

DEL ÁNGULO DE LA GEOMETRÍA A LOS ÁNGULOS EN EL CIELO

Dificultades para la conceptualización de las coordenadas astronómicas acimut y altura

LANCIANO, NICOLETTA¹ y CAMINO, NÉSTOR²

¹ Dipartimento di Matematica, Università La Sapienza, Roma, Italia

² Complejo Plaza del Cielo. Departamento de Física. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Esquel, Chubut, Argentina

nicoletta.lanciano@uniroma1.it

ncamino@ciudad.com.ar

Resumen. Se presenta en este trabajo una discusión acerca de las dificultades en el proceso de aprendizaje de la definición y medición de los ángulos en el espacio físico (3D) necesarios para la determinación de posiciones sobre la esfera celeste.

Se discuten en particular las características de las coordenadas acimut y altura, y los problemas que son propios al proceso de su medición.

Se analizan además los datos obtenidos a partir de entrevistas personales, clases grupales y dibujos individuales realizados por estudiantes de Argentina e Italia, de diversas edades: adolescentes de polimodal y adultos en la universidad y estudiantes de formación docente.

Palabras clave. Dificultades para el aprendizaje, ángulos, astronomía, medición, instrumentos.

From the angle of geometry to angles in the sky. Obstacles for the conceptualization of astronomical coordinates.

Summary. In this paper we report on a discussion about learning difficulties related to the definition and measurement of angles in physical (3D) space, on the celestial sphere.

We discuss, in particular, the characteristics of the Azimuth and Altitude coordinates necessary for determining, and the didactical and conceptual difficulties associated with their determination.

We also analyse data obtained from personal interviews, group classes and personal drawings made by students from Argentina and Italy, of varied ages: 15-17 years old and adults from the university and future teachers.

Keywords. learning difficulties, angles, astronomy, measurement, instruments.

Tornar geométrica la representación, vale decir dibujar los fenómenos y ordenar en serie los acontecimientos decisivos de una experiencia, he ahí la primera tarea en la que se funda el espíritu científico. En efecto, es de este modo como se llega a la cantidad representada, a mitad de camino entre lo concreto y lo abstracto, en una zona intermedia en la que el espíritu pretende conciliar las matemáticas y la experiencia, las leyes y los hechos.

Gastón Bachelard (2000)

PLANTEO DEL PROBLEMA

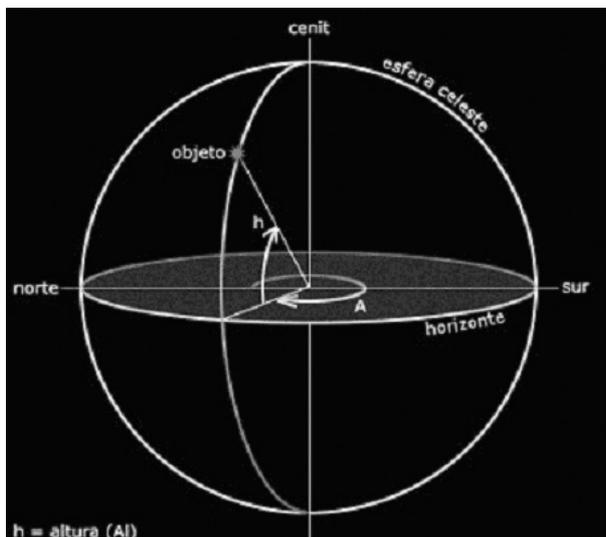
Tanto en la actividad científica propia de la astronomía como en la didáctica de esta ciencia y en el trabajo áulico correspondiente se utilizan ángulos para determinar las posiciones

en el cielo de los objetos bajo estudio. Sin embargo, estos ángulos, aunque parten del concepto básico propio de la geometría euclidiana, toman distintas características en su aplicación al espacio físico, lo que a su vez genera ciertas dificultades en el proceso de su enseñanza y aprendizaje.

La posición de los objetos en el cielo

Dar la posición de un punto en un espacio R^3 requiere de tres coordenadas; en el caso de las posiciones de objetos en el espacio físico astronómico esas tres coordenadas toman la forma de dos ángulos y una distancia, definida ésta como parámetro¹. Esto da origen a distintos sistemas de coordenadas esféricas, según sea la ubicación del origen de referencia (un punto sobre la Tierra, el centro de la galaxia, etc.).

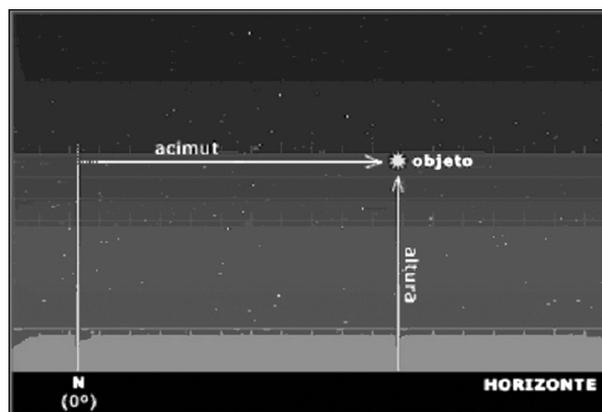
Así, para determinar la posición de un objeto en el cielo (Sol, Luna, estrellas, etc.), vistos desde una cierta ubicación sobre el planeta Tierra (la posición topocéntrica), se utiliza el Sistema de Coordenadas Horizontal Astronómico (Feinstein, Tignanelli, 1994), que consiste en la terna de coordenadas acimut, altura, distancia (A, h, r).



