TRANSFERENCIA INTER-DOMINIOS EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: UNA PROPUESTA INSTRUCCIONAL BASADA EN EL PROCESO DE «TRADUCCIÓN ALGEBRAICA»

Sanjosé, Vicente[1]; Solaz-Portolés, Joan Josep[2] y Valenzuela, Tomás[3]
[1] Science Education. ERI-Polibienestar. Universitat de València, España
[2] IES Benaguasil 46183 / C. Tomás y Valiente. UNED, València, España
[3] Generalitat Valenciana, España
vicente.sanjose@uv.es
solpor@telefonica.net
tomas.valenzuela@alumni.uv.es

Resumen. Comprender un problema con enunciado en ciencias y matemáticas implica construir representaciones mentales en diferentes niveles de abstracción. Las dificultades que los estudiantes de secundaria tienen a la hora de resolver problemas algebraicos con enunciado parecen originarse en la transición entre la representación concreta y la representación matemática de los problemas. Para facilitar este proceso llamado «traducción algebraica del problema», se adapta una «regla para poner un problema en ecuaciones» propuesta por Puig (1998) y se integra en una metodología experimental en la que se busca mejorar la transferencia inter-dominios en ciencias. Los resultados muestran la potencia de la propuesta para superar gran parte de los obstáculos que los estudiantes de estos niveles tienen, con independencia de su rendimiento académico global.

Palabras clave. Resolución de problemas, traducción algebraica, transferencia inter-dominios, enseñanza de las ciencias, enseñanza secundaria.

Inter-domain transfer in problem solving: an instructional methodology based on the «algebraic translation» process

Summary. Understanding a science and math word problem means constructing mental representations at different levels of abstraction. Secondary students have difficulties solving algebraic word problems due to the transition from the concrete representation to the mathematic representation. In order to facilitate the «algebraic translation» of the problems, we adapt a «rule to put a problem into equations» by Puig (1998) and insert it in an experimental methodology devoted to improving the inter-domain transfer in science. Results show the power of the instructional methodology to overcome most of the students' difficulties, no matters their average academic performance.

Keywords. Problem solving, algebraic translation, inter-domain transfer, science instruction, secondary education.

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas es una de las tareas más creativas y exigentes (Polya, 1957; Newel y Simon, 1972, Larkin y Reif, 1979). En la enseñanza de las ciencias y de las matemáticas, la resolución de problemas es la tarea por excelencia para probar el aprendizaje de los estudiantes, ya que activa y desarrolla diferentes tipos de conocimientos (Solaz-Portolés y Sanjosé, 2006; Nakhleh, 1993).

El procedimiento didáctico habitual para enseñar a resolver problemas y evaluar el aprendizaje se basa en la transferencia («transfer»): se resuelve un conjunto de problemas y se pide luego a los estudiantes que resuelvan problemas similares. El sujeto recupera de su memoria ejemplos resueltos antes y los usa para resolver el nuevo problema (Goldstone y Sakamoto, 2003; Barnett y Ceci, 2002). Por tanto, el transfer requiere el establecimiento de analogías entre el problemas (Gentner, 1983). A través de ellas los estudiantes abstraen «esquemas de problema» que son las representaciones mentales comunes a varios problemas. Por eso el aprendizaje inicial de ejemplos relevantes y su comparación es la estrategia de referencia para favorecer la abstracción de «esquemas de problema» (Loewenstein, Thompson y Gentner, 1999; Gick y Holyoak, 1983).

En un problema se diferencian dos componentes básicas (Holyoak y Koh, 1987; Holyoak, 1984): 1) su *superficie*, historia o contexto; y 2) su *estructura*. La superficie alude a la temática concreta o ámbito del Mundo a la que pertenecen los objetos y eventos que se describen en el enunciado, que normalmente forman parte del conocimiento general de las personas. La estructura en los problemas algebraicos está determinado básicamente por «*cómo las cantidades se relacionan unas con otras, más que por cómo son las cantidades*» (Novick, 1988, p. 511). Puig y Cerdán (1990) han estudiado la estructura en problemas aritméticos de varias operaciones combinadas y, recientemente, Cerdán (2008) analiza la estructura de la familia de problemas aritmético-algebraicos, definiéndola como la red de cantidades y correctas entre las cantidades –datos e incógnitas– en el problema y representándola en forma de grafo.

Cuanto más generales sean los «esquemas de problema» construidos, más fácil será la transferencia a problemas nuevos (Jonassen, 2003). Sin embargo, la instrucción en ciencias se suele organizar en temas según las áreas clásicas. Si un conjunto de problemas presenta similitudes superficiales –como los problemas de un mismo tema–, sus diferencias estructurales pueden quedar apantalladas para los estudiantes (Reeves y Weisberg, 1994). Entonces, incluso dentro de un mismo dominio temático, el transfer entre problemas de estructura diferente resulta difícil (Rebello et al., 2007; Reed, Dempster y Ettinger, 1985).

Los expertos son capaces de reconocer diferencias estructurales en problemas del mismo tema pero también similitudes estructurales en problemas de diferentes temas. Alcanzar esta pericia para el transfer inter-dominios requiere diseños instruccionales que fomenten la formación de reglas generalizadas (Bassok y Holyoak, 1989; Lewis y Anderson, 1985) basadas, necesariamente, en aquello que es común a diferentes dominios. En este trabajo propondremos una metodología instruccional que enseña a «traducir» problemas al lenguaje del álgebra, con independencia de las diferencias en las superficies de los problemas asociadas a su ámbito temático. Nuestro objetivo principal es probar que esta metodología permite a los estudiantes de secundaria superar muchos obstáculos a la hora de plantear y resolver problemas nuevos en ciencias y matemáticas. Se ha probado ya que el modo en que los estudiantes realizan la «traducción» se relaciona con su nivel de éxito en resolución de problemas aritméticos (Hegarty et al., 1995). Consideraremos problemas cuya estructura se concreta en un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, muy habituales en temas de ciencias de secundaria.

ELEMENTOS TEÓRICOS E HIPÓTESIS

Resolver un auténtico problema (Gil y Martínez-Torregrosa, 1983) requiere comprensión. Comprender un problema significa construir una representación mental de la situación descrita en el enunciado. Kintsch y Van Dijk (1978), Van Dijk y Kintsch (1983), Kintsch (1998) proponen una teoría de la comprensión con tres niveles de representación mental: a) Nivel léxico, o reconocimiento de las palabras; b) Base del texto, o nivel semántico constituido por el significado de las proposiciones del texto con independencia de su forma gramatical; c) Modelo de la situación formado por la conexión de las proposiciones del texto con los esquemas de conocimiento previo que se amplían y matizan con la nueva información. Kintsch y Greeno (1985) postularon un cuarto nivel de representación mental, específico para problemas: d) Modelo del problema o nivel abstracto. Más allá de la representación de los objetos y eventos en el mundo ordinario, los problemas en ciencias y matemáticas requieren representaciones de cantidades, magnitudes, operaciones y ecuaciones. Para un experto el modelo del problema coincide con la estructura del problema.

La representación de los problemas suscita interés entre los investigadores (Koedinger y Nathan, 2004; Coleoni et al., 2001; Buteler et al. 2001; Christou y Philippou, 1998; Otero y col., 1998; Greca y Moreira, 1996; Anderson, 1995; Mayer, 1992), ya que exige gran cantidad de inferencias y la activación de conocimiento previo específico de diferente naturaleza (Solaz-Portolés y Sanjosé, 2007; Ferguson-Hessler y de Jong, 1990). En el caso de problemas que involucran dos ecuaciones lineales, se ha encontrado un corte didáctico en la resolución por el método de sustitución (Solares, 2007; Filloy, Rojano y Solares, 2008), aunque en un experimento anterior (Sanjosé et al., 2007) se encontró que un porcentaje grande de alumnos de secundaria de la muestra fue capaz de resolver correctamente un sistema de dos ecuaciones lineales una vez planteado. Por tanto, una gran parte de obstáculos deben aparecer al tratar de construir un modelo del problema adecuado a partir de la base del texto. La complejidad de esta construcción se estudió hace tiempo en problemas aritméticos escolares (Puig y Cerdán, 1980) y ha sido abordada repetidamente (Cerdán, 2008; Orrantia et al., 2005; Valentín y Chap-Sam, 2005; Christou y Philippou, 1998; Nesher y Hershkovitz, 1994; Carpenter, Hiebert y Moser, 1981).

