venciendo la dificultad de tener ya en cuenta las hipótesis iniciales del problema y la novedad que supone el «plantear» el teorema de Bayes.

Caso de Laura y Ana

Hicieron juntas la tarea, aunque primero la vieron individualmente, y proporcionan un enunciado. Estas estudiantes, tras dar unos datos iniciales, van planteando y resolviendo cada uno de los apartados del problema.

Laura y Ana enuncian el problema asignando probabilidades a «visitar el museo MARQ» y «visitar el museo MUA» y van resolviendo conforme van planteando cada una de las preguntas. Formalmente, los datos iniciales que aparecen son: $P(U)$, $P(M)$ y $P(M/U)$.

Cuando en el enunciado dicen *por el contrario* al dar la probabilidad de visitar el MUA, puede producir alguna confusión ya que parece que quieren decir que si no van a un museo van al otro. Esto se trata en la entrevista.

Figura 10
Enunciado del problema de Laura y Ana.

Un centro comercial tiene en su interior 2 prestigiosos museos, el museo MARQ y el museo MUA. La probabilidad de que los visitantes se decanten por acudir al museo MARQ es de 0,05 y la probabilidad de que, por el contrario, se decidan por el museo MUA es de 0,15. Sea:
M: Visitar el museo MARQ
U: Visitar el museo MUA

1. Sabiendo que la probabilidad de visitar MUA, habiendo visitado antes MARQ, es de 0,2. ¿Cuál es la probabilidad de que se visite MARQ y MUA a la vez mediante un novedoso y virtual sistema de visita?
$P(M \cap U) = P(M) \cdot P(U / M) = 0{,}15 \cdot 0{,}2 = 0{,}03$
2. Si elegimos al azar un visitante, ¿cuál es la probabilidad de que visite MUA y no MARQ?
$P(U \cap M^c) = P(U) - P(U \cap M) = P(U) - (P(M) \cdot P(U/M)) = 0{,}05 - 0{,}03 = 0{,}02$
3. ¿Cuál es la probabilidad de que al visitar el centro comercial no se visite ninguno de los dos museos disponibles?
$P(M^c \cap U^c) = 1 - P(M^c \cap U^c)^c = 1 - P((M^c)^c \cup (U^c)^c) = 1 - P(M \cup U) = 1 - P(M) - P(U) = 1 - 0{,}05 - 0{,}15 = 0{,}08$

4. Sabiendo que ambos museos son femeninos, y que son visitados por mujeres y niñas en un 60% y 40% respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que, elegida al azar una de las visitantes, sea mujer si no es morena, sabiendo que el 30% de las mujeres son morenas y la mitad de las niñas también?
A: «Ser mujer la visitante» $P(A) = 0{,}6$ *B: «Ser niña la visitante»* $P(B) = 0{,}4$ *Mo: «Ser morena»*
$P(Mo) = P(A) \cdot P(Mo/A) + P(B) \cdot P(Mo/B) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}48$
$P(Mo^c) = 1 - P(Mo) = 1 - 0{,}48 = 0{,}52$
$P(A \cap Mo^c) = P(A) \cdot P(Mo^c/A) = P(A)(1 - P(Mo/A) = 0{,}6 \cdot (1 - 0{,}3) = 0{,}42$
$P(A/Mo^c) = P(A \cap Mo^c) / P(Mo^c) = 0{,}42 / 0{,}52 = 0{,}81$

Figura 11
Fragmento 1 entrevista Laura y Ana.

1. E: Cuando decís la probabilidad de que «por el contrario…» ¿qué queréis decir con esto?
2. Laura: Probabilidad de que no vayan al MARQ y...
3. Ana: Probabilidad de que vayan al MUA, o sea, que si no van al MARQ vayan al MUA.
4. E: Pero aquí pone, por decirlo de otra forma, que el cinco por ciento va al MARQ y el quince por ciento va al MUA.
5. Las dos: Sí.
6. E: ¿Y nadie va a los dos museos?
7. Laura: Eso viene luego.
8. Ana: Eso vendrá luego. En otro apartado pone los dos a la vez.
9. E: Pero tal como está escrito, ¿cuál es la probabilidad que preguntáis en el primer apartado, la de que se visiten los dos museos a la vez?
10. Laura: Cero.
11. Ana: Según lo que hemos planteado al principio, cero.
12. Laura: Nosotras planteamos el problema y luego, como había que poner aquí una intersección…
13. E: Entonces, ¿como mejoraríamos el enunciado?
14. Laura: Pues así como está y ...
15. Ana: Quitando «por el contrario».

