ENSEÑANZA DE ECUACIONES LINEALES EN CONTEXTO

Galagovsky, Lydia R.[1] **y Cittadini, Paula E.**[2]
[1] Centro de Formación e Investigación en Enseñanza de las Ciencias. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Ciudad Universitaria. Ciudad de Buenos Aires, Argentina.
[2] Escuela Argentina de Negocios. Ciudad de Buenos Aires, Argentina.
lyrgala@qo.fcen.uba.ar
paulacittadini@hotmail.com

Resumen. Recientes estudios comparativos internacionales de evaluación del desempeño matemático en estudiantes secundarios han puesto de relieve dificultades y falta de destrezas para reconocer, formular y abordar problemas matemáticos en contextos reales. En este trabajo presentamos una propuesta didáctica innovadora para la enseñanza del tema ecuaciones matemáticas lineales, enmarcada en el contexto de las leyes económicas de Oferta, Demanda, y de Punto de Equilibrio entre precios y beneficios.
Los logros de la aplicación de esta propuesta en estudiantes recientemente egresados de secundaria nos muestra el interés de enseñar contenidos matemáticos aplicados a contextos reales, y nos lleva a reflexionar sobre qué significa generar una situación didáctica en matemáticas.

Palabras clave. Enseñanza de matemáticas en contexto, ecuaciones lineales, funciones lineales.

Teaching linear equations in context

Summary. Difficulties and lack of skills to recognize, describe and solve math problems in real contexts have been recently detected on secondary students by international educational researchs. In this article we present an innovative instructional proposal to teach lineal equations in context, involving the economic Laws of Supply and Demand, and Point of Equilibrium between prices and quantities.
Secondary students' achievements during the development of this instructional proposal led us to consider the importance and interest to teach math in real contexts, and to argue on the actual meaning of a math didactic situations.

Keywords. Teaching math in context; linear equations.

1. INTRODUCCIÓN

Desde la década de los 80 los estudios de investigación realizados con metodologías cualitativas en Didáctica de las Matemáticas experimentaron un incremento considerable. Los contenidos de las investigaciones abarcaron diversas cuestiones, desde tipos de mecanismos cognitivos puestos en juego por los estudiantes frente a problemas concretos (Schoenfeld,1994; Panizza y cols., 1999), hasta influencias afectivas en las formas de reaccionar de los estudiantes ante la matemática y su aprendizaje (Gómez Chacón, 1998). Paralelamente, otros tipos de estudios estadísticos comparativos tratan continuamente de medir el grado de eficiencia en el aprendizaje matemático de los estudiantes (TIMSS; PISA 2003).

Recientemente, estudios comparativos internacionales de evaluación del desempeño matemático de estudiantes secundarios han puesto de relieve dificultades y falta de destrezas para reconocer, formular y abordar problemas matemáticos en contextos reales (Gómez Chacón y otros, 2006). Cierto es que, desde que Robert y Robinet (1989) señalaran la falta de claridad en metas y objetivos en la enseñanza de las matemáticas, y luego de haberse producido múltiples reformas educativas, la comunidad educativa internacional continúa planteándose actualmente cuáles son y qué significa que los estudiantes adquieran competencias en matemáticas (Gómez Chacón y otros, 2006). Como ejemplo de ello, Ávila Storer (2001) señala que, siete años después de la reforma educativa en México, «*la noción de actividad o problema (esta última eje de la reforma) alcanzan poca claridad en el pensamiento de los profesores de matemática*.»

Moreno Moreno y Azcárate Jiménez (2003) señalan que en la realidad de la mayoría de las aulas de matemáticas en escuelas secundarias la enseñanza es de tipo normativa. Esto significa que, generalmente, el docente suele mostrar la resolución algorítmica de un problema tipo, para luego continuar con abundante ejercitación similar por parte de los estudiantes; resulta como si el profesor considerara que el estudiante aprende por imitación. Estas autoras señalan que en esos contextos, los estudiantes se comportan como receptores pasivos del discurso docente, y que muchos profesores ni siquiera se plantean que en una misma clase puede haber estudiantes con diferentes estilos de aprendizaje. En un contexto de interés por modificar estas realidades, el enfoque Ciencia, Técnica, Sociedad (CTS) (González García y cols., 1996) –muy promocionado como marco para realizar propuestas didácticas innovadoras en ciencias naturales– podría también aplicarse al campo de la enseñanza de las matemáticas si consideráramos, por ejemplo, que una competencia real que los estudiantes deberían llevarse de la escuela secundaria consistiría en comprender cómo las matemáticas –y sus conceptos abstractos– son herramientas para la resolución de problemas comerciales sencillos, que, muy probablemente, se les plantearán en algún momento fuera de la escuela (en la «vida real»).

En este trabajo presentamos una propuesta didáctica para la enseñanza del tema funciones matemáticas lineales, contextualizada en el campo de la economía, desde un planteo sencillo que va creciendo en dificultades comprensibles para los estudiantes[1]. Dicha propuesta fue aplicada en un grupo de estudiantes de marketing de una institución privada de nivel terciario. Durante su desarrollo hemos detectado importantes déficits conceptuales en los estudiantes, no esperables ya en este nivel; la evaluación final mostró indicadores cualitativos muy apropiados; por ello, sugerimos utilizar esta planificación con estudiantes de escuela media.

2. ANTECEDENTES DE INVESTIGACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DE ECUACIONES LINEALES

Dentro de la enseñanza de matemáticas, el tópico de las ecuaciones lineales es un punto de inflexión, a partir del cual la aritmética da lugar al álgebra; es decir, es el momento en que los estudiantes deben dar un salto cognitivo cualitativamente importante para comprender que una ecuación con dos incógnitas deja de tener una respuesta única, y se transforma en una función con dos variables, una dependiente y otra independiente.

A partir del análisis de programas y de los libros de texto usuales en la escuela secundaria de Argentina, Panizza y cols. (1999) afirman que «*la escuela considera el objeto ecuación lineal con dos variables en dos situaciones específicas: o bien como ecuación de la recta, donde la misma aparece entonces como la etiqueta del dibujo de una recta; o bien, como uno de los componentes en los sistemas lineales.*» En el contexto de sus investigaciones, las autoras entrevistaron a estudiantes de secundaria quienes debían resolver el siguiente problema:

«*Mi hermano me dijo que en la librería de la esquina cuatro cartucheras cuestan ocho pesos más que tres biromes. ¿Cuáles podrían ser los precios de las cartucheras y de las biromes?*»

Todos los estudiantes sujetos de la investigación pudieron escribir la ecuación como $4x = 3y + 8$. Luego, verbalmente, ellos anticiparon que la ecuación debía tener una solución única, y buscaron «el valor de la x y el valor de la y»; es decir, manifestaron representaciones de las letras como números determinados, pero aún desconocidos. Casi todos los alumnos comenzaron a resolver reemplazando una letra en función de despejarla en la ecuación[2]. A dos estudiantes las investigadoras les propusieron que probaran con el par de números (5;4) como posible respuesta. Ellos comprobaron la equivalencia, pero respondieron que ésos no serían los valores porque «*la cartuchera no vale igual que la birome*»[3]. A continuación estos estudiantes probaron con el par de números (10;8), reemplazaron en la ecuación y dedujeron que estaban frente a la respuesta correcta[4]. Un único estudiante aceptó la solución de infinitos pares posibles de números como respuesta correcta al problema, explicando que el precio de los artículos podía ser variable, pero negó que una solución posible pudiera ser el par (2;0). Las investigadoras concluyeron que este estudiante «*utiliza –y necesita– un problema como referente para el proceso de resolución, en el siguiente sentido: sólo atribuyendo significado a las variables puede considerar valores numéricos. A partir de allí obtiene las soluciones operando algebraicamente. (...) En síntesis, la producción de este estudiante es significativamente distinta de la de los otros sujetos: centrado en el objeto función, y apelando al contexto ofrecido por el problema, puede encontrar un procedimiento para encontrar distintas soluciones.*»