Según Kintsch y Greeno (1985), la representación mental construida por un sujeto depende de la interacción de su base de conocimientos con las proposiciones del texto. Un aprendiz con conocimiento escaso puede encontrar inconvenientes para ir más allá de los referentes concretos de las proposiciones del enunciado. Por tanto, dotar a los estudiantes del nivel de pericia característica de los expertos en resolución de problemas requiere: *a*) incrementar su base de conocimientos; *b*) enseñarles a ir más allá del modelo de la situación para construir el modelo del problema a partir de la base del texto. Incrementar la base de conocimientos es objetivo habitual de la docencia. En cuanto al proceso de «traducción» de problemas algebraicos, se trata de un tema que ha suscitado mucho interés en la didáctica de la matemática (ver por ejemplo Filloy, Rojano y Puig, 2008; Cerdán, 2008) pero todavía no hay mucho trabajo explícito en resolución de problemas de ciencias.

En la metodología experimental que proponemos, se adapta una «regla para poner un problema en ecuaciones» de Puig (1998) para enseñar explícitamente a los estudiantes el proceso de «traducción» del lenguaje natural al algebraico. Esta regla propuesta se basa en el método cartesiano (véase por ejemplo, Filloy, Rojano y Puig, 2008; Cerdán, 2008) y en el proceso histórico de su génesis (Puig y Rojano, 2004) y supone un intento didáctico por crear un algoritmo a partir del mismo. Los pasos de esa regla son:

1. Comprender la situación narrada en el enunciado, es decir, construir una representación mental, al menos en términos concretos (modelo de la situación).

2. Analizar las cantidades del problema. En particular, identificar las cantidades conocidas (o datos) y las cantidades desconocidas (incógnitas).

3. Estudiar las relaciones entre las cantidades, conocidas y desconocidas, a nivel cualitativo. Se trata de atender a expresiones asociadas con las operaciones aritméticas (por ejemplo: «dos unidades mayor que»; «la tercera parte de»; «proporcional-a»; etc.).

4. Tomar una de las cantidades desconocidas (identificar una incógnita) y darle nombre asignándole una letra (por ejemplo, x).

5. Escribir el resto de las cantidades y las relaciones entre ellas a partir del símbolo algebraico asignado a la incógnita identificada.

6. Igualar una misma cantidad representada de dos formas diferentes para obtener una ecuación.

El paso 1 se incluye frecuentemente en la práctica y formará parte también de la metodología de control. Nos referiremos al paso 6 como «planteamiento correcto de la ecuación para resolver el problema» o «escritura correcta de la ecuación» para comparar entre los grupos control y experimental.

Podemos ahora plantear nuestras hipótesis:

Hipótesis principal: «La metodología experimental mejorará significativamente la pericia de los estudiantes a la hora de plantear problemas de temas nuevos, en comparación con la de control».

Consideraremos estudiantes de 4.º de ESO y de 1.º de bachillerato para estudiar si la base de conocimientos interacciona con la metodología instruccional y conduce a niveles de éxito diferentes. También el rendimiento académico general (promedio) de los estudiantes podría ser relevante, pues está afectado por variables como el interés, la dedicación, la atención y las capacidades cognitivas y metacognitivas de los estudiantes.

Hipótesis secundaria: «Los sujetos de mayor nivel académico y los de mayor rendimiento académico promedio alcanzarán mejores resultados que los de menor nivel académico y los de bajo rendimiento, respectivamente».

MÉTODO

Muestra

Participaron en este experimento un total de 92 sujetos de ambos sexos pertenecientes a dos centros educativos de secundaria en poblaciones de más de 10.000 habitantes. Los sujetos pertenecen a grupos naturales. Todos los estudiantes cursaban Física y Química ese año. La distribución en los grupos de tratamiento es la que sigue (Tabla 1):

Tabla 1
Distribución de la muestra en niveles académicos y grupos de tratamiento.

	4.º ESO	1.º bachillerato	Total
Tratamiento control	17	23	40 (54%)
Tratamiento experimental	14	20	34 (46%)
Total	31 (42%)	43 (58%)	74

Los centros educativos se hallan en una zona industrializada y el nivel sociocultural de las familias es típicamente medio.

La muestra fue elegida por su disponibilidad sin muestreo aleatorio. En los dos centros educativos los grupos naturales se conformaron según la opción elegida por los estudiantes sin consideración de ningún otro factor. Por ello esperamos que cualquier variable no controlada se halle distribuida al azar, y no comprometa la validez interna del estudio.

Diseño y variables

El experimento se desarrolló en tres fases: pretest, tratamiento y transfer (postest).

El diseño experimental es factorial «2x2x3», siendo los factores: *a*) la metodología instruccional (control/experimental); *b*) el nivel académico (4.º ESO / 1.º bachillerato); *c*) el rendimiento académico promedio general de cada sujeto en secundaria (Bajo/Medio/Alto correspondientes a promedios generales de Suficiente o inferior/Bien o Notable bajo/Notable alto o Sobresaliente, respectivamente).

La muestra está distribuida de modo homogéneo según estos factores. Los sujetos de ambos niveles académicos están distribuidos por igual en los grupos de tratamiento (χ^2 = 0,013; g.l. = 1; p = 0,908). La distribución de los estudiantes en los niveles de rendimiento académico Bajo, Medio y Alto es, respectivamente, 17,6%, 45,9% y 36,5% y es similar en los dos niveles académicos considerados (χ^2 = 1,771; g.l. = 2; p = 0,412) y en los dos grupos de tratamiento instruccional (χ^2 = 2,139; g.l. = 2; p = 0,343).

Las metodologías instruccionales se diferencian en dos aspectos: *a*) utilización en el grupo experimental de una «regla para traducir los enunciados al lenguaje algebraico»; *b*) distribución de los problemas resueltos en las sesiones de trabajo. Ambas variables no están factorizadas en el diseño de investigación en este experimento. El anexo 2 ejemplifica estas diferencias.

Las variables dependientes consideradas se relacionan con el éxito en la construcción de la representación modelo del problema. La tabla 2 muestra las medidas independientes en cada fase del experimento.

Ha sido probado que la tarea de agrupar problemas a partir de su enunciado discrimina bien entre expertos y novatos en resolución de problemas de ciencias (Chi et al. 1981) y, por tanto, se relaciona con el nivel de pericia. Para inferir el criterio que cada sujeto utiliza para la categorización de los problemas atenderemos a las características comunes más frecuentes de cada grupo.

Como los estudiantes no muestran grandes dificultades para resolver las ecuaciones una vez están planteadas (Sanjosé et al., 2007), nuestro interés se centra en el planteamiento (fase de comprensión) de los problemas. En la fase final los dos problemas a resolver pertenecen a un tema todavía no estudiado por los estudiantes (transfer inter-dominios).

Para valorar la asimilación de la metodología experimental y su relación con el éxito en el transfer, se estudió el grado de aplicación de la regla enseñada para plantear los problemas finales.

En la fase de tratamiento se controló el avance de los estudiantes a través de la resolución de dos problemas propuestos.

Criterios de puntuación

Consideramos como «planteamiento erróneo» aquel en el que ambas ecuaciones son incorrectas, o una de las ecuaciones es correcta pero la otra contiene más de un error; consideramos como «planteamiento parcialmente correcto» aquel en el que una de las ecuaciones es correcta y la otra contiene sólo un error. La ausencia de planteamiento y los planteamientos erróneos fueron calificados con 0,0 puntos; los planteamientos parcialmente correctos se puntuaron con 0,5 puntos; y los planteamientos totalmente correctos (sin errores) fueron calificados con 1,0 puntos.

Materiales

Dado que establecer analogías entre problemas según su estructura es más difícil que hacerlo según su superficie, en la metodología experimental se emplearon cuadros que establecían correspondencias entre elementos equivalentes entre problemas, en cada paso de la regla instruccional utilizada. Se empleó otro cuadro para generalizar las dos estructuras estudiadas con el fin de favorecer el nivel de abstracción más alto posible.

