LA INFLUENCIA CONJUNTA DEL USO DE GEOGEBRA Y LÁPIZ Y PAPEL EN LA ADQUISICIÓN DE COMPETENCIAS DEL ALUMNADO

Iranzo, Nuria y Fortuny, Josep Maria
Departament de Didàctica de les Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona
Nuria.Iranzo@uab.cat
JosepMaria.Fortuny@uab.cat

Resumen. Este estudio forma parte de una investigación[1] en curso sobre la interpretación del comportamiento de los estudiantes de Bachillerato Tecnológico en la resolución de problemas de geometría plana, mediante el análisis de la relación entre el uso de GeoGebra[2], la resolución en lápiz y papel y el pensamiento geométrico. El marco teórico se basa principalmente en la teoría de la instrumentación de Rabardel (2001). Proponemos un análisis de los grados de adquisición de los procesos de instrumentación e instrumentalización de los alumnos, las estrategias de resolución en ambos medios y las interacciones entre los distintos agentes involucrados. Pretendemos buscar una relación entre las concepciones de los alumnos y las técnicas que utilizan en las estrategias de resolución de problemas.

Palabras clave. Geometría Analítica plana, resolución de problemas, Geometría dinámica.

Co-influence of GeoGebra and paper and pencil use on the students'competences acquisition

Summary. This study is part of ongoing research on the interpretation of students' behaviors when solving plane geometry problems by analyzing relationships among DGS (GeoGebra) use, paper-and-pencil work and geometrical thinking. Our theoretical framework is based on Rabardel's (2001) instrumental approach to tool use. We propose an analysis of the acquisition degrees of the instrumentation and instrumentalization processes, the resolution strategies in both environments and the interactions between the different agents We seek relationships between students' thinking and their use of techniques by exploring the influence of certain techniques on the students' resolution strategies.

Keywords. Plane Analytic Geometry, Problem-solving, Dynamic Geometry.

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Este estudio se enmarca en las investigaciones sobre la integración de las nuevas tecnologías en la enseñanza secundaria, en particular el uso de software de Geometría dinámica (SGD) en el contexto de la resolución de problemas de Geometría Analítica (problemas tipo de selectividad en el ámbito español). Conocidos programas, como por ejemplo Cabri Géomètre II (www.Cabri.com) y Cinderella (www.cinderella.de), facilitan la experimentación con Geometría Sintética. Escogemos trabajar con GeoGebra (www.geogebra.org) ya que es un software de código abierto que integra de forma dinámica Geometría Sintética y Analítica y la expresión algebraica de objetos gráficos (Hohenwarter y Preiner, 2007). También porque es un software intuitivo que no requiere estrategias de uso avanzadas para utilizarlo en el contexto de esta investigación. En este estudio se analiza la relación entre la resolución de problemas de Geometría Analítica con lápiz y papel y con GeoGebra. Una tarea resuelta usando software de geometría dinámica podría requerir estrategias diferentes que las que requiere la misma tarea resuelta con lápiz y papel y también tiene repercusión en el feedback que el alumno recibe (Laborde, 1992). Nos planteamos las siguientes cuestiones:

– ¿Qué relación hay entre lápiz y papel y el trabajo con GeoGebra? ¿Cómo afecta su uso a las estrategias de resolución y la comprensión de conceptos? ¿Qué aporta el uso de GeoGebra a los alumnos?

Analizamos y comparamos los procesos de resolución en ambos medios, así como las interacciones alumno-alumno y alumno-GeoGebra basándonos en la teoría de la instrumentación de Rabardel (2001). Los objetivos de esta investigación son:

– Caracterizar las estrategias de resolución de los alumnos en ambos medios.

– Analizar los procesos de instrumentación e instrumentalización para esbozar diferentes tipologías de alumnos.

– Explorar la influencia conjunta del uso de GeoGebra y del lápiz y papel en la adquisición de conocimiento, visualización y pensamiento estratégico en el alumno.

El interés del tema es ofrecer conocimiento didáctico y didáctico-profesional para mejorar la adquisición de competencias matemáticas que potencia el entorno.

MARCO TEÓRICO

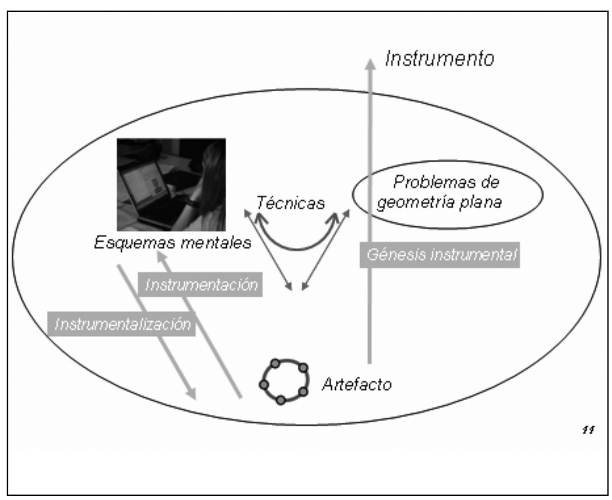
Una parte importante del marco teórico de esta investigación está basada en la teoría de la instrumentación de Rabardel (2001) que diferencia entre el artefacto (GeoGebra en este caso) y el instrumento. El instrumento es la conjunción del artefacto y las habilidades cognitivas necesarias para construirlo. El proceso de transformación de un artefacto en un instrumento se llama génesis instrumental. Según Rabardel (2001), el software restringe no sólo la manera de actuar, sino también la manera de pensar del usuario. Por tanto, el alumno tiene que movilizar conscientemente, durante la génesis instrumental, estructuras de control sobre el conocimiento geométrico implicado (el artefacto se transforma en instrumento para el usuario). Los estudiantes desarrollan esquemas mentales en los que sus propios conceptos geométricos y las técnicas empleadas están interrelacionadas. El proceso de génesis instrumental tiene dos direcciones. Por un lado, las características del software influencian las estrategias de resolución y las concepciones del estudiante (proceso de instrumentación). Por otro lado, el proceso de instrumentalización, dirigido del estudiante al software, lleva a una internalización del uso del artefacto. Así, un mismo artefacto puede ser instrumentalizado de distintas formas en función del alumno y del problema propuesto (White, 2008). Caracterizamos a continuación los procesos de instrumentación e instrumentalización.

– Instrumentación: Es el proceso mediante el cual el artefacto influye en el alumno. Las posibilidades y restricciones del software (GeoGebra) influyen en las estrategias de resolución de problemas de los estudiantes, así como en las correspondientes concepciones emergentes. Por ejemplo, el software de geometría dinámica permite construir objetos y desplazar una parte de éstos. Si el objeto ha sido construido respetando sus propiedades geométricas, se pueden observar invariantes geométricos al desplazar la figura. Sin embargo, el hecho de poder desplazar objetos para observar elementos invariantes es una posibilidad del software siempre y cuando el alumno sea capaz de entender este proceso. En la instrumentación encontramos el desarrollo de esquemas mentales que proporcionan un medio predecible e iterable de integración de artefacto y acción (Verillon y Rabardel, 1995).