Laura y Ana, durante la entrevista, se dan cuenta (epígrafes 9 a 15), que el escribir *por el contrario* contradice resultados posteriores, lo que permite introducir modificaciones, los visitantes pueden ir a uno de los dos museos o a los dos, con lo que la primera cuestión que plantean tiene ahora sentido: *¿Cuál es la probabilidad de que se visite MARQ y MUA a la vez mediante un novedoso y virtual sistema de visita?* Parece que tal como hacen la pregunta, Laura y Ana manifiestan *reconocer* la intersección de sucesos con la realización simultánea de ambos sucesos y pretenden identificarla con el suceso «visitar MARQ *y* MUA *a la vez*». De ahí que propongan una forma virtual de hacerlo. Aunque luego obtienen la probabilidad de ir a un museo y luego al otro, en dos etapas. *Reconocen* bien la probabilidad condicionada cuando enuncian el primer apartado del problema y cuando en la entrevista afirman, por $P(M/U)$, que: *una vez que han visitado el MUA, hay una probabilidad de un veinte por ciento de visitar el MARQ*.

Reconocen también la diferencia de sucesos cuando hablan de visitar el MUA y no visitar el MARQ. También identifican el no visitar alguno de los dos museos con el suceso $M^c \cap U^c$. En la obtención de esta última probabilidad cometen un error al no tener en cuenta la probabilidad de la intersección de los dos sucesos. Por un lado, parece que son coherentes con lo que en principio enunciaban pero, por otro lado, no lo son ya que han obtenido que $P(M \cap U) = 0{,}03$. Es decir, al considerar al principio el «*por el contrario*» que ya hemos comentado, la probabilidad de la intersección de los dos sucesos sería cero, $P(M \cap U) = 0$, y habrían operado bien en el apartado 3 del problema, pero esto contradice lo obtenido en el apartado 1, $P(M \cap U) = 0{,}03$.

Hasta aquí las estudiantes, al igual que los del grupo anterior, han enunciado un problema y han planteado una solución y lo han resuelto con una incorrección en la interpretación de los datos, tal como acabamos de comentar, pero con una adecuada comprensión de los conceptos que involucran en el problema y utilizando bien las relaciones matemáticas. En este sentido, Laura y Ana han reconocido bien los conceptos de probabilidad condicionada y diferencia de sucesos y han sabido conectar los enunciados con los planteamientos adecuados. Lo mismo han hecho con una de las leyes de De Morgan utilizando el suceso $M^c \cap U^c$ para plantear la resolución de no visitar alguno de los dos museos. Además, también es posible identificar acciones de *building-with* cuando relacionan estos sucesos con sus contrarios y utilizan las probabilidades de la unión e intersección de sucesos. Estas acciones suponen mucho más que *reconocer* elementos estructurales pero, a la vez, no se está construyendo una nueva estructura más elaborada que las previamente disponibles. Pero como en el caso anterior, no identificamos acción de *construcción* en la manera en la que usan los conceptos y en cómo justifican lo que están haciendo, ya que hasta el momento no hay indicios de aspectos novedosos en el planteamiento que hacen.