Tabla 2
Variables independientes en cada fase y tarea.

VARIABLES INDEPENDIENTES	AGRUPACIÓN DE PROBLEMAS	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Pretest	– Número de grupos. – Característica común en los grupos (criterio de agrupación).	– Planteamiento de las ecuaciones (correcto/parcialmente correcto/ incorrecto o ausente).
Tratamiento (Instrucción)	----	– Planteamiento de las ecuaciones (correcto/parcialmente correcto/ incorrecto o ausente).
Transfer (Postest)	– Número de grupos. – Característica común en los grupos (criterio de agrupación).	– Planteamiento de las ecuaciones (correcto/parcialmente correcto/ incorrecto o ausente). (Sólo grupo experimental). Apropiación y utilización de la regla para poner un problema en ecuaciones: – Análisis de las cantidades (ausente o incorrecto/correcto). – Establecimiento de relaciones entre las cantidades (ausente o incorrecto/parcialmente correcto/correcto). – Identificación de incógnita y asignación de un símbolo (ausente o incorrecto/correcto). – Expresión del resto de cantidades y relaciones a partir de la incógnita (ausente o incorrecto/parcialmente correcto/correcto).

Se preparó una colección de doce problemas diferentes (ver ejemplos en anexo 1) que fueron diseñados como muestra la tabla 3, según seis contextos temáticos o «superficies» diferentes y dos estructuras de entre las que pueden encontrarse en el material didáctico de Puig (1998). Estas dos estructuras se corresponden con las que tienen los problemas de móviles de «Alcanzar» (un móvil sale antes que otro y es alcanzado por el segundo) y «Encontrar» (dos móviles parten de lugares distantes entre sí uno hacia el otro y se encuentran en un punto del camino).

Los sistemas de ecuaciones que pueden escribirse implican una ordenada en el origen no nula y positiva. No se incluyen abscisas en el origen no nulas ni ordenadas en el origen negativas en ningún caso.

Los problemas utilizados en cada una de las fases y tareas se muestran en la tabla 4:

En el postest los dos problemas de «llenado de depósitos de líquido» (P3 y P4) fueron sustituidos por otros dos problemas (P11 y P12) de un contexto nuevo aún no estudiado: «gases ideales» (relación entre presión y moles a volumen y temperatura constantes) en la tarea final de agrupación. Los problemas propuestos para la tarea de transfer fueron estos mismos problemas P11 y P12.

Procedimiento

Se emplearon 6 sesiones consecutivas de 50 minutos cada una.

En la 1.ª sesión, se explicó el experimento y se realizó el pretest. La tarea de agrupación fue precedida por un entrenamiento a partir de cuatro problemas de geometría que se resolvió y explicó usando varios criterios posibles. Los ocho problemas de física y química para agrupar se ordenaron previamente por sorteo aleatorio. El orden resultante fue: P6, P7, P2, P4, P3, P5, P8, P1 y así fueron presentados ocupando dos caras din-A4.

La 6.ª sesión se dedicó al postest. El orden de los problemas para la tarea de Agrupación fue la misma que en el pretest, pero el problema P4 se sustituyó por el P12 y el problema P3 por el P11.

Las sesiones 2.ª, 3.ª, 4.ª y 5.ª conformaron la fase de tratamiento o instrucción.

La tabla 5 muestra los materiales utilizados en cada sesión.

Tabla 3
Contextos y estructuras de los problemas utilizados.

ESTRUCTURAS CONTEXTOS	PENDIENTES DEL MISMO SIGNO	PENDIENTES DE DISTINTO SIGNO
Móviles	P1	P2
Llenar depósitos	P3	P4
Calor y temperatura (a)	P5	P6
Dilatación térmica	P7	P8
Calor y temperatura (b)	P9	P10
Gases: presión y moles	P11	P12

Tabla 4
Problemas empleados en cada fase y tarea.

TAREAS FASES	AGRUPACIÓN DE PROBLEMAS	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-DIANA	ABSTRACCIÓN DE ESQUEMAS DE PROBLEMA A PARTIR DE EJEMPLOS RESUELTOS
Inicial (Pretest)	P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8	P2, P3	--
Tratamiento	--	P9, P10	P1, P2, P5, P6, P7, P8
Transfer (Postest)	P1, P2, P5, P6, P7, P8, P11, P12	P11, P12	--

Tabla 5
Materiales empleados en cada sesión de la fase de instrucción en cada uno de los grupos de tratamiento.

SESIONES FASE INSTRUCCIÓN	TRATAMIENTO CONTROL	TRATAMIENTO EXPERIMENTAL
2.ª	P1, P2	P1, P7, Correspondencias (P1, P7)
3.ª	P5, P6	P5, Correspondencias (P1, P5, P7), P9*
4.ª	P9*, P10*	P2, P8, Correspondencias (P2, P8)
5.ª	P7, P8	P6, Correspondencias (P2, P6, P8), P10*, Generalización

(*) Problemas a resolver, para controlar el avance de los estudiantes.

Los problemas de la fase de tratamiento fueron distribuidos siguiendo diferente criterio en ambos grupos de tratamiento. El grupo de control trabajó en cada sesión problemas «fuente» de idéntico tema pero de ambas estructuras. El grupo experimental trabajó en cada sesión problemas de diferente tema pero con la misma estructura. La metodología de control incluye la explicación detallada de cada problema (ver anexo 2-A) y su resolución completa, sin atención específica al proceso de traducción algebraica y sin establecer relaciones explícitas entre estructuras. La metodología experimental siguió la regla adaptada de Puig (1998) y se centró en las similitudes estructurales (ver anexo 2-B). En este grupo únicamente se llegó al planteamiento de las ecuaciones sin abordar su resolución.

RESULTADOS

Ninguno de los análisis para las distintas variables independientes mostró diferencias significativas entre los dos niveles académicos representados en la muestra, 4.º ESO y 1.º de bachillerato. Por ello, los dos niveles académicos han sido colapsados en lo que sigue. El diseño experimental se convierte entonces en factorial «2x2» con dos factores: «tratamiento instruccional» y «rendimiento académico promedio».

Fase inicial

En la tarea de agrupación de problemas el 70,0% de los sujetos en el grupo control y el 67,6% de los sujetos en el grupo experimental construyen cuatro grupos de problemas. Una inspección minuciosa de los problemas incluidos dentro de cada grupo permite ver que tan sólo un estudiante del grupo de control y nadie en el grupo experimental utiliza un criterio basado en la estructura de los problemas. El resto utiliza criterios basados en igual temática de física y química (67,5% en el grupo control y 85,3% en el experimental) o criterios basados en iguales objetos/eventos mencionados (30,0% en el grupo control y 14,7% en el experimental). No hay diferencias significativas entre ambos grupos de tratamiento en el número de grupos del problemas formados (χ^2 = 1,111; g.l. = 2; p = 0,574). El efecto del rendimiento académico promedio tampoco es significativo (χ^2 = 5,786; g.l. = 4; p = 0,216) y no hay interacción entre los dos factores.

En el problema P2, tan sólo el 5,0% de sujetos en el grupo control y el 14,7% en el grupo experimental plantean las ecuaciones correctas. No hay asociación significativa entre grupo de tratamiento y corrección en el planteamiento (χ^2 = 2,021; g.l. = 1; p = 0,155) ni tampoco asociación entre rendimiento académico promedio y corrección en el planteamiento (χ^2 = 4,321; g.l. = 2; p = 0,115). En el problema P3, los porcentajes respectivos son 15,0% y 8,8%. De nuevo encontramos equivalencia entre ambos grupos de tratamiento (χ^2 < 1) y entre los niveles de rendimiento académico (χ^2 = 2,826; g.l. = 2; p = 0,243). En ninguno de estos problemas se encuentran efectos de interacción significativos entre los dos factores.

Por tanto, antes de comenzar el tratamiento ambos grupos de tratamiento son equivalentes en las variables dependientes consideradas.

Fase de tratamiento

En esta fase se propusieron dos problemas para controlar el avance de todos los estudiantes.