– Instrumentalización: El conocimiento del alumno y su forma de trabajar guía la forma en que utiliza el artefacto. El proceso de instrumentalización depende del estudiante y es un proceso que lleva a una internalización del uso del artefacto (un artefacto no varía pero puede ser instrumentalizado de distintas formas). Este proceso puede dar lugar a un enriquecimiento del artefacto (Trouche, 2005).

El artefacto se transforma en instrumento durante el proceso bidireccional de génesis instrumental. El alumno construye esquemas mentales, asimilando esquemas ya existentes o produciendo nuevos esquemas para llevar a cabo la tarea propuesta. Como cita White (2008), «instrumental genesis both make artifact meaningful in the context of an activity, and provides a means by which users make meaning of that activity» (p. 3). En la figura 1 podemos ver un esquema del proceso de génesis instrumental.

Figura 1
Instrumento y artefacto (Drijvers, 2003).



En nuestro trabajo de investigación definimos grados de adquisición de habilidades técnicas concerniendo los procesos de instrumentación e instrumentalización en el contexto de los problemas propuestos (Tablas 1 y 2).

Tabla 1
Grados de instrumentación.

Alto	Transformación de comandos en acciones geométricas.
Medio	Uso del artefacto de acuerdo con un objetivo (por ejemplo, uso del arrastre de test para validar una figura).
Bajo	Uso de pocos comandos para construcciones geométricas elementales. Dificultades técnicas para aplicar comandos (sintaxis, orden).

Tabla 2
Grados de instrumentalización.

Alto	Coordinan el uso de la ventana geométrica y algebraica y utilizan conocimiento geométrico. Internalización de los comandos (modo desplazar, uso de macros, etc.).
Medio	Coordinan el uso de la ventana algebraica y geométrica. Aparición de inferencias figurales.
Bajo	Los estudiantes se basan principalmente en propiedades de medida y no consideran propiedades geométricas.

En el análisis de las producciones de los alumnos con GeoGebra, consideramos las distintas finalidades que un estudiante puede tener cuando utiliza acciones de arrastre. En las investigaciones sobre el uso del modo de desplazar, Arzarello y otros (2002) describen los siguientes tipos de arrastre:

– Arrastre de test: se utiliza el arrastre de test para comprobar si la figura construida conserva las condiciones matemáticas del problema. Se puede considerar como un instrumento de validación para la solución de un problema de construcción (Hoyles y Noss, 1994). Por ejemplo, después de construir un rectángulo usando segmentos horizontales y verticales, podemos observar que la figura se transforma en un cuadrilátero general al desplazar uno de los vértices.

– Arrastre errático: Una vez construida la figura, se arrastra algún elemento de la figura, sin ninguna idea previa, para buscar invariantes matemáticos. Por ejemplo, en el problema de la construcción de la recta de Euler, los alumnos desplazan los vértices del triángulo de forma aleatoria, buscando invariantes (relación entre las distancias entre el baricentro, el circuncentro y el ortocentro).

– Arrastre guiado: Se arrastra un objeto para obtener una figura particular. Por ejemplo, en el problema de Varignon los alumnos construyen el cuadrilátero de Varignon (paralelogramo) formado al unir los puntos medios de un cuadrilátero general. A continuación desplazan los vértices del cuadrilátero inicial (arrastre guiado) para transformar el cuadrilátero de Varignon en un rombo.

– Arrastre sobre un lugar geométrico oculto: se arrastra un objeto con el fin de encontrar el recorrido (lugar geométrico oculto) de un punto particular de la figura. Esta forma de arrastre es especialmente útil para trabajar problemas de lugares geométricos de forma experimental. El alumno debe justificar a continuación la construcción.

También utilizamos, en el análisis de las producciones de los alumnos, los términos *figura* y *dibujo* con los significados habituales en el contexto del software de geometría dinámica (Laborde y Capponi 1994). La distinción entre *figura y dibujo* es útil para describir la forma en que los alumnos interpretan las representaciones realizadas en la pantalla del ordenador. Por ejemplo, si un alumno construye un rectángulo basándose únicamente en elementos de medida, las propiedades del objeto construido no se mantienen al desplazar uno de los vértices. Este objeto se considera como un dibujo y no mantiene las propiedades geométricas de la figura. Para construir un objeto que mantenga las propiedades geométricas (arrastre de test), el alumno debe conocer las herramientas necesarias de construcción (por ejemplo, construcción de rectas perpendiculares, construir segmentos de la misma longitud utilizando circunferencias, etc.), pero también debe conocer las propiedades geométricas del objeto. Esto requiere conocimiento del software y conocimiento matemático (Hollebrands, 2007).

METODOLOGÍA

Nuestra investigación es un estudio de casos que analizamos desde una perspectiva cualitativa-interpretativa. Observamos y analizamos los comportamientos de los alumnos durante la resolución de problemas de Geometría Analítica. En la investigación participan un grupo heterogéneo de 10 alumnos de 1º de bachillerato Tecnológico. Estos alumnos trabajan, diversos temas de Geometría elemental con una metodología en la que predomina la resolución de problemas. Los alumnos, que pertenecen a un mismo grupo-clase, se seleccionan de forma aleatoria. El profesor del aula ha colaborado con nosotros en ocasiones anteriores y su participación se valora principalmente por su experiencia y reconocimiento en el ámbito de la Didáctica de la Matemática y la resolución de problemas. Los problemas para trabajar con papel y lápiz y con GeoGebra son elegidos teniendo en cuenta los conocimientos previos de los alumnos, su forma habitual de trabajo en clase y el tema que se está desarrollando en el aula en el momento de la investigación. En este trabajo, comentamos en particular nuestra experiencia con dos de estos problemas, que mostramos a continuación.

Problema de la circunferencia:

Una circunferencia pasa por los puntos $P = (1,-1)$, $Q = (3,5)$ y su centro pertenece a la recta de ecuación $x+y+2 = 0$.
Hallar su centro y el radio.

Problema del rombo:

Un rombo tiene dos vértices P = (-2,1) y Q = (0,-3) que forman una diagonal del rombo. El perímetro es de 20 cm. Hallar los vértices restantes y el área del rombo.

Antes de la recogida principal de datos con los alumnos, llevamos a cabo un análisis preliminar de los problemas para determinar el espacio básico de cada problema en ambos medios (papel y lápiz y GeoGebra). Consideramos el espacio de un problema como el conjunto de posibilidades que tiene el resolutor de resolver un problema. El espacio básico depende, entre otros factores, de los conocimientos de que el resolutor disponga y utilice en la resolución, así como de los enfoques que éste sea capaz de identificar. Al espacio de un problema hecho por un resolutor experto lo denominamos espacio básico del problema (Cobo, 1998). A partir de la construcción del espacio básico de resolución en los dos medios, analizamos los contenidos conceptuales y procedimentales implicados en su resolución así como las herramientas[3] de GeoGebra necesarias para las distintas resoluciones.