Ahora bien, si seguimos analizando la resolución de la tarea, vemos que para poner en juego el teorema de Bayes han enunciado un problema donde el protagonismo ya no está en los museos sino en ser mujer o ser niña la que los visita (apartado 4, figura 10). Cuando se les pregunta cómo han pensado el enunciado del problema en el caso del teorema de Bayes, Laura y Ana dicen que han tenido que reconstruir el problema para poder aplicar el teorema, han reorganizado los datos que tenían y afirman, *...para hacer Bayes, teníamos que poner otros sucesos y, pensar, pensar, y tuvimos que poner datos nuevos y casi nos sale un problema distinto,* y luego prosiguen*: la pregunta que hemos hecho no va en relación con museos…*

Actuando de esta manera están desarrollando una actividad de planteamiento de un problema y no han pasado a la resolución y entendemos que la actividad mental inherente al proceso de abstracción se está manifestando aquí cuando están razonando sobre cómo enunciar el problema para poder plantearlo convenientemente. De esta manera construyen cuando, junto a lo expresado, están reestructurando el conocimiento de que disponen para construir un enunciado. No debemos olvidar que los estudiantes están instruidos en resolver problemas más o menos convencionales en relación con la probabilidad total y el teorema de Bayes, pero no han recibido enseñanza alguna relativa a cómo enunciar problemas.

Laura y Ana reorganizaron su conocimiento para dar respuesta a la necesidad de encontrar un sistema completo de sucesos que les permitieran enunciar correctamente el problema. Estas estudiantes, para construir una solución viable al problema, han introducido sucesos nuevos a los que, además, les exigen que sean incompatibles y que sus probabilidades sumen la unidad: Laura indica: *No, tienen que sumar cien,* y Ana añade: *Y además, si es niña no es mujer y al revés*, ya que *reconocen* que esas características son inherentes a un «problema de Bayes». En este caso la «reorganización» de su conocimiento en una nueva estructura ha implicado el establecimiento de conexiones matemáticas e incluye una estrategia para plantear el problema. Estamos ante un caso en que la acción epistémica construcción se manifiesta durante la entrevista cuando se analiza una parte de la tarea, en concreto, en el planteamiento del *teorema de Bayes*.

Si observamos el conjunto de la tarea, podemos decir que los enunciados que estos estudiantes han efectuado para poner de manifiesto los conceptos de la ley del producto, las leyes de De Morgan y la diferencia de sucesos son correctos, pero los procedimientos de resolución que se derivan son evidentes. Si bien, el planteamiento que han hecho del apartado del teorema de Bayes, consideramos que requiere comprender el procedimiento y las relaciones matemáticas. Laura y Ana han demostrado una adecuada comprensión de los conceptos y de los procedimientos matemáticos que utilizan. En este sentido el caso de Laura y Ana es un ejemplo de *construcción del teorema de Bayes* en el contexto del planteamiento de problemas.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La acción epistémica *construcción* del proceso de abstracción del teorema de Bayes ocurre de tres formas distintas que hemos descrito a través de los tres casos estudiados:

Por una parte, Carlos y Sonia han identificado los conceptos y sus características y reconocido las situaciones que se dan en el problema; han buscado y obtenido a partir de sus conocimientos una solución para el problema combinando distintos elementos. A partir de estructuras más simples han ido construyendo todo el planteamiento del problema. Según Dreyfus y otros (2001), «*La acción de construcción puede ser bastante larga y contener segmentos más pequeños que ellos mismos son acciones de construcción»* (p. 382). En este caso, la acción de construcción ocurre a través de todo el proceso mostrando además que las diferentes acciones epistémicas están anidadas en la acción global de la construcción. Desde esta perspectiva, la actividad de los dos estudiantes en el planteamiento y resolución del problema les ha llevado a una perspectiva diferente del conocimiento adquirido con anterioridad e incluye la reconstrucción de la ley de las probabilidades compuestas y el teorema de la probabilidad total y Bayes. Si bien los estudiantes habían resuelto con anterioridad problemas donde habían aplicado el teorema de Bayes, era la primera vez que se enfrentaban al reto de plantear un problema donde interviniera este teorema. En este sentido, el caso de Sonia y Carlos nos proporciona información relevante sobre la manera de proceder la abstracción matemática de los conceptos implicados en el *planteamiento de problemas*.