El Sistema Horizontal utiliza dos coordenadas angulares: acimut y altura. La tercera coordenada es una longitud, el radio unitario de la esfera celeste.

El acimut (el ángulo A en la figura anterior) es el ángulo sobre el plano del horizonte, medido entre la línea que une al observador con la proyección sobre el mismo plano de un objeto en el cielo y la línea que va desde el observador al punto cardinal norte, en el sentido N-E-S-O. El norte está por esto a 0° grados de acimut, el este a 90° , el sur a 180° y el oeste a 270° .

La otra coordenada angular es la altura (h en la figura anterior), es el ángulo que forma la visual al objeto observado con la línea que une al observador con la proyección del objeto sobre el horizonte. Por esto, la altura se mide desde el horizonte (0°) hasta el cenit (90°); se da una altura negativa cuando el objeto se encuentra por debajo del horizonte (el punto a 90° por debajo del horizonte (h = -90°) se denomina nadir).



Pequeña porción de esfera celeste en la que se indican Altura y acimut de un objeto.

Altura y acimut pueden ser medidos en forma directa con un sencillo sextante (un transportador de aula con una plomada) o, en forma más precisa, con un sextante clásico, con un teodolito o con telescopios cuya montura «materializa» el sistema horizontal (los denominados «altacimutales»).

La diferente naturaleza física de la altura y acimut

La altura de un cierto objeto en el cielo se define con respecto a un plano matemático, ideal, denominado «horizonte astronómico», plano que delimita a la esfera celeste en dos mitades, una visible y la otra no visible para el observador en cuestión.

La característica fundamental del plano del horizonte a los fines de la determinación de la altura es la de ser perpendicular a la dirección local de la gravedad (materializada en principio por la dirección de una plomada); por esto, el horizonte coincidiría físicamente con el plano tangente en la posición topocéntrica a la superficie libre de los líquidos (el océano, los lagos, el agua en un pozo, etc.)².

Por esta razón, cuando un observador procede a medir la altura de un cierto objeto en el cielo, la determina con respecto a un plano del cual tiene cierta percepción sensorial (se «ve» físicamente, se «siente» el equilibrio o la posición vertical de la persona que mide, etc.).

El acimut, por el contrario, se define con respecto a dos direcciones matemáticas, «inmateriales», sin «contraparte» concreta en el espacio físico 3D, para las cuales además el cuerpo humano no tiene ningún tipo de detector asociado, más allá de la capacidad de imaginación.

Es decir, la dirección de referencia (la que establecerá $A=0^\circ$) necesaria para determinar el ángulo del acimut es completamente arbitraria y no tiene contraparte física, mientras que el plano de referencia (que establecerá $h=0^\circ$), aunque definido matemáticamente también en forma arbitraria, sí tiene una contraparte física, que es el horizonte físico, «dado por hecho» para la percepción humana³.

Dificultades para el aprendizaje de la altura y el acimut

Esta diferente naturaleza física de las dos coordenadas del sistema horizontal genera ciertas dificultades en el aprendizaje del proceso de determinación de posiciones de objetos en el cielo.

Algunos problemas específicos son los siguientes:

Sobre la utilización de instrumental: los instrumentos a utilizar (un sencillo sextante, el propio cuerpo como generador de sombras y parámetro para su medida, etc.) requieren del estudiante una competencia en la identificación de qué es lo que se está observando, cómo se mide en planos perpendiculares en el espacio (entre ellos y al suelo), etc., y puede convertirse a su vez en una nueva dificultad para el aprendizaje del posicionamiento de objetos en el cielo.

Sobre el proceso de medición: comprender la necesidad de definir un origen para la determinación de estos ángulos, conceptualizar la horizontalidad del plano de referencia fundamental, dar una escala angular, etc.

Sobre el no isomorfismo entre el espacio geométrico y el espacio físico: el espacio euclídeo es homogéneo e isótropo por definición, aunque no así el espacio físico percibido por el observador.

Sobre los entornos espaciales y su representación: se intenta representar en un plano 2D (el plano de un gráfico cartesiano acimut-altura, indispensable para el trabajo en el aula) los fenómenos y observaciones efectuadas en un espacio físico 3D, lo que pone en evidencia las dificultades asociadas a las representaciones mentales y gráficas de los distintos entornos espaciales requeridos para, por ejemplo, la conceptualización del paralelismo de los rayos del Sol y de la gravedad terrestre.

En lo que sigue trataremos de analizar estas dificultades y problemas y discutiremos algunas de sus influencias sobre la didáctica de la astronomía.