Para la recogida principal de datos se diseñan cuestionarios sobre la resolución en lápiz y papel (cuestionario A) y sobre la opinión de los alumnos del uso de GeoGebra (cuestionario B). La estructura de los cuestionarios es la siguiente:

Cuestionario A (relativo a la resolución con lápiz y papel):

1. En general, ¿has encontrado el problema fácil o difícil? ¿Por qué?
2. ¿Qué es lo que más te ha costado? ¿Por qué?
3. ¿Has hecho una representación gráfica?
   a. Sí, con ejes de coordenadas.
   b. Sí, sin representar ejes de coordenadas.
   c. No he hecho representación gráfica.
4. En caso afirmativo, ¿te ha sido útil la representación gráfica? ¿Por qué?
5. En caso negativo, ¿por qué no has hecho la representación gráfica?
6. ¿Consideras que después de resolver el problema eres capaz de «visualizar» las relaciones geométricas de este problema sin necesidad de hacer una representación gráfica? ¿Por qué?

Concretamos a continuación los objetivos de las preguntas formuladas en el cuestionario A. El objetivo de las preguntas 1 y 2 es obtener más información sobre las dificultades que han tenido los alumnos en la resolución del problema de la circunferencia y así comparar estas dificultades con las dificultades relativas a la resolución con GeoGebra. El objetivo de las pregunta 3, 4 y 5 es obtener información sobre la opinión de los alumnos respecto a las representaciones gráficas. Los estudiantes están habituados a utilizar representaciones gráficas sin ejes de coordenadas. Finalmente, el objetivo de la pregunta 6 es obtener información sobre las dificultades de visualización cuando trabajan con lápiz y papel y así comparar las dificultades en ambos medios.

Cuestionario B (relativo a la resolución con GeoGebra):

1. Indica las herramientas utilizadas y los pasos de construcción que has hecho en la resolución del problema.
2. ¿Podrías resolver el problema de otra forma?
3. ¿En qué te ayuda y en qué no te ayuda el GeoGebra? ¿Qué dificultades has tenido?
4. ¿En qué crees que tu forma de resolver el problema es diferente de la que haces normalmente en clase?
5. Marca la opción que te parezca más adecuada y justifica la respuesta:
   a. La solución me convence.
   b. La solución podría convencer a mi compañero.
   c. La solución podría convencer al profesor.
   d. La solución podría convencer a una persona que no esté familiarizada con este tipo de problemas.

Concretamos a continuación los objetivos de las preguntas formuladas en el cuestionario B. El objetivo de la pregunta 1 es obtener el protocolo de construcción completo realizado por el alumno. Esta información se complementa con el protocolo de construcción grabado en los archivos. El objetivo de la pregunta 2 es determinar las técnicas instrumentadas desarrolladas por el alumno. El objetivo de la pregunta 3 es conocer las dificultades que encuentra el alumno durante la resolución de los problemas con GeoGebra (obstáculos técnicos, obstáculos cognitivos ya existentes trasladados al software (Drijvers, 2002)) así como la opinión de los alumnos sobre las ventajas de usar GeoGebra para la resolución de los problemas propuestos. La pregunta 4 también está relacionada con las técnicas instrumentadas. Finalmente, el objetivo de la pregunta 5 es observar el valor que le dan los alumnos a la resolución hecha con la ayuda de GeoGebra.

Respecto a la estancia en el escenario de la investigación, concretamos a continuación cómo se llevan a cabo las sesiones de clase. La estancia en el escenario de la investigación ocupó cuatro sesiones de clase.

– Primera sesión (2 horas): se introduce el uso de GeoGebra. Se trabaja en grupo, con la ayuda del profesor, algunos ejemplos y problemas de construcción con el objetivo de familiarizar a los alumnos con las herramientas necesarias para las sesiones siguientes (construcción de un cuadrado dados un vértice y su centro, construcción de la recta de Euler, teorema de Varignon, teorema de Viviani).

– Segunda sesión (1 hora): se inicia la experimentación con la resolución en grupos de dos o tres alumnos (forma habitual de trabajo en clase) del problema de la circunferencia sólo con lápiz y papel. Posteriormente se realiza el cuestionario A sobre la resolución del problema de la circunferencia en lápiz y papel (individualmente).

– Tercera sesión (1 hora): se propone a los alumnos la resolución con GeoGebra (individual pero respetando la distribución de los alumnos de la sesión de lápiz y papel) del problema de la circunferencia y, seguidamente, se propone la resolución con GeoGebra del problema del rombo. Los estudiantes, al mismo tiempo que avanzan en la resolución del problema, van escribiendo notas comentando su actividad, es decir, escriben un auto-protocolo (Gutiérrez, 2005). Posteriormente se realiza el cuestionario B sobre el uso de GeoGebra.

ANÁLISIS

Para la experimentación, los datos que se recogen son los siguientes: *a*) registros escritos realizados por los estudiantes en su cuadro de notas (resolución en lápiz y papel); *b*) interacciones entre alumnos, que fueron grabadas en audio y posteriormente transcritas; *c*) respuestas al cuestionario A referente a la resolución en lápiz y papel (dificultad del problema, de visualización); *d*) protocolos de construcción grabados en los archivos de GeoGebra y auto-protocolo de los estudiantes; *e*) grabaciones en vídeo de la sesión en el aula de informática y grabación de pantalla, que permiten observar aspectos relevantes no registrables en el protocolo de construcción como elementos borrados en la pantalla, gestos e interacciones entre los estudiantes; y *f*) auto-protocolo y respuestas al cuestionario B sobre la opinión que tienen los alumnos de GeoGebra.

Toda esta información se analiza mediante un análisis etnográfico (Eisenhart, 1988). Mediante el análisis de estos datos caracterizamos el comportamiento de aprendizaje de los alumnos considerando los procesos de instrumentación-instrumentalización propios de la teoría de la instrumentación. Para la consecución de nuestros objetivos, tenemos en cuenta las siguientes variables: *a*) sus estrategias heurísticas (se remiten a propiedades geométricas, se basan en el uso de herramientas algebraicas y de medida, hacen uso de ambas, estrategias de resolución, etc.); *b*) la influencia de GeoGebra (visualización, conceptos geométricos, superación de obstáculos); *c*) sus características cognitivas (información proporcionada por el profesor y por la experimentación); y *d*) los obstáculos encontrados en ambos medios (conceptuales, algebraicos, de visualización, técnicos, etc.). El análisis de datos se lleva a cabo en dos fases. Primero se realiza un estudio de casos y en una segunda fase se lleva a cabo un estudio cruzado de casos. Para el análisis de casos se analiza primero la resolución en lápiz y papel con la ayuda de los datos audiovisuales. Se consideran las estrategias de resolución de los alumnos en la resolución del problema y también los obstáculos cognitivos de cada alumno. Se contrasta esta información con las respuestas de cada alumno al cuestionario A. A continuación, se analizan las resoluciones del problema de la circunferencia y del problema del rombo con GeoGebra con la ayuda de los datos audiovisuales. Se analizan los protocolos de construcción, la grabación de la pantalla (aparecen elementos borrados), las estrategias de resolución, las técnicas instrumentadas y las dificultades técnicas. Se contrastan estos datos con las respuestas al cuestionario B. Después se comparan las estrategias de resolución en ambos medios, y más concretamente se comparan las técnicas en ambos medios (obtención del simétrico de un punto respecto a una recta, construcción de segmentos de la misma longitud, cálculo de áreas, etc.). También se considera el uso que hacen los alumnos de las distintas herramientas. Se obtiene así una primera clasificación del comportamiento de los alumnos. Finalmente, se lleva a cabo un estudio cruzado utilizando la información de cada alumno con el objetivo de contrastar datos entre los estudiantes y esbozar tipologías de alumnos. Mostramos a continuación algunos casos relevantes a modo de ejemplo.