A diferencia del caso de Sonia y Carlos, Alberto y David han planteado su problema de forma muy distinta. Formulan el problema de manera fragmentada. Han ido enunciando los apartados del problema considerando los resultados que tienen que obtener uno a uno, de forma aislada, utilizando como datos iniciales los sucesos que aportan. Los «constructos» de conocimiento de los estudiantes están aislados, no se relacionan y en principio no perciben la incompatibilidad de los sucesos iniciales. Ésta permanece escondida no sólo para un observador externo sino también para Alberto y David que no experimentan necesidad alguna de una construcción mayor. El caso de Alberto y David es un ejemplo de una situación en la que la solución correcta esconde lagunas de conocimiento y que los «constructos» de conocimiento generados fueron parciales (Ron et al., 2006)

En otros grupos de estudiantes las acciones de *construcción* se han puesto de manifiesto durante la entrevista realizada, como en el caso de Laura y Ana. Estos grupos al igual que, Alberto y David, y a diferencia del primer caso, han enunciado un problema en principio estándar. Comienzan a enunciar el problema asignando probabilidades a los sucesos que se aportan en la tarea, «visitar el museo MARQ» y «visitar el museo MUA» y van resolviendo conforme van planteando cada una de las preguntas. La acción de *construcción* no se ha manifestado salvo en el momento que, para involucrar el teorema de Bayes en el enunciado del problema, han tenido que modificar su planteamiento inicial y poner en juego nuevos sucesos que permitieran su adecuada utilización.

A la luz de los resultados obtenidos, consideramos que planteamientos no estándares elaborados por los estudiantes son indicios de construcción de conocimiento matemático. Por ello, un *planteamiento no estándar* del problema formulado es un indicador de la existencia de construcción de conocimiento y por tanto de aprendizaje. En el caso de la tarea propuesta, consideramos que un problema es estándar o típico si los planteamientos son inmediatos y si las hipótesis de Bayes se hacen con los sucesos iniciales, en nuestro caso «visitar el museo MARQ» y «visitar el museo MUA».

Los resultados de esta investigación indican que la tarea de planteamiento de problemas es un medio que posibilita la reconstrucción de conocimiento matemático. En nuestra investigación nos ha servido como contexto para la construcción de procesos de abstracción relacionados con la ley de las probabilidades compuestas y los teoremas de la probabilidad total y de Bayes. Además, hemos podido describir cómo la acción de *construcción* incorpora las acciones de *reconocimiento* y de *building-with*, es decir, se presentan de forma anidada, ya que la construcción del teorema de Bayes, como hemos visto, ha requerido que los estudiantes reconocieran los sucesos que forman las hipótesis del problema y sus características y han debido asimismo considerar otro suceso relacionado con estos sucesos y calcular las probabilidades necesarias para relacionarlas de forma adecuada y desarrollar el teorema: «*Los estudiantes para construir han tenido que reconocer estructuras, relacionarlas y reorganizar su conocimiento*» (Hershkowitz et al., 2001).

Por otra parte, las características del contexto de los estudiantes que han participado en el estudio no ha posibilitado realizar el estudio a medio o largo plazo y, por tanto no ha sido posible indagar sobre la *consolidación* del conocimiento que se ha empezado a construir. Consideramos que ésta podría ser una línea de investigación futura en este campo de investigación.

Finalmente, creemos que nuestros resultados avalan la idea de considerar el planteamiento de problemas no como un contexto de aplicación de lo ya conocido (en el sentido de concreción a una situación del concepto) sino que el *proceso* desencadenado ante la tarea de plantear problemas permite generar procesos de abstracción del concepto. De esta manera, el contexto de «formular un problema» es un contexto de aprendizaje por lo que supone de desafío matemático para el estudiante. Estamos convencidos, también, de lo útil que puede suponer nuevas investigaciones sobre la resolución de problemas relativos al teorema de Bayes en estudiantes de los primeros cursos de universidad y del interés de complementar y mejorar esta información con aportaciones sobre cómo plantean problemas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BATANERO, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Grupo de Investigación en Educación Estadística. Universidad Granada. <http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones.htm>.