En el problema P9 un 44,4% de sujetos en el grupo control y un 50,0% en el experimental realizaron un planteamiento totalmente correcto. La puntuación media de ambos grupos para el problema P9 es muy parecida: 0,53 (D.S: = 0,46) para el grupo control; 0,57 (D.S. = 0,46) para el grupo experimental. Un análisis de varianza con los dos factores indica que el efecto conjunto de estas variables no es significativo (F = 1,213; g.l. = 5; p = 0,313) y si se considera únicamente el factor instruccional tampoco hay diferencias (F < 1). El rendimiento académico promedio tampoco provoca diferencias en la puntuación (F = 1,550; g.l. = 2: p = 0,220) y no aparecen efectos de interacción entre el tipo de instrucción y el rendimiento académico (F < 1).

En el problema P10 las diferencias se hacen notables: sólo un 25,0% de los sujetos en el grupo de control realizan un planteamiento totalmente correcto, mientras que el porcentaje es el 73,5% en el grupo experimental. Las puntuaciones reflejan también las diferencias: 0,47 (D.S. = 0,38) de promedio para el grupo control y 0,79 (D.S: = 0,37) para el grupo experimental. El análisis de varianza considerando los dos factores indica que hay efectos significativos (F = 3,836; g.l. = 5; p = 0,004), y es el factor instruccional el que provoca las diferencias (F = 15,536; g.l. = 1; p < 0,001), pero no el rendimiento académico promedio (F = 1,777; g.l. = 2; p = 0,177). Tampoco en este problema hay interacción entre las dos variables (F = 1,513; g.l. = 2; p = 0,228).

El grupo control resolvió ambos problemas en las sesión 4.ª mientras el grupo de instrucción experimental resolvió P9 en la sesión 3.ª y P10 en la sesión 5.ª (Tabla 4), al final de la fase de tratamiento. En el grupo experimental, el aumento en el promedio desde la sesión 3.ª hasta la sesión 5ª es significativo según un análisis de medidas repetidas (F = 6,787; g.l. = 1; p = 0,014) sin interacción significativa con el rendimiento académico promedio (F = 1,445; g.l. = 2; p = 0,251).

Fase de transfer

Un 79,4% de estudiantes del grupo experimental y un 12,5% en el control construyen dos grupos de problemas. Si se atiende a los elementos comunes a los problemas ubicados en el mismo grupo, se encuentra que el 5,0% de sujetos en el grupo control y el 64,7% en el experimental atienden a la estructura de los problemas separando claramente los problemas del modo en que lo están en las columnas de la tabla 2. En el resto de estudiantes aparecen problemas mal clasificados según este criterio, o bien se infiere el uso de un criterio basado en la superficie de los problemas. Hay asociación significativa entre el tratamiento instruccional y la aplicación correcta del criterio de igual estructura de los problemas (χ^2 = 30,359; g.l. = 1; p < 0,001). La tabla 6 recoge estos datos.

La utilización del criterio para agrupar los problemas (igual estructura *versus* otros) no está afectado por el rendimiento académico (χ^2 = 1,902; g.l. = 2; p = 0,386).

Hay asociación significativa entre tratamiento instruccional y corrección del planteamiento, en P11 (χ^2 = 35,919; g.l. = 2; p < 0,001), y en P12 (χ^2 = 49,675; g.l. = 2; p < 0,001). Sólo un 5,0% de estudiantes en el grupo de control plantea las dos ecuaciones de forma totalmente correcta en P11, mientras que en el grupo experimental el porcentaje se eleva a 67,6%. En P12 los porcentajes respectivos son 15,0% y 97,1%.

En el planteamiento de P11 el grupo control alcanza un promedio de 0,18 puntos (D.S. = 0,29), mientras el grupo experimental alcanza 0,78 puntos (D.S. = 0,35). El análisis de varianza muestra efectos significativos sobre la puntuación (F = 14,644; g.l. = 5; p < 0,001). El tipo de instrucción es significativa (F = 58,914; g.l. = 1; p < 0,001) pero el efecto del rendimiento académico queda fuera del límite de significación (F = 2,937; g.l. = 2; p = 0,060). No hay interacción (F < 1). La potencia estadística para el efecto global es 1,00. El factor tipo de instrucción explica por sí mismo el 46,4% de la varianza de la puntuación en el planteamiento, y su potencia es máxima: 1,00. Esto permite aceptar la hipótesis alternativa para el factor instruccional. Sin embargo, el rendimiento académico promedio explica sólo el 8% de la varianza y la potencia es 0,55. Sería conveniente disponer de una muestra mayor para emitir juicios, tanto a la hora de rechazar o no la hipótesis nula, como para aceptar o no la hipótesis alternativa en este factor.

En P12 los promedios respectivos son mejores, en especial para el grupo experimental: 0,24 (D.S. = 0,38) y 0,97 (D.S. = 0,17). El análisis de varianza muestra de nuevo diferencias muy claras a favor del grupo experimental (F = 21,577; g.l. = 5; p < 0,001) debidas al factor instruccional (F = 85,160; g.l. = 1; p < 0,001). El rendimiento académico no produce efectos (F < 1) y tampoco interacciona con el factor instruccional (F < 1). La potencia estadística para el efecto global es también máxima: 1,00. El tipo de instrucción explica en este problema el 55,6% de la varianza de la puntuación en el planteamiento, y su potencia es 1,00. Por tanto, podemos aceptar la hipótesis alternativa para el factor instruccional también en este problema. El rendimiento académico promedio explica sólo el 1,5% de la varianza, y la potencia es baja, 0,13.

El 2,5% de sujetos en el grupo control y el 67,6% en el experimental plantean correctamente ambos problemas.

La gran mayoría de los estudiantes que emplean correctamente el criterio de igual estructura para agrupar problemas también plantea correctamente las ecuaciones en ambos problemas diana (87% en P11 y 100% en P12). La asociación es significativa, tanto en P11 (χ^2 = 24,658; g.l. = 2; p < 0,001) como en P12 (χ^2 = 25,230; g.l. = 2; p < 0,001). Las tablas 7 y 8 recogen estos resultados.

Tabla 6

Fase de transfer. Tarea de agrupación de problemas. Distribución de sujetos según grupo de tratamiento y criterio de agrupación.

TAREA DE AGRUPACIÓN DE PROBLEMAS (FASE DE TRANSFER)	GRUPO CONTROL	GRUPO EXPERIMENTAL
Usa correctamente el criterio de la estructura en todos los problemas	1 (2,5%)	22 (64,7%)
Usa otro(s) criterio(s) o comete errores usando el criterio basado en la estructura	39 (97,5%)	12 (35,3%)
Total	40 (100%)	34 (100%)

Tabla 7

Distribución de sujetos según criterio empleado en la agrupación de problemas y la corrección en el planteamiento del problema P11.

P11 (TODOS LOS ESTUDIANTES)	PLANTEAMIENTO		
Criterio en la agrupación de problemas	**Totalmente correcto**	**Ausente o con errores**	**Total**
Usa correctamente el criterio de la estructura	20 (87%)	3 (13%)	23 (100%)
Usa criterios superficiales o comete errores usando criterios basados en la estructura	22 (43%)	29 (57%)	51 (100%)
Total	42 (57%)	32 (43%)	74 (100%)

Tabla 8

Distribución de sujetos según criterio empleado en la agrupación de problemas y la corrección en el planteamiento del problema P12.

P12 (TODOS LOS ESTUDIANTES)	PLANTEAMIENTO		
Criterio en la agrupación de problemas	**Totalmente correcto**	**Ausente o con errores**	**Total**
Usa correctamente el criterio de la estructura	23 (100%)	0 (0%)	23 (100%)
Usa criterios superficiales o comete errores usando criterios basados en la estructura	23 (45%)	28 (55%)	51 (100%)
Total	46 (62%)	28 (38%)	74 (100%)

Las figuras 1 y 2 resumen los resultados en los dos problemas «diana» propuestos en cada fase para los dos grupos de tratamiento.

Figura 1
Comparación entre los grupos de tratamiento. Porcentajes de planteamiento totalmente correcto para cada fase del experimento. Problemas con pendientes del mismo signo.