Esta investigación nos señala que el aprendizaje y la resolución de problemas que involucran ecuaciones lineales no es sencilla para los estudiantes cuando se trata de llegar a abstracciones puramente matemáticas. Parecería que, con o sin éxito, los estudiantes trataran de comprender los conceptos matemáticos a partir de darle significación al contexto del problema; es decir, de una situación problemática que se deriva de una utilidad práctica comprendida por ellos. Brousseau (1986) definió –en su *Teoría de las situaciones didácticas*– que «*una situación didáctica es un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno (que puede incluir instrumentos o materiales) y el profesor, con un fin de permitir a los alumnos aprender –esto es, reconstruir– algún conocimiento. Para que el alumno construya el conocimiento, sería necesario que se interese personalmente por la resolución del problema planteado en la situación didáctica. En este caso se dice que se ha conseguido la devolución de la situación al alumno.*»

A partir de estos antecedentes, cabe preguntarse hasta qué punto la enseñanza de matemáticas en la escuela secundaria obligatoria debería alejarse de los contextos cotidianos para dar lugar exclusivamente a situaciones didácticas «matemáticamente puras»; o debería considerar como logros de este nivel educativo la adquisición de competencias matemáticas ligadas a la resolución de problemas concretos y cotidianos. Desde nuestro punto de vista, ambos enfoques deberían atenderse, reconociendo la necesidad cognitiva de los estudiantes de razonar sobre problemas concretos, entendibles, y valorando la capacidad simbólica y operacional de la matemática. En este trabajo presentamos una propuesta que lleva a los estudiantes a la formalización de conceptos matemáticos abstractos a partir de la adecuación de los mismos a la lógica específica de un contexto de aplicación.

3. OBJETIVO: ENSEÑAZA DE ECUACIONES LINEALES EN CONTEXTO

Nuestro objetivo se centró en organizar una propuesta de situaciones didácticas que fueran un escenario apropiado para la articulación entre los contenidos matemáticos puros sobre ecuaciones lineales y su aplicación en el contexto económico de las leyes de oferta y demanda, y del punto de equilibrio entre precios y beneficios. La población a la que estaba dirigida esta planificación eran estudiantes egresados de diferentes escuelas secundarias, que cursaban la primera asignatura de Matemáticas de las carreras de nivel terciario de Marketing y Comercialización, de la Escuela Argentina de Negocios (EAN). Se trató de un grupo mixto de 16 estudiantes con edades entre 18 y 22 años, y se llevó a cabo durante el primer cuatrimestre de 2006.

A lo largo de las clases, el éxito de la propuesta quedó demostrado con indicadores cualitativos como el interés de los estudiantes, la capacidad de detectar sus propios errores y superarlos, y la toma de confianza a partir de una comprensión bidireccional: entender los conceptos de economía les favorecía para dar significación a la interpretación matemática del tema; y ésta les permitía resolver los problemas de complejidad creciente del campo de la economía. Dados estos logros, se desprende la sugerencia de llevar esta propuesta de enseñanza a los últimos años de la escuela secundaria.

4. SITUACIONES DIDÁCTICAS

Si bien las ecuaciones que responden rigurosamente a algunas de las leyes económicas involucradas en este trabajo no son lineales, la aproximación aquí presentada responde a una adaptación didáctica en el rango de validez lineal de las mismas. La toma de conciencia sobre este rango de validez y su discusión cualitativa es un rasgo adicional que enriquece las situaciones didácticas desarrolladas en la propuesta.

La propuesta didáctica consistió en nueve actividades secuenciales, que involucraron nueve problemas basados en una historia simple sobre un personaje (María) que quiere montar un negocio mínimo de confección casera de pantalones. Estos problemas se muestran en el anexo.

Los objetivos principales de la propuesta fueron que los estudiantes pudieran:

1. Interpretar los distintos parámetros que conforman una recta, ya sea mediante lenguaje gráfico o mediante lenguaje algebraico:
   - Identificar la ordenada al origen.
   - Distinguir distintos tipos de pendiente.
   - Predecir variaciones en los gráficos al modificar las ecuaciones algebraicas.

2. Aplicar las funciones lineales como herramienta fundamental en la resolución de problemas económicos vinculados a situaciones sencillas, que pueden ser comprendidas y motivadoras.

3. Encontrar soluciones a problemas económicos otorgando significado generalizable y rango de aplicabilidad a los parámetros matemáticos involucrados.

La metodología didáctica para cada actividad requirió que cada estudiante resolviera individualmente el problema –o, al menos, lo intentara–. Luego de unos minutos de trabajo individual, grupos de 3-4 estudiantes compartían sus respuestas, sus interpretaciones y sus dudas. Finalmente, en la discusión conjunta con toda la clase se revelaban las formas de abordar el problema, recreando los conflictos cognitivos que surgieron individualmente, apuntando a generar un clima donde no se condenara el error y éste pudiera transformarse en un error constructivo (Galagovsky, 2004, a-b). Resultó sumamente importante observar el trabajo dentro de los pequeños grupos, y la aportación de cada estudiante, porque la actitud más frecuente era que en la puesta en común cada grupo presentara sólo la última versión de sus elaboraciones. La docente recuperó en cada caso las alternativas de resolución por ella registradas y todas fueron discutidas hasta llegar al consenso de la respuesta final.

Las nueve actividades demandaron siete clases de una hora cada una.

5. COMENTARIOS SOBRE CADA PROBLEMA, SU RESOLUCIÓN E IMPLICANCIAS

Una actividad inicial para consensuar un mínimo vocabulario en común consistió en completar conjuntamente con la aportación de los estudiantes una red conceptual sobre el tema (Galagovsky, 1993, 1994; Ciliberti y Galagovsky, 1999), según muestra la figura 1. La experiencia demostró que los estudiantes no tenían comprensión conceptual sobre los parámetros matemáticos de las ecuaciones lineales: entre otras cuestiones básicas, confundían las variables dependiente e independiente, y no comprendían el significado de una pendiente positiva, negativa o nula. Si bien las palabras y los gráficos quedaron plasmados explícita y ordenadamente en la red, el desempeño posterior evidenció la precariedad de sus conocimientos. Luego, se presentaron uno a uno los problemas (véase Anexo). A continuación se hacen comentarios sobre las evidencias de errores conceptuales en los estudiantes y los logros esperados en cada apartado.

Para el **problema 1** la finalidad era generar en los estudiantes conflictos cognitivos conscientes al llevarlos a la necesidad de individualizar la ordenada al origen y la pendiente. La resolución del **problema 1** se muestra en la figura 2.1.

En esta actividad, a través de un ejemplo netamente cotidiano se buscaba que el alumno pudiera razonar y deducir cuáles son los costos explicitados en el problema y a qué parámetros de la ecuación matemática corresponden. Muchos estudiantes no pudieron inicialmente relacionar los datos con los parámetros. Por la forma en que estaba redactado el problema, muchos estudiantes comenzaron a hacer una tabla de valores; esto los ayudó a la confección del gráfico; sin embargo, muchos de ellos evidenciaban desconocer el significado práctico de la ordenada al origen y de la pendiente. El trabajo grupal permitió la reflexión conjunta hasta concluir que los únicos costos que aparecen en este problema son aquellos que dependen de la cantidad de prendas realizadas. La función lineal correspondiente resultó ser **C(x) = 20.x.**

Particularmente, a algunos estudiantes les resultó difícil aceptar que la ordenada al origen en este problema es cero. La existencia de este conflicto los llevó a pensar sobre su significado y hasta llegaron a deducir que la misma debía corresponder a los gastos fijos.