MARCO DE REFERENCIA TEÓRICO

El marco de referencia teórico que utilizaremos para analizar estos problemas tendrá distintos elementos, los que describiremos a continuación:

Isomorfismo entre el espacio geométrico y el espacio físico (Vives, 1971)

Según Vives (op. cit., p. 1), «la *posición* de un cuerpo material se define por su relación espacial respecto a un *sistema de referencia* físico. El concepto de *posición de un cuerpo* presupone pues, lógicamente, la noción de espacio físico y de configuración geométrica dentro de ese espacio. Una vez definida geoméricamente la estructura métrica y topológica del espacio físico, es posible es-

tablecer un sistema de coordenadas de referencia, que permite determinar unívocamente la posición o lugar que ocupa el cuerpo en ese espacio. La noción de posición es, por consiguiente, esencialmente relativa a un sistema de referencia en el espacio».

El espacio geométrico euclídeo es isótropo y homogéneo; el espacio físico, lo percibido de la realidad, puede considerarse homogéneo pero no isótropo a los fines del posicionamiento; el espacio de la experiencia real no es isótropo por la presencia de una dirección vertical privilegiada. Por esta razón, el espacio de la geometría euclidiana y el espacio físico no serían isomorfos y ésta es la razón por la que en su utilización simultánea se generen diversas dificultades⁴.

¿Es posible afirmar que el espacio físico es euclídeo? Según Vives (op. cit., p. 41), «si se toma aisladamente, la afirmación de que una determinada geometría es válida para el espacio físico carece de sentido... De acuerdo con estas ideas, se suele distinguir entre geometría matemática y geometría física... La geometría matemática trata de estructuras abstractas y no nos dice nada acerca del espacio físico. Por el contrario, la geometría física describe la estructura del espacio físico observado, aplicando una geometría matemática mediante definiciones arbitrarias de las operaciones necesarias para medir longitudes físicas» (y, en general, las definiciones para medir las cantidades de cualquier otra magnitud física).

A lo anterior puede agregarse lo discutido por Piaget (1971, pp. 8-9) cuando expresa que desde el punto de vista de la epistemología genética los «desarrollos respectivos (del espacio físico y del espacio lógico matemático) no comportarían interacción alguna en sentido estricto, sino una simple correspondencia estructural, hasta el punto en que la geometría pura podría construir estructuras sin significación física»; esta afirmación se basa en «el análisis de las formas de abstracción a nivel del pensamiento científico, y el examen histórico-crítico de las relaciones entre las matemáticas, la física matemática y la física en la elaboración y la sucesión de las teorías».

Al definir el sistema de coordenadas horizontal astronómico, y al utilizarlo en la práctica docente a través de las coordenadas acimut y altura, damos naturalmente por hecho que el espacio físico con el que trabajaremos tiene las propiedades del espacio geométrico euclídeo. Debemos entonces notar que tomar una geometría particular para describir el espacio físico es una elección arbitraria y, por tanto, la misma debería incluir ciertas «advertencias» para quienes la utilicen, en especial para sus aplicaciones en el ámbito de la educación.

Sin llegar a discutir aquí la *relatividad del espacio físico* (base de la innovación que dio lugar a la teoría de la relatividad general de Einstein), al menos nos interesa llamar la atención sobre el hecho de que el espacio físico (vale análogamente similar desarrollo para el tiempo físico) se define abstrayendo de quién (o qué) realizará las mediciones correspondientes a las definiciones elegidas. Sin embargo, si consideramos que el instrumento para la

determinación operacional de las longitudes en el espacio físico tiene una parte «humana», deberemos agregar a ciertas características del espacio físico una más, cual es la percepción que de ese espacio tiene el observador que opera el instrumento de medición. Es decir, para llegar a reportar una cierta determinación de longitudes en el espacio físico (o ángulos como el acimut y la altura, por ejemplo) será necesario además «descontar» en un esfuerzo de abstracción la influencia de lo percibido por el humano que observa, en especial de su percepción de una equipotencial gravitatoria⁵.

La escala de los entornos espaciales y su representación (Lanciano, 1996)

Con respecto al espacio del cual se ocupa habitualmente la escuela, es evidente que es aquel que puede visualizarse cotidianamente y se trabaja entonces únicamente sobre su representación. Sin embargo, el trabajo sobre el cielo implica una ampliación de aquel concepto de *espacio*, que abre nuevas y diversas problemáticas con distintas potencialidades.

Como ha sido ampliamente señalado en la literatura (Merle, 1994; Nussbaum, 1990; Caiani et al., 1994), el trabajo con el espacio propuesto por la escuela induce esencialmente una visión plana, en dos dimensiones. La comprensión del fenómeno astronómico, muy por el contrario, requiere de una visión del espacio en volumen, en tres dimensiones. Por esta razón, la observación astronómica y el posterior desarrollo didáctico pueden ayudar de forma decisiva a la construcción de una visión tridimensional que, de otra manera, usualmente no tendría una necesidad esencial de ser desarrollada.

Podemos definir los siguientes rangos de escala espacial tridimensional:

– El **micro espacio**, como el espacio del libro y del cuaderno, del objeto manipulable. Este espacio es visto y vivenciado sólo desde lo externo. En el micro espacio operan por lo tanto las representaciones bidimensionales y las tridimensionales a través de modelos manipulables del meso, del macro y del mega espacio. Esto permite la manipulabilidad física y mental de cuanto allí es contenido.