BATANERO, C. (2008). *Presente y futuro de la Educación Estadística*. Consultado el 6 de junio de 2008, en <http://www.caib.es/ibae/esdeveniment/jornades_10_01/doc/Bataneromallorca.doc>.

CAI, J. (2003). Singaporean students' mathematical thinking in problem solving and problem posing: an exploratory study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Tecnology*, 34(5), pp. 719-737.

CASTRO, E. (2008). Resolución de Problemas. Ideas, tendencias e influencias en España, en Luengo, R.; Gómez, B.; Camacho, M. y Blanco, L.J. (eds.). *Investigación en Educación Matemática XII*, pp. 113-140. Badajoz: SEIEM.

DÍAZ, C. y DE LA FUENTE, I. (2006). Dificultades en la resolución de problemas que involucran el teorema de Bayes: Un estudio exploratorio en estudiantes españoles de Psicología. *Educación Matemática*, 18(2), pp. 75-94.

DREYFUS, T. (2007). Process of abstraction in context the nested epistemic actions model. Recuperado el 25 de octubre de 2007, de <http://escalate.org.il/construction_knowledge/papers/dreyfus.pdf>.

DREYFUS, T. y GRAY, E. (2002). Abstraction: Theories about the emergence of knowledge structures, en Cockburn, A.D. y Nardi, E. (eds.). *Proceedings of the 26th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 1, pp. 113-138. Norwich: PME.

DREYFUS, T. y KIDRON, I. (2006). Interacting parallel constructions: A solitary learner and the bifurcation diagram. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 26(3), pp. 295-336.

DREYFUS, T., HADAS, N., HERSHKOWITZ, R. y SCHWARZ, B. (2006). Mechanisms for consolidating knowledge constructs, en Novotná, J. et al. (eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group the Psychology of Mathematics Education*, 2, pp. 465-472. Prague: PME.

DREYFUS, T., HERSHKOWITZ, R. y SCHWARZ, B. (2001). The construction of abstract knowledge in interaction, en van den Heuvel-Panhuizen, M. (ed.). *Proceedings 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* pp. 377-384. PME.

HERSHKOWITZ, R., HADAS, N., DREYFUS, T. y SCHWARZ, B. (2007). Abstracting Processes, from Individuals' Constructing of Knowledge to a Group's «Shared Knowledge». *Mathematics Education Research Journal,* 19(2), pp. 41-68.

HERSHKOWITZ, R., SCHWARZ, B. y DREYFUS, T. (2001). Abstraction in Context: Epistemic Actions. *Journal for Research in Mathematical Education*, 32(2), pp. 195-222.

JONES, G.A. y THORTON, C.A. (2005). An overview of research into the teaching and learning of probability, en Jones, G.A. (ed.). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, pp. 65-92. Nueva York: Springer.

KYDRON, I. (2008). Abstraction and consolidation of the limit procept by means of instrumented schemes: the complementary role of three of different frameworks. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), pp. 197-216.

MONAGHAN, J. y OZMANTAR, M.F. (2006). Abstraction and consolidation. *Educational Studies in Mathematics,* 62(3), pp. 233-258.

OZMANTAR, M.F. y MONAGHAN, J. (2006). Abstraction, scaffolding and emergent goals, en Novotná, J. et. al. (eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group the Psychology of Mathematics Education*, 4, pp. 305-312. Prague: PME.

POSADAS, J.A. (2008). Estudio de la comprensión de contenidos de probabilidad de estudiantes universitarios. Tesis Doctoral. Alicante: Universidad de Alicante.

RON, G., DREYFUS, T. y HERSHKOWITZ, R. (2006). Partial Knowledge Constructs for the Probability Area Model, en Novotná, J. et al. (eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 4, pp. 449-456. Prague: PME.

SCHWARZ, B., DREYFUS, T., HADAS, N. y HERSHKOWITZ, R. (2004). Teacher guidance of knowledge construction, en Høines, M.J. y Fuglestad, A.B. (eds.). *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 4, pp.169-176.

SILVER, E.A. y CAI, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 27, pp. 521-539.