En el **problema 2** se buscaba introducir el concepto de función Ingresos [**I(x)**] y de función Beneficio [**B(x)**], con el fin de que los estudiantes tomaran conocimiento de estas dos nuevas funciones lineales aplicadas en economía para analizar si un negocio es económicamente beneficioso, o no. Las respuestas se presentan en la figura 2.2.

Si bien, en este caso, la respuesta se obtiene por una simple multiplicación, la intención es que los estudiantes detecten que esta simple operación puede ser una función matemática cuando uno de los factores involucrados se convierte en una «variable». En esta ocasión, por lo tanto, nuevamente aparecía una función con ordenada al origen de valor cero y otra función como la diferencia entre los ingresos y los costos. Con este simple problema cada estudiante debió discutir metacognitivamente con sus compañeros de grupo, y resignificar permanentemente sus conocimientos iniciales sobre el tema.

En el **problema 3** se presentó la función Demanda con el siguiente texto informativo adjunto:

La función Demanda

Los consumidores adquirirán diferentes cantidades de un producto por unidad de tiempo de acuerdo a diversos factores circunstanciales: la renta o ingreso obtenido por ellos en ese período, el precio de los demás bienes y, fundamentalmente, el precio del bien en cuestión. Sólo haremos referencia ahora a la variabilidad de este último aspecto. Diremos que la demanda cambiará tanto como el precio del producto lo haga.

*Tal como señalan Mochón y Beker (2003): «Dado un conjunto de circunstancias del mercado, la **demanda** nos dará la cantidad que absorbería el mismo para cada precio.»*

*Al estudiar este aspecto económico se observó que existe una relación inversa por la cual, cuanto mayor es el precio de un artículo, menor cantidad del mismo está dispuesto a comprar el consumidor y que lo contrario ocurre cuando el precio se ve reducido. Esta relación es conocida como la **ley de la demanda**.*

Concluiremos que, al volcar en un gráfico los datos que resultan de esta clase de estudio, se obtiene una curva de demanda decreciente que muestra la medida en que las cantidades que serán demandadas durante un período determinado por una población específica se verán disminuidas en tanto los posibles precios aumenten.

La resolución del **problema 3** se presenta en la figura 3.1. La comprensión del texto y la resolución del problema requirieron que los estudiantes hubieran consolidado los conceptos aprendidos hasta el momento. El aprendizaje sustentable de la nueva información referida a la función Demanda resultó posible dado que con la resolución de los problemas anteriores los estudiantes habían construido los *conceptos sostén* necesarios (Galagovsky, 2004, a-b). En la puesta en común con la totalidad de los grupos se llegó a las siguientes conclusiones consensuadas:

1) La función Demanda siempre posee pendiente negativa.

2) La ordenada al origen no tiene sentido económico, ya que significaría el precio de compra de ningún pantalón.

3) No es conveniente prolongar la recta hasta la intersección con el eje de las abscisas, ya que ese caso sería inconsistente desde la economía pues carece de sentido hallar una cantidad de pantalones para los cuales su precio fuera cero.

4) Establecer el número máximo y mínimo de pantalones que serán demandados según sus criterios.

5) Deducir que sólo es posible usar este modelo matemático en determinados rangos: la función demanda es, en realidad, una hipérbola que se acerca a los ejes asintóticamente. Por el contrario, las ecuaciones lineales –desde las matemáticas—tienen un rango de validez infinito.

En el **problema 4** se postulaba una actividad para que los estudiantes pudieran observar la utilidad del gráfico anterior, y cómo usarlo para otros valores de las variables. Fue importante que los estudiantes pudieran resolver el problema con el gráfico y también con la ecuación. La resolución analítica es sencilla:

D (x) = -1/6x+40; D (x) = -1/6.90 +40; D (x) = 25; por lo tanto, María debería venderle el pantalón a 25$.

Aun habiendo trabajado previamente los conceptos involucrados en este problema, algunos estudiantes revelaron dudas que, finalmente, los condujeron a explicitar los obstáculos epistemológicos (Astolfi, 1994) idiosincrásicos que les impedían la comprensión cabal del tema. Generalmente, estos obstáculos remitían a aprendizajes anteriores erróneos.

En el **problema 5** se buscaba que los estudiantes pudieran analizar distintos tipos de costos; su resolución se muestra en la figura 3.2. Se trataba de una nueva situación comercial en la que se presentan costos fijos, que no dependen de la cantidad de pantalones confeccionados, y están representados en la ecuación matemática mediante la ordenada al origen. Los estudiantes pudieron relacionar que los gastos fijos influyeron notablemente sobre los beneficios, dejando de ser un buen negocio para María. En la puesta en común los estudiantes pudieron concluir que:

1) Una manera de atenuar los gastos totales sería disminuyendo los gastos variables.

2) La función Costo total está influenciada tanto por los costos fijos como por los costos variables.

3) En toda operatoria comercial, es menester para analizar la situación tener en cuenta la ganancia final obtenida.

En el **problema 6** se pretendía que los estudiantes comprobaran que la manera más apropiada de disminuir los costos y mejorar los beneficios era disminuyendo los costos variables. Su resolución se muestra en la figura 4.1.

En el **problema 7** los estudiantes debían evaluar los beneficios del negocio habiendo disminuido los costos fijos, pero considerando la existencia de una socia que fuerza a repartir las ganancias en partes iguales. Su resolución se presenta en la figura 4.2.

Este problema involucraba conceptos matemáticos ya aprendidos en problemas anteriores y la extracción de nuevas conclusiones para el área comercial, a partir de dichos conocimientos.

Con el **problema 8** se buscaba que los estudiantes comprendieran la definición de la función Oferta. Se les adjuntó la información siguiente:

La función Oferta
La oferta es una relación entre la cantidad ofrecida y el precio al cual dicha cantidad se ofrece en el mercado.

*La **oferta** señala el comportamiento de los productores. A precios muy bajos los costos de producción no se cubren y los productores no producirán nada; conforme los precios van aumentando se empezarán a lanzar unidades al mercado y, a precios más altos, la producción será mayor.*

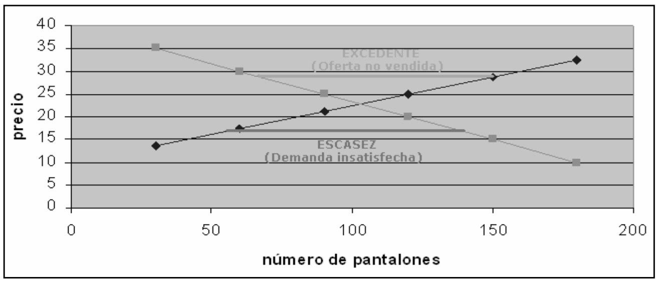
*Esta función suele tener pendiente positiva, y muestra la relación que existe entre el **precio** de un bien y las **cantidades** que un empresario desearía ofrecer de ese bien por unidad de tiempo.*

*De acuerdo con lo postulado por Mochón y Beker (2003), «Mientras la **demanda** muestra el comportamiento de los consumidores, la **oferta** señala el comportamiento de los productores».*

Es importante que los estudiantes detectaran las diferencias y/o similitudes entre la función Oferta y la función Demanda. La resolución del problema 8 se presenta en la figura 5.1

En el **problema 9** se utilizaron conceptos ya aprendidos, incorporándose la información sobre cómo operar matemáticamente en puntos de cruce de ecuaciones lineales y qué significaciones económicas tiene. La resolución del problema 9 se presenta en la figura 5.2. Su presentación fue acompañada de un nuevo texto adjunto:

