

# UN MODELO PARA POTENCIAR Y ANALIZAR LAS COMPETENCIAS GEOMÉTRICAS Y COMUNICATIVAS EN UN ENTORNO INTERACTIVO DE APRENDIZAJE

**MURILLO RAMÓN, JESÚS y MARCOS LORENZON, GUILLERMINA**

Universidad de La Rioja. Departamento de Matemáticas y Computación. Área de Didáctica de la Matemática.

jmurillo@unirioja.es

guillermina.marcos@alum.unirioja.es

---

**Resumen.** Proponemos un modelo para potenciar y analizar el desarrollo de ciertas competencias matemáticas por parte de alumnos de Educación Secundaria Obligatoria, cuando los mismos desarrollan trabajo colaborativo en un entorno interactivo de aprendizaje que utiliza soportes informáticos. Describimos brevemente dicho entorno interactivo de aprendizaje y presentamos los instrumentos diseñados y utilizados para el estudio de su eficacia en relación con el desarrollo de las competencias mencionadas e ilustramos su utilización.

**Palabras clave.** Aprendizaje de la Geometría, atención a la diversidad, competencia comunicativa, Cabri, entorno interactivo.

---

## **A model to encourage and analyze geometric and communicative competences in an interactive learning environment**

**Summary.** We propose a model to encourage and analyze the development of some particular mathematical competences in secondary education students when they carry out collaborative work in an interactive learning environment using information technology. We briefly describe this interactive learning environment and present the instruments designed and used to study of their effectiveness in relation to the development of the competences mentioned also illustrating their use.

**Keywords.** Geometry learning, attention to diversity, communicative competence, Cabri, interactive environment.

---

## **1. INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO**

El entorno interactivo de aprendizaje está básicamente constituido por una red electrónica, Internet, software de correo y de navegación de dominio público, un foro de discusión y el software de geometría dinámica Cabri Géomètre. Se pone en práctica en el marco de la asignatura optativa «Taller de Matemáticas», destinada a alumnos de 3º de ESO, que se imparte en un IES de Logroño.

Queremos analizar la eficacia de este entorno interactivo, en relación con la adquisición de determinadas competencias matemáticas, relacionadas con el aprendizaje de la Geometría y con la competencia comunicativa matemática.

Es innegable que las TIC están produciendo una revolución en nuestra sociedad actual y en particular sobre los sistemas educativos, que conlleva un replanteamiento del concepto de formación general e incluso el de persona alfabetizada: «En consecuencia, una persona culta y alfabetizada en relación con el acceso a la información a través de las nuevas tecnologías requiere que la misma: domine el manejo técnico de cada tecnología, posea un conjunto de conocimientos y habilidades específicos que les permitan buscar, seleccionar, analizar...» (Área, 1999: p. 5).

Ante esta nueva definición de «persona alfabetizada», es imprescindible realizar replanteamientos que permitan el

desarrollo de este nuevo tipo de competencias, integrando los recursos informáticos en las actividades. Con relación a cuál es el espacio más apropiado para realizar tal incorporación, más allá de que existan espacios curriculares específicos para tal fin, está claro que también es necesario incorporar las TIC a través de cada espacio curricular, en particular, a través de la clase de Matemáticas.

Consideramos que el entorno de aprendizaje utilizado responde a los planteamientos anteriores, potenciando un aprendizaje autónomo y significativo, con el que se facilite la participación del alumno en su propio aprendizaje y se potencie su habilidad en el uso de las TIC.

Destacamos que el trabajo en Geometría favorece el complejo proceso de interrelaciones entre conceptos, símbolos y objetos reales; permite comprender, recordar, comunicar con relación a los conceptos, construir conceptos nuevos... «*Es la complejidad cognitiva subyacente la que proporciona el interés básico de la geometría (...) La geometría, más allá que otras áreas matemáticas, puede ser usada para descubrir y desarrollar diferentes formas de pensamiento...*» (Duval, 2001: pp. 13-14).

La relevancia del desarrollo de la capacidad de comunicarse matemáticamente y del papel del lenguaje en el aprendizaje de las Matemáticas, se ve reflejado tanto en numerosas investigaciones de Didáctica de las Matemáticas (Godino 2001, Neshher 2000, Niss 1999, Duval 2001,...), como en las orientaciones curriculares de muchos países. Según los NCTM: «*A medida que los estudiantes van desarrollando una comunicación más clara y coherente (utilizando explicaciones verbales y notaciones y representaciones matemáticas apropiadas), se van convirtiendo en mejores pensadores matemáticos*» (NCTM, 2000: pp. 64-67).

El RD 1631/2006, que establece los contenidos mínimos para la ESO, afirma: «*Las Matemáticas contribuyen a la competencia en comunicación lingüística ya que son concebidas como un área de expresión que utiliza continuamente la expresión oral y escrita en la formulación y expresión de las ideas... El propio lenguaje matemático es, en sí mismo, un vehículo de comunicación de ideas que destaca por la precisión en sus términos y por su gran capacidad para transmitir conjeturas gracias a un léxico propio de carácter sintético, simbólico y abstracto*» (MEC, 2006: pp. 677-773).

El lenguaje matemático, el geométrico en particular, constituye un sistema muy complejo dado su carácter mixto; mixto en el sentido de que incluye un lenguaje natural y un lenguaje simbólico específico en permanente interacción y que a su vez también contiene registros semióticos no lingüísticos como son los gráficos (figuras, diagramas, representaciones geométricas).

Varios investigadores han estudiado en particular las conexiones entre el discurso escrito y las matemáticas: el discurso escrito como soporte del aprendizaje matemático con alumnos (Morgan, 1998), el discurso escrito y la reflexión crítica (Powell, 1995, 2001), el discurso escrito y las posibilidades de reflexión en la formación del profesorado de

matemáticas (Almeida, 2002; Menezes Freitas y Fiorentini, 2004). Si bien casi todas las investigaciones se centran en la producción de textos escritos en clases presenciales, es cierto que últimamente ha cobrado importancia el discurso escrito en entornos virtuales, utilizado éste como herramienta para las teleinteracciones con alumnos, especialmente en casos de alumnos deportistas (Figueiras, 2000) o en asistencia hospitalaria (Fortuny y Jiménez, 2000).

Neshher (2000) distingue entre dos acciones: «hablar matemáticamente» y «hablar de matemáticas». Con el término «hablar matemáticamente», se refiere a usar el lenguaje matemático aplicándolo a variados contextos, pero teniendo en cuenta su propia sintaxis. Con la expresión «hablar de matemáticas», se hace referencia al hecho de utilizar el lenguaje natural como metalenguaje para expresar ideas matemáticas. Creemos que esta modalidad comunicativa favorece el desarrollo de la competencia comunicativa en Matemáticas en particular y la mejora de las capacidades geométricas en general, en tanto que propicia la interacción, el intercambio y la reflexión.

Coincidimos con Neshher en que cuando los alumnos producen este tipo de argumentos, utilizando el lenguaje natural como metalenguaje, desarrollan aprendizaje matemático; en particular cuando los alumnos comunican sus estrategias geométricas en este modo mixto, desarrollan aprendizaje geométrico.

En nuestro caso, adaptando la expresión «hablar de matemáticas» propuesta por Neshher a la de «escribir de geometría», para referirnos al proceso de producción de discursos –escritos– en los que los alumnos explican, justifican, describen el procedimiento que han llevado a cabo para la resolución de problemas, empleando el lenguaje natural como metalenguaje.

Debido al formato «enseñanza bimodal»<sup>1</sup> que implementamos, la producción de discursos escritos juega un rol superador al de «tarea escolar», ya que adquiere una dimensión comunicativa real e imprescindible en las interacciones profesor-alumno y alumno-alumno.

Hemos planteado una metodología de trabajo en la que el alumno participa formalmente y de manera activa, realizando y compartiendo descubrimientos que le provoquen una actividad interna, resultado de la interacción entre la reflexión, la actividad externa y la información recibida. En el trabajo colaborativo, la necesidad de articular y explicar al grupo las ideas propias lleva a que éstas sean más concretas y precisas y a organizar e integrar más el conocimiento. Los momentos de interacción permiten a los alumnos tomar conciencia del grado de dominio adquirido, pero también reconocer lo que todavía no logran hacer solos y los medios de los que disponen para alcanzar ese objetivo.

En este marco, adquiere gran importancia la resolución de problemas, y el «aprender matemáticas» se identifica con el «hacer matemáticas»; siguiendo a Brousseau (1986): «No hacemos matemática sino cuando nos ocupamos de problemas».