EL CASO DE SARA

Sara es una alumna brillante y tiene un tipo de pensamiento que se podría clasificar como geométrico, ya que tiende a expresar sus ideas por medio de representaciones gráficas sin ejes de coordenadas y no tiende a aplicar estrategias algebraicas. Por ejemplo, en el problema de la circunferencia, Sara considera la mediatriz de un segmento [PQ] como lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento. Obtiene el centro de la circunferencia que pasa por P y Q como intersección de la mediatriz de [PQ] y de la recta que contiene al centro (la mayoría de alumnos utilizan una estrategia basada en igualar distancias en la resolución del problema de la circunferencia con lápiz y papel). Sara trabaja individualmente en todas las sesiones y no participa con su compañera. Sara no tiene dificultades en la resolución en lápiz y papel, y afirma en el cuestionario que el problema propuesto le resulta fácil y que sería capaz de visualizar el problema sin la ayuda de una representación gráfica. Sara tampoco tiene dificultades en la resolución con GeoGebra de los problemas propuestos. En la resolución de los problemas con GeoGebra, dicha alumna se basa en propiedades geométricas para hacer las construcciones, razona sobre la figura y no sobre el dibujo. Finalmente, no tiene dificultades en el uso de GeoGebra ni en los conceptos matemáticos. Consideramos que los grados de instrumentación e instrumentalización son altos.

LOS CASOS DE MARC Y ALEIX

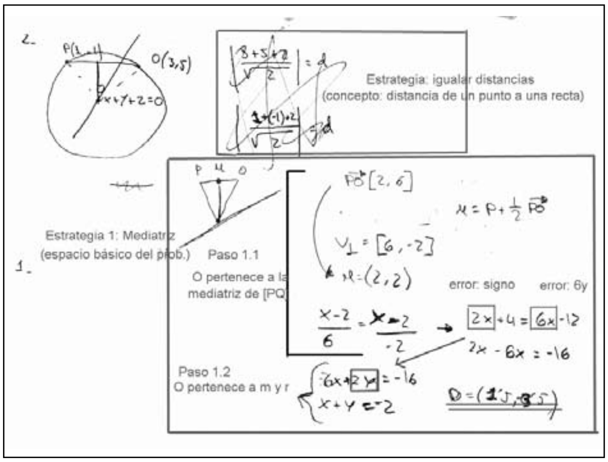
Marc y Aleix son alumnos de nivel medio más analíticos que intuitivos. En la resolución del problema del círculo con lápiz y papel (Figura 2), Marc propone a Aleix intentar plantear un sistema de ecuaciones para obtener el radio usando la fórmula de distancia de un punto a una recta. Veremos que esta estrategia algebraica consiste en obtener el radio de la circunferencia utilizando, erróneamente, la fórmula de distancia de un punto a una recta (a la recta r que contiene el centro de la circunferencia, O). Finalmente, abandonan la estrategia al obtener valores distintos para el radio.

Después de analizar los protocolos escritos y las grabaciones, concluimos que la estrategia de los estudiantes de resolver un sistema de ecuaciones igualando las distancias está basada en el uso erróneo del concepto de distancia de un punto a una recta, puesto que han considerado el sistema (Figura 2):

$$\begin{cases} radio = d(P,r) \\ radio = d(Q,r) \end{cases}$$

que, lógicamente, es incompatible. Por ello, al obtener valores distintos para el radio, Aleix observa: «Es *que te da la distancia perpendicular* [se refiere a d(P,r)]».

Figura 2
Estrategia de resolución con lápiz y papel del problema de la circunferencia (Marc).



Veremos a continuación que en la resolución que hace Marc del problema del rombo con la ayuda de GeoGebra aparece el mismo obstáculo relacionado con el concepto de distancia de un punto a una recta.

Si observamos las interacciones entre Marc y su compañero Aleix (Tabla 3, líneas 1 a 6), constatamos que Marc intenta obtener una recta a distancia 5 del vértice P del rombo en lugar de usar una circunferencia de centro P y radio 5. Nos preguntamos si entiende la herramienta de GeoGebra *segmento dados su longitud y un punto extremo inicial* como *recta a una distancia dada de un punto* (en lugar de circunferencia). En cambio, Aleix tiene claro el concepto de distancia de un punto a una recta (Tabla 3, líneas 1 a 6) y construye el rombo basándose en propiedades geométricas de la figura. Durante la resolución del problema del rombo con GeoGebra, los alumnos trabajan por parejas (respetando la distribución de la sesión de lápiz y papel) con ordenadores distintos y se graban las posibles interacciones.

Marc obtiene la siguiente figura (Figura 3.1) y abandona la estrategia basada en la concepción errónea de distancia de un punto a una recta. No se da cuenta de que el punto obtenido está a distancia 5 del vértice P (propiedad particular de este rombo). Observamos que la herramienta *segmento dada la longitud y punto extremo inicial* produce siempre un segmento paralelo al eje x (aunque dicho segmento puede girar arrastrando el extremo final). En cambio, Aleix utiliza la herramienta *circunferencia dado el centro y el radio* para obtener los vértices del rombo como intersección de las circunferencias de centro P y Q y radio 5 unidades (Figura 3.2).

Figura 3.1
Estrategia de resolución del problema del rombo basada en el concepto erróneo de distancia de un punto a una recta (Marc).

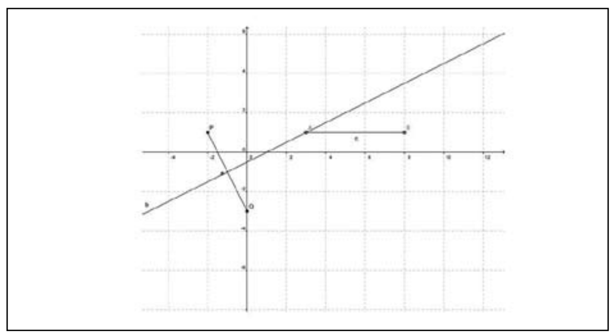
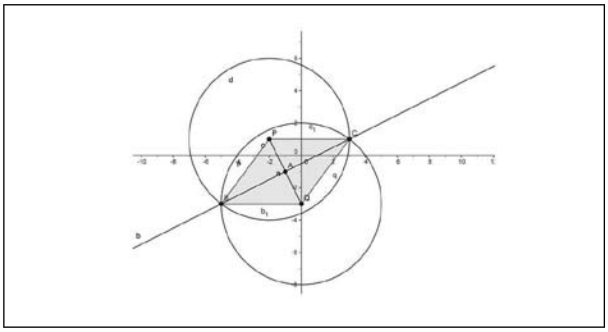


Tabla 3
Interacciones entre Marc y Aleix durante la resolución con GeoGebra del problema del rombo.