El equilibrio del mercado
*Según Mochón y Beker (2003), «Cuando ponemos en contacto a consumidores y productores con sus respectivos planes de consumo y producción, esto es, con sus respectivas curvas de demanda y oferta en un mercado particular, podemos analizar cómo se lleva a cabo la coordinación de ambos tipos de agentes. Se observa cómo, en general, un precio arbitrario no logra que los planes de demanda y de oferta coincidan. Sólo en el punto de corte de ambas curvas se dará esta coincidencia y sólo un precio podrá producirla. A este precio lo denominaremos **precio de equilibrio,** y a la cantidad ofrecida y demandada, comprada y vendida a ese precio**, cantidad de equilibrio.***



*El **exceso de oferta** –o excedente– es entendido como la cantidad en que la oferta es mayor que la demanda (cuando el precio es superior al de equilibrio), y **el exceso de demanda** –o escasez– es entendido como la magnitud en que la cantidad demandada excede a la ofrecida cuando el precio es menor al de equilibrio, los elementos que **presionan** sobre el precio y lo hacen tender hacia el precio de equilibrio y, por tanto, a igualar la oferta y la demanda».*

En un sentido más realista, Wales y Sanger (2001) especifican: «En el punto de equilibrio el precio es estable y la cantidad de transacciones es máxima. Si el precio se incrementara, habría un exceso de oferta, de modo que los vendedores se verían obligados a disminuir el precio para poder vender dicho exceso. Si el precio disminuyera, habría un exceso de demanda, situación en la que los vendedores incrementarían el precio para aprovechar el tirón del producto.»

6. Consideraciones finales

6.1. La propuesta cumple con recomendaciones didácticas

Desde diferentes marcos teóricos de la didáctica de las ciencias y de la matemática se proponen constantemente recomendaciones para generar innovaciones en la enseñanza. En esta propuesta se verifican las siguientes:

a) La información involucrada articula temáticas de dos áreas del conocimiento: las matemáticas y la economía. Esta cualidad responde a la necesidad de generar escenarios didácticos en los cuales los estudiantes puedan demostrar competencias cognitivas interdisciplinarias. Elliot (1993) señala que las habilidades no son elementos aislados independientes, sino que están vinculados a una estructura; y Kirshbaum, Colombo y Cáceres (2004) ponen de manifiesto la importancia del conocimiento interdisciplinario para una mejor salida laboral.

b) Pro Bueno (1999) señala la importancia de planificar teniendo en cuenta la integración de marcos teóricos provenientes de los conocimientos científicos, de las concepciones sobre la naturaleza de las ciencias y sus métodos de trabajo, y derivados de teorías didácticas –por ejemplo, sobre dinámicas de trabajo en grupos, teorías de aprendizaje, etc–. La planificación responde a conocimientos disciplinares y didácticos, y está basada en el modelo de enseñanza para un aprendizaje sustentable (Galagovsky, 2004 a,b).

c) Se propone lograr un cambio conceptual (Posner et al., 1982) desde una metodología constructivista. Es decir, el cambio conceptual no responde a la simple sustitución de un concepto equivocado por otro correcto; sino que el papel del profesor consiste en situar a sus alumnos frente a problemas para los cuales deban imaginar soluciones, discutirlas, reconocer errores o faltas de conocimientos para sostener el procesamiento de nueva información. El cambio conceptual se da como una evolución (Pozo, 1999), se construye sobre «firmes bloques» de conocimiento previamente sustentado (Galagovsky, 2004a,b). Así, los conflictos cognitivos que surgen en los estudiantes no son necesariamente contradicciones; sino obstáculos epistemológicos (Astolfi, 1994) idiosincrásicos de los que toma conciencia sobre su existencia y sobre la forma de superarlos.

d) Se interpreta en un ejemplo concreto la sugerencia de generar situaciones didácticas en matemáticas (Brousseau, 1986).

6.2. La evaluación exitosa

Durante el desarrollo de las actividades los estudiantes de nivel terciario mostraron fallos conceptuales importantes y obstáculos epistemológicos de los que no habían sido conscientes durante el aprendizaje del tema de ecuaciones lineales en sus respectivos estudios secundarios.

En el examen final, todos los estudiantes tuvieron un desempeño exitoso, con calificaciones mejores que el promedio de dicho curso y de años anteriores[5] –con exámenes estandarizados tradicionales–. Por otro lado, sus actitudes reflejaron mayor autoconfianza: ninguno de estos estudiantes se retiró del examen final entregando las preguntas de este tema sin contestar, contrariamente a lo que ocurre tradicionalmente. Creemos que esta actitud denota autoconfianza a partir de una comprensión sustentable del tema.

6.3. El constructivismo requiere tiempo de clase

Un punto central de la planificación que permitió se debió a la distribución del tiempo de clase: se priorizó el trabajo de los estudiantes por sobre el «dictado de contenidos» por parte de la profesora.

Efectivamente, el tiempo de clase empleado en la presentación de la información por parte de la docente fue mínimo en relación con el tiempo empleado en que los estudiantes se esforzaran por llegar a dar respuestas, significaran y discutieran la resolución de los problemas (Galagovsky, 1993).

En el enfoque tradicional el docente se para frente a la clase, presenta su lección, y luego los estudiantes repiten ejercitación; una planificación de este tipo hubiera demandado considerablemente menor tiempo de clase. Lamentablemente, la presión por enseñar listados interminables de contenidos facilita a los profesores una excusa para evitar invertir el tiempo en actividades centradas en los estudiantes.

Una encuesta de fin de curso reveló la actitud favorable de los estudiantes frente al tipo de trabajo realizado. El clima de la clase, en el que se dio lugar a los errores de los estudiantes sin desvalorización de los sujetos, corroboraría la afirmación de Gómez Chacón y colaboradores (2006) que señalan que las creencias de los estudiantes sobre el aprendizaje de matemáticas no sólo se construyen sobre reacciones emocionales individuales, sino a partir de los procesos sociales relacionados con la adquisición de información matemática y la creación de valoraciones grupales y redes de apoyo dentro del sistema de aprendizaje.

6.4. Implicancia del profesorado para mejorar la enseñanza

Los resultados de las investigaciones de Gil Cuadra y Rico Romero (2003) sobre las creencias del profesorado de matemáticas revelaron que hay tres concepciones diferentes sobre las dificultades relativas a la enseñanza de las matemáticas y sus causas. En un caso, las dificultades se atribuyen al sistema educativo, en otro, al alumno; y, en un tercero, a la propia disciplina. Los autores no detectaron ninguna creencia que señale al profesor como responsable de las dificultades de enseñanza. Más aún, ellos señalan que, ante los fracasos persistentes, los profesores hablan reiteradamente de la desmotivación y de la «incapacidad» de los estudiantes para establecer conexiones entre contenidos aprendidos. Sin embargo, en ningún momento asumen parte de la responsabilidad en este hecho, y ni siquiera se plantean cómo favorecer un pensamiento relacional en los estudiantes, y no relacionan los fracasos con lo que ellos hacen en sus clases.

En el área de las ciencias naturales muchas investigaciones sobre las cualidades o limitaciones de la realización de trabajos prácticos apuntan a mejorar la enseñanza a través del planteamiento de problemas interesantes para los estudiantes (Franco Mariscal, 2005). El presente trabajo apunta al mismo objetivo, para la enseñanza de un tema de matemáticas.