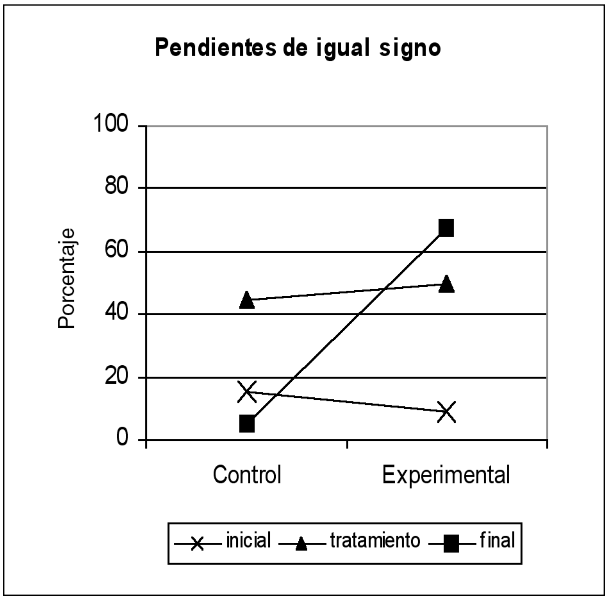
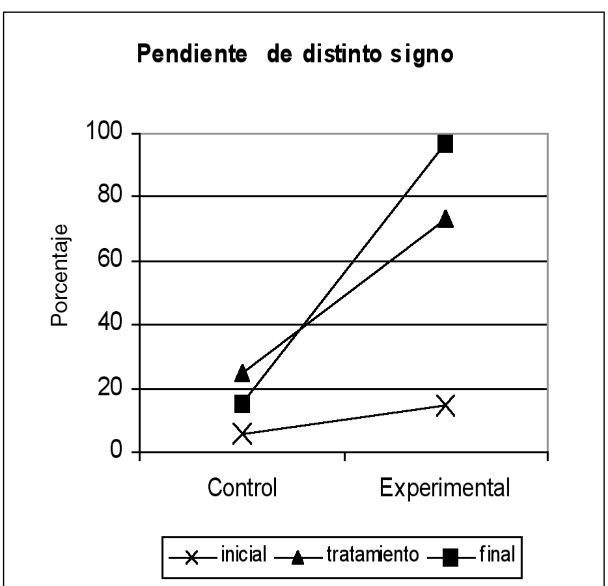


Figura 2
Comparación entre los grupos de tratamiento. Porcentajes de planteamiento totalmente correcto para cada fase del experimento. Problemas con pendientes de distinto signo.



En el problema P11 cada uno de los pasos de la regla para poner un problema en ecuaciones es explicitado correctamente por un mínimo del 67,6% de los estudiantes, pero únicamente el 52,9% explicitan y ejecutan correctamente todos y cada uno de los pasos de la regla. Todos estos estudiantes también plantean correctamente las ecuaciones de P11. La aplicación de los pasos de la regla es muy consistente (coeficiente de consistencia alfa de Cronbach = 0,857). En particular, el vínculo entre el tercer paso («analizar las relaciones entre las cantidades») y el quinto («escritura de las cantidades y sus relaciones a partir del símbolo algebraico otorgado a la incógnita identificada») es muy fuerte (rho Spearman = 0,988) y cualquiera de ellos es un excelente predictor de la puntuación en el planteamiento de este problema (R^2 corregida = 0,940).

En el problema P12 cada uno de los pasos es explicitado correctamente por un mínimo del 61,8% de los estudiantes, y también el 61,8% explicitan y ejecutan todos los pasos correctamente. De nuevo todos estos últimos plantean correctamente P12. La aplicación de los pasos de la regla para poner un problema en ecuaciones es también muy consistente (coeficiente de consistencia Alfa de Cronbach = 0,765). El vínculo entre el tercer paso («analizar las relaciones entre las cantidades») y el quinto («escritura de las cantidades y sus relaciones a partir del símbolo algebraico otorgado a la incógnita identificada») también es muy grande (rho Spearman = 0,891) y la realización correcta de cualquiera de estos dos pasos es un buen predictor de la puntuación en el planteamiento de este problema. En el caso de usar solamente «analizar las relaciones entre las cantidades», se predice el 47% de la varianza (R^2 corregida = 0,469), pero la «escritura de las cantidades y sus relaciones a partir del símbolo algebraico otorgado a la incógnita identificada» predice el 100% de la varianza (R^2 corregida = 1).

CONCLUSIONES

El objetivo fundamental de este trabajo fue contrastar una metodología instruccional experimental que tiene como foco enseñar a los estudiantes a «traducir» el enunciado de un problema al lenguaje del álgebra para superar las dificultades que muchos estudiantes de secundaria muestran a la hora de resolver problemas. Para ello se adaptó una regla propuesta por Puig (opus cit). Al mismo tiempo, la metodología experimental pretendió superar las barreras inter-dominios en ciencias para favorecer la abstracción de «esquemas de problema» generales.

Los factores independientes fueron la metodología instruccional (control y experimental), el nivel académico (4.º ESO y 1.º bachillerato) y el rendimiento académico promedio (Bajo, Medio, Alto), y las medidas dependientes se asociaron a dos tareas frecuentemente utilizadas: agrupación de problemas y planteamiento de las ecuaciones de dos problemas en un contexto temático nuevo (transfer inter-dominios). Se plantearon las siguientes hipótesis:

Hipótesis principal: «La metodología experimental mejorará significativamente la pericia de los estudiantes a la hora de plantear problemas de temas nuevos, en comparación con la de control».

Hipótesis secundaria: «Los sujetos de mayor rendimiento académico promedio y los de mayor nivel académico alcanzarán mejores resultados que los de bajo rendimiento y los de menor nivel académico, respectivamente».

Los estudiantes del grupo experimental mostraron un nivel de apropiación aceptable de la regla instruccional (Puig, 1998) pero su apropiación completa requiere más trabajo. El paso de la regla que resulta más difícil es el de «relaciones entre cantidades» a un nivel no algebraico. Este paso afecta después a la escritura correcta de las cantidades en términos de la incógnita y, por tanto, también a la escritura de la ecuación correcta. Aunque el método cartesiano pone énfasis en este análisis, nuestra instrucción experimental aún requiere mejoras en este paso concreto. La instrucción experimental consideró las relaciones elementales entre las cantidades, mediante pequeñas traducciones basadas en el conocimiento previo de los estudiantes sobre la temática de cada problema (Anexo 2). Sin embargo, esta implementación didáctica fue todavía superficial para las necesidades de muchos estudiantes.

En los límites de este experimento la hipótesis principal se confirma. Antes de la intervención ambos grupos de tratamiento instruccional se mostraron equivalentes en las variables consideradas. Ambos grupos de sujetos se comportaron inicialmente como se espera de los resolutores inexpertos. Sin embargo, tras la instrucción los resultados para el grupo experimental superaron significativamente a los del grupo de control en las medidas dependientes asociadas a la construcción de la representación algebraica de los problemas. Ello apoya el trabajo de Bassok y Holyoak (1989): se requieren diseños de instrucción basados en reglas generalizadas para el transfer inter-dominios. En nuestro caso, la regla generalizada atiende a la estructura de los problemas común a varias temáticas y enseña a construir la representación modelo del problema correcta a partir de las proposiciones del enunciado.

En la resolución de problemas de un tema nuevo, uno de cada una de las estructuras consideradas en el experimento, las diferencias entre grupos fueron significativas. En el grupo control los porcentajes de sujetos que plantearon correctamente las ecuaciones de los problemas fueron claramente insuficientes. Esto prueba que el reconocimiento de la estructura subyacente en los problemas a partir de su enunciado es una tarea difícil para los estudiantes y que las similitudes superficiales (igualdad temática) de los problemas ejemplo no ayudan a ello, de acuerdo con Reeves y Weisberg (1994). En el grupo experimental, el transfer inter-dominios tuvo un nivel alto de éxito.

En la tarea de agrupación de problemas (relacionada con la codificación inicial), aunque el porcentaje de sujetos del grupo experimental que usó el criterio de estructura común es mejorable, fue claramente superior al del grupo control. Esta tarea no fue explícitamente propuesta ni trabajada durante la instrucción y los estudiantes utilizaron los criterios de agrupación de forma espontánea aunque influidos por la instrucción recibida.