	ALUMNO	INTERVENCIONES
1	Marc	¿Pones la mediatriz directamente? (diagonal del rombo)
2	Aleix	Sí, pero para hacer aquí...[vértice] ya no sé...
3	Marc	Con la distancia.
4	Aleix	¡Sí, claro! Pero con la distancia necesitarías poder hacer...
5	Marc	Una pregunta, ¿hay alguna manera de hacer una recta a una cierta distancia de un punto? [concepto distancia de un punto a una recta]
6	Aleix	¿Quieres decir una paralela?
7	Marc	O bien un punto a una cierta distancia, en centímetros por ejemplo...
8	Aleix	No sé...
9	Marc	Ah! Vale, ya está. [intenta usar la herramienta *segmento dada la longitud*, 5, *y punto extremo inicial* en lugar de circunferencia]
10	Aleix	¿Ya lo tienes?
11	Marc	No. [Borra la figura (Figura 3.1)]
12	Aleix	¡Ya está! Mira. ¿Lo entiendes? [utiliza circunferencias de centros P y Q y radio 5 (Figura 3.2)]
13	Marc	No. ¿Lo has hecho con círculos? No lo veo claro.

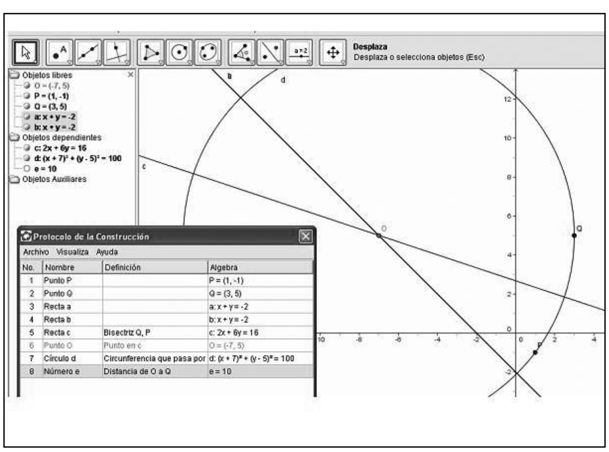
Figura 3.2
Estrategia de resolución del problema del rombo basada en la intersección de circunferencias (Aleix).



LOS CASOS DE JULIETA Y OFELIA

Julieta y Ofelia son alumnas con muchas dificultades en clase de matemáticas (conceptuales, de visualización, algebraicas...) tanto en la resolución con lápiz y papel de los problemas propuestos en la primera sesión como en la resolución con GeoGebra. En el primer caso, intentan recurrir a estrategias analíticas basadas en igualar distancias y, en el segundo supuesto, en el caso del rombo, usan principalmente herramientas de medida, sin lograr superar el arrastre de test. También tienen dificultades técnicas para encontrar y utilizar las herramientas. Ofelia tiene más dificultades que Julieta y utiliza muy pocas herramientas. Por ejemplo, para construir la mediatriz de un segmento, Ofelia no define previamente el segmento sino que aplica directamente la herramienta mediatriz a los puntos P y Q. Casualmente, en este caso el software (GeoGebra) permite esta construcción (Figura 4). Trazan la otra diagonal del rombo y desplazan dos puntos cualesquiera de la diagonal hasta que obtienen la misma medida para todos los lados del cuadrilátero. En consecuencia, la construcción no pasa el arrastre de test.

Figura 4
Resolución del problema de la circunferencia (Ofelia).



RESULTADOS

Presentamos un esbozo de las diferentes categorías de alumnos consideradas y mostramos a continuación algunos resultados que nos han parecido relevantes. A pesar de que haría falta un estudio en profundidad para poder hacer una clasificación más completa, hemos podido observar las siguientes tipologías de alumnos:

1. Autónomos (2 alumnos)

Son buenos resolviendo problemas, son intuitivos y no tienen obstáculos conceptuales ni algebraicos en la resolución con lápiz y papel de los problemas propuestos. El grado de instrumentación es alto así como el grado de instrumentalización. El uso de GeoGebra no presenta en la resolución de los problemas propuestos un valor añadido pero facilita aspectos materiales (Laborde, 2001). Estos alumnos intentan optimizar las estrategias de resolución y se basan en propiedades geométricas de las figuras, en su construcción realizada con GeoGebra. Conjeturamos que, para estos alumnos, el uso de GeoGebra consistiría un soporte para explorar aspectos curriculares avanzados y desarrollar sus competencias argumentativas (problemas de prueba, lugares geométricos, etc.).

2. Instrumentales (4 alumnos)

Son alumnos que tienden a reducir los problemas geométricos a problemas algebraicos. Tienen algunas dificultades (conceptuales, algebraicas y/o visualización) en la resolución con lápiz y papel. El uso de GeoGebra les proporciona un soporte algebraico, conceptual y visual. En la resolución con GeoGebra se basan en propiedades geométricas de la figura. El grado de instrumentación e instrumentalización es de medio a alto. En general, no tienen dificultades en el uso de GeoGebra.

3. **Procedimentales** (4 alumnos)

Son alumnos más analíticos que intuitivos. A pesar de tener algunas dificultades en la resolución con lápiz y papel (distancia de un punto a una recta, visualización, obstáculos algebraicos, etc.), entienden los conceptos geométricos. No tienen dificultades técnicas en el uso de GeoGebra (utilización de las herramientas). El grado de instrumentalización es inferior al de los alumnos de tipo instrumental. Los alumnos razonan sobre la figura pero también se basan en propiedades de medida. Por ejemplo, no utilizan circunferencias de radio dado para obtener segmentos de longitud dada.

4. **Naíf** (2 alumnos)

Son alumnos con muchas dificultades conceptuales, algebraicas y de visualización (elementos básicos de la circunferencia, distancia de un punto a una recta, vectores, concepto de mediatriz, etc.). El grado de instrumentación es bajo (utilizan pocas herramientas de GeoGebra y principalmente son herramientas de medida y algebraicas, tienen obstáculos técnicos en el uso de las herramientas). No tienen una estrategia de resolución clara, pero el uso de GeoGebra les proporciona un soporte visual, algebraico y conceptual. Se basan en herramientas de medida, yen las construcciones realizadas con GeoGebra no pasan el arrastre de test (Arzarello et al., 2002). Estos alumnos tienden a razonar sobre el dibujo y no sobre la figura.

Estas tipologías deben ser consideradas como prototipos, utilizados para categorizar y analizar el comportamiento de los estudiantes. Sin embargo, el hecho de que el comportamiento de los estudiantes se ajuste a una tipología dada no significa que se pueda determinar una clasificación de los estudiantes.

Además de las tipologías de estudiantes esbozadas, mostramos a continuación algunos resultados observados. Mostramos, a modo de ejemplo, la siguiente tabla (Tabla 4) de técnicas instrumentadas observadas en el estudio. Por ejemplo, podemos observar en la tabla las distintas técnicas para obtener el simétrico de un punto respecto a una recta con GeoGebra. Cuando trabajan con lápiz y papel, los alumnos obtienen el simétrico $M' = S_r(M)$ trazando una perpendicular a la recta r por el punto M, y después de determinar el punto O de intersección de las dos rectas, obtienen el simétrico $M' = O + \overline{OM}$ (cuando el profesor introduce la suma de un punto y un vector como una translación). A pesar de que esta técnica se puede llevar a cabo con GeoGebra, algunos alumnos obtienen M' como intersección de la circunferencia de centro O y radio OM y la recta perpendicular a r en M. Los alumnos que no utilizan circunferencias para obtener distancias iguales obtienen el simétrico utilizando la herramienta *simétrico de un punto respecto a una recta*.