Finalmente, esta propuesta tuvo un carácter de hipótesis didáctica y fue creada y puesta a prueba en el aula en el marco de la asignatura Didáctica Especial y Práctica de la Enseñanza, de las carreras de Profesorado de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. Esta situación se enmarca dentro de las recomendaciones de Furió (1994) sobre la importancia de la investigación en la formación del profesorado, cuando señala: «*Creemos que hay una concepción generalizada que supone que enseñar es fácil y para esta tarea se requiere sólo la apropiación individual del conocimiento didáctico en un corto período de tiempo y su posterior aplicación a la clase. (…) Cada vez se hace más patente que, en la formación de profesores como en el reciclaje de los profesores en activo, hay que considerar la preparación a la investigación e innovación educativas como necesidad formativa de primer orden.*»

Considerando la respuesta positiva de los estudiantes del nivel terciario donde se aplicó la planificación aquí presentada y teniendo en cuenta las escasas competencias que traían previamente sobre el contenido matemático involucrado, sugerimos que esta planificación podrá aplicarse exitosamente también en escuelas secundarias. Un próximo paso sería la investigación didáctica sobre la aplicación de las actividades aquí descritas en estudiantes de secundaria.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo se realizó gracias al subsidio UBACyT X-181 (2004-2007) de la Universidad de Buenos Aires. Agradecemos la lectura crítica del economista Gabriel Kurman.

NOTAS

1. Generalmente en las expectativas de logro de las materias de matemática básica de carreras relacionadas con la economía se pueden encontrar expresiones que delimitan el estilo de las situaciones didácticas esperadas. Por ejemplo, en la Facultad de Economía de la Universidad del Azuay, Cuenca, Ecuador, se explicita: «*la matemática se concibe en nuestra facultad como una herramienta que el estudiante usará luego en su carrera, y no como un fin en sí misma, razón por la cual se da más importancia a la aplicación práctica que a la demostración teórica. Es decir, que la materia a dictarse tiene como propósito la aplicación a administración y economía y no la matemática pura. Por esta razón, todos los ejemplos de aplicación están enfocados a problemas propios de la carrera y los textos de aprendizaje y consulta son los apropiados para un estudiante de Ciencias Económicas.*»
(http://www.uazuay.edu.ec/facultad/economia/Matematicas %20I.doc)
2. Las autoras señalan que ésta era la estrategia aprendida previamente con éxito para la resolución de ecuaciones con una incógnita.
3. Las autoras señalan que los estudiantes interpretan que a cada lado de la igualdad aparecería el precio de las cartucheras y de las biromes, respectivamente.
4. El razonamiento consistió en verificar que en el término izquierdo de la ecuación quedaba un 40 y a la derecha un 32; este último valor les indicaba que «*32 es 8$ menos que las cuatro cartucheras*». Es decir, para estos estudiantes el igual en la ecuación no significaba igual valor numérico.
5. La muestra de estudiantes es pequeña como para realizar estudios estadísticos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASTOLFI, J.P. (1994). El trabajo didáctico de los obstáculos en el corazón de los aprendizajes científicos. *Enseñanza de las Ciencias* 12(2), pp. 206-216.

ÁVILA STORER, A. (2001). Los profesores y sus representaciones sobre la reforma a las matemáticas. *Perfiles Educativos*, 23(93), pp. 59-86. Universidad Autónoma de México. <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/132/13209305.pdf>.

BROUSSEAU, G. (1986). *Teoría de las situaciones didácticas*. Francia: IREM.

CILIBERTI, N. y GALAGOVSKY, L. (1999). Las redes conceptuales como instrumento para evaluar el nivel de aprendizaje conceptual de los alumnos. Un ejemplo para el tema «Dinámica». *Enseñanza de las Ciencias* 17(1), pp. 17-19, Barcelona, España.

ELLIOT, J. (1993). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid: Ediciones Morata.

FRANCO MARISCAL, A.J. (2005). Como muestra un botón: un ejemplo de trabajo práctico en el área de ciencias de la naturaleza en el segundo curso de educación secundaria obligatoria. *Enseñanza de las Ciencias* 23(2), pp. 275-292.

FURIÓ MÁS, C.J. (1994). Tendencias actuales en la formación del profesorado. *Enseñanza de las Ciencias* 12(2), pp. 188-199.

GALAGOVSKY, L. (1993a). Redes conceptuales: su base teórica e implicancias para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias,* 11(3), pp. 307-311. Barcelona, España.

GALAGOVSKY, L. (1993b). *Hacia un nuevo rol docente. Una propuesta para el trabajo en clase*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Troquel.

GALAGOVSKY, L. y CILIBERTI, N. (1994). Redes conceptuales: su aplicación como instrumento didáctico en temas de Física. *Enseñanza de las Ciencias;* 12(3), pp. 338-349. Barcelona, España.

GALAGOVSKY, L. (2004a). Del Aprendizaje Significativo al Aprendizaje Sustentable. Parte 1: el modelo teórico. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(2) pp. 230-240, 2004, ICE, Barcelona, España.

GALAGOVSKY, L. (2004b). Del Aprendizaje Significativo al Aprendizaje Sustentable. Parte 2: derivaciones comunicacionales y didácticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), pp. 349-364, ICE, Barcelona, España.

GIL CUADRA, F. y RICO ROMERO L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(1), pp. 27-47.

GÓMEZ CHACÓN, I.M. (1999). Una metodología cualitativa para el estudio de las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(3), pp. 431-450.

GÓMEZ CHACÓN, I.M., OP TIENDE, P. y DE CORTE, E. (2006). Creencias de los estudiantes de matemáticas. La influencia del contexto de clase. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(3), pp. 309- 324.

GONZÁLEZ GARCÍA, M.I., LÓPEZ CEREZO, J.A. y LUJÁN LÓPEZ, J.L. (1996). *Ciencia, Tecnología y Sociedad.* Madrid, Tecnos.

KIRSCHBAUM, C.F., COLOMBO, E.M. y CÁCERES, F.E. (2004*). Educación superior, interdisciplina y mercado laboral*. Imprenta de la Universidad Nacional de Tucumán. Argentina.

MOCHÓN, F. y BEKER, V. (2003). *Economía. Principios y sus aplicaciones*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Mc Graw Hill.

MORENO MORENO, M. y AZCÁRATE JIMÉNEZ, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias* 21(2), pp. 265-280.

PANIZZA, M., SADOVSKY, P. y SESSA, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias* 17(3), pp. 453-462.

PISA (2003). Programa Internacional de Evaluación de Alumnos. <http://www.ince.mec.es/pub/pisa2003resumenespana.pdf>.

POSNER, G.J., STRIKE, K.A., HEWSON, P.W. y GERTZOG, W.A. (1982). Accommodation of a scientific conception: toward a theory of conceptual change. *Science education*, 66(2), pp. 211-227.

POZO, J.I. (1999). Más allá del cambio conceptual: el aprendizaje de la ciencia como cambio representacional. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), pp. 513-520.

PRO BUENO, A. (1999). Planificación de unidades didácticas por los profesores: análisis de tipos de actividades de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias* 17(3), pp. 411-429.

ROBERT, A. y ROBINET, J. (1989). Representations des enseignants des mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement. Cahier de DIDIREM. Núm. 1. IREM. Universidad de París VII.

SCHOENFELD, A.H. (1994). A discourse on Methods. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), pp. 697-710.

TIMSS. Trends in International Mathematics and Science Study <http://nces.ed.gov/timss/>.

WALES, J. y SANGER, L. (2001). *Wikipedia. Enciclopedia Libre Universal*. Estados Unidos <http://es.wikipedia.org/wiki/Enciclopedia_Libre>.