– El **meso espacio**, como aquel de una escuela, de una casa, de una plaza, que es abarcado enteramente, al menos a la vista. En el meso espacio, para poder ver todo el espacio, es necesario el movimiento del cuerpo, al menos como una rotación de 360° sobre sí mismo y como cambio de la visual sobre los diversos planos, para poder así abarcar lo alto y lo bajo. Un carácter distintivo remarcado por Boero (1995) es la dominabilidad total con la vista, verdadera e imaginada, y la accesibilidad en tiempos muy breves.

– El **macro espacio** es el espacio grande, aquel en el cual estamos inmersos en la ciudad y en la naturaleza. No lo podemos abarcar enteramente y por lo tanto sólo podemos verlo y vivenciarlo desde el interior con visio-

nes parciales. En el macro espacio para poder abarcar todo, aún con la vista, es necesario trasladarse (viajar) mucho.

– El **mega espacio**, como el espacio del cielo, del cosmos, de la Tierra entera como planeta y no sólo como «mundo» sobre el cual caminamos y navegamos. En el mega espacio están en juego objetos de tamaño comparable con la Tierra y aún mayores que ésta. El mega espacio es en gran parte inaccesible al cuerpo en movimiento y aún a la vista. Podemos sólo imaginarlo y pensarlo: la otra cara de la Luna, la órbita de la Tierra, un cometa que se aleja del Sol. Por esta razón, es difícil representarlo en su totalidad. Son útiles para argumentar sobre esto las metáforas icónicas y lingüísticas, y las evocaciones, no sólo de los «científicos» sino también de los niños y de los poetas, que resultan por esto particularmente significativas.

El **mega espacio astronómico**, entonces:

1. Es accesible a la visión local, desde la Tierra o desde un satélite.
2. En él algunos objetos pueden considerarse fijos y funcionan como hitos de referencia⁶, pero sólo una parte está bajo el control de la vista; los desplazamientos que ocurran no son todos perceptibles en forma inmediata a causa de:
 - la distancia a los objetos; y
 - de la relatividad y lentitud de los desplazamientos en sí mismos;
3. puede ser pensado como «pelando una cebolla»:
 - el sistema Tierra-Sol-Luna, en el cual los objetos pueden ser seguidos en su desplazamiento y no son puntuales;
 - el sistema Solar y las estrellas visibles de la Vía Láctea, o bien el cielo visible a ojo desnudo; y
 - el espacio más allá de nuestra galaxia: el universo.

La adquisición y la habilidad del punto de vista del pensamiento geométrico (estimación de distancia, reconocimiento de relaciones particulares como perpendicularidad y paralelismo) alcanzados en cada uno de estos «diversos tipos» de espacio no son automáticamente transferibles del uno al otro.

Por esto, en la práctica didáctica, resulta grave la falta de una reflexión específica sobre los aspectos de distancias, dimensiones, proporciones, secciones, puntos de vista... en los distintos entornos.

Berthelot y Salin (1992), en su tesis de doctorado, presentan un cuadro, a su vez ya elaborado por Gálvez, de las diferencias que existen entre los distintos entornos espaciales.

A continuación se presenta este cuadro, habiéndole agregado una columna relativa al mega espacio, tal como fuera elaborado por uno de nosotros (Lanciano, 1996).

Cuadro explicativo de los distintos entornos del espacio.

MICRO-ESPACIO	MESO-ESPACIO	MACRO-ESPACIO	MEGA-ESPACIO
próximo al sujeto, accesible a la manipulación y a la visión	accesible a una visión global, casi simultánea	accesible sólo a la visión local, la visión global es construida en forma intelectual	prácticamente inaccesible, la visión local no es suficiente para dar una visión global debido a la vastedad del entorno
todos los desplazamientos del sujeto y del objeto son posibles; hay una percepción exhaustiva del objeto	los objetos fijos funcionan como hitos de referencia, perceptibles sólo bajo cierta perspectiva, los desplazamientos del sujeto están limitados a las disposiciones de los objetos, el espacio se diferencia en función de lleno y vacío	los objetos están fijos y funcionan como hitos de referencia, pero sólo una parte está bajo el control de la vista	la mayor parte de los objetos están fijos y funcionan como hitos de referencia, pero sólo una parte está bajo el control de la vista
fuerte densidad de información para el sujeto, control empírico de las relaciones espaciales, ninguna necesidad de conceptualizaciones	en relación con el micro-espacio, menor necesidad de información y mayor inserción de la acción, es necesario un cierto nivel de conceptualización para integrar y coordinar distintas perspectivas	tres tipos de macro espacio se corresponden a la densidad de información decreciente: urbano, rural, marítimo, la contextualización es indispensable para reconstruir la continuidad del espacio y obtener una representación global	hay una densidad aún menor de información respecto al macro espacio, y no es explorable directa ni completamente
el sujeto está fuera del espacio centrado en su propia perspectiva	el sujeto está dentro del espacio y tiene necesidad de descentrarse	el sujeto está dentro del espacio y tiene necesidad de descentrarse para integrar y coordinar percepciones fragmentarias	el sujeto está inmerso en el espacio, aunque una descentración sólo es en parte posible y útil para una reconstrucción
el espacio es generado en torno al objeto, las propiedades espaciales se atribuyen al objeto: largo, tridimensionalidad, no es necesario un sistema de referencia	el espacio es un contenedor homogéneo de los objetos, propiedades del espacio vacío: extensión, tridimensionalidad, anisotropía, necesidad de coordinación bajo el control continuo de la vista el sistema de referencia del sujeto con un sistema de referencia fijo	el espacio es un contenedor generado intelectualmente, propiedades del espacio: extensión, tridimensionalidad, isotropía, para orientarse se necesita coordinar el sistema de referencia del sujeto con uno (o más) referencias diversas, externas y fijas	el espacio es un contenedor generado fuertemente en forma intelectual, propiedades del espacio: extensión, tridimensionalidad, isotropía, para orientarse se necesita coordinar el sistema de referencia del sujeto con referencias externas y fijas