Los estudiantes que emplean correctamente el criterio de la estructura común para agrupar problemas tienen alta probabilidad de plantear después correctamente los problemas que se proponen en la fase de transfer. Este resultado es coherente con las conclusiones de Chi y colaboradores (1981) en las que el criterio de agrupación según la estructura de los problemas es propio de expertos y está asociado a una resolución correcta.

No hemos podido confirmar la hipótesis secundaria. El nivel académico no ha producido diferencias en el rendimiento de los estudiantes en ninguna de las medidas tomadas en las tareas realizadas. Se requieren medidas más precisas de la base de conocimientos de los estudiantes para el contraste de esa hipótesis antes de darla por refutada. Nuestra medida es demasiado gruesa y se basa en la suposición de que el nivel académico superior (1.º bachillerato) debe tener globalmente una base de conocimientos más elaborada que el nivel inferior (4.º de ESO). Sin embargo, ya antes de la intervención, las diferencias entre estos cursos consecutivos no eran significativas. Tampoco el rendimiento académico promedio global de los estudiantes (que implica variables como la atención y dedicación, destrezas cognitivas y metacognitivas) produjo diferencias en las medidas dependientes. Las medidas obtenidas para esta variable se consideran fiables, por lo que la hipótesis secundaria se refuta en lo que respecta a ella.

Aunque los resultados obtenidos no son generalizables, la metodología instruccional utilizada podría tener algunas ventajas en las aulas:

a) Es sencilla, ya que la mayoría de estudiantes se la apropia y la utiliza correctamente en muy pocas sesiones.

b) Es muy útil, ya que muchos problemas de ciencias y matemáticas propuestos en secundaria tienen estructura algebraica.

c) Resuelve, en un porcentaje grande, las dificultades que muchos estudiantes tienen para plantear formalmente (y resolver después con éxito) los problemas con enunciado de ciencias y matemáticas.

d) Aumenta la transferencia entre temas diferentes y fomenta la conexión y la coherencia entre áreas diferentes de la ciencia.

e) Permite concentrar la atención didáctica sobre los procesos de modelado científico de la realidad, liberando recursos cognitivos que normalmente se requieren para comprender por qué ciertas ecuaciones se corresponden con ciertos enunciados.

Es necesario replicar estos resultados y realizar un experimento con muestreo representativo para poder extraer conclusiones de alta validez externa. En todo caso, los resultados preliminares son alentadores.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSON, J. (1995). *Learning and Memory: An Integrated Approach*. Nueva York: Wiley.

BARNETT, S.M. y CECI, S.J. (2002). When and where do we apply what we learn? A taxonomy for far transfer. *Psychological Bulletin*, 128(4), pp. 612-637.

BASSOK, M. y HOLYOAK, K.J. (1989). Interdomain transfer between isomorphic topics in algebra and physics. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 15, pp. 153-166.

BUTELER, L., GANGOSO, Z., BRINCONES, I. y GONZÁLEZ, M. (2001). La resolución de problemas en física y su representación: un estudio en la escuela media. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(2), pp. 285-295.

CARPENTER, T.P., HIEBERT, J. y MOSER, J.M. (1981). Problem structure and first grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12(1), pp. 27-39.

CERDÁN, F. (2008). Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos. Tesis doctoral. Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València, España.

CHI, M.T.H., FELTOVICH, P.J. y GLASER, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by novices and experts. *Cognitive Science*, 5, pp. 121-152.

CHRISTOU, C. y PHILIPPOU, G. (1998). The developmental nature of ability to solve onestep word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(4), pp. 436-443.

COLEONI, E.A., OTERO, J.C., GANGOSO, Z. y HAMITY, V. (2001). La construcción de la representación en la resolución de un problema de física. *Investigaçoes em Ensino de Ciências*, 6(3), en <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm>.

FERGUSON-HESSLER, M.G. y DE JONG, T. (1990). Studying Physics Texts: Differences in study processes between good and poor performers. *Cognition and Instruction*, 7, pp. 41-54.

FILLOY, E., ROJANO, T. y PUIG, L. (2008). Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach. Nueva York: Springer Verlag. Mathematics Education Library, 43.

FILLOY, E., ROJANO, T. y SOLARES, A. (2008). Cognitive tendences and generating meaning in the acquisition of algebraic substitution and comparison methods. Proceedings of the Joint Meeting of the PME 32 and PME-NA XXX, 3, pp. 9-16.

GENTNER, D. (1983). Structure-mapping. A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7, pp. 155-170.

GICK, M.L. y HOLYOAK, K.J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, 15, pp. 1-38

GIL, D. y MARTÍNEZ-TORREGROSA, J. (1983). A model for problem-solving in accordance with scientific methodology. *European Journal of Science Education*, 5(4), pp. 447-455.

GOLDSTONE, R.L. y SAKAMOTO, Y. (2003). The transfer of abstract principles governing complex adaptative systems. *Cognitive Psychology*, 46, pp. 414-466.

GRECA, I.M. y MOREIRA, M.A. (1996). Un estudio piloto sobre representaciones mentales, imágenes, proposiciones y modelos mentales respecto al concepto de campo electromagnético en alumnos de física general, estudiantes de posgrado y físicos profesionales. *Investigaçoes em Ensino de Ciências*, 1(1), en <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm>.

HEGARTY, M., MAYER, R. E. y MONK, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology*, 87(1), pp. 18-32.

HOLYOAK, K.J. (1984). Analogical thinking and human intelligence, en Sternberg, R.J. (ed.). *Advances in the psychology of human intelligence*, 2, pp. 199-230. Hilsdale, NJ: Erlbaum.

HOLYOAK, K.J. y KOH, K. (1987). Surface and structural similarity in analogical transfer. *Memory & Cognition*, 15(4), pp. 332-340.

JONASSEN, D.H. (2003). Using cognitive tools to represent problems. *Journal of Research on Technology in Education*, 35(3), pp. 362-381.

KINTSCH, W. y GREENO, J.G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92(1), pp. 109-129.

KINTSCH, W. y VAN DIJK, T. A. (1978). Toward a model of discourse comprehension and production. *Psychological Review*, 85, pp. 363-394.

KOEDINGER, K.R. y NATHAN, M.J. (2004). The Real Story Behind Story Problems: Effects of Representations on Quantitative Reasoning. *Journal of the Learning Sciences,* 13(2), pp. 129-164.

LARKIN, J. y REIF, F. (1979). Understanding and teaching problem solving in physics. *European Journal of Science Education*, 1(2), pp. 191-203.

LEWIS, M.W. y ANDERSON, J.R. (1985). Discrimination of operator schemata in problem solving: Learning from examples. *Cognitive Psychology*, 17, pp. 26-65.

LOEWENSTEIN, J., THOMPSON, L. y GENTNER, D. (1999). Analogical encoding facilitates knowledge transfer in negotiation. *Psychonomic Bulletin & Review*, 6, pp. 586-597.

MAYER, R.E. (1992). *Thinking, problem solving and cognition*. Nueva York: Freeman.

NAKHLEH, M.B. (1993). Are our students conceptual thinkers or algorithmic problem solvers? *Journal of Chemical Education*, 70(1), pp. 52-55.

NESHER, P. y HERSHKOVITZ, S. (1994). The role of schemes in two-step problem: Analysis and research findings. *Educational Studies in Mathematics*, 26(1), pp. 1-23.

NEWEL, A. y SIMON, H.A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

NOVICK, L.R. (1988). Analogical transfer, problem similarity and expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory & Cognition*, 14(3), pp. 510-520.

ORRANTIA, J., GONZÁLEZ, L.B. y VICENTE, S. (2005).

Analysing arithmetic word problems in Primary Education textbooks. *Infancia y Aprendizaje*, 28(4), pp. 429-451.

OTERO, M.R., PAPINI, C. y ELICHIRIBEHETY, I. (1998). Las representaciones mentales y la resolución de un problema: Un estudio exploratorio. *Investigaçoes em Ensino de Ciencias*, 3(1) art 7. <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol3/n1/7indice.htm>.