[Artículo recibido en febrero de 2007 y aceptado en enero de 2008]

ANEXO

Problema 1

María decide coser pantalones en su domicilio. Si la tela necesaria para cada uno le insume un costo de 18 $ y los artículos de mercería 2$.¿cuál será el costo para fabricar 1, 5 o 10 pantalones?

a) Representar en un gráfico de costos vs. número de pantalones fabricados.
b) Hallar la forma algebraica de la **función Costos**, que denominaremos **C(x)=m x+b**.
c) Identificar ordenada al origen y pendiente.

Problema 2

María vende mensualmente 10 pantalones a 50 $ c/u.

a) Cuál es su ingreso mensual, representado algebraicamente como **I(x)**, sabiendo que **I(x)= q.x** donde **q** es el precio por unidad.
b) Analizar ordenada al origen y pendiente en esta nueva función.
c) Hallar la **función Beneficio**, denominada **B(x)**, sabiendo que se obtiene calculando la diferencia entre los ingresos y los costos [**I(x) – C(x)**]. Graficarla. Hallar ordenada al origen y pendiente.
d) Calcular los beneficios en un mes.

Problema 3

Después de dos meses de trabajo, María hace un estudio del mercado.

Los consumidores estarían dispuestos a comprar más cantidad si disminuye el precio del artículo que ella fabrica. Si el precio es 35 $ puede vender 30 pantalones mensualmente, pero si lo lleva a 30 $ podría vender 60 pantalones.

Es decir, a medida que disminuye el precio, podría aumentar la demanda siguiendo un comportamiento lineal.

a) Realizar un gráfico de la **función Demanda**, denominada **D(x)**; es decir, de precio en función del número de pantalones potencialmente vendidos.
b) Identifique la pendiente y la ordenada al origen en dicho gráfico.
c) ¿Tiene sentido la ordenada al origen? ¿Por qué?
d) Hallar la expresión algebraica correspondiente a dicha función.

Se recomienda la lectura del texto informativo sobre la función Demanda

Problema 4

Según la tendencia mostrada en la función Demanda, un cliente estaría dispuesto a comprar 90 pantalones por mes. En ese caso, ¿a qué precio debería María venderle sus pantalones?

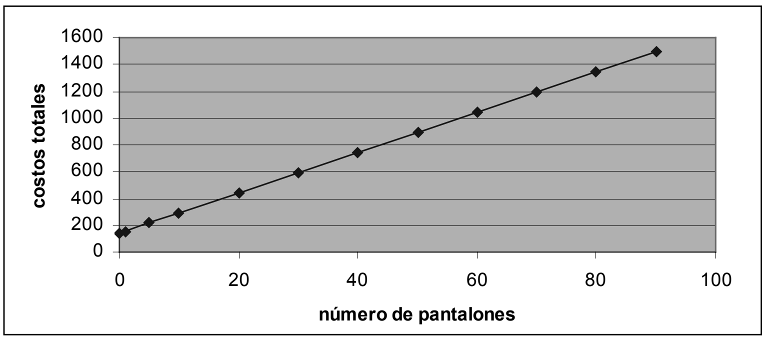
Problema 5

Suponiendo que se cumple la función Demanda, hallar los ingresos y ganancias para 90 pantalones, considerando que tiene un gasto adicional de luz de 30 $, mantenimiento de la máquina de coser 10 $, y 100 $ mensuales de un ayudante.

a) ¿Cuál de los dos gráficos analizados (el de la función Costos y/o el de la función Demanda) cambiaría?
b) Defina la nueva función **Costo Total** [**C(x)**], como la suma de los costos fijos más los costos variables.
c) Justifique si considera que María todavía está haciendo un buen negocio hallando la función Ingresos, graficándola y, finalmente, determinando la función Ganancia para poder interpretar la situación.
d) En caso negativo: ¿cómo solucionaría el problema?
e) Analice qué parámetros de la función Costo Total considera usted necesarios para analizar si una estrategia comercial es buena o no.
f) Analice desde qué aspectos una operatoria comercial puede analizarse para evaluar si es óptima, viable o inviable.

Problema 6

María evaluó la situación y decidió que debía intentar disminuir sus costos. Luego de analizar la situación se dio cuenta de que comprando a mayoristas lograba un 25% de descuento en telas y en artículos de mercería.



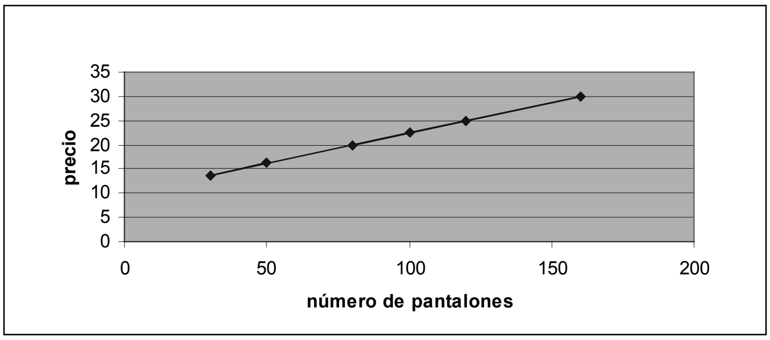
Dado que ya aprendiste a hacer gráficos y a manejarte con ecuaciones de funciones lineales, María te contrata para que le resuelvas las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles serían sus costos totales, ingresos y ganancias, considerando que efectivamente vende los 90 pantalones al mes?
b) ¿Le sugieres que es un buen negocio? ¿Qué consideraciones financieras debería hacer?
c) Analiza el nuevo gráfico de costos totales vs. número de pantalones. ¿Qué diferencia presenta con respecto a los gráficos anteriores? Identifica la pendiente y ordenada al origen.

Problema 7
María siguió tus consejos y se asocia con una amiga a fin de hacer frente a los gastos iniciales. Además, trabajarían ambas, con lo cual no necesitaría ya un ayudante.
a) ¿Sería conveniente esta situación?
b) Graficar costos totales vs. número de pantalones. Enunciar diferencias con el gráfico del problema 6.
c) Identificar pendiente y ordenada al origen.
d) ¿Cuál sería en este caso la ganancia de cada socia si se reparten el beneficio en partes iguales entre ambas amigas?

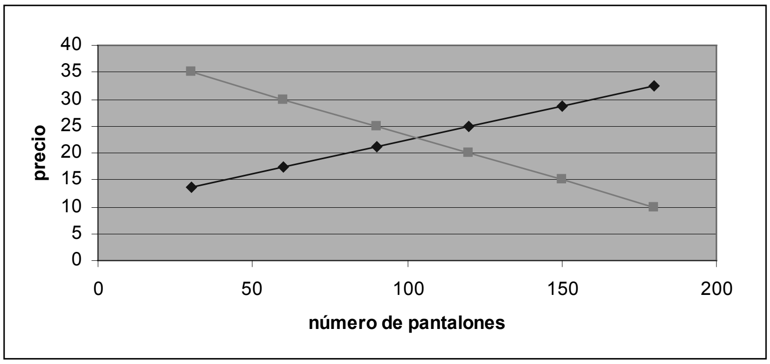
Problema 8
Ambas amigas realizan un estudio de mercado, y observaron que los precios que pagan los consumidores varían según los meses del año. Es decir, encontraron que en verano difícilmente el público compra pantalones que cuesten más de 20 $; en cambio, en invierno, están dispuestos a pagar hasta 30 $.

Con estos datos realizaron el siguiente gráfico, pensando en la cantidad de pantalones que ellas estarían dispuestas a producir, según el precio que se pague por ellos en cada época. Este gráfico se denomina **función Oferta** [**F(x)**].



De acuerdo con la situación planteada:
a) Determina la ordenada al origen y la pendiente del gráfico.
b) Halla la forma algebraica de la función Oferta.