La construcción y utilización de dispositivos experimentales (Lanciano, 2002; Lanciano, 2006; Maiztegui-Gleiser, 1980; Roederer, 2002)

El problema de los instrumentos, su elección, su construcción y forma de uso es central en la didáctica de la ciencia y de la matemática. En particular, nos referiremos a los instrumentos para medir ángulos, como por ejemplo el clinómetro y el sextante, aunque en este trabajo hemos utilizado únicamente el sextante, en una versión simplificada.

Es necesario en especial prestar atención a las dificultades didácticas, es decir, aquellas dificultades para el aprendizaje que pueden ser inducidas por la utilización en un contexto de enseñanza de uno u otro instrumento.

En la utilización del sextante, se revela como importante que un gesto del brazo del observador al mover el instrumento desde el horizonte al cénit da el continuo (considerado entonces el sextante como un medidor analógico)

de las posibles posiciones (alturas) desde 0° (horizonte) a los 90° (cénit) de los objetos en el cielo⁷.

La medida de la altura está, por esta razón, ligada al instrumento y al procedimiento utilizado: el ángulo a medir puede ser aquel con respecto al plano del suelo (el plano horizontal), o bien aquel dado en relación con el hilo de una plomada (la vertical en la lectura del sextante), lo que resulta conceptualmente más difícil (ya que es necesario calcular $90^\circ - \alpha$, que es ya una medida indirecta). Se plantean entonces ciertas preguntas: ¿cuál forma darle al instrumento, semicírculo o cuarto de círculo?, ¿en cuál posición del semicírculo o del cuarto de círculo poner el 0° y el 90°?

Por último, debemos tener en cuenta que el proceso de medición es una operación física experimental, en la que intervienen necesariamente tres sistemas:

– el «sistema objeto» al cual queremos medir (en nuestro caso los objetos en el cielo),

– el instrumento o «aparato de medición» (en nuestro caso el sextante), y

– el «sistema de comparación» que definimos como unidad y que suele venir unido o estar incluido en el aparato o instrumento de medición (en nuestro caso la escala graduada en grados sexagesimales, con la elección indicada en el párrafo anterior).

Para definir unívocamente el proceso de medición, es necesario dar además la «receta» mediante la cual deben ponerse en interacción el sistema objeto, el aparato de medición y la unidad de medida (lo que incluye la definición del origen de la escala, el «cero» u origen para la medición). En particular, el procedimiento físico correspondiente a esta receta, realizado entre el aparato de medición y la unidad, se denomina «calibración» del aparato. Este aspecto estará ligado luego a la lectura directa o indirecta de la medición efectuada con el instrumento en cuestión y es uno de los factores de mayor incidencia en la didáctica asociada a la utilización de los instrumentos.

En general, se considera que el observador (clásico, ideal) forma parte del aparato de medición (sería una parte más del dispositivo); sin embargo, es claro que un cierto proceso de medición, desarrollado en un contexto educativo, no puede ser considerado esencialmente objetivo ni común a todos los observadores (personas concretas) en cualquier circunstancia, como por ejemplo fue el proceso de medición de acimut y altura utilizando nuestro sextante de aula.

DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

Objetivos de la investigación

Con el fin de comprender de qué manera aquellas características (utilización de instrumental y proceso de medición, la relación entre el espacio físico y el espacio geométrico, las distintas escalas de los entornos espaciales) determinan ciertas dificultades en el aprendizaje de algunos conceptos, especialmente de aquellos relacionados con la observación de fenómenos astronómicos, investigamos sobre la conceptualización de los ángulos necesarios para dar posiciones sobre la esfera celeste, incorporando para ello la utilización de un instrumento para medir estos ángulos, un derivado del antiguo sextante; asimismo, y como elemento auxiliar, utilizamos además el registro de las sombras del propio cuerpo producida por el desplazamiento del Sol en el cielo (el «horinomo»).

Por esta razón, podemos indicar que los objetivos de este trabajo fueron:

– Comprender las dificultades asociadas a la conceptualización por parte de los estudiantes que participaron en la investigación de los ángulos que determinan las coordenadas astronómicas acimut y altura.