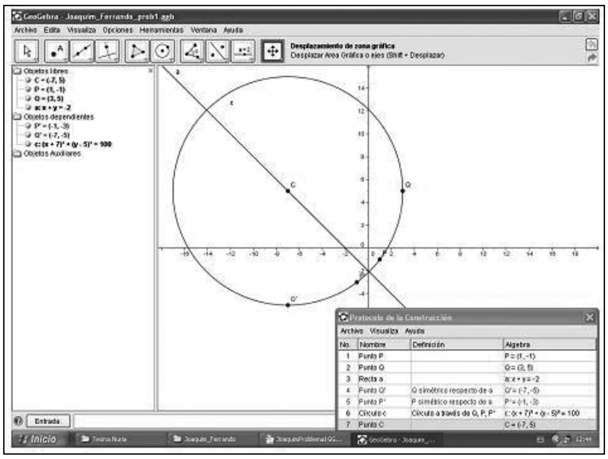
Otra técnica observada es el uso simultáneo de la ventana algebraica y de la ventana geométrica como estrategia de resolución. Por ejemplo, en la resolución del problema de la circunferencia con GeoGebra el alumno Joaquim construye un tercer punto de la circunferencia $P' = S_r(P)$ y con la herramienta *circunferencia dados tres de sus puntos* construye la circunferencia (Figura 5).

Tabla 4
Técnicas instrumentadas.

TÉCNICA	GEOGEBRA	OBSERVACIONES
Obtención de distancias congruentes	Herramienta circunferencia *dados su centro y radio*	
	Herramienta *refleja objeto en recta*	Los alumnos se basan en que la simetría conserva las distancias (isometría)
	Arrastre guiado	La figura no pasa el arrastre de test
	Herramienta *segmento dados su longitud y un punto extremo inicial*	Algunos alumnos utilizan esta herramienta erróneamente
Intersección de objetos	Visualmente, construcción de un *punto nuevo* sobre un objeto	Algunos alumnos tienen dificultades para definir el punto cuando consideran intersecciones de tres o más objetos
	Herramienta *intersección de 2 objetos*	
Mediatriz de un segmento	Construcción de una *recta perpendicular* por el *punto medio* del segmento	
	Herramienta *mediatriz*	Algunos alumnos aplican la herramienta a 2 puntos. En este caso el software permite la construcción
Simétrico de un punto M respecto a una recta r	Herramienta *refleja objeto* (punto M) *en recta* (recta r)	Algunos alumnos aplican la herramienta a un segmento en lugar de aplicarla a una recta. En este caso el software permite la construcción
	Construcción de la recta s perpendicular a la recta r por el punto M, intersección de s y r, punto O, y construcción del punto M' en la recta s por igualación de distancias	
Radio de una circunferencia	Herramienta *segmento entre dos puntos* y herramienta *distancia* aplicada al segmento	
	Interpretación de la ecuación de la circunferencia en la ventana algebraica	
Circunferencia por 3 puntos	Herramienta *circunferencia dados 3 de sus puntos* e interpretación de las coordenadas del centro en la ecuación de la circunferencia que aparece en la ventana algebraica	
	Construcción del circuncentro del triángulo determinado por los tres puntos	
Área del rombo	Herramienta *polígono y* obtención del área en la ventana algebraica	
	Herramienta *distancia* aplicada a las diagonales del rombo, D y d, y obtención del área introduciendo la expresión *D*d/2* en la barra de entrada	Los alumnos utilizan la fórmula pero hacen las operaciones con lápiz y papel.
	Estrategia visual: descomposición del rombo en triángulos	Los alumnos no logran llevar a cabo esta técnica

Obtiene las coordenadas del centro y el radio interpretando la ecuación de la circunferencia que aparece en la ventana algebraica: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. En la pregunta 2 del cuestionario B, el alumno observa que también podría obtener el centro de la circunferencia como intersección de las tres mediatrices del triángulo formado por los puntos P, Q y P'.

Figura 5
Circunferencia por tres puntos construida con GeoGebra (Joaquim).



Los datos también muestran la dificultad de la transferencia de las estrategias de resolución con la ayuda de GeoGebra a las estrategias con papel y lápiz. A modo de ejemplo, observamos que la forma en que algunos estudiantes de tipo procedimental resolvieron el problema del rombo no tiene transferencia clara a un método de lápiz y papel. En la figura 6 se puede observar la resolución de uno de estos alumnos basada en las propiedades geométricas del rombo y en herramientas de medida (las diagonales se cruzan perpendicularmente en el punto medio, obtiene el vértice A' como simétrico de A respecto a la diagonal). El estudiante desplaza el vértice A sobre la diagonal hasta que todos los lados tienen la misma longitud igual a 5 unidades.

En el caso de la figura 6, la posibilidad de usar el arrastre de puntos (arrastre guiado) influye en la estrategia de resolución del alumno Joaquim. En cambio, en la figura 7 podemos ver la construcción que hizo Sara (que hemos clasificado como autónoma), que tiene una clara transferencia a lápiz y papel, a pesar de que conjeturamos que en la resolución en lápiz y papel de este problema, Sara habría utilizado distancias en lugar de la circunferencia o bien se habría decantado por una resolución vectorial (forma habitual de resolver este tipo de problemas en clase). En este sentido, las restricciones del software promueven un pensamiento más geométrico, ya que Sara considera la intersección de la circunferencia y la diagonal en lugar de igualar distancias y obtener así un sistema de ecuaciones. Por ejemplo, en la resolución del problema del rombo observamos las siguientes estrategias (Figuras 7, 8, 9 y 10).

Figura 6
Construcción del rombo, estrategia dinámica (Joaquim).

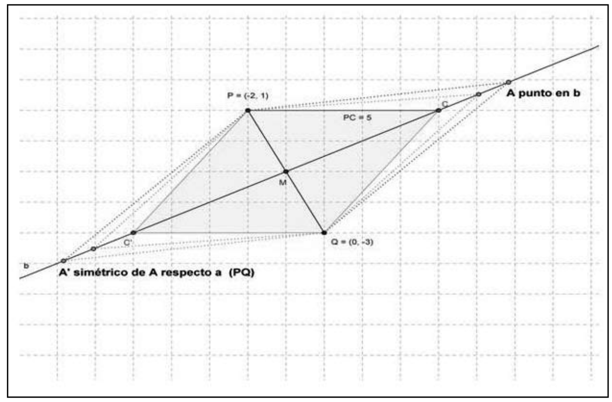


Figura 7 (Autónomo)
Intersección de la circunferencia de radio 5u y centro P y de la diagonal del rombo

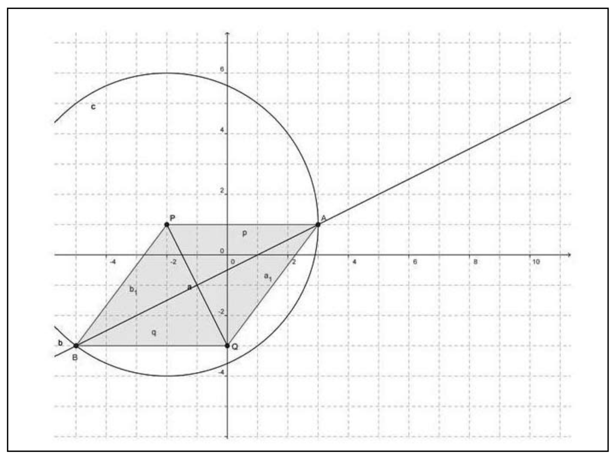


Figura 8 (Instrumental)
Intersección de dos circunferencias, de radio 5u, centradas en los vértices dados P y Q.