Problema 9
María y su amiga se reúnen para tomar el té y charlar un poco sobre su trabajo. Luego, deciden representar en un mismo gráfico la función Demanda y la función Oferta, obteniendo el siguiente gráfico.



Observaron que en un determinado punto ambas líneas se cruzaban.
Viendo que este tipo de análisis era conveniente para mejorar su miniemprendimiento contrataron un estudiante de economía que les explicó que el punto de intersección se denomina «punto de equilibrio», y a partir de él se podían sacar varias conclusiones:
a) Determinar la cantidad y el precio correspondiente al punto de equilibrio.
b) Discutir qué sucede cuando el precio es superior, o bien cuando es inferior al precio de equilibrio.
Se recomienda la lectura del texto informativo sobre punto de equilibrio

Figura 1
Red conceptual sobre «ecuaciones lineales».

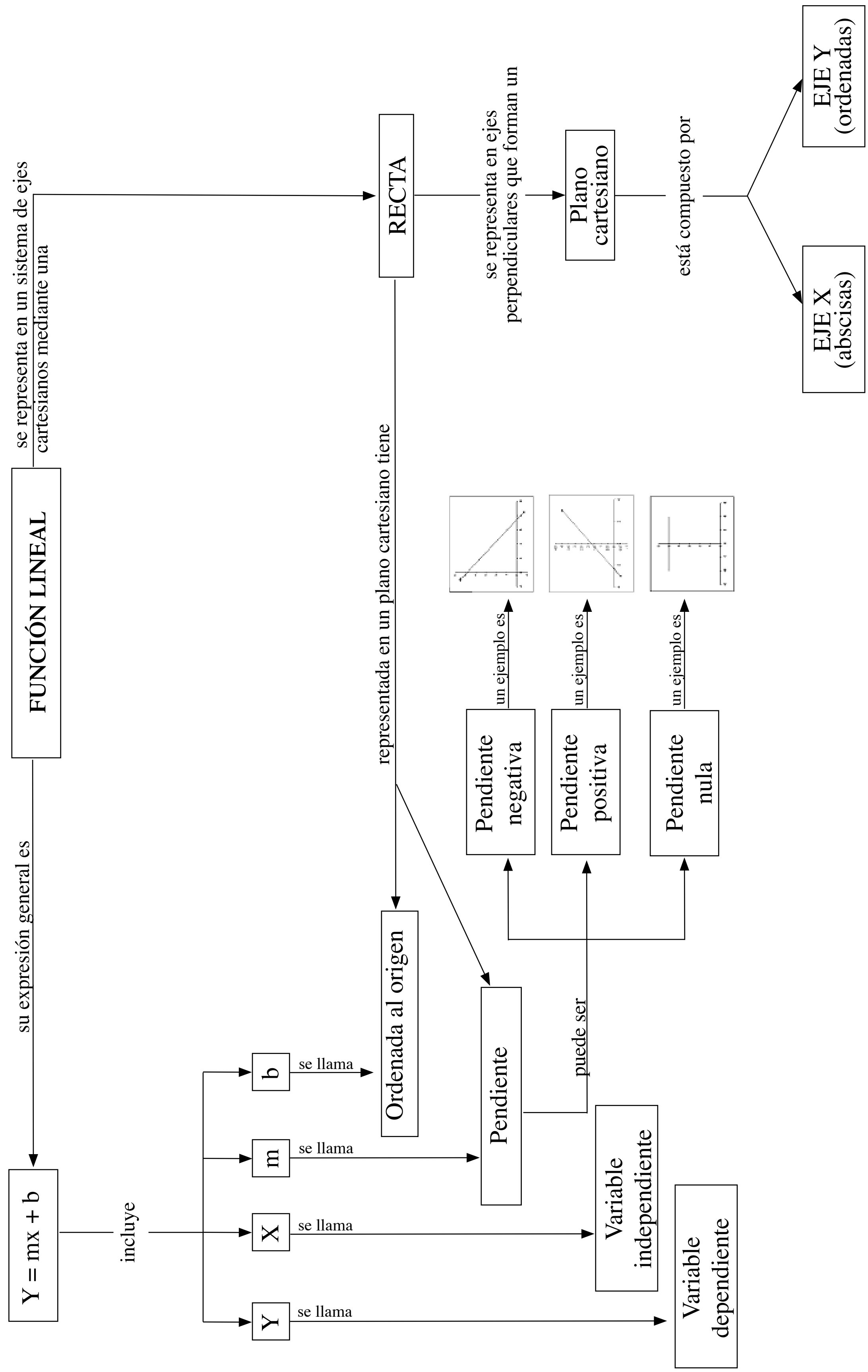
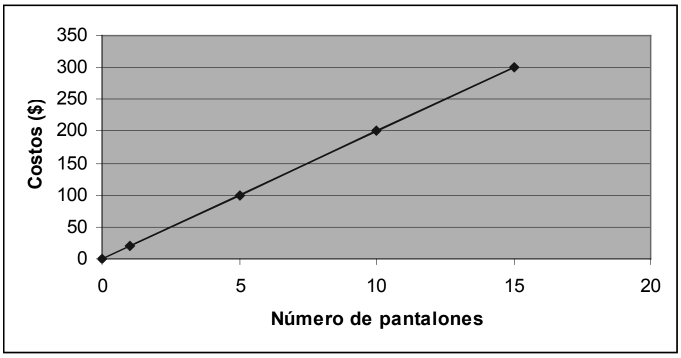


Figura 2
Resolución de los problemas 1 y 2.

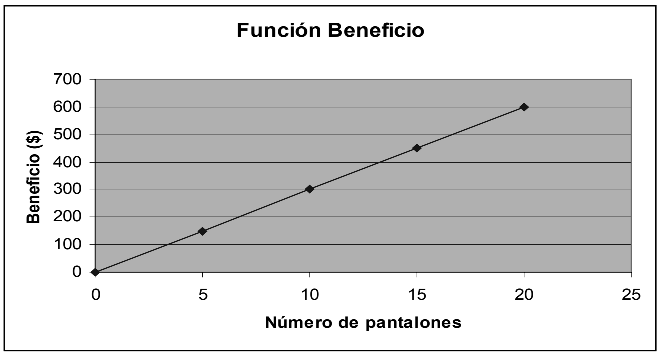
2.1. Resolución del problema 1
a) Forma gráfica de la función lineal



b) C(x) = 20 x; c) Ordenada al origen = 0; Pendiente = 20

2.2. Resolución del problema 2
a) I(x) = q · x ; $I_{(x)}$ = 50 · 10; $I_{(10)}$ = 500 $
b) Ordenada al origen = 0; Pendiente = 50
c) B(x) = I(x) – C(x); B(x) = q · x – 20.x

B(x) = 50 x -20 x; B(x) = 30 x



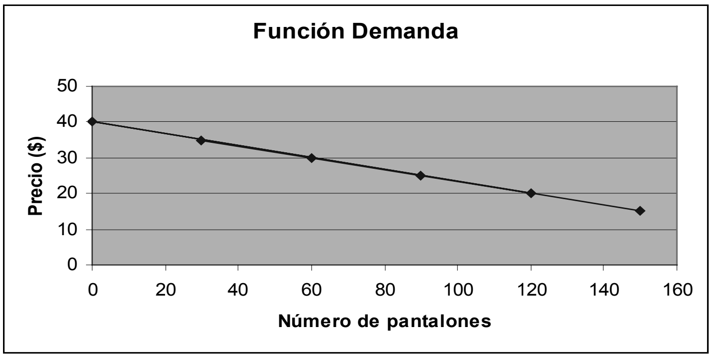
Ordenada al origen = 0 Pendiente = 30

d) B(x) =30 · 10; $B_{(10)}$ = 300 $

Figura 3
Resolución de los problemas 3 y 5.