– Comprender de qué manera la manipulación por parte de los estudiantes de un sextante y del horinomo afecta tal conceptualización.

Descripción de la muestra de estudiantes

Tomamos para este estudio una población muy diversificada, para aprovechar al máximo las posibilidades que nos brindaban los distintos cursos de estudiantes que teníamos a nuestro cargo en la época en que desarrollamos el mismo. Así, los grupos de estudiantes involucrados en el presente estudio son los siguientes:

ITA 1: Alumnos (19-24 años) del Curso de Didáctica de las Ciencias, del Corso di Laurea in Science dell'Educazione e della Formazione, de la Facultad de Filosofía de la Universidad La Sapienza, en Roma, Italia. El curso estaba formado por veinticuatro (24) estudiantes, egresados de distintas instituciones educativas de nivel secundario, durante un curso de nivel universitario de formación general no científica (su formación en conceptos relacionados con el presente trabajo se remonta a cuando eran adolescentes en el nivel secundario), que han optado por el citado curso por interés propio.

CAN 1: Alumnos (17-18 años) del Proyecto Canopus, de Esquel, Argentina (Camino, 2004).

Canopus fue un proyecto de innovación educativa realizado en escuelas de nivel polimodal (15 a 18 años) de la ciudad de Esquel, en la Patagonia argentina, en el que se trabajó durante casi tres años en reuniones semanales de dos horas de duración, sobre conceptos astronómicos y sobre la observación y medición sistemática del cielo, con la construcción y utilización de distintos dispositivos astronómicos, en particular el sextante.

El grupo estaba formado por veintiséis (26) estudiantes, provenientes de las siete escuelas de nivel polimodal de Esquel (seis públicas y una privada); los estudiantes accedieron al proyecto cuando tenían 15 años (1° polimodal) en forma voluntaria y a partir de sus propios intereses. El trabajo en el marco del proyecto no tenía relación formal con el desarrollo curricular que en sus escuelas se estuviera aplicando durante el período en que funcionó el mismo. Los orígenes socioeconómicos de los estudiantes de Canopus fueron muy variados y reflejan plenamente la diversidad de la comunidad de esta joven ciudad patagónica.

Las actividades consistían principalmente en observar sistemáticamente el cielo nocturno (Luna, estrellas, etc.) y la evolución de las sombras durante el día, focalizando luego sobre una secuencia didáctica diseñada para el aprendizaje de los conceptos básicos de la astronomía de posición. Canopus finalizó cuando los estudiantes participantes egresaron del nivel polimodal, con 18 años.

Descripción del contexto en el que se produjeron los datos analizados

ITA 1: Luego de una actividad de dos meses con el horinomo en la Universidad, durante la cual los estudiantes han tomado medidas angulares y realizado representaciones gráficas a partir de sus mediciones. En el presente trabajo sólo trataremos la dificultad de percibir el rol del ángulo correspondiente al acimut. Hemos utilizado en particular

las producciones (dibujos y textos) elaboradas por uno de estos estudiantes, Claudio, durante una entrevista personal realizada con ambos investigadores en la universidad, y las de Simona, otra de las estudiantes del grupo italiano.

CAN 1: A mediados del último año del proyecto Canopus (17-18 años, cursando 3° polimodal), ambos investigadores compartieron con los estudiantes una de las reuniones, realizándose en esa oportunidad una evaluación diagnóstica sobre los fundamentos y utilización del sextante (instrumento que utilizaban sistemáticamente desde hacía casi dos años); el diagnóstico consistió en una descripción escrita acompañada por dibujos, para luego realizar una discusión grupal.

La elección de los instrumentos de medición

Uno de los instrumentos que utilizamos, principalmente con los estudiantes argentinos, fue el sextante. Sin embargo, y estrictamente hablando, este dispositivo no sería un sextante clásico (un medidor de ángulos cuya amplitud es de una sexta parte de los 360°) sino una variación del mismo: consiste en un transportador de aula, de 180° de amplitud, con una plomada ubicada en su centro lo que permite determinar el origen para la medición de la altura. El mismo dispositivo, dispuesto con su plano paralelo al horizonte, permite medir el acimut. La elección de este sextante se fundamenta en su simplicidad, tanto en su construcción (bajo costo, disponibilidad, etc.) como en su utilización; además, la precisión de las medidas obtenidas ($\pm 1^\circ$) es muy satisfactoria para el contexto educativo en el que lo hemos utilizado.



El sextante de aula, utilizado para medir la altura de un objeto.

El otro dispositivo que utilizamos, principalmente con los estudiantes italianos, es el horinomo: un «instrumento» que consiste en medir el largo de la sombra de nuestro propio cuerpo en unidades de nuestros propios pies (en consecuencia, permite determinar también, en forma indirecta, la altura del Sol), y que fuera utilizado para la medición del tiempo en distintas culturas originarias del mundo. El horinomo es un instrumento aún más sencillo que el sextante, aunque las dificultades inherentes a su utilización son similares (Lanciano, 2002; Lanciano, 2006).