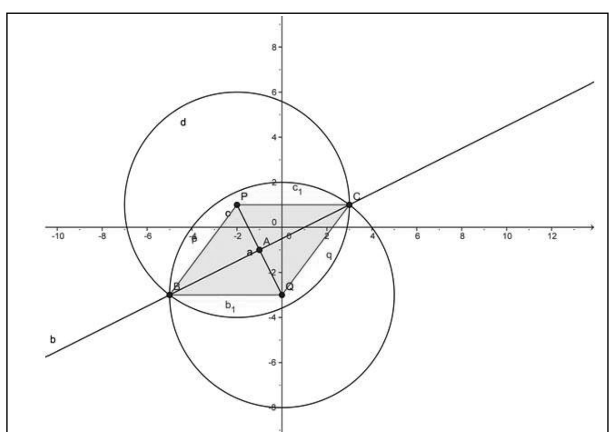


Figura 9 (Procedimental)
Estrategia dinámica: construcción de las diagonales. Definen un vértice A en la diagonal y obtienen el otro vértice A' = Spa(A). Desplazan A hasta obtener un rombo de lados 5u.

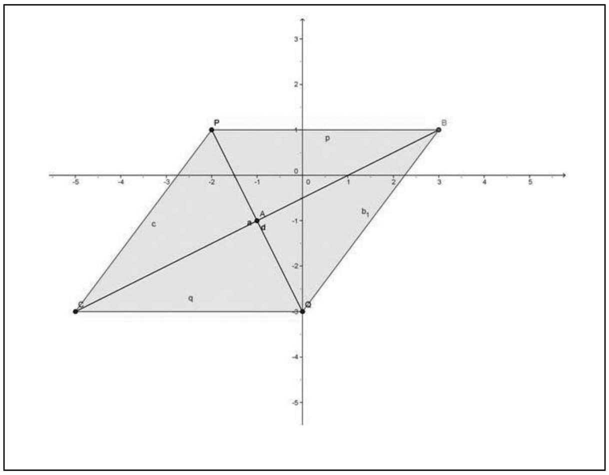
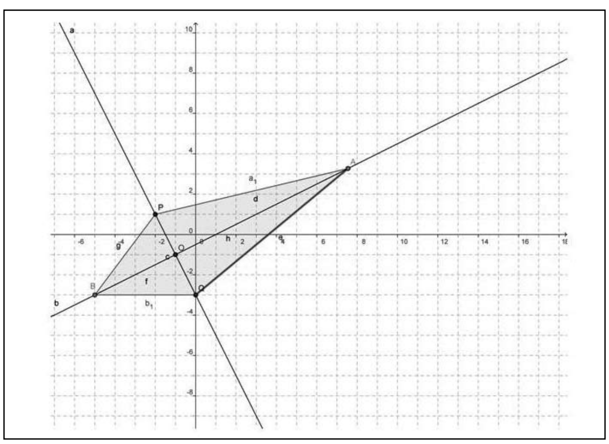
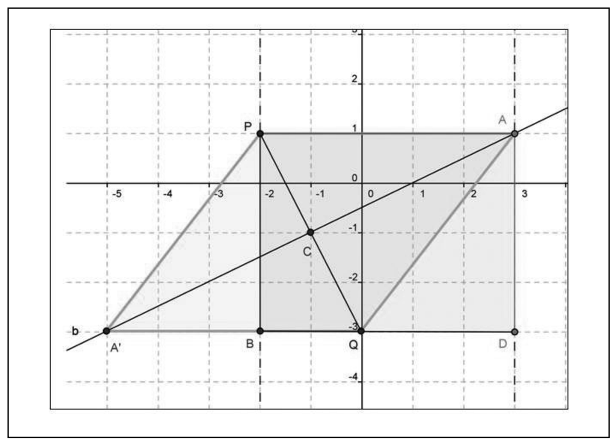


Figura 10 (Naíf)
Estrategia basada en el dibujo: desplazan los vértices A y B hasta obtener lados de la misma medida. La figura no pasa el arrastre de test.



Finalmente observamos que los alumnos tienen pocas dificultades con relación al uso de GeoGebra (salvo en el caso de la tipología naíf). Todos los estudiantes coinciden en que el uso de GeoGebra ayuda a visualizar el problema a pesar de que los alumnos de tipo autónomo no tienen dificultades en la visualización en la fase de resolución con lápiz y papel. Un hecho relevante es que ningún alumno utiliza ejes de coordenadas en la representación gráfica. Destacamos también que ningún alumno ha utilizado la estrategia visual para obtener el área del rombo (Figura 11). Calculan el área con lápiz y papel utilizando la fórmula $\frac{Dd}{2}$ o bien insertando la fórmula anterior en la barra de entrada. Conjeturamos que este hecho se debe a que los alumnos no están familiarizados con este tipo de resolución visual. Observamos que algunos obstáculos técnicos en el uso de GeoGebra son «obstáculos ya existentes trasladados al software» (Drijvers, 2002). Por ejemplo, véase el caso de Marc analizado en el apartado anterior (p.10) y también que la mayoría de alumnos validan la construcción con herramientas de medida (por ejemplo, en el problema del rombo comprueban que la longitud de los cuatro lados es la misma), incluso los alumnos que hacen construcciones basadas en propiedades geométricas de la figura. Sólo una de las estudiantes de tipo autónomo escribe en el cuestionario B que el uso de GeoGebra permite usar estrategias de resolución diferentes a pesar de que la mayoría de estudiantes utilizan estrategias diferentes (por ejemplo, utilizan la opción desplazar combinada con herramientas de medida).

Figura 11
Estrategia visual para obtener el área del rombo.