## 2. OBJETIVOS

Pretendemos analizar los beneficios cognitivos que se producen en nuestros alumnos en relación con el desarrollo de determinadas competencias matemáticas: competencia comunicativa y con el aprendizaje de la Geometría, cuando desarrollan trabajo colaborativo, utilizando un entorno interactivo de aprendizaje soportado por medios informáticos en el que la tutorización se lleva a cabo de manera no tradicional.

Objetivos de la investigación que se muestran en este artículo:

- Diseñar actividades adecuadas al medio utilizado, a los contenidos y a los objetivos propuestos para los alumnos, que permitan atender a la diversidad en el aula (adaptables a cada interlocutor) y el máximo desarrollo de las potencialidades de cada alumno.
- Diseñar instrumentos e indicadores adecuados para el análisis de los aprendizajes de los alumnos, relacionados con el desarrollo de la competencia comunicativa matemática y el aprendizaje de la Geometría.

## 3. METODOLOGÍA

Establecemos a continuación los aspectos metodológicos más importantes seguidos con los alumnos y en el desarrollo de nuestra investigación.

### 3.1. Metodología de trabajo con los alumnos

El «Taller de Matemáticas» es una asignatura optativa destinada a alumnos de 3º de ESO que se imparte en un IES de Logroño; en ella utilizamos el entorno interactivo citado anteriormente.

Diferenciamos tres fases o etapas que denominamos: «etapa presencial», «etapa correo electrónico» y «etapa foro electrónico», que aparecen cronológicamente en el orden en que se han mencionado; no obstante, la aparición de una no supone la finalización de la anterior sino que en muchos casos coexisten.

En la «etapa presencial», se trabaja con los alumnos sobre el manejo del entorno interactivo y del software correspondiente. Pretendemos que los alumnos aprendan a utilizar el programa y el entorno, a través de la resolución de problemas geométricos. Las actividades se proponen por escrito y las clases son coordinadas por un «profesor presencial» que acompaña a los alumnos en el aula.

En la «etapa correo electrónico» se incorpora a las clases una nueva figura, la del «profesor virtual», y con él una dinámica de trabajo diferente y la necesidad de manejar no sólo Cabri como parte del entorno de aprendizaje y la Geometría como tema, sino también una manera de comunicación e interacción diferente.

En la «etapa foro electrónico», la dinámica vuelve a cambiar y las interacciones vuelven a incrementarse, dado que las actividades se plantean a través de un foro en el que participan alumnos y profesor.

En estas dos últimas fases, los intercambios están mediados exclusivamente por las TIC; se producen a través del correo electrónico, del foro y de la página Web del proyecto, lo que supone aprender a utilizar esta nueva herramienta para comunicarse. Esta modalidad de comunicación alumno-profesor y alumno-alumno, incluye tanto las actividades como sus resoluciones, las consultas de dudas o solicitudes de ayudas, las réplicas y contrarréplicas e incluso los comentarios personales.

#### 3.1.1. El enfoque por competencias

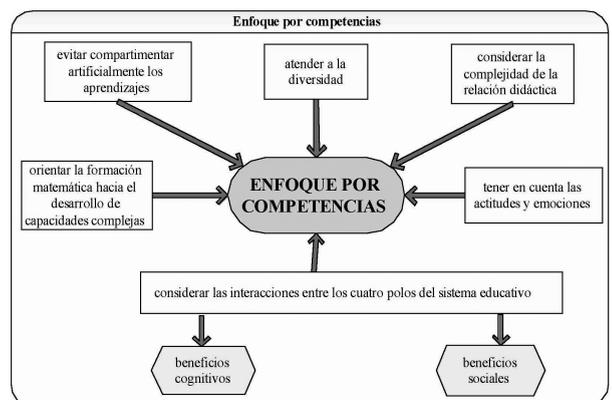
Hemos asumido, como parte de la metodología de trabajo con los alumnos, el enfoque por competencias:

«El concepto de competencia en el proyecto PISA/OCDE pone el acento en lo que el alumno es capaz de hacer con sus conocimientos y destrezas matemáticas...» (Rico, 2003: 89-102).

Esta perspectiva «proporciona referencias adaptadas a todos los que quieran tener en cuenta la complejidad de la relación didáctica que supone el hecho de considerar, en el aprendizaje de las matemáticas, los procesos comunicativos...» (Cobo y Fortuny, 2005: 55-70).

Este enfoque resulta apropiado para dar respuesta al desafío de atender a la diversidad en el aula. Véase figura 1.

Figura 1  
Enfoque por competencias.



#### 3.1.2. Las actividades propuestas: el sistema de «ayudas progresivas y diversificaciones» y la idea de «itinerario de resolución»

Entendemos que atender a la diversidad no consiste en fijar un nivel medio para desarrollar en el curso sino en plantear un entorno que permita, estratégicamente, que

cada alumno desarrolle al máximo sus potencialidades, que cada uno evolucione a partir de su nivel inicial optimizando su aprendizaje; pero todo esto sin perder cierta uniformidad en las temáticas desarrolladas por cada alumno: *«La igualdad no significa que todos deban recibir idéntica instrucción; por el contrario, exige que se hagan adaptaciones razonables y apropiadas para proporcionar la posibilidad a todos los estudiantes de obtener logros. Los centros y los sistemas educativos deben tener cuidado en acomodar las necesidades especiales de algunos alumnos sin entorpecer el aprendizaje de otros.»* (NCTM, 2000: 11-15)

En nuestro caso, hemos diseñado unas actividades adaptables a cada interlocutor, que especifican tanto como sea necesario (y suficiente) para cada alumno y que permiten a cada uno desarrollar el máximo nivel de profundidad y complejidad en su resolución. Según el sistema diseñado, todos los alumnos parten de un mismo enunciado, planteado para poner en juego ciertos conceptos y destrezas y que tiende a desarrollar ciertas competencias; pero dicho enunciado inicial se irá adaptando a cada resolutor.

Esta adaptabilidad a receptores tan diversos, se logra a través de un sistema de «ayudas progresivas y diversificaciones».

Las «ayudas progresivas» son orientaciones docentes que se administran gradualmente cuando el enunciado inicial no es asequible para el alumno y pretenden convertir dicho enunciado en uno abordable de tal manera que el alumno sea capaz de resolver la actividad. Una ayuda puede consistir, según el caso, en recordar una definición, realizar una sugerencia, proponer un procedimiento, formular una nueva pregunta, reformular la pregunta inicial, aportar un dibujo, etc. Estas ayudas se van aportando gradualmente porque, como hemos mencionado, pretendemos que sean las necesarias pero también las suficientes para resolver el problema. La cantidad y el tipo de ayudas, así como el momento en que se aportan, dependen de cada alumno y cada actividad.

A través de las «diversificaciones» de la actividad inicial, el docente propone a cada alumno diferentes niveles de profundidad, complejidad y formalización. Las diversificaciones se proponen una vez que la actividad propuesta inicialmente ya ha sido resuelta correctamente por el alumno. Una diversificación puede consistir en la generalización de resultados, en la demostración de la propiedad involucrada en la resolución, en el análisis de otros casos, en la expresión simbólica de algún resultado, etc. Al igual que las ayudas, las diversificaciones también se van incorporando gradualmente, y la cantidad, tipo y momento en que se aportan dependen de cada alumno.

Con este sistema de «ayudas progresivas y diversificaciones», cada alumno sigue su propio «itinerario de resolución»; todos cumplen con las expectativas básicas propuestas para una actividad que se vuelve asequible a cada resolutor, pero también cada alumno desarrolla al máximo sus potencialidades respecto a ella. Existe un recorrido mínimo para todos, cumpliendo así con las pautas curriculares mínimas planteadas, pero también da-

mos una respuesta a la atención a la diversidad entendida como hemos planteado más arriba, de manera tal que se permite a cada uno alcanzar el nivel de profundización y formalización más conveniente.

Logramos de esta manera que, en cada momento, todos los alumnos estén trabajando sobre la misma actividad (sobre los mismos contenidos), y evitamos así que los que terminan más rápido avancen hacia otras actividades o tengan que esperar equiparando sus tiempos al de los que trabajan un poco más lento, tiempo que también pretendemos respetar.

Llamamos «itinerario de resolución» a la secuencia recorrida por un alumno en la resolución de una actividad dada, teniendo en cuenta las ayudas que fueron necesarias y las diversificaciones que fueron posibles en cada caso.

Así, si bien el enunciado inicial de las actividades se corresponde en principio con el de «problemas abiertos», como dichos enunciados se van adaptando a las necesidades cognitivas de cada alumno a través del sistema de ayudas progresivas y diversificaciones, puede resultar que, según el itinerario de resolución recorrido, una misma actividad termine convirtiéndose en «problema de aplicación» o en «ejercicio algorítmico» para distintos alumnos (Alsina, 1997: 71-79).

En la figura 2, se ejemplifican algunos de los distintos itinerarios posibles recorridos por diferentes alumnos en el proceso de resolución de una actividad dada.

– El «Alumno 1» ha necesitado de una sola ayuda para resolver la actividad y fue capaz de resolver dos diversificaciones; decimos que resolvió la Actividad K1 y no la Actividad K porque consideramos que, al añadir la Ayuda 1, ya no estamos frente a la actividad K sino a una menos compleja que llamamos «Actividad K1».

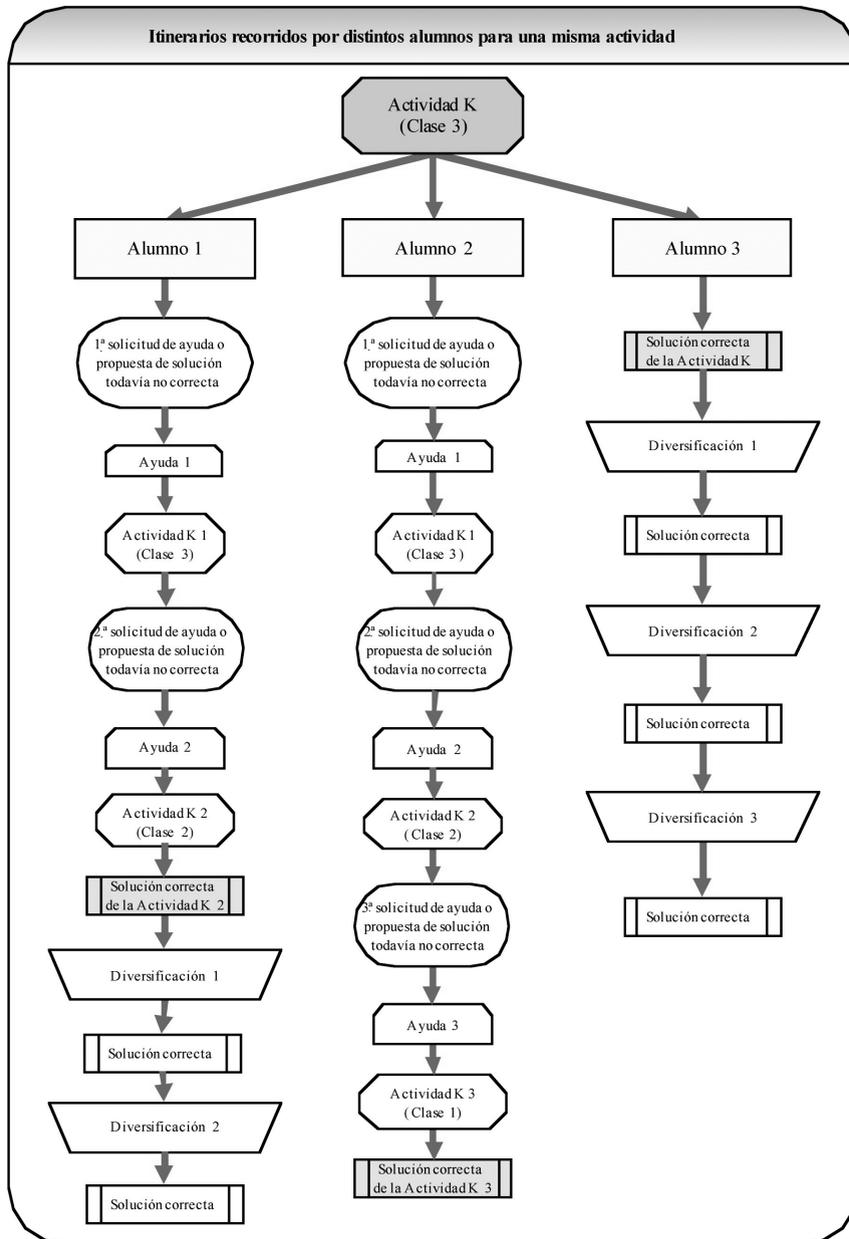
– El «Alumno 2» ha requerido de tres ayudas para lograr resolver correctamente una actividad que ya no es la Actividad K sino la Actividad K3, bastante menos compleja que las Actividades  $K_i$  ( $i < 3$ ).

– El «Alumno 3» fue capaz de resolver la Actividad K a partir de su enunciado original; y pudo avanzar hasta resolver tres diversificaciones correctamente.

Consideramos importante distinguir con cuántas ayudas y de qué tipo resolvió la actividad cada alumno, porque dicha información da cuenta del tipo de problema resuelto; en el caso del ejemplo el «Alumno 1» ha resuelto un «problema de aplicación», el «Alumno 2» ha resuelto un «ejercicio algorítmico» y el «Alumno 3», un «problema abierto».

Resulta claro entonces que el análisis del itinerario de resolución recorrido por el alumno aporta una información muy relevante para el estudio del proceso de aprendizaje de la Geometría, estableciendo qué tipo de actividad ha resultado cada enunciado en cada caso, y evaluar la evolución de cada alumno a lo largo del proceso.

Figura 2  
Itinerarios.



**3.1.3. Criterios utilizados para la organización de las secuencias de actividades**

Las actividades cumplen ciertas condiciones para responder al sistema de ayudas progresivas y diversificaciones que hemos propuesto de manera que cada alumno pueda recorrer el «itinerario de resolución» más conveniente. Además, hemos asumido ciertos criterios relacionados con el orden en que éstas se presentan y la manera en que se seleccionan a la hora de construir una secuencia didáctica. Las actividades que forman parte de cada

una de las secuencias propuestas a los alumnos guardan un orden que respeta criterios de complejidad creciente y resulta acorde con los contenidos y objetivos que se pretenden desarrollar, pero entre unas y otras se intercalan otras actividades que involucran otros conceptos y procedimientos geométricos; es decir, las actividades seleccionadas para el desarrollo y estudio de un núcleo temático no se presentan de manera consecutiva.

La razón de esta «decisión didáctica» radica en el hecho sabido de que los alumnos «aprenden» durante su esco-

laridad a tipificar las actividades, tendiendo a aplicar los conceptos recién aprendidos a la resolución de las actividades que se proponen a continuación; y de la misma manera a identificar en una secuencia de problemas correlativos los contenidos y procedimientos involucrados en su resolución. Queremos evitar que casi antes de leer una serie de problemas, o con la resolución del primero de ellos, los alumnos puedan realizar afirmaciones del tipo «éstos se hacen con mediatriz», «éstos son de Pitágoras», etc., porque consideramos que parte de la competencia matemática se relaciona no sólo con disponer de los conceptos y procedimientos necesarios para resolver una situación, sino también con la capacidad para seleccionar, adaptar y aplicar dichos conceptos y destrezas en contextos escolares y no escolares.

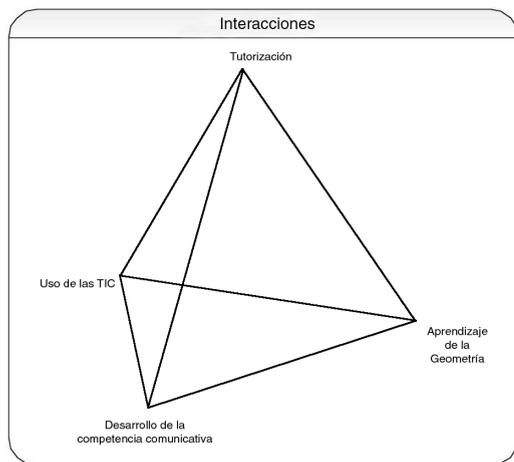
### 3.2. Metodología de la investigación

Hemos diseñado instrumentos y definido categorías, componentes e indicadores para analizar tanto las actividades propuestas como los aprendizajes de los alumnos.

Intentar responder a preguntas como: ¿Por qué a lo largo del taller mejora el aprendizaje de la Geometría? ¿Por qué mejora la comunicación? ¿Por qué mejora el uso de las TIC?, etc. Y los primeros análisis de los aprendizajes nos mostraron que, además de depender de la tutorización del proceso, las respuestas a estas preguntas estaban interrelacionadas.

Representamos estas interrelaciones mediante un tetraedro en cuyos vértices se encuentran cada una de las dimensiones. Las aristas de este tetraedro representan las interacciones. Véase figura 3.

Figura 3  
Interacciones.



Pensamos que el hecho de que, a lo largo del proceso, estas dimensiones no se comporten como polos aislados sino en permanente interacción con los demás, da lugar a un progreso conjunto y contextualizado en el que las

mejoras en cada dimensión se nutren de los progresos de las otras pero, a la vez, realimentan dicho progreso.

En este artículo, nos centramos en el análisis de dos de los polos: la competencia comunicativa (CC) y el aprendizaje de la Geometría (AG).

Las implicaciones del polo «tutorización» han sido ampliamente estudiadas, por Cobo y Fortuny (2005), con relación al desarrollo de competencias por parte de los alumnos en un entorno e-learning. Asimismo, existen numerosas investigaciones que han estudiado la influencia de los medios en el aprendizaje (Gutiérrez, 2000: Depover 1998) y más específicamente al aprendizaje de la Geometría (Murillo, 2001).

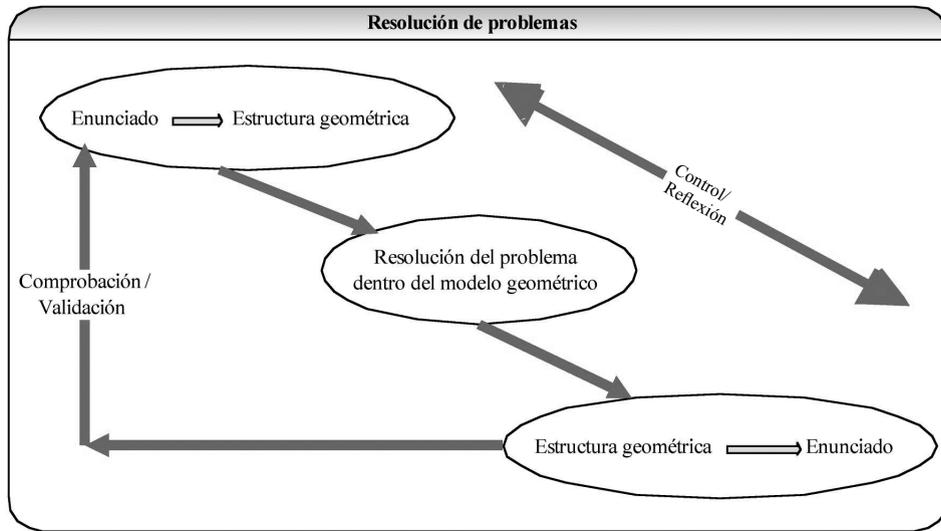
#### 3.2.1. Instrumento para evaluar los aprendizajes en Geometría (AG)

Al revisar el proceso de resolución de problemas realizado por nuestros alumnos, identificamos los siguientes componentes e indicadores:

Componente	Indicador
<b>Transformación 1:</b> Modelización del problema	Fase 1: ¿Es capaz de convertir un enunciado real en un enunciado matemático?(cuando sea necesario) Fase 2: ¿Es capaz de traducir el enunciado matemático a una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?
<b>Transferencia:</b> Resolución del problema dentro del modelo	¿Es capaz de aplicar y adaptar las estrategias necesarias (producción de variaciones, visualización, medición, construcción, cálculo, etc.) para resolver el problema? ¿Es capaz de identificar, seleccionar y aplicar los conceptos y relaciones construidos anteriormente para resolver el problema?
<b>Metacognición:</b> Reflexión y control sobre el proceso de resolución	¿Es capaz de controlar el proceso de resolución y reflexionar sobre él?
<b>Transformación 2:</b> Codificación e interpretación de la solución en el contexto del enunciado	¿Es capaz de comunicar acerca del modelo y de sus resultados dando una solución al problema propuesto?

Estas componentes no deben entenderse aisladas y de sucesión cronológica y lineal (por esa razón, preferimos llamarlas componentes en vez de fases o etapas), dado que los procesos de metacognición hacen posibles las interacciones entre ellas y de esta forma el proceso se hace dinámico y personal en el caso de cada actividad y cada alumno. Véase este proceso esquematizado en la figura 4.

Figura 4  
Resolución de problemas.



Pero cabe recordar aquí una particularidad de las actividades propuestas a los alumnos, que reorientará nuestro estudio on relación al aprendizaje de la Geometría llevado a cabo por los alumnos y completará nuestro instrumento de análisis correspondiente. Las actividades constituyen, en principio, «problemas abiertos» y cada uno de los alumnos recibe en un primer momento el mismo enunciado; pero, como se ha dicho antes, las mismas se van adaptando a las necesidades cognitivas de cada alumno a través de un sistema de «ayudas progresivas y diversificaciones». De esta manera, cada alumno sigue su propio «itinerario de resolución».

Es claro entonces que el análisis del «itinerario de resolución» recorrido por el alumno aporta una información muy relevante para el estudio del proceso de aprendizaje de la Geometría, estableciendo qué tipo de actividad ha resultado cada enunciado en cada caso, y evaluar la evolución de cada alumno a lo largo del proceso.

En el informe PISA, los ítems que se diseñan proponen tres clases de tareas, que se diferencian por el grado de complejidad que requieren en las competencias: *Primera clase: Reproducción y procedimientos rutinarios. Segunda clase: Conexiones e integración para resolver problemas estandarizados. Tercera clase: Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales*. (Rico, 2006: pp. 59-60). Los indicadores para la complejidad de las tareas en cada una de las categorías se resumen en Rico (2006: p. 60). La competencia aquí hace relación a la complejidad de la tarea, pero como en nuestro caso cada actividad «se adapta» al nivel de competencia del alumno en cada momento, resulta que una misma actividad puede ser de primera, segunda o tercera clase según el itinerario que el alumno haya recorrido para resolverla, es decir, según la cantidad y tipo de ayudas que haya requerido.

A partir de todas las consideraciones anteriores, establecemos finalmente el siguiente instrumento de análisis:

Indicador	Sin ayudas	Con ayudas
¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario).		
¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?		
¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?		
¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?		
¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?		
¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto?		
¿Cuántas diversificaciones resuelve (hasta qué nivel de profundización avanza)?		

En base al análisis de cada uno de los indicadores, se establece un nivel general del alumno, nivel que representa el estado general del alumno en relación con el aprendizaje de la Geometría:

– *Nivel Uno (AG1)*: Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno resuelve una Actividad de Primera clase (reproducción y procedimientos rutinarios). Este nivel se caracteriza por un manejo básico de conceptos y procedimientos rutinarios que le permite resolver solamente «ejercicios algorítmicos».

– *Nivel Dos (AG2)*: Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno resuelve una Actividad de Segunda clase (conexiones e integración para resolver problemas estandarizados). Este nivel se caracteriza por la capacidad de realizar conexiones e integrar conceptos y procedimientos que le permiten resolver «problemas de aplicación».

– *Nivel Tres (AG3)*: Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno resuelve una Actividad de Tercera clase (razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales). Este nivel se caracteriza por las capacidades de razonamiento, argumentación, intuición y generalización necesarios para resolver «problemas abiertos».

Estos niveles han surgido del proceso de análisis exhaustivo de las resoluciones de todos los alumnos mediante el instrumento de análisis propuesto y de la organización de las mismas en categorías, de acuerdo con la clase de actividad resuelta en cada caso teniendo en cuenta las ayudas recibidas y las diversificaciones resueltas.

**3.2.2. Instrumento para evaluar el desarrollo de la competencia comunicativa (CC) de los alumnos**

Consideramos que las producciones escritas, a través de las cuales los alumnos utilizan el lenguaje natural como metalenguaje para expresar ideas matemáticas –discursos que suelen estar parcialmente expresados utilizando términos y notaciones geométricas–, son parte de la resolución del problema geométrico propuesto. Por esta razón, nuestro trabajo incluye el análisis de los discursos escritos producidos por los alumnos, como parte de la resolución de los problemas geométricos propuestos; discursos en los que los alumnos explican, justifican y describen el procedimiento que han llevado a cabo (CC).

Teniendo en cuenta que las diversas manifestaciones orales y escritas empleadas en el contexto educativo para la transmisión, construcción y/o demostración de un conocimiento corresponden a la denominación de *discurso académico* (Cassany y Castelló, 1997: 5-10), estas producciones escritas realizadas por los alumnos son parte de dicho *discurso académico*.

En la figura 5 se muestra nuestro modelo para el análisis de las resoluciones de los alumnos.

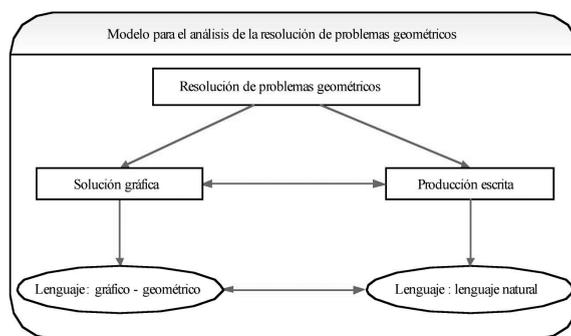
Atienza (1999), siguiendo el marco teórico del grupo INRP, identifica dos funciones básicas de la escritura del discurso académico:

– *Función representativa o expresiva (la escritura académica como construcción del conocimiento)*.

«En el contexto educativo, el estudiante utiliza constantemente la escritura en su vertiente formativa (...) Se trata

de la función representativa o expresiva de la escritura, empleada por el estudiante como tanteo y aproximación al saber, para explorar y analizar los tópicos de las diferentes disciplinas, esto es, para descubrir, formular y expresar ideas (...) Es, en definitiva, el discurso efectuado para aprender, para construir conocimiento...» (Atienza, 1999: pp. 144-145).

Figura 5  
Modelo para el análisis de las resoluciones.



Teniendo en cuenta esta función, se identifica la escritura académica como facilitadora del aprendizaje, y se entiende que el desarrollo de habilidades escritoras permite una mejor aprehensión del contenido académico impartido por las distintas disciplinas del currículo.

– *Función transaccional (la escritura académica como demostración del conocimiento)*

Se trata de la escritura que se utiliza para transmitir conocimientos, aquella que, con carácter público, permite comunicar o demostrar a otras personas los conocimientos de que se dispone. La escritura académica con función transaccional puede entenderse como un acto comunicativo institucional, con unos parámetros de comportamiento específicos; el dominio de la comprensión y de la producción de este tipo de escritura requiere unas estrategias sustancialmente distintas a las necesarias en el dominio de textos más generales (Atienza, 1999).

Tomando en consideración las particularidades planteadas respecto a estas dos funciones, asumimos que:

– El *discurso académico geométrico* es diferente a los discursos académicos de otras disciplinas y cumple una *función representativa* (la escritura académica como construcción del conocimiento) y una *función transaccional* (la escritura académica como demostración del conocimiento).

– Por ser estas funciones complementarias, la demostración de conocimiento geométrico a través de *discursos académicos geométricos* correctos no puede hacerse sin la construcción de los conocimientos involucrados pero a la vez la destreza en la elaboración de *discursos académicos geométricos* correctos, además de dar cuenta de los conocimientos construidos, contribuye a la construcción de nuevos conocimientos geométricos.

Por estas razones, consideramos importante el análisis de los «discursos académicos geométricos» producidos por los alumnos como parte de la resolución de los problemas geométricos propuestos.<sup>2</sup>

Para el diseño del instrumento de análisis correspondiente, hemos tomado como punto de partida el modelo propuesto por Canale (1995) para el análisis de la CC, pero hemos realizado las adaptaciones correspondientes según el contexto específico al que se aplicaría y a los objetivos pretendidos.

Las componentes que proponemos, y sus correspondientes interpretaciones, son las siguientes:

a) *Coherencia* (componente relativa a la competencia discursiva): para analizar la capacidad de elaborar discursos coherentes en los que no aparezcan contradicciones. Las partes del discurso deben estar conexas dando lugar a un mensaje claro, con sentido y completo. Analizamos la coherencia tomando en consideración dos niveles, uno centrado en la propia estructura del discurso (intratextual) y otro tomando en consideración la relación entre la solución gráfica<sup>3</sup> y la producción escrita (extratextual).

b) *Cortesía y adecuación* (componente relativa a la competencia socio-comunicativa): para analizar el conocimiento de las reglas socioculturales de uso necesarias para llevar a cabo cualquier acto comunicativo. Con adecuación, hacemos referencia al uso del texto en un contexto concreto de comunicación, contexto que incluye las circunstancias de lugar y tiempo, las características de los destinatarios, su edad, sus caracteres, la relación que se mantiene con ellos, etc. Las normas de adecuación se refieren a la utilización de un discurso adecuado al contexto específico. Los especialistas señalan que es característico de la adolescencia el no diferenciar los distintos registros comunicativos y usarlos indistintamente en los distintos contextos; e identifican que este aprendizaje corresponde especialmente a la escuela.

Respecto a la cortesía, diremos que si bien hasta hace algunos años era considerada una característica superflua o clasista, actualmente constituye una regla regulativa de la comunicación: la cortesía no es algo que sólo embellece el lenguaje sino, además, un constituyente esencial en la comunicación en tanto permite evitar conflictos y mantener la armonía en el proceso.

c) *Ortografía y vocabulario* (componente relativa a la competencia lingüística): para analizar el código lingüístico propiamente dicho. Con ortografía, hacemos referencia al uso correcto de las palabras y signos auxiliares; con vocabulario, al uso correcto del vocabulario general y específico, tanto por su riqueza (cantidad y valoración de palabras que no son usuales en el lenguaje del alumno) como por su precisión (utilización adecuada de esas palabras, oportunidad de su empleo en el desarrollo de la idea).

En nuestro contexto específico, estas categorías se refieren no sólo al lenguaje natural en general, sino también a las particularidades del lenguaje geométrico; el uso de sus términos, notaciones y modos de decir de un lenguaje

tan específico como el matemático, deben ser aprendidos en la clase de Matemáticas.

d) *Creatividad y solución de problemas comunicativos* (componente relativa a la competencia estratégica): para analizar el dominio de estrategias de comunicación, capacidad y creatividad para resolver problemas comunicativos, así como la originalidad de las ideas. La creatividad y la riqueza de estrategias deben ser un elemento fundamental de la clase de Matemáticas, entendidas desde el «hacer matemáticas» y desde la «resolución de problemas».

En el caso del análisis de las producciones escritas de los alumnos, entendidas como parte de la resolución de problemas geométricos, también consideramos importante el desarrollo de la creatividad comunicativa, entendida ésta como originalidad de ideas, como capacidad de resolución de problemas comunicativos.

Se trata de determinar cuándo un alumno es capaz de resolver situaciones a pesar del desconocimiento de un término específico o el olvido de una definición, proponiendo caminos alternativos y superando ese escollo comunicativo.

Componente: <i>Coherencia</i>	Indicadores:
<b>Intratextual</b>	<i>Repeticiones, contradicciones, insuficiencia de ejemplos, insuficiencia de argumentos, desorden, ambigüedad, información insuficiente o excesiva, falta de claridad-inadecuación respecto al objetivo comunicativo.</i>
<b>Extratextual</b>	<i>Coincidencia entre el procedimiento descrito a través del texto y el llevado a cabo en la construcción.</i>

Componente: <i>Cortesía y adecuación</i>	Indicadores:
<b>Respeto</b>	<i>Imposiciones de voluntad o imperaciones, ofrecimiento de opciones, reforzamiento de lazos.</i>
<b>Adecuación</b>	<i>Utilización de un registro adecuado a la edad del destinatario, a la relación que se mantiene con el destinatario (relación profesor-alumno, relación alumno-alumno), y a las circunstancias de lugar y tiempo (ámbito educativo, la clase).</i>

Componente: <i>Ortografía y vocabulario</i>	Indicadores:
<b>Ortografía</b>	<i>Uso correcto de las palabras y signos auxiliares, propias del castellano en general y del lenguaje geométrico en particular, uso correcto de notaciones.</i>
<b>Vocabulario</b>	<i>Empleo de palabras que no son usuales en el lenguaje habitual del sujeto, precisión en la utilización adecuada de las palabras, oportunidad de su empleo en el desarrollo de la idea o de su situación en la frase.</i>

Componente: Creatividad y solución	Indicadores:
	Utilización de sinónimos cuando no se recuerda una palabra específica, construcción de definiciones convenientes.

Con el objeto de asignar a cada producción una ponderación numérica relativa a cada componente que permitiera a su vez establecer una ponderación del estado general del alumno en relación con la competencia comunicativa en cada momento, se han propuesto cuatro niveles:

- Nivel Cero (N0): No logrado.
- Nivel Uno (N1): Si bien todavía no llega por sí solo al nivel mínimo planteado para la actividad, a través de las ayudas del tutor se aproxima a dichas condiciones mínimas propuestas inicialmente para la actividad.
- Nivel Dos (N2): Logra cumplir con las condiciones propuestas por la actividad de manera aceptable pero respondiendo al nivel mínimo pretendido para la actividad.
- Nivel Tres (N3): Logro estratégico amplio, capacidad lograda con amplitud que supera el nivel estándar planteado.

Numéricamente, se han asignado a cada uno de los niveles anteriores los siguientes valores:

- Nivel Cero (N0): 0
- Nivel Uno (N1): 1
- Nivel Dos (N2): 2
- Nivel Tres (N3): 3

Una cuestión importante a destacar es que más allá de las ponderaciones particulares de cada una de las componentes, en todo momento guía el análisis lo que entendemos por «discurso correcto».

Consideramos que un discurso correcto es aquel que, además de ser coherente, cumple con las reglas ortográficas y de vocabulario (generales y geométricas), es adecuado (responde no sólo a las condiciones relativas a la situación y a los destinatarios sino también a los requerimientos solicitados por la actividad) y, de ser necesario, resuelve los problemas comunicativos, como puede ser el olvido de una palabra. Ponderamos este tipo de discursos como de Nivel 3 (CC3) y proponemos otros dos niveles.

- Nivel 1 (CC1): Discurso no aceptable. Son discursos caracterizados por la falta grave de coherencia que muestra o bien que el alumno no ha comprendido el problema o bien que, aunque puede realizar la resolución gráfica, tiene dificultades graves para expresar sus ideas (esta se-

gunda posibilidad, aunque menos frecuente, aparece en algunos casos). En este nivel se incluye también la «falta de discurso». Este tipo de discursos muestra qué actividad planteada no ha resultado asequible para ese alumno y en este caso la actuación del profesor consistirá en replantear la situación o proponer nuevas situaciones que permitan al alumno trabajar sobre las destrezas y conceptos previos con los que muestra dificultades.

- Nivel 2 (CC2): Discurso aceptable pero mejorable. El discurso carece de alguna o algunas de las características propias de un discurso correcto pero mantiene un grado de coherencia mínimo que posibilita su interpretación y permite una actuación docente orientada a la reformulación (no sólo del discurso sino también de las ideas) por parte del alumno. El docente puede orientar el proceso con preguntas, ayudas, sugerencias, etc.

- Nivel 3 (CC3): Discurso correcto. En estos casos, la actuación del profesor se orienta a la propuesta de diversificaciones de la actividad que permitan un enriquecimiento y una profundización de la actividad planteada originalmente y que puede consistir, según el caso, en la búsqueda de una generalización, en la formulación de una conjetura, en una demostración, en el análisis de otros casos posibles, etc.

Teniendo en cuenta entonces los aspectos anteriores, una vez realizada la valoración cualitativa de cada componente del discurso y establecida su ponderación numérica, se realiza la ponderación general del discurso tanto a nivel cualitativo como numérico. Numéricamente, hemos establecido la siguiente correspondencia:



Es decir, según el porcentaje numérico asignado, consideramos:

- Discursos no aceptables (o de Nivel 1): aquellos ponderados con menos del 40% respecto al máximo posible asignado.
- Discursos aceptables pero mejorables (o de Nivel 2): aquellos ponderados con valores comprendidos entre el 40% (incluido este valor) y el 80% respecto al máximo posible asignado.
- Discurso correcto (o de Nivel 3): aquellos ponderados con valores comprendidos entre el 80% (incluido este valor) y el 100% respecto al máximo posible asignado.

Intervalo	Tipo de discurso
[0%, 40%)	Discursos no aceptables (o de Nivel 1)
[40%, 80%)	Discursos aceptables pero mejorables (o de Nivel 2)
[80%, 100%]	Discurso correcto (o de Nivel 3)

*Nota:* Como queda claro a partir de la definición propuesta para «discurso correcto», si bien las componentes guardan cierta independencia que permite su análisis por separado, es la coherencia la que mayor peso tiene en la determinación de la corrección de un discurso. Por tal razón, hemos considerado que una resolución que presenta Nivel 1 en relación con esta componente no podrá tener una ponderación general más alta más allá de las ponderaciones obtenidas en relación con las demás componentes.

Estos niveles han surgido del proceso de análisis exhaustivo de las resoluciones de todos los alumnos mediante el instrumento de análisis propuesto y de la organización de las mismas en categorías según las características del discurso en cada caso.

### 3.3. Aplicación de los instrumentos de análisis a las resoluciones de los alumnos

En una primera fase de la investigación, se han aplicado los instrumentos de análisis diseñados al total de las resoluciones propuestas por los 16 alumnos del curso. En una segunda fase, se ha realizado el estudio de tres alumnos, considerando para cada uno de ellos las resoluciones que han elaborado para nueve de las actividades propuestas. A partir de este análisis de las resoluciones a lo largo del proceso, se estudia el perfil correspondiente a cada alumno, teniendo en cuenta sus progresos relativos al aprendizaje de la Geometría y al desarrollo de la competencia comunicativa.

La elección, tanto de los alumnos como de las actividades cuyas resoluciones se han analizado, no se ha realizado al azar sino teniendo en cuenta los siguientes criterios metodológicos:

– La cantidad de alumnos (tres), se ha determinado pretendiendo que este estudio se aplique a una muestra de tal manera que, si bien éste no deja de ser un estudio de casos, la cantidad de alumnos estudiados represente a la población de alumnos con la que se trabaja.

– Asimismo, la elección de los alumnos a analizar no ha sido aleatoria sino que la misma se ha realizado en base a la información académica anterior disponible para cada alumno (notas en general, notas en la asignatura Matemáticas, cantidad de suspensos, concepto de los profesores y tutores en relación con actitudes frente al aprendizaje, capacidades generales y específicas, etc.). Así, en base a la información recogida y analizada respecto a la totalidad de los alumnos, se han establecido tres clases o categorías según el rendimiento escolar, que coloquialmente hemos denominado: «alumnos buenos y muy buenos», «alumnos regulares o medios» y «alumnos de rendimiento insuficiente».

– Una vez realizada esta categorización, se ha escogido un alumno de cada una de las clases.

– En cuanto a los momentos de corte que se han considerado para el análisis, los mismos se han elegido coincidiendo con la resolución de nueve de las más de 50 actividades que los alumnos resuelven a lo largo del taller en las distintas fases del mismo.

De estas nueve actividades seleccionadas, tres de ellas corresponden a la etapa presencial (actividades que denotamos con AEP1, AEP2 y AEP3 y que son resueltas por los alumnos en ese orden aunque no son correlativas, dado que entre ellas se resuelven otras) y otras seis a la etapa correo electrónico (actividades que denotamos con ACE1, ACE2, ACE3, ACE4, ACE5 y ACE6).

Por limitaciones de espacio, a modo de ilustración, presentamos la aplicación de estos instrumentos de análisis a una de estas resoluciones propuestas por un alumno: la ACE4 (es decir, a una de las actividades propuestas a través del correo electrónico)<sup>4</sup>. Se estudian en primer lugar las componentes que conforman cada instrumento de análisis, y se realiza en función de este análisis una valoración general para establecer una ponderación global del nivel de competencias geométrica y comunicativa.

Figura 5  
Resolución propuesta por Javier para la actividad ACE4:

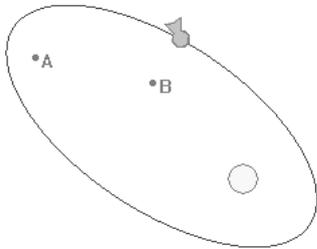
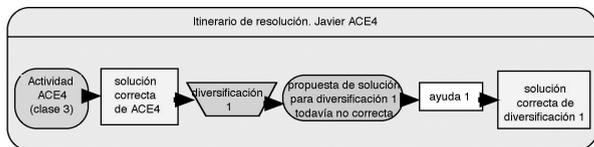
<p><b>Actividad ACE4:</b></p> <p>Un cometa describe una órbita alrededor del Sol como la de la figura. En el mismo plano de la órbita, hay <i>dos satélites artificiales fijos A y B</i> encargados de estudiar al cometa. En cada momento el cometa es estudiado por el satélite que está más próximo a él. ¿Podrías decirnos en qué zona de la órbita el satélite A estudia al cometa y en qué zona lo hace el satélite B? Razona tus respuestas.</p>	 <p>El diagrama muestra una órbita elíptica con un pequeño círculo en uno de sus focos que representa al Sol. Una línea con una cabeza de flecha indica la trayectoria del cometa. Dos puntos etiquetados como 'A' y 'B' están situados dentro de la órbita, representando a los satélites artificiales.</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Figura 6  
Itinerario de resolución (esquema)



Itinerario de resolución (detalle):

PRIMERA VERSIÓN:

Texto de correo electrónico:

Hola, Francisco: te escribo porque creo que tengo la solución. Espero que esté bien.  
Un saludo. Javier

Resolución propuesta en archivo Cabri:

He partido de una elipse en que he dibujado todos sus componentes como bien estaban dibujados. He hecho los puntos A y B y he hecho la mediatriz de los puntos. He medido la distancia de los puntos respecto a la del satélite y se observa que una vez que el satélite cruza la mediatriz del segmento AB hacia B está más cerca del punto B y cuando cruza por la otra parte está más cerca de A

Tutorización (1.ª diversificación): «¿Cuál es la propiedad de la mediatriz que justifica tu solución?»

SEGUNDA VERSIÓN:

Texto de correo electrónico:

Francisco, aquí te envío la respuesta a la pregunta que le has mandado.  
Un saludo, Javier

Resolución propuesta en archivo Cabri:

He partido de una elipse en el que he dibujado todos sus componentes como bien estaban dibujados. He hecho los puntos A y B y he hecho la mediatriz de los puntos. He medido la distancia de los puntos respecto a la del satélite y se observa que una vez que el satélite cruza la mediatriz del segmento AB hacia B está más cerca del punto B y cuando cruza por la otra parte está más cerca de A

¿Qué propiedad tiene cada uno de los puntos de la mediatriz de un segmento?  
Es la perpendicular a un segmento por su punto medio.

Tutorización (1.ª ayuda de la 1.ª diversificación): «Lo que has escrito es la definición de mediatriz y es correcta, pero piensa: ¿qué propiedad que cumplen los puntos que se encuentran sobre la mediatriz se relaciona con la resolución de este problema?»

TERCERA VERSIÓN:

Resolución propuesta en archivo Cabri:

He partido de una elipse en el que he dibujado todos sus componentes como bien estaban dibujados. He hecho los puntos A y B y he hecho la mediatriz de los puntos. He medido la distancia de los puntos respecto a la del satélite y se observa que una vez que el satélite cruza la mediatriz del segmento AB hacia B está más cerca del punto B y cuando cruza por la otra parte está más cerca de A

¿Qué propiedad tiene cada uno de los puntos de la mediatriz de un segmento?  
Es la perpendicular a un segmento por su punto medio.  
Propiedad:  
Caja el punto que caja, de la mediatriz, siempre tendrá la misma distancia respecto a los puntos A y B.

3.3.1. Análisis de la competencia comunicativa

Análisis coherencia intratextual

1.ª versión: Se describe linealmente el proceso llevado a cabo y, si bien no se menciona explícitamente la propiedad que fundamenta la solución, se hace referencia a la misma de manera implícita. El texto propuesto resulta coherente, la información es suficiente y completa en relación con los requisitos iniciales.

2.ª versión: Ante el pedido de explicitar qué propiedad de la mediatriz de un segmento se relaciona con la solución propuesta, el alumno copia la definición de mediatriz de un segmento.

3.ª versión: Ante el nuevo pedido, el alumno logra dar respuesta específicamente a lo solicitado, identificando la propiedad indicada, aunque todavía no logra contextualizar la aplicación de la misma al marco específico de la actividad en cuestión.

Análisis coherencia extratextual

El procedimiento descrito coincide con el desarrollado en la construcción.

**Análisis cortesía y adecuación**

El texto de los mensajes sigue manteniendo la cortesía y la adecuación; aunque también se observa que se dedica menos a los textos de correo debido a la dedicación más exhaustiva a la resolución de las actividades (corroborado en las observaciones de clase y registrado en el diario del profesor-investigador).

**Análisis ortografía**

Aparecen pocos errores de ortografía, faltan tildes en «satelite», «mas», «esta» y «tendra», además del uso en masculino de la palabra elipse; sin embargo, ha mejorado el uso de los signos de puntuación (lo que ayuda también a una mejor coherencia del texto). En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son adecuadas las notaciones empleadas para los segmentos y puntos.

**Análisis vocabulario**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto. Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (mediatriz, segmento, elipse, distancia, etc.)

**Análisis creatividad y solución de problemas comunicativos**

Nuevamente, la resolución gráfica propuesta no ofrece para el alumno desafíos de este tipo. Respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, si bien nuevamente las mismas vinieron en respuesta a una nueva demanda por parte del profesor; ha mejorado su enunciado, proponiendo una forma adecuada a la situación del problema que, aunque sería mejorable, supone un avance respecto a lo realizado en actividades anteriores.

**Valoración/ponderación**

Componente coherencia: 2  
 Componente cortesía y adecuación: 2  
 Componente ortografía y vocabulario: 3  
 Componente creatividad y solución de problemas comunicativos: 2  
 Máximo asignado: 12  
 Ponderación general: 9/12 (75%)  
 Discurso aceptable pero mejorable (de Nivel CC2)

**3.3.2. Análisis del aprendizaje de la Geometría**

**Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

**Sin ayudas:** El alumno convierte las condiciones del problema real a un enunciado matemático.

**Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

**Sin ayudas:** El alumno traduce las condiciones anteriores a un modelo geométrico que respeta las condiciones planteadas.

**Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

**Sin ayudas:** El alumno identifica los conceptos, propiedades y relaciones involucrados en la relación: distancia entre dos puntos, mediatriz, segmento, equidistancia de un punto perteneciente a la mediatriz respecto a los extremos del segmento (consecuencia sobre la distancia entre los puntos ubicados en cada semiplano respecto a la mediatriz y los extremos del segmento).

**Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

**Sin ayudas:** El alumno aplica estrategias adecuadas. Distingue los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables (los puntos correspondientes deben considerarse «fijos» y para esa ubicación fija, la que varía es la posición del punto, aunque siempre sobre la elipse, y por ende sus distancias a los puntos interiores fijos), diferencia los elementos relevantes de los irrelevantes (por ejemplo: el hecho de que la trayectoria tenga forma elíptica es sólo un elemento distractor), identifica la dependencia o independencia existente entre objetos (la distancia a los satélites no depende estrictamente de la elipse en sí sobre la que se mueve el cometa sino de la relación entre esa posición y la mediatriz del segmento determinado por las posiciones de los satélites). Elige técnicas apropiadas que se ajustan a las condiciones dadas: mide, produce variaciones, traza la mediatriz, etc.

<p><b>Indicador:</b> <i>¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?</i>  <b>Con ayudas:</b> El alumno controla el proceso y reflexiona sobre el mismo. Valida la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción.</p>
<p><b>Indicador:</b> <i>¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto?</i>  <b>Sin ayudas:</b> El alumno es capaz de dar resultados correctos a partir del modelo propuesto y justificarlos. Describe además, utilizando lenguaje verbal, el proceso de resolución llevado a cabo.</p>
<p><b>Indicador:</b> <i>¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)</i>                  Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver una diversificación, aunque fue necesaria una ayuda para ello.</p>
<p><b>Valoración/ponderación:</b> <i>Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde</i>                  Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una <i>actividad de Tercera clase</i>, que se corresponde con un <i>Nivel AG3</i>.</p>

Como hemos dicho más arriba, la anterior es simplemente una ilustración de la aplicación de los instrumentos de análisis diseñados. En nuestro trabajo de investigación, dichos instrumentos se aplican a nueve de las actividades resueltas por tres alumnos; con el objeto de analizar el correspondiente perfil de cada alumno a lo largo del proceso, teniendo en cuenta sus progresos relativos al aprendizaje de la Geometría y al desarrollo de la competencia comunicativa.

#### 4. APORTACIONES Y CONCLUSIONES

Las actividades diseñadas, por su estructura y especificidad, han resultado adecuadas al medio utilizado, a los contenidos y a los objetivos propuestos para los alumnos, que además permiten atender a la diversidad en el aula. En particular, el sistema de «ayudas progresivas» y «diversificaciones» han constituido una herramienta potente para dar una respuesta estratégica al problema de la atención a la diversidad, posibilitando que cada alumno desarrolle al máximo sus potencialidades, pero sin perder cierta uniformidad en las temáticas desarrolladas por el total de los alumnos; herramienta factible de aplicarse en otros contextos de aprendizaje.

Hemos diseñado y utilizado un instrumento para evaluar los aprendizajes en geometría cuando se trabaja en el entorno interactivo implementado y los alumnos desarrollan trabajo cooperativo, con sus correspondientes indicadores y estableciendo el «itinerario de resolución» recorrido por cada alumno, que aporta una información muy relevante para el estudio del proceso de aprendizaje de la Geometría, estableciendo qué tipo de actividad ha resultado para cada enunciado en cada caso, y evaluar la evolución de cada alumno a lo largo del proceso.

Hemos diseñado instrumentos de análisis, definiendo componentes con sus correspondientes indicadores que han resultado adecuados para el estudio de la competencia comunicativa, considerando el análisis de los «discursos académicos geométricos» producidos por los alumnos como parte integrante de la resolución de los problemas, estableciendo el nivel general del alumno (CC1, CC2 y CC3).

#### NOTAS

1. Enseñanza presencial y virtual.
3. No se emplea la expresión «resolución geométrica», porque entendemos que la resolución geométrica abarca tanto la construcción o solución gráfica como la expresión escrita correspondiente a dicha resolución. Denominamos texto o discurso escrito a dicha producción escrita.
4. Los datos correspondientes tanto a este ejemplo como al resto se obtienen por los registros de las soluciones propuestas por los alumnos en archivo Cabri y se complementan por observación y registro de todas las clases a lo largo del curso.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA BARRIAL, M. (2002). *Desarrollo profesional docente en Geometría: análisis de un proceso de formación a distancia*. Tesis doctoral. UB.
- ALSINA, C., FORTUNY, J.M. y otros (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Madrid: Síntesis.
- ÁREA MOREIRA, M. (1999). Desigualdades, educación y nuevas tecnologías. *Quaderns Digitals*, 11, recuperable en <www.quadernsdigitals.net>.
- ATIENZA CERREZO, E. (1999). *Propuesta de evaluación del texto escrito en Enseñanza Secundaria*. Tesis doctoral. UB.
- BROUSSEAU, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2): pp. 33-115. Traducción de J. Centeno, B. Melendo y J. Murillo.
- CANALE, M. (1995). De la competencia comunicativa a la pedagogía comunicativa del lenguaje, en *Competencia comunicativa*. Madrid: Edelsa.
- CASSANY, D. y CASTELLÓ, M. (1997). Textos académicos. *Artículos de Didáctica de la lengua i la literatura*, 13, pp. 5-10.
- COBO, P. y FORTUNY, J.M. (2005). El sistema tutorial Agent-Geom y su contribución a la mejora de las competencias de los alumnos en la resolución de problemas de matemáticas. *Actas del IX Simposio de la SEIEM*. Córdoba: Servicio de publicaciones UCO y SEIEM.
- DEPOVER, C., GIARDINA, M. y MARTON, P. (1998). *Les environnements d'apprentissage multimédia*. Francia: L'Harmattan, Série Références.
- DUVAL, R. (2001). *La Geometría desde un punto de vista cognitivo*. Traducción de Hernández, V. PMME- UNISON.
- FIGUEIRAS, L. (2000). *Written Discourse in Virtual Environments*. UAB.
- FORTUNY, J. M. y JIMÉNEZ, J. (2000). *Teletutorización Interactiva en Matemáticas para asistencia hospitalaria*. Barcelona: Proyecto TIMAH. PIE.
- GODINO, J. (2001). Confrontación de herramientas teóricas para el Análisis Cognitivo en Didáctica de las Matemáticas. Recuperable en <www.ugr.es/locel/jgodino/semiótica.htm>
- GUTIÉRREZ, A. (1997). *Educación Multimedia y Nuevas Tecnologías*. Madrid: Ed. de la Torre.
- MEC (2006). *Decreto de contenidos mínimos para la ESO*. RD 1631/2006. BOE N.º 5 del 5/1/2007.
- MENEZES, M. y FIORENTINI, D. (2004). Comunicación y Formación: el papel de la escritura en la formación inicial de profesores de matemática. *XVI Simposio Iberoamericano*. Castellón.
- MORGAN, C. (1998). *Writing Mathematically. The Discourse of Investigation*. Londres: Falmer Press.
- MURILLO, J. (2001). *Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-actividades aplicado a la enseñanza de la geometría en la ESO*. Tesis doctoral. UAB.
- NCTM (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducción y edición realizada por SAEM THALES (Sevilla, 2003).
- NESHER, P. (2000). Posibles relaciones entre lenguaje natural y lenguaje matemático. *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*, pp. 109-124. España: Graó.
- NISS, M. (1999). Competencies and Subject Description. *Uddanneise* 9, pp. 21-29.
- POWELL, A. y LÓPEZ, J. (1995). A escrita como veículo de aprendizagem da matemática: Estudo de um caso. *Boletín GEPEM* 33. Río de Janeiro.
- POWELL, A. (2001). Captando, examinando e reagiendo ao pensamento matemático. *Boletín GEPEM* 39. Río de Janeiro.
- RICO ROMERO, L. (2003). Evaluación de competencias matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003. *Investigación en Educación Matemática, 8.º Simposio de la SEIEM*, pp. 89-102. U. da Coruña.
- RICO ROMERO, L. (2006). Las competencias matemáticas en el informe PISA 2003: el caso de la geometría. *II Escuela de Educación Matemática Miguel de Guzmán: En torno a la geometría de Miguel de Guzmán*. Recuperable en <www.galega.org/emdg/web>.

[Artículo recibido en diciembre de 2007 y aceptado en mayo de 2008]

## A model to encourage and analyze geometric and communicative competences in an interactive learning environment

MURILLO RAMÓN, JESÚS y MARCOS LORENZON, GUILLERMINA

Universidad de La Rioja. Departamento de Matemáticas y Computación. Área de Didáctica de la Matemática.

jmurillo@unirioja.es

guillermina.marcos@alum.unirioja.es

### Abstract

The interactive learning environment used to obtain data from the investigation carried out is basically formed by an electronic network, Internet, electronic mail software and public domain surfing, a discussion forum and the dynamic geometrical software Cabri Géomètre. It is put into practice in the environment of a subject for pupils belonging to the third level of obligatory secondary education.

We want to analyze the efficiency of this interactive environment related to the development of some particular mathematical competences, in relation to the geometry learning and mathematical communicative competence.

Assuming that the information and communication Technologies are producing an approach to the concept of general training and also to the literate person, we consider that it is indispensable to carry out approaches to allow the development of this new type of competences, incorporating information technology resources in the activities. As regards the most suitable space to carry out that incorporation, although there may be specific curricular spaces for that purpose, it is also necessary to incorporate the information and communication technologies through each curricular space, particularly, through the maths class.

In this article, we present activities appropriate to the media used to the contents and objectives proposed for pupils that allow us to pay attention to the diversity of the class (adaptable to each speaker) favouring the greatest development of the potentials of each pupil and instruments and indicators suitable for the analysis of the pupil's learning.

In the work with the students, we distinguish three main stages; they are called: «presentation stage», «electronic mail stage» and «electronic forum stage» that appear chronologically in the mentioned order; nevertheless, the appearance of a particular stage does not mean the end of the previous one; in many cases, they coexist.

We have assumed, as part of the methodology of work with the pupils, the focus by competences. (PISA/OCDE, Rico 2003, 89-102).

The attention to diversity is based on the adaptability of very different receivers through a system of «progressive aids and diversification».

The «progressive aids» are teaching orientations gradually administrated when the initial reference is not attainable for the pupil, and they try to convert that term of reference

into an accessible one, so that the pupil is able to resolve the activity.

Through the «diversification» of the initial activity, the teacher proposes to each pupil different levels of depth, complexity and formalization. The diversifications are proposed once the initial activity given is resolved correctly by the pupil. As it happens with the aids, the diversifications are gradually incorporated.

With this system of «progressive aids and diversifications» each pupil follows his/her own «itinerary of resolution»; all of them achieve the basic expectantions proposed for one activity which turns out to be obtainable to each student and also each pupil develops the maximum of his/her potential in relation to that activity. There is a minimum tour for everyone, achieving in this way the minimum curricular guidelines expounded, and we also give an answer to the diversity, understood as explained previously, in such a way that each student can reach the most suitable level of depth and formality.

We hereby manage that at each moment all the pupils can work in the same activity (on the same contents) and we avoid in this way that those who finish faster continue with other activities or have to wait for those who work more slowly, as this a period of time that we also want to respect.

«Itinerary of resolution» refers to the sequence carried out by a pupil when resolving a given activity, taking into account the necessary aids given and the diversifications that were possible in each case. The analysis of the itinerary of resolution carried out by the student gives very relevant information for studying the process of geometry learning.

Besides the strategy used for the design of activities that pay attention to diversity, we present in this article the instruments of analysis created and used for studying geometry learning and mathematical communicative competence, and we also illustrate its use.

The instrument designed to evaluate the development of the communicative competence formed by some components of its corresponding indicators, allow the analysis of the «geometric academic discourses» produced by pupils as part of the problem resolution, establishing the general level of the pupil at each moment and evaluating the evolution of each one during the process.

The instrument designed and used to study geometry learning allows studying the «itinerary of resolution» carried out by each pupil, and gives relevant information for studying the process, establishing the complexity of the resulting activity for each term of reference in each particular case and evaluating the evolution of each student.