TABACH, M. y HERSHKOWITZ, R. (2002). Construction of knowledge and its consolidations: a case study from the early-algebra classroom, en Cockburn, A.D. y Nardi, E. (eds.). *Proceedings 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* pp. 265-272. PME.

TABACH, M., HERSHKOWITZ, R. y SCHWARZ, B. (2006). Constructing and consolidating of algebraic knowledge within dyadic processes: a case study. *Educational Studies in Mathematics,* 63(3), pp. 235-258.

WATSON, J. (2005). The probabilistic reasoning of middle school students, en Jones, G.A. (ed.). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, pp. 45-69. Nueva York: Springer.

[Artículo recibido en marzo de 2008 y aceptado en diciembre de 2008]

Problem posing and the contruction of Bayes' theorem

Penalva Martínez, M. Carmen[1]**; Posadas García, José Adolfo**[2]
[1] Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Facultad de Educación. Universidad de Alicante
[2] Departamento de Fundamentos del Análisis Económico. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Alicante
carmina.penalva@ua.es
posadas@merlin.fae.ua.es

Summary

In this study we present problem-posing in a learning context which made it possible to investigate mathematical abstraction processes regarding questions of probability in Business Studies students at the University of Alicante, when working in groups to carry out mathematical tasks. In the epistemic actions model, abstraction is seen as the vertical reorganization of previously-constructed mathematics into a new mathematical structure within a specific context.

The in-context abstraction model dynamically brings together three nested, epistemic actions. Recognizing actions nested into the other two, while building-with actions nested into those of constructing, but constructing refers to a new construct which is different from those involved in recognizing and building-with actions; the constructing action is a first step in abstraction. On the other hand, research into the cognitive processes through which university students construct the meanings of conditional probability show that these processes are complex and far from linear in nature.

In the context of this research, students were asked to carry out two tasks in groups: posing a problem and solving a problem. A partially structured interview regarding the tasks was later carried out with each group. Our investigation into abstraction was based on the students' answers to the tasks and the data obtained from the interviews. The data were analyzed in two phases. The aim of the first phase was to identify the use of the mathematical concepts involved in the tasks and the relationships established between them. In the second phase our attention was focused on the epistemic actions.

The results show that the constructing action manifested itself in three different ways during the problem-posing task. The behaviour of one of the groups revealed that the constructing action took place throughout the whole process, and the different epistemic actions were nested in the global constructing action. This case provided us with relevant information regarding the way in which the mathematical abstraction of the concepts involved in problem-posing took place.

Other groups of students posed the problem in a fragmented manner. The correct solution concealed gaps in the students' knowledge, and the knowledge 'constructs' generated were incomplete.

In some groups, the constructing actions became evident during the interview. These groups stated an apparently standard problem. The constructing action was not apparent until, when attempting to include Bayes' theorem in the statement of the problem, they found themselves obliged to modify their original statement and make use of new events to make the statement viable.

The results of this research show that a non-standard statement of the problem posed is an indicator of the existence of knowledge-building and hence of learning. We have also been able to describe how the constructing action incorporates both the recognizing and the building-with actions, which are present in nested form, since the construction of Bayes' theorem, as we have seen, obliged the students to recognize the phenomena which form the hypothesis of the problem and its characteristics, and similarly had to consider another phenomenon related to the problem-situation and to calculate the necessary probabilities appropriately and expound the theorem. In other words, «if they solve a non-standard problem, they might be faced with an obstacle that causes them to construct by vertically reorganizing their knowledge to overcome the obstacle».

On the other hand, the nature of the context in which the students participated in this study prevented us from carrying out a mid-term or long-term investigation, which in turn made it impossible to study the consolidation of the knowledge they had started to build. We believe that this might be a fruitful line of future research in this field.

Finally, we believe that our results reinforce the idea that problem-posing should not be considered as a context of the application of previous knowledge (in the sense of the application of a concept to a situation), but rather as the way in which the process initiated by the problem-posing task permits the generation of abstraction processes related to the probability of independent events and total-probability and Bayes' theorems. Therefore, the problem-posing context becomes a learning context due to the mathematical challenge it presents to the student.