El horinomo en funcionamiento: el largo de la sombra medido a partir del propio pie como unidad de medida.

Proceso de generación de los ángulos en el cielo (ITA 1, utilizando el horinomo)

Al intentar dar una posición en el cielo, ya sea con la utilización de instrumentos específicos o simplemente a ojo desnudo, el observador necesita (no hay alternativa posible) generar dos ángulos. En la observación más cotidiana y sencilla desde el punto de vista astronómico, estos dos ángulos son aquellos referidos a la ubicación de lo observado en el cielo con respecto a una dirección horizontal privilegiada (acimut) y a su altura aparente observada con respecto al suelo (altura); ambos ángulos así definidos intuitivamente son los que finalmente llevan a la definición del Sistema de Referencia Horizontal astronómico.

Para medir un ángulo sobre el plano horizontal, el acimut, se necesita establecer, reconocer, marcar, dos direcciones, y por esta razón es un proceso más complejo que el necesario para la medición de la altura. Para el acimut, entonces, es necesario determinar en primer lugar una dirección de referencia (0°) para luego determinar cuánto se aparta una segunda dirección de aquella.

Por ejemplo, la dirección de referencia puede tomarse como aquella correspondiente a la primera sombra observada, pero no está dada naturalmente sino que es necesario tomar una decisión consciente explícita. En el plano horizontal, entonces, al no existir una dirección naturalmente establecida (como el suelo para la medición de las alturas), no se tiene en consideración ninguna dirección de referencia fundamental y por esta razón se dificulta la generación de la noción de ángulo (en lo que a la coordenada acimut respecta).

Los estudiantes del grupo ITA 1 han registrado la medida de su propia sombra medida con respecto a la longitud de sus propios pies, en distintos momentos del día, durante varios días, de acuerdo con las indicaciones dadas por sus docentes con el fin de registrar sistemáticamente la evolución de las sombras.

En la entrevista con Claudio, un estudiante brillante, se evidencia su proceso meta reflexivo acerca de la utiliza-

ción del Horinomo y del análisis posterior de los datos obtenidos. Claudio recoge los datos (el largo de la sombra medida en cantidad de pies y el instante de tiempo) y decide representar los datos recogidos por él y por su mujer e hija en un gráfico cartesiano que tiene marcado, en el eje de las abscisas, el tiempo entre las 5 horas y las 20 horas, y en el eje de las ordenadas el número de pies, entre 4 y 35.

La altura de los cuerpos en el cielo, en particular del Sol y en consecuencia la inclinación de los rayos de luz solar en relación con el suelo, se percibe como un ángulo (y se mide en consecuencia) en relación con el plano del horizonte (como ya lo expresamos, este plano está dado para el observador como una referencia «fundamental», inconsciente e implícitamente, debido a la percepción de equilibrio).

NL-NC: Mirando el cielo, ¿un punto del esquema qué información te da?

Claudio: Si el Sol está saliendo o poniéndose.

NL-NC: ¿Te dice qué ángulo?

Claudio: Sí, el vertical respecto al Sol.

NL-NC: ¿Cómo se llama este ángulo?

Claudio: Altura del Sol respecto al horizonte. Por ejemplo, aquí era menos de 45°.

NL-NC: ¿Cuál es la referencia para medir la altura del Sol?

Claudio: La altura de la persona.

NL-NC: La referencia, no en el cálculo.

Claudio: El plano, el plano del horizonte. De las palabras tengo que ponerme en situación otra vez, y sentir el Sol a mis espaldas, en la nuca. [COMENTARIO: importante meta reflexión.]

Claudio decide además, a partir de los registros de la sombra sobre el suelo, reconstruir el recorrido del Sol en el cielo. Al continuar la observación y el registro de las sombras surge la necesidad de una nueva representación que tenga en cuenta también que la dirección de la sombra ha cambiado, y del gráfico cartesiano pasa a un gráfico de tipo polar: en el centro se ubica a sí mismo y radialmente representa el largo de la sombra en escala. Aquí comete un error: representa la hora sobre el borde del círculo de modo regular y de esa forma representa la dirección de la sombra, correcto en el largo pero sólo *grosso modo* para la dirección, debido a que al registrar la sombra no consideró anotar la dirección con precisión⁸.

Luego, al reflexionar sobre su propia experiencia, la palabra *dirección* emerge fácilmente pero el concepto de *ángulo* que sabe necesario medir para dar la dirección, después de haber elegido una en particular como referencia, es sin embargo muy difícil de explicitar.

NL-NC: En el dibujo, ¿qué has perdido? En síntesis, ¿qué cosa no has tenido en cuenta?

Claudio: ... No había registrado la dirección de las sombras, pero esto lo entiendo ahora.

NL-NC: ¿Dirección qué es?

Claudio: Hacia qué punto cardinal.

NL-NC: ¿Y cuál cosa te sirve para hacer otra vez la experiencia?

Claudio: Una brújula, la línea norte-sur.

NL-NC: ¿Y genéricamente, conceptualmente, sin un nombre propio?

Claudio: No entiendo.

NL-NC: No el objeto, la brújula, la meridiana, sino la dimensión. ¿Qué cosa es necesaria en este sistema?