POLYA, M. (1957). *How to solve it*. (2nd Ed.). Nueva York: Doubleday.

PUIG, L. (1998). Poner un problema en ecuaciones. Consultado el 2 de abril de 2008 en <http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf>.

PUIG, L. y CERDÁN, F. (1988). Problemas aritméticos escolares. Madrid: Síntesis.

PUIG, L. y CERDÁN, F. (1990). La estructura de los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas. *Cuadernos de Investigación*, 15, pp. 1-33.

PUIG, T. y ROJANO, T. (2004). The history of algebra in mathematics education, en Stacey, K., Chick, H. y Kendal, M. (eds.). *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study*, pp. 189-224. Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.

REBELLO, N.S., CUI, L., BENNET, A.G., ZOLLMAN, D.A. y OZIMEK, D.J. (2007). Transfer of learning in problem solving in the context of mathematics and physics, en Jonassen, D. (ed.). *Learning to solve complex scientific problems*. Hillsdale, NJ: L.Earlbaum.

REED, S.K. (1987). A structure-mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 13, pp. 124-139.

REED, S.K., DEMPSTER, A. y ETTINGER, M. (1985). Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 11, pp. 106-125.

REEVES, L.M. y WEISBERG, R.W. (1994). The role of content and abstract information in analogical transfer. *Psychological Bulletin*, 115, pp. 381-400.

SANJOSÉ, V., VALENZUELA, T., FORTES, M.C. y SOLAZ-PORTOLÉS, J.J. (2007). Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por transferencia. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias,* 6(3), 538-561, en <http://www.saum.uvigo.es/reec>.

SOLARES, A. (2007). Sistemas matemáticos de signos y distintos niveles de representación de la incógnita. Tesis doctoral. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México.

SOLAZ-PORTOLÉS, J.J. y SANJOSÉ, V. (2006). Problemas algorítmicos y conceptuales: Influencia de algunas variables instruccionales. *Educación Química*, 17(3), pp. 372-378.

SOLAZ-PORTOLÉS, J.J. y SANJOSÉ, V. (2007). Cognitive variables in science problem solving. *Journal of Physics Teacher Education on Line,* 4(2), pp. 25-32.

VALENTIN, J.D. y CHAP-SAM, L. (2005). Roles of semantic structure of arithmetic word problems on pupils» ability to identify the correct operation. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning (electronic journal)*, en <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/valentin.pdf>. (May 4th).

VAN DIJK, T. A. y KINTSCH, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*. Nueva York: Academic Press.

[Artículo recibido en abril de 2008 y aceptado en octubre de 2008]

ANEXO 1

Ejemplos de problemas empleados, según su estructura y superficie.

Estructura: Pendientes del mismo signo	**Estructura: Pendientes de distinto signo**
Contexto: Móviles	
P1 Un coche parte del pueblo A hacia el pueblo B moviéndose con velocidad constante de 60 km/h. Dos horas más tarde, una moto parte de A hacia B y viaja con una velocidad constante de 80 km/h. Al cabo de un tiempo la moto alcanza al coche en el punto C. ¿Cuánto tiempo tarda la moto en alcanzar al coche? ¿A qué distancia de A está el punto C?	**P2** Prude y Vilda son dos ciudades que se encuentran situadas en dos puntos de una misma carretera. Prude está en el punto kilométrico 20 de esa carretera, mientras Vilda está en el punto kilométrico 140. Un coche parte desde Prude hacia Vilda viajando con velocidad media de 60 km/h. Al mismo tiempo un camión parte de Vilda hacia Prude desplazándose con una velocidad media de 40 km/h. Ambos vehículos se encuentran (se cruzan) en el punto C de la carretera. ¿Cuánto tiempo pasa desde que ambos vehículos iniciaron el viaje hasta que se encuentran en C? ¿En qué punto kilométrico se encuentran ambos vehículos?

Estructura: Pendientes del mismo signo	**Estructura: Pendientes de distinto signo**
Contexto: Gases	
P11 Dos recipientes cerrados de diferente volumen contienen gas a distinta temperatura. El volumen y la temperatura en el interior de ambos recipientes se mantienen constantes. La presión inicial de ambos recipientes es la misma: 1 atmósfera. Mediante dos inyectores se va a introducir más gas en cada recipiente. Se inyecta oxígeno en el primero, aumentando la presión del interior del recipiente a razón de 0,32 atm/mol. Cuando ya se han introducido 5 moles de oxígeno, se comienza a inyectar simultáneamente oxígeno en el segundo recipiente de modo que la presión interior aumenta a razón de 0,42 atm/mol. En un cierto momento las presiones interiores en ambos recipientes vuelven a ser iguales. En ese momento, ¿cuántos moles de oxígeno habremos inyectado en el segundo recipiente? ¿Cuál será la presión final en cada recipiente?	**P12** En una fábrica hay dos depósitos de cloro gaseoso cerrados, a diferente temperatura constante y distinto volumen fijo. Inicialmente el primer depósito está a una presión interior de 2 atmósferas y el segundo a 4 atmósferas. Si mediante una bomba para gases se extrae gas del segundo depósito y se inyecta en el primero, la presión del segundo disminuye a razón de 0,2 atm/mol mientras que la presión del primero aumenta a razón de 0,6 atm/mol. Cuando se igualan las presiones en el interior de ambos depósitos, ¿cuántos moles de gas cloro se habrán extraído e inyectado? ¿Cuál es la presión final en ambos depósitos?

ANEXO 2

Ejemplo de procedimiento de resolución y explicación de un problema según la metodología de control y la experimental.

P5. La temperatura inicial de dos objetos A y B es la misma, 10 ºC. Se van a calentar estos cuerpos usando dos llamas idénticas. En primer lugar se pone a calentar el cuerpo A y se observa que su temperatura aumenta a razón de 0,005 ºC/cal. Cuando se han transferido 1.000 cal al cuerpo A se pone B también a calentar y se observa que su temperatura aumenta a razón de 0,01 ºC/cal. Ambos cuerpos continúan calentándose a la vez. ¿Cuántas calorías se habrán transferido al cuerpo B cuando finalmente las temperaturas de A y B se igualen? ¿Cuál será entonces la temperatura de los dos cuerpos?

A: Resolución empleada en el grupo control
(En primer lugar se dibuja un esquema en el que aparece representada la situación descrita con las cantidades que nos proporciona explícitamente el enunciado del problema).
Se trata de dos cuerpos A y B con la misma temperatura inicial, $T_{Ai} = T_{Bi} = 10$ ºC. Cuando se calienta A, por cada unidad de calor suministrado (por cada caloría) su temperatura aumenta 0,005 ºC. El proceso de calentar A sigue hasta que se le ha transferido calor por valor de 1.000 cal y A habrá aumentado su temperatura hasta un cierto valor que no sabemos aún. Hasta ese momento, B ha permanecido con su temperatura inicial y está más frío que A. Ahora A y B se calientan a la vez. El cuerpo B aumenta su temperatura 0,01 ºC por cada caloría recibida al calentarlo, es decir, aumenta su temperatura el doble que A por cada caloría, así que su temperatura aumenta más rápido que la de A. En algún momento la temperatura de B puede alcanzar la temperatura de A. El problema pide precisamente el calor que se habrá transferido al cuerpo B cuando ambas temperaturas sean iguales y el valor de dicha temperatura.
Sabemos que el aumento de temperatura de un cuerpo es proporcional a la cantidad de calor que se le suministra: $T_f - T_i = k.Q$, donde k es un valor constante cuyas unidades son ºC/cal y cuyo valor numérico depende de cada cuerpo: masa y tipo de material. En nuestro caso, para el cuerpo A el valor de esta constante es $k_A = 0{,}005$ ºC/cal, y para el cuerpo B vale, $k_B = 0{,}01$ ºC/cal. Como el cuerpo A ya ha recibido 1.000 cal cuando se comienza a calentar el cuerpo B, podemos escribir las siguientes ecuaciones:
$T_{Af} - 10 = 0{,}005\ (1.000 + Q)$
$T_{Bf} - 10 = 0{,}01.Q$
Como nos dicen que las temperaturas finales han de ser la misma, podemos poner $T_{Af} = T_{Bf}$ y representarlas simplemente como T_f:
$T_f - 10 = 0{,}005\ (1.000 + Q)$
$T_f - 10 = 0{,}01.Q$
Ahora tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas cuya resolución conocemos:
$10 + 5 + 0{,}005.Q = 10 + 0{,}01.Q$; → $5 = 0{,}005.Q$; → **Q = 1.000 cal**.
Entonces podemos encontrar el valor de $T_f = 10 + 0{,}01 \times 1.000$; → $\mathbf{T_f = 20}$ **ºC**.
Solución: *cuando las temperaturas sean iguales en ambos cuerpos se habrían transferido 1.000 cal al cuerpo B y la temperatura de ambos será de 20 ºC.*