3.1 Resolución del problema 3

a) Gráfico de la función Demanda



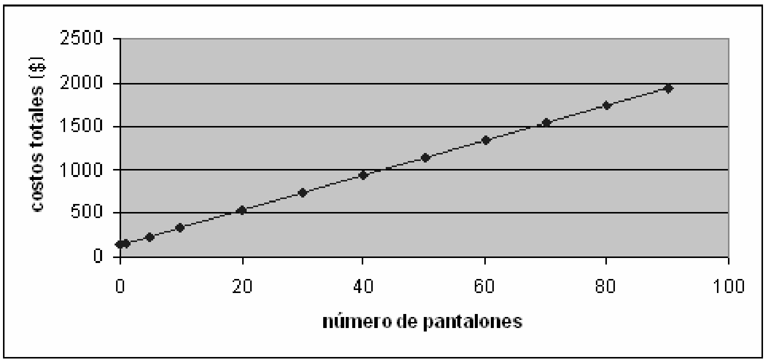
b) Pendiente = -1/6; Ordenada al origen = 40

c) Para los fines económicos, la ordenada al origen no tiene ningún significado, ya que representaría el precio para la compra de ningún pantalón.

d) D(x) = - 1/6x + 40

3.2 Resolución del problema 5

a) A partir de los datos del problema el alumno debe poder diferenciar los gastos fijos de los gastos variables y además debe poder interpretar que la presencia de los gastos fijos sólo tendrán influencias sobre el gráfico de costos.



b) $C_T = C_{\text{fijos}} + C_{\text{variables}}$; $C_T = 140 + 20\,x$; $C_T =$ 1.940 $

c) I(x) = q. x; I (x) = 25. 90; I (x) = 2.250 $

B (x) = I (x) – C(x); B (x) = 2.250 $ - 1.940 $; B (x) = 310 $

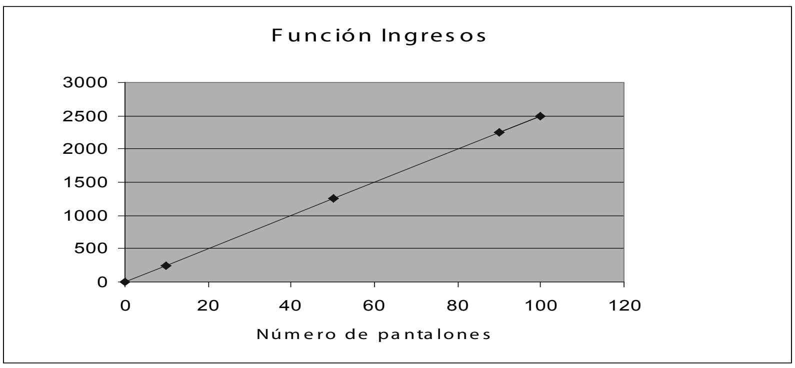
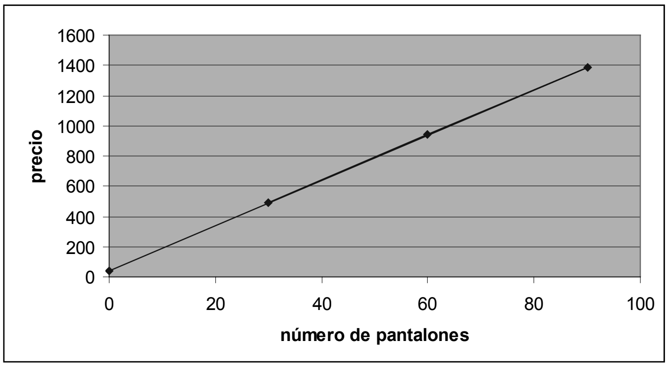


Figura 4
Resolución de los problemas 6 y 7.

4.1 Resolución del problema 6
Interpretación del gráfico: Ordenada al origen = 140; Pendiente = 15
a) $C_T = C_{fijos} + C_{variables}$; $C_T = 140 + 15\ \$\ .\ 90$; $C_T = 140 + 1.350\ \$$; $C_T = 1.490\ \$$
I (x) = q. x; I(x) = 25. 90; I(x) = $2250
B(x) =I (x) – C (x); B(x) = 2.250 $ - 1.490 $; B(x) = 760 $

b) El alumno debe evaluar que al disminuir los costos variables mejora notablemente las ganancias (beneficio).

4.2 Resolución del problema 7
a) Representación gráfica



b) Pendiente = 15; Ordenada al origen = 40

c) $C_T = C_{fijos} + C_{variables}$; $C_T = 40 + 15\ .\ 90$; $C_T = 1.390\ \$$
I (x) = q.x; I (x) =25. 90; I (x) = 2.250 $
B(x) = I (x) -C_T; B(x) = 2.250 $ –$ 1.390 $; B(x) =$ 860
La ganancia para cada una es 430 $.

Figura 5
Resolución de los problemas 8 y 9.

5.1. Resolución del problema 8

a) Ordenada al origen = 10; Pendiente = 1/8
b) O(x) = 1/8x + 10
c) El valor de la ordenada al origen no tiene sentido económico ya que correspondería al precio ofertado por ningún artículo. Por otra parte, el precio de la oferta no puede aumentar en forma ilimitada.

5.2. Resolución del problema 9

a) En el punto de equilibrio lo que ocurre es que se igualan las funciones; es decir:

$-1/6x + 40 = 1/8x + 10$
$+1/6x – 1/8x = 10 – 40$
$14/48x = 30$
$x = 30 \times 48/14$
x = 103 ; por lo tanto, la cantidad de equilibrio es 103 pantalones.

$D(x) = -1/6x + 40$
$D(x) = -1/6 \,.\, 103 + 40$
D(x) = 23; por lo tanto, el precio de equilibrio: 23 $

b) Si el precio es superior al del equilibrio, habrá un exceso de oferta, de modo que los vendedores se verían obligados a disminuir el precio para poder vender dichos excesos.
Si el precio es inferior, habrá un exceso de demanda, situación en que los vendedores incrementarían el precio para aprovechar el tirón del producto.

Teaching linear equations in context

Galagovsky, Lydia R.[1] **y Cittadini, Paula E.**[2]
[1] Centro de Formación e Investigación en Enseñanza de las Ciencias. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Ciudad Universitaria. Ciudad de Buenos Aires, Argentina.
[2] Escuela Argentina de Negocios. Ciudad de Buenos Aires, Argentina.
lyrgala@qo.fcen.uba.ar
paulacittadini@hotmail.com

Abstract

Difficulties and lack of skills to recognize, describe and solve math problems in real contexts have been recently detected on secondary students by international educational researches. In this article we present an innovative instructional proposal to teach linear equations in context. The innovative proposal consists in nine problem-based sequential activities concerning simple stories about Mary, a character that wanted to trade with home made trousers. Main goals were that students could:

1. Interpret different elements of a straight line drawing in a Cartesian Co-ordinate system and the algebraic description of a linear equation, identifying:
   – The value of the ordinate when the argument (value of the abscissa) is zero.
   – Different types of slopes
   – Predictable changes in the drawings when changing the algebraic expressions of the linear equations.

2. Apply linear functions as a mathematical tool to solve simple economical, motivating and understandable everyday problems for students.

3. Find solutions for economical problems analyzing meanings and valid range of application for the mathematical parameters involved in linear equations.

The success of this innovative way of teaching linear equations was highlighted by qualitative indicators like students´ motivation and their capacity to detect their own mistakes and to overcome them.

Keywords: Teaching math in context; linear equations.