CONCLUSIONES

Hemos podido constatar en este estudio que la mayoría de estudiantes utilizan herramientas algebraicas y de medida y consideran que GeoGebra les ayuda a visualizar el problema y a evitar obstáculos algebraicos. En general, los alumnos han tenido pocas dificultades con relación al uso del software y algunos obstáculos son obstáculos cognitivos ya existentes trasladados al software. El uso de GeoGebra promueve así un pensamiento más geométrico (por ejemplo, consideran la intersección de circunferencias en lugar de igualar distancias en el problema del rombo) y facilita un soporte visual, algebraico y conceptual a la mayoría de alumnos (categorías instrumental, procedimental y naif). Consideramos que el uso de GeoGebra también favorece múltiples representaciones de conceptos geométricos, ayuda a evitar obstáculos algebraicos permitiendo centrarse en los conceptos geométricos así como a resolver los problemas de otra forma. Hay que señalar, sin embargo, que la influencia del uso de GeoGebra depende de los alumnos y de los problemas propuestos. Los alumnos desarrollan una gran variedad de estrategias de resolución, asociadas con distintos usos de GeoGebra, y estas diferencias pueden ser interpretadas en términos de tipologías de alumnos. Las tipologías tienen efectos relevantes en el proceso de génesis instrumental (Artigue, 2002). Por ejemplo, se pueden considerar los distintos procesos instrumentales que desarrollan los alumnos en función de: a) el tipo de recursos que favorecen, b) el meta-conocimiento que tienden a poner en juego y c) los modelos de validación que privilegian.

Los resultados obtenidos relativos a las tipologías de alumnos, deben ser interpretados en el contexto de la investigación en curso. Los grados de adquisición de los procesos de instrumentación e instrumentalización resultan no ser discretos, por lo que es recomendable estudiar en profundidad la transición entre estos niveles. La idea de continuidad y transición es útil cuando consideramos la construcción del aprendizaje en los alumnos. También es importante analizar el papel del profesor, lo que, en la terminología de la teoría de la instrumentación, se conoce como orquestación. La orquestación es necesaria para favorecer y guiar el difícil proceso de génesis instrumental del software. En la investigación en curso hemos introducido datos relativos a la intervención del profesor. Tendremos en cuenta estos aspectos para favorecer el proceso de apropiación del software, así como para analizar la influencia conjunta de las técnicas de papel y lápiz y GeoGebra y el valor epistémico de las técnicas instrumentadas.

NOTAS

1. MEC. Desarrollo de un sistema tutorial de e-learning para mejorar las competencias en resolución de problemas de los alumnos.
2. www.GeoGebra.org
3. Desde un punto de vista geométrico las herramientas *punto*, *círculo por un punto dado el centro* e *intersección de objetos* son suficientes. Consideramos todas las herramientas (geométricas y de medida) aunque algunas sean innecesarias.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work, *Internacional Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, pp. 245-274.

ARZARELLO, F. y otros (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments, *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik,* 34(3), pp. 66-72.

COBO, P. (1998). Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos. *Tesis doctoral*. Universitat Autònoma de Barcelona.

DRIJVERS, P. (2003). Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter. Doctoral dissertation. Universiteit Utrecht.

EISENHART, M. A. (1988). The Ethnographic Research Tradition and Mathematics Education Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(2), pp. 99-114.

GUTIÉRREZ, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica, en Maz, A., Gómez, B. y Torralbo, M. (eds.). *Actas del 9.º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM),* pp. 27-44.

HOHENWARTER, M. y PREINER, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and its Aplications*. ID1448, vol. 7.

HOLLEBRANDS, K. (2007). The Role of a Dynamic Software Program for Geometry in the Strategies High School Mathematics Students Employ. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(2), pp. 164-192.

HOYLES, C. y NOSS, R. (1994). Dynamic geometry environments: What's the point? *Mathematics teacher*, 87, pp. 716-717.

LABORDE, C. (1992) Solving problems in computer based Geometry environment: the influence of the feature of the software, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 92(4), pp. 128-135.

LABORDE, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with CabriCabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, pp. 283-317.

LABORDE, C. y CAPPONI, B. (1994). Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14. 1(2), pp. 165-209.

RABERDEL, P. (2001). Instrumented mediated activity in situations, en Blandford A., Vanderdonckt J., Gray P. (eds). *People and computers XV-interactions without frontiers*, pp. 17-30. Berlín: Springer-Verlag.

TROUCHE, L. (2005). Instrumental genesis, individual and social aspects. In D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds), *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument*, pp. 198-230. Nueva York: Springer.

VERILLON, P. y RABARDEL, P. (1995). Cognition and artifacts: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology in Education*, 10(1), pp.77-101.

WHITE, T. (2008). Debugging an Artifact, Instrumenting a Bug: Dialectics of Instrumentation and Design in Technology-Rich Learning Environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13, pp.1-26.

[Artículo recibido en julio de 2008 y aceptado en febrero de 2009]

Co-influence of GeoGebra and paper and pencil use on the students'competences adquisition

Iranzo, Nuria y Fortuny, Josep Maria
Departament de Didàctica de les Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona
Nuria.Iranzo@uab.cat
JosepMaria.Fortuny@uab.cat

Summary

This study is part of a research project[1] on the integration of computational technologies in geometry teaching (plane analytic geometry). It is well-known that computational technologies have a strong impact on the professional practice of mathematics. Nevertheless, its corresponding influence on the teaching and learning of mathematics has remained an ongoing issue. This can be explained by the fact that different obstacles have arisen with the integration of technologies. Several questions emerge. What is and what should be the role of technology in teaching and learning of geometry? In which way might the use of technology foster the learning of mathematics?

This study focuses on the interpretation of students' behaviors when solving plane geometry problems by analyzing the relationships among dynamic geometry software use, paper-and-pencil (P&P) work and geometrical thinking. Many pedagogical environments have been created such as Cinderella, Geometer's sketchpad, Cabri géomètre II and GeoGebra, among others. We point to the use of GeoGebra (GGB) because it is a free dynamic geometry software that also provides basic features of the Computer Algebra System. The software links synthetic geometric constructions to analytic equations, and coordinate representations and graphs.

From a methodology and methods perpective, our research consists of a qualitative case study that has been organized around a group of 16-17 year-old students at a high school in Catalonia, Spain. We observed students with a teacher who had been teaching mathematics in this high school for many years, and was used to introducing geometry by means of problem solving dynamics that gave priority to the student's thinking. We seek for relationships between students' thinking and their use of techniques by exploring the influence of certain techniques on the students' resolution strategies. In this work, we centre on the resolution processes of two of the problems considered in the research.

For the analysis we mainly consider: a) the solving strategies in the written protocols and the GGB files, b) the audio and video-taped interactions with other students, c) the opinions of the students about the use of GGB collected in a questionnaire, and d) the opinions of the students about the use of graphic representations on the paper-and pencil resolution, collected in a questionnaire. Through the analysis of data, we characterize students' learning behaviors and we discuss the idea of instrumentation linking the theoretical perspective and the classroom experiments. We have based our theoretical framework on Rabardel's (2001) instrumental approach to tool use. We propose an analysis of the acquisition degrees of the instrumentation and instrumentalization processes, the resolution strategies in both environments and the interactions between the different agents (student-student, student_GGB, student-P&P and student-content).

Our results point to the existence of four student profiles, in the context of this research. As stated by Artigue (2002), students develop a wide range of solution strategies, associated with different uses of dynamic geometry software, and these differences can be interpreted in terms of profile characteristics. The differences in students' profiles have significant effects on the instrumental genesis of GGB.

1. MEC. Desarrollo de un sistema tutorial de e-learning para mejorar las competencias en resolución de problemas de los alumnos. SEJ2005-02535.