B: Resolución empleada en el grupo experimental
Situación: (*Se dibuja el mismo esquema que en el grupo control, en el que aparece representada la situación descrita con las cantidades que nos proporciona explícitamente el enunciado del problema*).
Aplicación de la «regla para poner un problema en ecuaciones»

Paso 1. Análisis de las cantidades:

-Temperatura inicial de A, $T_{Ai} = 10$ ºC	-Temperatura inicial de B, $T_{Bi} = 10$ ºC
-Variación previa de temperatura en A, antes de que B empiece a calentarse	---
-Variación posterior de temperatura en A (cuando B se está calentando a la vez)	-Variación de la temperatura en B
-Temperatura final de A	-Temperatura final de B
-Calor que recibe A antes de que B empiece a calentarse: 1.000 cal	---
-Calor que recibe A cuando B se calienta a la vez	-Calor que recibe B
-Constante característica de A, $k_A = 0{,}005$ ºC/cal	-Constante característica de B, $k_B = 0{,}01$ ºC/cal

Paso 2. Relaciones entre las cantidades:
Variación en la temperatura de un cuerpo es proporcional al calor transferido al cuerpo. La constante de proporcionalidad es una característica de cada cuerpo. Podemos escribir:
Variación en la temperatura de un cuerpo = cte X calor transferido al cuerpo
Antes de que comience a calentarse el cuerpo B:
Variación en la temperatura de A antes de calentar B = k_A . 1.000 cal
Cuando comienza a calentarse B, sigue calentándose A:

Variación en temp de A = k_A . Q comunicado a A	Variación en temp de B = k_B . Q comunicado a B
Llamas idénticas para los dos cuerpos y mismo tiempo: Q comunicado a A = Q comunicado a B	

La temperatura final será la temperatura inicial + la variación de temperatura durante el calentamiento. Por tanto:
Temperatura final A = Temperatura inicial A + Variación de temperatura antes de comenzar a calentar B + Variación de temperatura durante el calentamiento de B
Temperatura final B = Temperatura inicial B + Variación de temperatura durante el calentamiento de B.

Paso 3. Identificación de una incógnita y asignación de símbolo algebraico:
Designamos con una "x" al calor comunicado a B.

Paso 4. Escritura del resto de cantidades y de las relaciones entre ellas a partir del símbolo algebraico elegido para la incógnita identificada.
Entonces podemos usar las relaciones entre cantidades para asignar valor a las otras cantidades en función de "x".

Cantidades	Calor comunicado (cal)	Cte característica (ºC/cal)	Temp inicial (ºC)	Variación de temp antes de calentar B (ºC)	Variación de temp (ºC) mientas B calienta	Temp final (ºC)
Obj A	1.000 + x	0,005	10	0,005.1.000	0,005.x	10 + 0,005.1.000 + 0,005.x
Obj B	**x**	0,01	10	0	0,01.x	10 + 0,01.x

Paso 5. Igualar dos modos de expresar la misma cantidad para obtener la ecuación:
La condición del problema es que las temperaturas de ambos cuerpos se igualen:
Temp final A = Temp final B
Por tanto:
10 + 0,005.1.000 + 0,005.x = 10 + 0,01.x; que es la ecuación a resolver.

Inter-domain transfer in problem solving: an instructional methodology based on the «algebraic translation» process

Sanjose, Vicente[1], Solaz-Portolés, Joan Josep[2] y Valenzuela, Tomás[3]
[1] Science Education. ERI-Polibienestar. Universitat de València, España
[2] IES Benaguasil 46183 / C. Tomás y Valiente. UNED, València, España.
[3] Generalitat Valenciana, España
vicente.sanjose@uv.es2
solpor@telefonica.net
tomas.valenzuela@alumni.uv.es

Abstract

Introduction

Secondary students have difficulties solving algebraic word problems. The main focus is the transition from the concrete representation to the mathematic one. In order to facilitate the «algebraic translation» of the problems, we adapt a «rule to put a problem into equations» by Puig (1998) and insert it in an experimental methodology devoted to improving the inter-domain transfer in science. The rule is based on the following «steps»:

1. Understanding the situation described, i.e. constructing a mental representation.
2. Identifying the given quantities and the unknowns.
3. Studying the relationships between the identified quantities at a qualitative level.
4. Labelling one of the unknown quantities («the unknown») by one letter (‘x’, ‘t’…).
5. Using the relationships obtained in step 3 to write other quantities in terms of the letter used to identify ‘the unknown’.
6. Obtaining an equation by writing the same quantity in two different forms and using “=” to equal it.

This «experimental methodology» will be compared to the «control methodology» that does not use any rule to work on the algebraic translation of the problem statement. We expect the experimental methodology to improve the students’ success in problem-solving transfer as compared to the control methodology.

Method

A total of 92 students of both sexes from two middle schools in two cities participated in the study. Students’ natural groups were respected. All the subjects studied physics and chemistry during the course.

We conducted the experiment in 3 phases: pre-test, instructional treatment and transfer (post-test). The independent factors were: i) methodology (experimental/ control); ii) students’ course (8-grade/ 9-grade); iii) students’ overall academic mark (A, B, C, D, E). The latter two factors could affect the performance in transfer activities. We proposed two tasks: a) grouping problems by reading their statements (Chi et al.; 1981); b) solving two problems in a never-studied physics topic (inter-domain transfer). The independent variables were: 1) Criteria: grouping by problem structure/ by problem surface or others; 2) Correctness of the equations: correct/ just one mistake/ two or more mistakes. The experiment was conducted during 6 consecutive 50 min sessions. The first one was devoted to the pre-test and the last one to the post-test. In the remaining 4 sessions students were instructed following the experimental methodology or the control methodology.

A total of 6 topics X 2 structures (i.e. mathematical relations among quantities) = 12 problems were used. One topic (2 problems) was reserved for the transfer post-test. Ten problems of both structures in 5 different topics were solved and explained to the students in the instructional sessions. The two linear equations to solve the problems contained just one positive y-intercept and no x-intercepts. The two structures considered were: two positive slopes or one positive and one negative slope for the two straights.

Results and Discussion

None of the analysis showed significant effects of the students’ course factor. Therefore, we collapsed the students’ course further on.

Pre-test. We tested the equivalence of the experimental groups prior to the instruction. They were equivalent for the independent factors. Both performed low solving two new problems and used a surface criterion to group problems.

Post-test. The experimental methodology was associated with the structural criterion for the grouping task (X^2= 30.359; g.l.=1; p< 0.001), but the student overall academic performance (A, B, Other) was not (X^2= 1,902; g.l.=2; p= 0.386). We graded the correctness of the equations in the problem-solving transfer task: full correct= 1.0 point/ just one mistake= 0.5 p./ two or more errors= 0.0 p. The experimental methodology produced also significant improvement in the scores of the two problems (F= 58.914; g.l.=1; p< 0.001; F= 85.160; g.l.=1; p< 0.001). Again, the global academic performance was not important (F= 2.937; g.l.=2; p= 0.060; F< 1).

In both transfer problems students in the experimental condition used the trained rule in a very consistent way (Cronbach’s alphas = 0,857 and 0,765).

Therefore, the main hypothesis is confirmed: results show the power of Puig’s rule to overcome most of the students’ difficulties, no matter their average academic performance.

References

Chi, M.T.H., Feltovich, P.J. and Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by novices and experts. Cognitive Science, 5, 121-152.

Puig, L. (1998). Poner un problema en ecuaciones. Consulted in April, 20, 2009 in: http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf.