

ANÁLISIS DEL ERROR SISTEMÁTICO EN LA SUSTRACCIÓN

LÓPEZ FERNÁNDEZ, RICARDO¹ y SÁNCHEZ GARCÍA, ANA B.²

¹ Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca.

² Departamento de Didáctica, Organización y Métodos de Investigación, Universidad de Salamanca.

riclop@usal.es

asg@usal.es

Resumen. En este artículo presentamos resultados de investigación relacionados con la tipología, naturaleza y evolución de los errores en la sustracción. El objetivo principal de la investigación trata de indagar sobre si en nuestro contexto escolar se producen errores sistemáticos y si disminuyen a lo largo de la escolaridad. Asimismo, comparamos los resultados obtenidos con los aportados por autores de referencia en este campo de investigación. Para ello, efectuamos un análisis sobre 7.140 restas realizadas por niños/as escolarizados en 2º, 3º, 4º, 5º y 6º de Educación Primaria. Los resultados demuestran la existencia de errores sistemáticos y tipología concreta de los mismos, hecho de indudable valor a la hora de programar didácticamente el proceso de enseñanza.

Palabras clave. Aprendizaje algorítmico, errores sistemáticos en la sustracción, investigación empírica, evolución del error.

Analysis of systematic error in subtraction

Summary. In this article, we presented results related to the typology, nature and evolution of the errors in subtraction. The main aim, is to examine if in our school context systematic errors take place and if these decrease throughout schooling. Also, we compared our results with the ones contributed by authors of reference in this field of research. To do so, we carried out an analysis on 7140 subtractions made by children in our educational system. The results demonstrate the existence of systematic errors in our scholastic context, a fact of doubtless value when programming the learning process didactically.

Keywords. Algorithmic learning, subtraction errors, empirical investigation, evolution of the error.

1. INTRODUCCIÓN

Históricamente en la Educación Matemática, contamos con una extensa investigación que ha focalizado sus esfuerzos en el estudio de los errores producidos en los distintos dominios matemáticos. De manera general, podemos decir que las aportaciones más relevantes en el campo de los procesos algorítmicos pueden ser vinculadas a dos fases temporales, que se corresponden con los postulados teóricos vigentes en cada momento histórico. Hasta la década de los 70, los errores eran explicados a través de fallos de recuerdo de «hechos numéricos», escasez de la práctica,

fatiga y falta de concentración (Bermejo, 1990). En esta etapa, autores como Brownell (1935); Brueckner y Bond (1955); Buswell (1926) constatan en sus investigaciones la existencia de errores sistemáticos en los algoritmos. Sus proyecciones teóricas, de marcada influencia conductista, daban por supuesto que muchos de esos errores eran cometidos debido a descuidos, rutinas aprendidas de memoria o conductas relacionadas con el desconocimiento del procedimiento que causaban algoritmos defectuosos (Ashlock, 1976; Groen y Resnick, 1977; Hatano, 1988).

Después de la década de los 70, se desarrolla una segunda fase que surge avalada por el marco teórico cognitivista. Aparecen nuevas líneas de investigación, que estudian los mecanismos o estrategias de cálculo que los niños/as utilizan en el desarrollo de los procedimientos algorítmicos. Autores como Cox (1975) estudian los errores sistemáticos cometidos por los niños/as durante la resolución de los algoritmos básicos. El enfoque de estudio de los procesos matemáticos es más individual, y se asienta en la consideración de que las estrategias utilizadas por los niños/as se ajustan a su propio sistema de procesamiento de la información. A este posicionamiento, hay que añadir las aportaciones del auge de la ciencia informática. El resultado de esta fusión da origen a la elaboración de programas de diagnóstico eficientes, que tratan de detectar errores no tipificados que cometen los niños/as. Éste es el caso de «Buggy» de Brown y Burton (1978); «Sierra» de VanLehn (1990) y «PS» de Young y O'Shea (1981) diseñados para investigar los errores producidos en el algoritmo de la sustracción.

Bajo esta influencia los autores adoptan el argot informático y los errores se denominan «bugs»¹. De este modo, se posicionan en el estudio de los procedimientos erróneos posibles («buggy procedures- buggy algorithms»)², partiendo de la idea de que los procedimientos incorrectos son construidos por los niños/as. Durante los años 80 y hasta la actualidad, surge un intenso debate que, en palabras de Kilpatrick, Swafford y Findell (2001), hace que la investigación en los distintos dominios matemáticos se centre en torno a la relación existente entre conceptos y habilidades en la adquisición de los procesos algorítmicos, tendencia que de manera análoga se ha proyectado en el estudio de los errores, analizados desde las perspectivas conceptual o sintáctica de la habilidad (Resnick, 1982).

En este sentido, desde la perspectiva conceptual contamos con los estudios de autores como Fuson (1988, 1992); Fuson y Briars (1990); Hiebert y Warne (1996); Ohlsson y Rees (1991); Resnick (1982); Resnick y Omanson (1987), para quienes la comprensión de los principios que sustentan el procedimiento es fundamental, puesto que potencia la correcta conexión entre la parte conceptual y la procesal del algoritmo y fomenta la construcción de niños/as expertos que se caracterizan por la aplicación flexible y adaptativa del conocimiento sobre la operación en todos los contextos (Baroody, 2003).

Asimismo, desde la aproximación sintáctica, no podemos obviar la teoría de VanLehn, «Repair Theory», que aporta un exhaustivo análisis sobre los mecanismos procesales que rigen la generación de los errores sistemáticos o «Bugs algorithmic» (Brown y Burton 1978); (VanLehn y Brown 1980); (Brown y VanLehn 1982); (VanLehn, 1982, 1983, 1987, 1990) (Young y O'Shea, 1981). Sus investigaciones han generado la existencia de una extensa bibliografía relacionada con el estudio del conocimiento procesal. A pesar de que en un primer momento fue aplicada al ámbito del procedimiento de la sustracción, sus resultados han servido como plataforma para el trabajo sobre inteligencia artificial y resolución de problemas en campos como la Física. Con respecto a las conclusiones establecidas en base a las investigaciones realizadas por los autores anteriores, Resnick (1987) las sitúa en la estructura superficial del

procedimiento. No obstante, opinamos que sus teorías se esfuerzan en comprender, categorizar y tipificar cada uno de los errores y se centran específicamente en el algoritmo de la sustracción. Por tanto, no debemos obviar su influencia para el correcto desarrollo de la perspectiva teórica que fundamenta los datos que vamos a presentar en este artículo, que versan sobre los errores sistemáticos cometidos en el contexto situacional específico de nuestro país. Al objeto de realzar este estudio, hemos analizado el error y su sistematicidad en 7.140 restas, para posteriormente clasificarlos en 122 tipos, tomando como referencia el catálogo de «bugs» especificados por VanLehn en 1990.

Llegados a este punto, no podemos dejar pasar por alto las aportaciones que han analizado la adquisición de las estructuras numéricas y la construcción de los algoritmos en la Educación Primaria en nuestro país. De estas investigaciones, hemos obtenido conclusiones didácticas en relación con la enseñanza y aprendizaje de los algoritmos. Entre otros, podemos destacar autores como Bermejo (1990,1991); Castro y otros (2004); Castro y Rico (1988); Godino (1991); Gairín y Sancho (2002); Gómez (1988); Lago y Rodríguez (1999); Maza (1989, 1991, 1995); Rico y otros (1987), Puig y Cerdán (1988).

Tomamos en cuenta los resultados de las anteriores investigaciones, y a lo largo de este artículo presentamos datos sobre una de las fases de investigación en la que describimos la tipología de errores cometidos en nuestro contexto escolar. Asimismo, comparamos nuestros resultados con tres de las investigaciones significativas dentro del campo de estudio, que efectuaron un análisis similar: Brown y VanLehn (1982); Young y O'Shea (1981) y VanLehn (1990). No pretendiendo, por ello, posicionarnos exclusivamente en planteamientos sintácticos o procedimentales del algoritmo de la sustracción, ya que consideramos que este pronunciamiento nos llevaría a realizar una réplica de los trabajos de los autores anteriores, y desestimar por ello, la influencia de la comprensión del marco conceptual en la generación del error. Concepción, que ya hemos defendido y puesto de manifiesto en otros contextos cuando analizamos la relación existente entre ambos tipos de conocimiento sobre el error (López y Sánchez, 2007).

2. NATURALEZA PROCESAL DE LOS ERRORES EN EL ALGORITMO DE LA SUSTRACCIÓN

Siegler (2003) considera el estudio de los errores sistemáticos como un área de investigación prominente en las últimas décadas. Desde esta vertiente, una tarea ampliamente estudiada es la sustracción multicolumna, investigada extensamente debido a que la arquitectura del procedimiento representa un ejemplo claro de conocimiento procesal. Por ello, existen modelos detallados de representación del conocimiento y los procesos de aprendizaje que los estudiantes emplean en su adquisición (VanLehn, Ball y Kowalski, 1989).

En los próximos párrafos analizaremos resultados de autores notables en este campo de estudio como son, Brown y VanLehn (1980); VanLehn, (1982, 1983, 1986;

1987; 1990); Young y O'Shea (1981). Para estos autores, una gran parte de los errores que producen los niños/as en el aprendizaje del algoritmo son contemplados desde el punto de vista procesal, dada la naturaleza de los mismos. Resnick y Omason (1987) denominan a las teorías que abordan el algoritmo desde la vertiente de lo procesal como sintácticas, pues en general se ocupan de los procesos que subyacen a la sustracción, y los representan a través de un lenguaje sintáctico o conjunto de sentencias sintácticas. En relación con ello, la teoría de VanLehn ha analizado cómo las personas aprenden habilidades procesales y por qué generan errores durante este aprendizaje (Brown y VanLehn 1980, 1982; VanLehn, 1983, 1986, 1987, 1990), proporcionando datos muy interesantes para la investigación en este campo. Estos autores, a través de los resultados de sus estudios, ilustran cómo algunos estudiantes muestran algoritmos erróneos «Buggy algorithmic», generados a partir de la aplicación sistemática de reglas incorrectas al resolver el procedimiento. Esta conducta da como resultado un «buggy procedure», que VanLehn, Ball y Kowalski (1989) definen como un procedimiento correcto que tiene uno o más cambios en su estructura. Tales cambios generan diferentes errores que pueden convertirse en sistemáticos «bugs» cuando los niños aplican en todas las situaciones reglas incorrectas. Ben-Zeev (1995) denomina a este tipo de error «racional», pues opina que los estudiantes que cometen errores siguen un proceso racional al aplicar correctamente reglas incorrectas. En relación con la naturaleza de los mismos, mantienen la creencia de la existencia de algoritmos de reparación, que son subprocesos incompletos que el estudiante adopta para resolver el problema. Estos últimos surgen cuando se olvidan o aprenden mal los procedimientos correctos. Es decir, al intentar resolver el algoritmo y ante la ausencia del procedimiento necesario para resolverlo el estudiante se encuentra ante un callejón sin salida o «*impasse*»³ (Brown y VanLehn 1982; VanLehn, 1990). Un *impasse* ocurre cuando el procedimiento requerido es algo que el estudiante cree que no puede ni debe ser realizado (VanLehn, 1989) y recurre a aplicar varias estrategias para salir del mismo con el fin de resolver la tarea propuesta. Estas estrategias o meta-acciones, denominadas «Repairs» (VanLehn, 1983, 1990), son un conjunto de pasos que alteran el proceso y en ocasiones originan errores «Bugs». Cada una de ellas puede constituir un «bug» diferente. Por tanto, son la base de la solución al problema cuya meta es conseguir salir del «*impasse*».

El estudio de estas estrategias contribuye a comprender los procesos subyacentes al origen del error en el algorítmico de la sustracción. De este modo, el objetivo central de la teoría desarrollada es el análisis de tales procedimientos, puesto que los errores pueden ser explicados a partir de los mismos. Tomando como plataforma este análisis en el algoritmo de la sustracción, VanLehn (1990) estudia más de 100 tipos de «bugs» o errores distintos en esta operación.

Así, según la teoría de la reparación, «Repair Theory» (Brown y VanLehn, 1980; VanLehn, 1990), tales errores se producen durante el aprendizaje inductivo de la sustracción a partir de ejemplos y a través de mecanismos

análogicos puestos en práctica para solucionar el problema. Esto significa que cuando un estudiante se encuentra ante una sustracción nueva y no sabe cómo resolverla, generaliza reglas de ejemplos familiares en un intento de solucionar el algoritmo. El autor denomina a esta parte de su concepción teórica «Inducción Hipótesis», (VanLehn, 1986). Considera también que en la generación de los mismos influye un proceso de enseñanza-aprendizaje de habilidades aritméticas peculiar, que explica la adquisición de errores específicos. Para demostrarlo, examina los libros de texto en orden a explicar el origen de procedimientos correctos y procedimientos erróneos o «bugs» (VanLehn, 1990). Es en este momento cuando describe el aprendizaje a través de los pasos a seguir en el contexto de la instrucción para que no surjan los errores. Para lograr este objetivo, intenta predecir cuál es el estado de conocimiento que los estudiantes tendrían que poseer después de cada una de las lecciones de enseñanza de la resta. Con esta nueva formulación, persigue dos objetivos básicos: proporcionar una sucesión estructurada a nivel cognitivo del proceso y describir la conducta de aprendizaje paso a paso. Al objeto de comprender la naturaleza de los «bugs» o errores algorítmicos, diseña un modelo de ordenador denominado «sierra», que simula la adquisición de los «bugs» (VanLehn, 1987). A través de este modelo, tratará de explicar qué clase de estructuras mentales surgen de este tipo de instrucción basada en los ejemplos, y cuántas de estas estructuras guían la producción de la conducta observada. VanLehn (1990) encuentra que todos los errores en habilidades procesales ocurren a través de un «*impasse*»; más tarde admite que sólo un 73% pueden deberse a eventos dirigidos por el «*impasse*» (VanLehn, 1991).

Young y O'Shea (1981) analizan las contribuciones de Brown y Burton (1978) y de VanLehn y Brown (1980), y diseñan un modelo computacional para simular mejor la naturaleza del error en la sustracción. Su teoría se centra en el aprendizaje de las reglas que subyacen al procedimiento y en la adquisición correcta de las mismas. Para ellos, los errores son resultado de un fracaso en el proceso de ejecución del algoritmo. En orden a demostrar su teoría, intentan evidenciar la naturaleza de los errores. Afirman que los errores se deben a procesos de memorización imperfecta de cada uno de los pasos que constituyen el proceso, que se corresponden con los errores vistos en experimentos de aprendizaje verbal. Así, conjeturan que algunos estudiantes, al resolver una sustracción, omiten, permutan el orden y mezclan los componentes de los pasos, o incluyen pasos de otros procesos como pueda ser la adición.

Podemos afirmar, pues, que estos autores centran sus investigaciones en la sintaxis de los procesos aritméticos, o lo que podíamos denominar parte simbólica del proceso que cubre el conocimiento que afecta a la solución del problema, interesándose en los errores sistemáticos de los niños/as.

En resumen, teniendo en cuenta las aportaciones de las investigaciones precedentes, en este estudio tratamos de analizar la naturaleza procesal del error en la sustracción en nuestro contexto escolar.

3. LA INVESTIGACIÓN

Los datos que presentamos en este artículo forman parte de una investigación más amplia que ha tratado de indagar sobre distintos componentes del error en el algoritmo de la resta. El estudio se ve influenciado tanto por una perspectiva de naturaleza conceptual como procesal, de cara a establecer la relación entre dichos aprendizajes y la génesis del error. A lo largo de los siguientes epígrafes, describimos la parte de la investigación que se centró en la tipificación, categorización e indagación sobre la sistematicidad de los errores.

3.1. Objetivos

Los objetivos de esta fase de la investigación fueron:

- Analizar la tipología de los errores más frecuentes, categorizarlos y averiguar si persisten sistemáticamente.
- Observar la evolución del error a lo largo de toda la Educación Primaria y comparar los resultados con los referidos por autores relevantes.

3.2. Sujetos

Sobre una muestra compuesta por cuatro colegios públicos de Educación Primaria, situados dos de ellos en la ciudad de Salamanca y otros dos en zonas rurales, seleccionamos un total de 357 alumnos de ambos sexos (58,50%, niños / 41,50%, niñas), que estudiaban en los cursos 2º, 3º, 4º, 5º y 6º de Educación Primaria.

3.3. Instrumentos

Para el estudio que presentamos se utilizó la prueba que denominamos *Prueba de análisis procesal número 2*. Los niños/as resolvieron en el aula sin límite de tiempo la prueba de las 20 restas de VanLehn (1990:170), que constituyó para el autor uno de los instrumentos básicos de identificación de una gran variedad de errores. La fiabilidad y validez de la misma viene avalada por la investigación realizada por el autor, que fundamentó su teoría, «Repair Theory», sobre la adquisición de errores procesales en el algoritmo de la resta.

Esta prueba sirvió como instrumento de obtención de datos que permitió categorizar los errores que se producen con mayor frecuencia, e indagar sobre su sistematicidad. Además, con los datos obtenidos comparamos nuestros resultados con los presentados por otros autores.

3.4. Procedimiento

Para el análisis cuantitativo de la base de datos obtenida a través de la *Prueba de análisis procesal número 2*, utilizamos el programa SPSS 11.5. Al objeto de establecer categorías que nos permitieran agrupar los datos de los que disponíamos, optamos por tomar como referencia las categorías que crearon Brown y Burton (1978); Brown y

VanLehn (1982); VanLehn (1990). Para definir la tipología de los errores utilizamos el glosario de errores de VanLehn (1990: 223). Analizamos 122 categorías diferentes de errores en el total de 7.140 restas analizadas.

Las categorías de análisis fueron: *aciertos* y *errores*. Dentro de la categoría errores, analizamos las subcategorías: *bug o error* (niños/as que tuvieron errores que podían ser explicados por sólo uno o dos tipos de *bugs* y también estudiantes que exhibieron claramente un *bug* y otras conductas que no podían ser explicadas por ese *bug*. *Libres de bug*: niños/as que sólo erraron en una o dos sus-tracciones y además los errores no eran consistentes con ningún tipo de *bug*, por ejemplo el error de cómputo. *No diagnosticable*: niños/as que exhibieron alguna conducta errónea, pero no era consistente.

4. RESULTADOS

Con el fin de informar adecuadamente de los resultados obtenidos, dividimos este apartado en diferentes secciones que se corresponden con el análisis de los datos en función de las categorías establecidas con anterioridad.

4.1. Aciertos en el total de las 20 restas de la prueba de VanLehn (1990: 170).

Del total de población muestral (N=357), respondieron correctamente a las 20 restas un porcentaje de 26,61% estudiantes. El porcentaje de aciertos por curso podemos apreciarlo en la tabla 1, que mostramos a continuación:

Tabla 1
Porcentaje de alumnos por curso que completan correctamente las 20 restas.

Curso	N _{muestra}	N ₂₀	% sobre el total de muestra
(2º)	64	4	6,25 %
(3º)	72	15	20,83 %
(4º)	73	23	31,51 %
(5º)	75	30	40,00 %
(6º)	73	23	31,51 %
Total	357	95	26,61 %

Observamos en la tabla anterior, que el porcentaje de aciertos se ve incrementado por curso para descender a partir de quinto y situarse de nuevo en las mismas frecuencias que en cuarto. Fenómeno que denominamos *decaimiento de la información algorítmica* (López, 1999), que puede estar vinculado a la influencia de un currículo no transversal del área de matemáticas, que naturalmente incide categóricamente en los resultados.

4.2. Estudio de los errores cometidos a través de la prueba de VanLehn (1990: 170).

Fueron analizadas 7.140 restas, siendo el porcentaje de error de un (23,47%), resultado muy similar al encontra-

do por Young y O'Shea (1981), que observaron un 22% de errores. El número de errores desciende linealmente por curso, con un coeficiente de proporcionalidad igual a (-73,8). El mayor número de errores se concentra en la resta n.º 19, (10012-214), con un porcentaje de 37,53%. Consideramos que la conglomeración del error en torno a esta resta puede ser debido a la estructura conceptual que subyace a la misma. A continuación, en la tabla 2 mostramos los porcentajes de error por restas.

Tabla 2
Errores por resta⁴.

Restas	Error	%	Acierto	%	Total
R1 (647-45)	27	7,5	330	92,4	357
R2 (885-205)	31	8,6	326	91,3	357
R3 (83-44)	55	15,4	302	84,5	357
R4 (8305-3)	29	8,1	328	91,8	357
R5 (50-23)	67	18,7	290	80,2	357
R6 (562-3)	76	21,2	281	77,6	357
R7 (742-136)	56	15,6	301	84,3	357
R8 (106-70)	77	21,5	280	78,4	357
R9 (716-598)	87	24,3	270	75,6	357
R10 (1564-887)	98	27,4	259	72,5	357
R11 (6591-2697)	96	26,8	261	73,1	357
R12 (311-214)	90	25,2	267	74,7	357
R13 (1813-215)	112	31,3	245	68,6	357
R14 (102-39)	88	24,6	269	75,3	357
R15 (9007-6880)	97	27,1	260	72,8	357
R16 (4015-607)	107	29,9	250	70	357
R17 (702-108)	112	31,3	245	68,6	357
R18 (2006-42)	116	32,4	241	67,5	357
R19 (10012-214)	134	37,5	223	62,4	357
R20 (8001-43)	121	33,8	236	66,1	357

En relación con los errores cometidos por curso, comparamos nuestros resultados con los obtenidos por Brown y Burton en 1978 mediante el estadístico χ^2 . Los resultados obtenidos llevaron a la aceptación de la hipótesis nula que indicaba que no hay diferencias en los porcentajes de las dos muestras.

Tabla 3
Comparación de los resultados de Brown y Burton (1978) con los obtenidos en nuestra investigación.

Investigación	Errores	Curso 4	Curso 5	Curso 6	Total
Brown, Burton 1978	f %	504 (38,03%)	399 (30,11%)	422 (31,84)	1325 100%
Nuestra investigación 2003-4	f %	50 (34,48 %)	45 (31,03%)	50 (34,34%)	145 100%

En la tabla anterior, también observamos que la frecuencia de errores por curso disminuye, mostrando un punto de inflexión en 5º para subir en 6º de nuevo, fenómeno que hemos podido observar también en la tabla 1. Autores como Brown y Burton (1978) explican esta tendencia debido a que la adición y la sustracción no se presentan en los cursos posteriores a 4º, lo cual incidiría en los resultados. Los datos de autores tan relevantes ofrecen un referente de validación metodológica de nuestra investigación.

4.3. Errores más comunes

Del análisis de los errores, encontramos tres conclusiones: (i) el 51,3 % de los cuestionarios analizados mostraban más de un *bug* o tipo de error, (ii) el error que aparecía con mayor frecuencia era el «error de cómputo», y (iii) algunos de los errores con concentración superior en frecuencias persistían durante todos los cursos, eran sistemáticos en su naturaleza.

En relación con el error cometido con mayor número de frecuencias, *errores de Cómputo*, presentaba un porcentaje de aparición de un 35,01%. Otros autores han informado de este mismo error, con un número de frecuencias de aparición muy alto. Ejemplo de ello es el resultado de Young y O'Shea (1981) con un 37% y VanLehn (1990), con un 27,13%. VanLehn (1990: 104) informa que la proporción de casos que manifestaban esta categoría de error disminuía en su muestra en función de la instrucción, decreciendo a medida que ascendía en nivel, evidencia que también observamos de igual modo en nuestra investigación.

Del mismo modo, informamos que el porcentaje obtenido en relación con la categoría «no diagnosticable» fue de un 5,88%. VanLehn (1990: 104) investigó de nuevo a estos niños/as que cometían errores asignados a las categorías «no diagnosticable, y errores de cómputo» e informó que el hecho de que estos errores aparecieran de manera constante no era suficiente para poder establecer un diagnóstico. Consideramos que, además de esta explicación, existen algunas causas concretas, de naturaleza pedagógico-contextual, que dependen del aula, sus características y momento de ejecución de la prueba. Por tanto, valoramos estos errores y los definimos como «acumuladores», pues su origen es diverso y pudiera estar fundamentado en causas de naturaleza procesal –como puede ser el escaso entrenamiento en el cálculo numérico– o vinculados a actitudes relacionadas con el entorno –como pueden ser la falta de concentración, motivación, experiencia con este tipo de pruebas, etc.–, que se configuran como causas actitudinales determinantes que explicarían su aparición en todos los cursos.

Al analizar los resultados observamos que los estudiantes, por norma general, presentaban más de un error sistemático en sus respuestas. Tal apreciación también la hemos encontrado en otros estudios (Brown y VanLehn, 1980; Young y O'Shea, 1981; VanLehn, 1982, 1990). Ejemplo de ello, una cita de Brown y Burton (1978): «As can be seen, nearly 40% of the students exhibited consistently buggy behaviour (...).» (p. 181).

Para determinar si los errores que aparecían en nuestra investigación se encontraban en cada niño de manera individual, y de forma parcial o dominante, metodológicamente analizamos los errores que mayor número de frecuencias agrupaban y que se repetían a lo largo de todos los cursos, para considerar como error dominante la aparición del mismo tipo de error en más de tres ocasiones sobre el total de las 20 restas por niño.

En la tabla siguiente expresamos el número de ocurrencias y el número de niños/as que producían errores sistemáticos, en los cursos: 3º, 4º, 5º y 6º.

Tabla 4
N.º de ocurrencias y estudiantes que consistentemente exhibieron el bug (Cursos: 3, 4, 5, 6).⁵

Categoría y nombre del error*	Ejemplos ⁶	f	Niños/as
1-1=0- after-borrow	812-518=304	61	13
Borrow-no-decrement	62-44=28	48	22
Borrow-from-zero-is-ten	604-235=479	38	8
Borrow-from-zero	306-187=219	28	13
Forget-borrow-over-blank	347-9=348	19	3
Diff, 0-N=N	80-27=67	13	8
Borrow-no-decrement-except last	6262-4444=1828	9	4
Always-borrow	488-229=1159	6	3
Add-instead-off-sub	32-15=47	4	1
Borrow-into-one=ten	71-38=32	3	1
Borrow-across-zero	904-7=807	3	1
Always borrow-left	733-216=427	3	1
Ignore-leftmost-one-over-blank	143-22=21	2	1

En general, podemos indicar que la comparación con otras teorías no puede ser realizada de manera exhaustiva, dado que contextos, recursos y muestras son diferentes. No obstante, en la tabla 5, que se expone a continuación tomando como referencia la tabla 7.17. de (VanLehn, 1990: 202), donde informa de los bugs sistemáticos encontrados en el estudio de Young y O'Shea 1981, los obtenidos por Brown y VanLehn 1982 y los obtenidos por VanLehn (1990), podemos indicar que al margen de coincidir en los errores más comunes con una u otra de estas investigaciones, lo importante es que se repite en las cuatro investigaciones la aparición de los «bugs» sistemáticos: «Borrow-across-zero (904-7=807)⁷, y Borrow-from-zero (306-187=219)⁸», relacionados con la transformación del cero. Por otra parte, existen en nuestra investigación errores «bugs» que aparecen con un nivel de frecuencias muy elevado, pero que no podemos considerar como estables, porque desaparecen a partir de cuarto curso. Es el caso de los «bugs» «Smaller-from-larger (81-38 = 57)» o «Stop-borrow-at-zero (404-187= 227)». Este hecho respaldaría en un principio la conjetura de que hay errores de corte semántico relacionados con una pobre adquisición conceptual de las estructuras numéricas que desaparecen con la instrucción para dejar paso a los de tipo procesal.

Tabla 5
Comparación de bugs estables con otras teorías⁹.

YO* ¹⁰	RT* ¹¹	ST ¹²	Nuestra investigación	Bug
		+	+	Always-borrow-Left
		+		Blank-Instad-of-Borrow
		+		Borrow-Across-Second-Zero
+	+	+	+	Borrow-Across-Zero
		+		Borrow-don't-Decrement-Unless-bottom-smaller
		+		Borrown-from-one-is -Nine
		+	+	Borrow-From-One-Is-Ten
+	+	+	+	Borrow-From-Zero
+				Borrow-from-all-Zero
	+	+	+	Borrow-from-Zero-Is-Ten
	+	+	+	Borrow-no-decrement
		+	+	Borrow-no-decrement-except-last
		+		Borrow-treat-one-as-zero
	+			Can't -Subtract
		+		Doesn't Borrow-Except-Last
+				Diff-0-N=0
+			+	Diff-0-N=N
+			+	Diff-N-N=N
+				Diff-N-0=0
		+		Don't- Decrement-Zero
		+	+	Forget-Borrow-Over-Blacks
		+		N-N-Causes-borrow
		+		Only-do-Units
	+	+		Quit-When-Bottom-Blank
+	+	+		Smaller-From-Larger
		+		Smaller-From-Larger-Except-Last
	+	+		Smaller-from-larger-Instead-of-Borrow-from-zero
		+		Smaller-from-larger-Instead-of-Borrow-Unlessbottom-
		+		Stops-Borrow-at-Multiple-Zero
+	+	+		Stops-borrow-at-zero
	+			Stutter-subtract
	+	+		Top-Instead-of-borrow-From-Zero
+	+			Zero-Instead-of-borrow
10	12	25	10	total

Por último, VanLehn (1982) establece los porcentajes de «bugs» estables o sistemáticos que específicamente se presentaban en un 49% de los alumnos de tercero, un 27% de los alumnos de cuarto y un 13% de los alumnos de quinto y concluye que la diferencia de porcentajes entre cursos se debía a que los niños/as más mayores habían aprendido el algoritmo correcto. La evolución de porcentajes era clara: un 19% de los alumnos de tercero se encontraban dentro de la categoría «libre de bugs», 39% de los alumnos de cuarto y 60% de los alumnos de quinto.

En nuestra investigación, podemos apreciar que un 55,55% de los alumnos de tercero presentaban *bugs* estables, un 52,05% en cuarto y un 26,66% en quinto, frente a unos porcentajes de niños/as categorizados como «libres de error», de un 23,61% en 3º, un 23,28% en cuarto y 33,33% en quinto.

Encontramos, pues, en los resultados un porcentaje mayor de niños/as con *bugs* estables o sistemáticos en todos los cursos y también un menor descenso por curso de los mismos, aunque sí apreciamos proporcionalidad en el descenso entre cuarto y quinto, cursos sujetos a la influencia de un mayor número de niños/as categorizados como «libres de error».

5. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en esta fase de la investigación evidencian que en nuestras aulas se producen errores sistemáticos en un 55,5% de los casos de forma estable a lo largo de toda la escolaridad. A nivel didáctico, la constatación de la existencia de los mismos y el reconocimiento de la tipología más habitual es un hecho de indudable valor pedagógico, pues permite a los docentes actuar de manera preventiva y realizar un diagnóstico y posterior tratamiento eficaz.

Asimismo, observamos que la frecuencia de errores por curso disminuye mostrando un punto de inflexión en quinto curso, para subir en sexto y equipararse en resultados a los obtenidos en cuarto, tendencia observada del mismo modo por Brown y Burton en 1978. En relación con esta tendencia que hemos definido como fenómeno del decaimiento de la información (ver tablas 1, 3), opinamos que la falta de comprensión significativa de los conceptos básicos relacionados con las estructuras numéricas produce interferencia en el procesamiento del conocimiento procedimental conexas al aprendizaje de los algoritmos. En este caso, la incorrecta organización y elaboración puede ser el factor de explicación de la interferencia y decaimiento a nivel conceptual y procesal que se da y proyecta al ámbito algorítmico. Por tanto, tal y como hemos podido apreciar en la tipología de errores sistemáticos encontrados, el decaimiento de la información en nuestra muestra estaría relacionado con la falta de comprensión del valor posicional de las cifras en el sistema base 10. Esta idea explicaría la existencia de

errores de base inicialmente conceptual en niños/as experimentados de los últimos cursos. La génesis de estas interferencias se ubica en la confluencia entre la naturaleza del propio pensamiento matemático y su incorrecta transmisión. Si unimos a esta aseveración que la mayor parte de los procesos matemáticos se enseñan a través del libro de texto, que en estos cursos introduce otros objetivos de aprendizaje matemático, las dos justifican el hecho de que se produzca un decaimiento de la información en los cursos señalados (4º y 6º).

Igualmente, señalar que encontramos una tipología de errores sistemáticos similares a la encontrada por autores relevantes en la literatura que aborda el tema (Young y O'Shea 1981; Brown y VanLehn 1982; VanLehn 1990), coincidiendo en dos errores con estos tres estudios. Tales errores son: «Borrow-from-zero y Borrow-across-zero» (ver tabla 5).

Los resultados obtenidos evidencian que los errores se relacionan con conductas vinculadas con la comprensión de conceptos que rigen el sistema de numeración decimal. Es posible, por tanto, que pudiera existir una línea evolutiva común en la adquisición del error durante el aprendizaje de la sustracción, que explique la aparición de errores similares en contextos didácticos de aprendizaje diferentes.

De las categorías de errores con más presencia, apreciamos «los errores de cálculo» que presentaba el mayor número de frecuencias. Este hecho es comparable con los resultados obtenidos en las investigaciones de VanLehn (1990) y Young y O'Shea (1981).

Asimismo, establecemos cómo la aparición de casos de este tipo de error en la muestra disminuía igualmente que en las investigaciones tomadas como referencia, a medida que ascendíamos de curso. Algunos de los errores con concentración superior de frecuencias persistían durante todos los cursos de 2º a 6º. Estos son los que en nuestra investigación denominamos «errores sistemáticos de carácter estable» (tabla 4), otros desaparecen a partir de cuarto.

Para terminar, comparamos los porcentajes de errores estables encontrados en la investigación con los encontrados por VanLehn (1990), evidenciando la existencia de un porcentaje mayor de niños/as con *bugs* estables en nuestra muestra, en todos los cursos, y también un menor descenso por curso de los mismos.

Concluyendo, opinamos que las aportaciones realizadas por Brown y Burton (1978), Brown y VanLehn (1982), VanLehn y Brown (1980), VanLehn (1982, 1983, 1987, 1990) y Young y O'Shea (1981) pueden ser generalizadas a contextos didácticos espacio-temporales muy diferentes. Apreciamos una similitud evolutiva en lo que podríamos denominar adquisición del error. Por tanto, consideramos que las conclusiones de sus estudios son una ayuda de inestimable valor para los profesores que enseñan procesos algorítmicos en el ámbito escolar.

NOTAS

1. A lo largo del artículo utilizaremos los términos «bugs» y «errores» de manera indistinta.
2. Buggy-procedures-Buggy algorithms: términos tomados del lenguaje de programación informática, donde un proceso erróneo es un proceso correcto con una o más pequeñas perturbaciones, o agujeros, instalados en él (Brown y Burton 1978, Burton 1982, VanLehn 1982).
3. VanLehn (1983, 1990) describe un *impasse* como una situación que surge ante una tarea que el aprendiz no sabe ejecutar, lo que provoca que busque el camino que le parece más adecuado para la solución, aunque no sea el correcto. Dicho camino generaría un *bug*.
4. Tomamos como referente los cursos 3º, 4º, 5º y 6º, debido a que en 2º aún no se ha culminado la instrucción completa del algoritmo de la resta con llevadas.

5. Los diferentes errores aparecen con su nombre original en inglés. Existe un consenso general en la utilización de la nomenclatura anglosajona para la descripción de los errores o bugs.
6. Ejemplos tomados de VanLehn (1990).
7. Borrow-across-zero: al pedir prestado al cero, el estudiante salta la columna del cero y pide prestado a la próxima columna.
8. Borrow-from-zero: en lugar de pedir prestado a un cero, el estudiante cambia el cero a nueve, pero no continúa la captación de recursos de la columna a la izquierda.
9. Adaptada de tabla 7.17. VanLehn (1990), pág. 202. Comparación con otras teorías de bugs estables en nuestra muestra.
10. YO= Estudio de Young y O'Shea (1981).
11. RT = Repair Theory. Brown y VanLehn (1982).
12. ST= Sierra's Theory Estudio VanLehn (1990).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASHLOCK, R. (1976). *Error patterns in computation*. Columbus, Ohio: Bell and Howell.

BAROODY, A. (2003). The Development of Adaptive Expertise and Flexibility: The Integration of Conceptual and Procedural Knowledge, en Baroody, A. J., Dowker, A. (eds.), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills. Constructing Adaptive Expertise*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

BEN-ZEEV, T. (1995). The nature and origin of rational errors in arithmetic thinking: induction from examples and prior knowledge. *Cognitive Science*, 19, pp. 341-376.

BERMEJO, V. (1990). *El niño y la aritmética*. Barcelona. Paidós.

BERMEJO, V. (1990). La operación de restar, en Bermejo, V. (ed.). *El Niño y la Aritmética. Instrucción y Construcción de las Primeras Nociones Aritméticas*. Barcelona: Paidós.

BERMEJO, V. (1991). *Aprendiendo a contar*. C.I.D.E.

BROWN, J. y BURTON, R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in Basic mathematical skills. *Cognitive Science*, 2, pp. 155-192.

BROWN, J. y VANLEHN, K. (1980). Repair Theory: A Generative Theory of bugs in Procedural Skills. *Cognitive Science*, 4, pp. 379-426.

BROWN, J. y VANLEHN, K. (1982). Towards a generative theory of «bugs», en Carpenter, T., Moser, J. y Romberg, T. (eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, pp. 117-135. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

BROWNELL, W. (1935). Psychological considerations in the learning and teaching of arithmetic, en Reeve, W. E. (ed.). *The teaching of arithmetic. Tenth yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 1-31). Nueva York: Teachers College, Columbia University.

BRUECKNER, L. y BOND, G. (1955). *The diagnosis and treatment of learning difficulties*. Nueva York: Appleton-Century-Crofts.

BUSWELL, G. (1926). *Diagnostic studies in arithmetic*. Chicago: University of Chicago Press.

CASTRO MARTÍNEZ, E. et al. (2004). *El número: agente integrador del conocimiento*. Madrid: MEC, Subdirección General de Información y Publicaciones, D.L.

CASTRO, E. y RICO, L. (1988). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar*. Madrid: Síntesis.

COX, L. (1975). Systematic errors in the four vertical algorithms in normal and handicapped populations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 6(4), pp. 202-220.

DÍAZ GODINO, J. (1991). *Área de conocimiento. Didáctica de la Matemática*. Madrid: Síntesis.

FUSON, K. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New York: Springer-Verlag.

FUSON, K. (1992). Research on Whole Number Addition and Subtraction, en Grouws, Douglas A. (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics*. New York: Maxwell Macmillan International.

FUSON, K. y BRIARS, D.J. (1990). Using base-ten blocks learning/teaching approach for first and second grade place value and multidigit additions and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, pp. 180-206.

GAIRÍN, J.M. y SANCHO, J. (2002). *Números y algoritmos*. Síntesis. Madrid.

GÓMEZ, B. (1988). *Numeración y Cálculo*. Madrid: Síntesis.

- GROEN, G. y RESNICK, L. (1977). Can preschool children invent addition algorithms? *Journal of Educational Psychology*, 69, pp. 645-652.
- HATANO, G. (1988). Social and motivational bases for mathematical understanding, en Saxe, G. B. y Gearhart, M. (eds.), *Children's mathematics* (pp. 55-70). San Francisco: Jossey-Bass.
- HIEBERT, J. y WEARNE, D. (1996): Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction, *Cognition and Instruction*, 14, pp. 251-284.
- KILPATRICK, J., SWAFFORD, J. y FINDELL, B. (2001): *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC, National Academy Press.
- LAGO, M. O. y RODRÍGUEZ, P. (1999). Procesos psicológicos implicados en el aprendizaje de las matemáticas. Beltrán, J. y Genovard, C. (eds.). *Psicología de la Instrucción (Vol. II), Áreas curriculares*, pp. 75-95. Madrid: Síntesis.
- LÓPEZ, R. (1999). *Desarrollos curriculares de la ciencia de computadores en la enseñanza elemental*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Salamanca, Facultad de Educación, Salamanca. España.
- LÓPEZ, R. y SÁNCHEZ, A. B. (2007). Los componentes generadores de errores algorítmicos. Caso particular de la sustracción. *Revista de Educación*, 344, pp. 377-402.
- MAZA, C. (1989). *Sumar y restar*. Madrid: Visor.
- MAZA, C. (1991). *Enseñanza de la suma y la resta*. Madrid: Síntesis.
- MAZA, C. (1995). *Aritmética y representación*. Barcelona: Paidós.
- OHLSSON, S. y REES, E. (1991). The function of conceptual understanding in the learning of arithmetic procedures, in *Cognition and Instruction*, 8, pp. 103-180.
- PUIG L. y CERDÁN F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.
- RESNICK, L. (1982). Syntax and semantics in learning to subtract, en Carpenter, T., Moser, J., Romberg, T. (ed.). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- RESNICK, L. y OMANSON, S. (1987). *Learning to understand arithmetic*, en (ed.) *Advances in instructional psychology*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- RICO, L y OTROS (1987). *Números y operaciones*. Madrid: Síntesis.
- SIEGLER, R. S. (2003). Implications of cognitive science research for mathematics education, en Kilpatrick, J., Martin, W. B. y Schifter, D. E. (eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 219-233). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- VANLEHN, K. (1982). Bugs are not enough: Empirical studies of bugs, impasses and repairs in procedural skills. *Journal of Mathematical Behaviour*, 3, pp. 3-71.
- VANLEHN, K. (1983). On the representation of procedure in repair theory, en Ginsburg, H. P. (eds.), *The development of mathematical thinking*. Nueva York: Academia Press.
- VANLEHN, K. (1986). Arithmetic procedures are induced form examples, en Hiebert, J. (ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 133-179). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- VANLEHN, K. (1987). Learning one subprocedure per lesson. *Artificial Intelligence*, 31, pp. 1-40.
- VANLEHN, K. (1990). *Mind bugs: origins of procedural misconceptions*. Cambridge, Mass: MIT Press.
- VANLEHN, K. (1991). Rule Acquisition Events in discovery of Problem-Solving Strategies. *Cognitive Science*, 15, pp. 1-47.
- VANLEHN, K. y BROWN, J. (1980). Planning nets: A representation for formalizing analogies and semantic models of procedural skills, en Snow, R. E., Federico, P. A. y Montague, W. E. (eds.), *Aptitude, learning, and instruction (2)*, (pp. 95-137). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- VANLEHN, K., BALL, W. y KOWALSKI, B. (1989). Non-LINFO Execution of Cognitive Procedures. *Cognitive Science*, 13, pp. 415-469.
- YOUNG, R.; O'SHEA, T. (1981). Errors in children's subtraction. *Cognitive Science*, 5, pp. 153-177.
- WU, H. (1999). Basic skills versus conceptual understanding: A bogus dichotomy in mathematics education, in *American Educator*, 23, (Fall 1999), pp. 14-19, 50-52.

[Artículo recibido en febrero de 2007 y aceptado en abril de 2008]

Analysis of systematic error in subtraction

LÓPEZ FERNÁNDEZ, RICARDO¹ y SÁNCHEZ GARCÍA, ANA B.²

¹ Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca.

² Departamento de Didáctica, Organización y Métodos de Investigación, Universidad de Salamanca.

riclop@usal.es

asg@usal.es

Abstract

In this article an exhaustive analysis is made of the theoretical frame that is the basis for studying algorithmic error, knowledge representation models, and the learning processes that students use in acquiring errors in the subtraction algorithm. We fundamentally describe the theories that have studied the nature of errors from the process component of procedure. These theoretical contributions are at the basis of the general objective of this research, in which we attempt to analyse the procedural nature of errors in our school context, and we present the results relating to the typology, nature, and evolution of errors in subtraction. The principal aim of the research was to see whether systematic errors occur in our school context and if they decrease through schooling. We also compared the results obtained with those of other authors of reference in this field of research. To do so, we analysed 7140 subtractions carried out by 357 students of both genders, (58.50%, boys / 41.50%, girls) in the 2nd, 3rd, 4th, 5th and 6th years of primary school. The results obtained in the research show that in our classrooms, children make systematic errors in 55.5% of the cases in a steady way throughout their schooling. We likewise observed that the error frequency decreased by school year, showing an inflection point in the 5th year, and then increased in the 6th year, where the results were the same as those obtained in the 4th year. We have defined this trend as an information decline phenomenon, related to a lack of understanding of the positional value of numbers in the base 10 system. Thus, the lack of significant comprehension of the basic concepts relating to number structures produces interference in the procedural knowledge processing involved in learning algorithms. In this case, incorrect organization and elaboration may be the explanatory factor in the interference and decline

at the conceptual and process level that we observed projected onto the algorithmic context.

As regards the typology of the most common errors, we found systematic errors similar to those found by important authors in the related literature (Young & O'Shea 1981; Brown & VanLehn 1982; VanLehn 1990), coinciding with these three studies on two of the errors: «Borrow-from-zero and Borrow-across-zero».

The results show that the errors are related to behaviour linked to the understanding of concepts that govern the decimal number system. Hence there may be a common developmental line in error acquisition while learning subtraction that would explain the appearance of similar errors in different learning contexts.

«Calculation errors» was the category of errors most found in our study. This finding is similar to the results obtained by VanLehn (1990) and Young and O'Shea (1981).

We likewise found that the appearance of cases of this type of error in the sample decreased as the children moved through the years of school, the same as in the research done as a reference. Some of the errors with the highest concentration of frequency persisted through years 2 to 6 (we call these «steady systematic errors») while others disappeared.

Finally, the results obtained from analysing 122 different categories of errors in the 7140 subtractions in our sample show the existence of systematic errors of a specific typology, a finding that is of unquestionable value when programming the teaching process.