Claudio: Debo fijarla midiendo los grados. [COMENTARIO: existe cierta confusión entre dimensión, medición, instrumento de medición y unidad de medida.]

NL-NC: ¿Cuáles grados?

Claudio: La inclinación, la proyección. El ángulo. [COMENTARIO: finalmente surgió la palabra *ángulo*, pero antes dijo muchas palabras cercanas, buscando la adecuada.]

NL-NC: El primer dibujo es perfecto, pero sin la información del ángulo. Entonces, no se puede reproducir el camino del Sol en el cielo.

Claudio descubre durante la entrevista que la dirección de partida para el acimut puede ser elegida de modo arbitrario y él sugiere que sea aquella de la primera sombra del día. Durante la entrevista nosotros remarcamos las elecciones adecuadas, sus errores y las dificultades en la realización de su experiencia.

NL-NC: La referencia para la altura es el horizonte. Es el plano de referencia y ninguno lo cuestiona, está ya definido. En la nueva medida de los ángulos que antes no estaba, ¿cuál es la referencia? ¿Está ya definida en la realidad?

Claudio: Los grados.

NL-NC: Ésta es la unidad de medida. ¿La meridiana o la referencia están establecidas por la naturaleza?

Claudio: Son convenciones culturales.

NL-NC: Pero en este plano (en el nuevo dibujo polar) la referencia no está establecida, ¿en qué modo lo podemos establecer?

Claudio: Podríamos verificar los ángulos, y después los podríamos nombrar.

NL-NC: En la primera medición de la sombra en un día, ¿se puede medir un ángulo?

Claudio: Si no hay más de una no la puedo medir. [COMENTARIO: está la preocupación de medir un hito junto a nombrarlo.]

NL-NC: Aquí es necesario establecer una referencia.

Claudio: Establecer un intervalo.

NL-NC: Ahora, para rehacer la experiencia con la tabla de datos nueva, ¿qué cosas deberías establecer desde el principio para responder a tu inquietud inicial de reconstruir el camino del Sol en el cielo? ¿Cuál es la referencia? Es una decisión. En el ángulo de la altura del Sol la decisión de la referencia no es mía, para los ángulos en el plano tengo que decidir.

Claudio: Elijo el momento en el cual la sombra está en una situación particular. Por ejemplo, aquel en el que el Sol se pone.

NL-NC: La decisión si no sirve se cambia.

Claudio: Debo encarnar en un punto de referencia local la primera dirección o el punto de referencia.

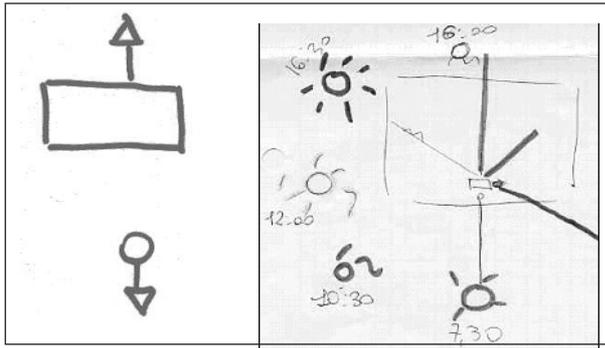
NL-NC: En el primer gráfico, la información del ángulo no la podés recuperar.

Sobre el tipo de elección de la dirección inicial y los problemas que pudo ocasionar veremos en seguida el texto de Simona, quien ha registrado su sombra siempre desde la misma ubicación, la terraza de su casa, durante un día entero:

«Poniéndome a las 7:30 de espaldas al Sol, la dirección de la sombra era totalmente perpendicular a mi cuerpo, después a las 10:30 mientras disminuía el número de pies (el largo de la sombra) aumentaba su inclinación y la oblicuidad (altura del Sol sobre el horizonte), siempre

el Sol estaba en la zona sur y hacia el norte la sombra. La sombra se hacía siempre más oblicua y a mediodía parecía lateral, a mi derecha; a las 14:30 se la encontraba un poco más oblicua pero hacia la otra parte, manteniéndome siempre de espaldas al Sol».

Su relato se aclara cuando Simona finalmente explicita que antes del mediodía estaba ubicada de un modo y después del mediodía había girado 180°, aunque siempre ubicada en la misma baldosa de su terraza, realizando los siguientes dibujos.



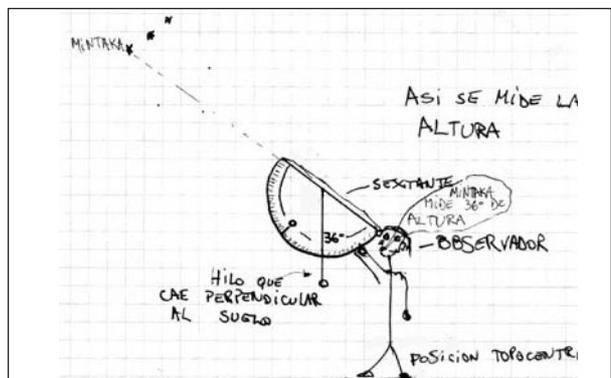
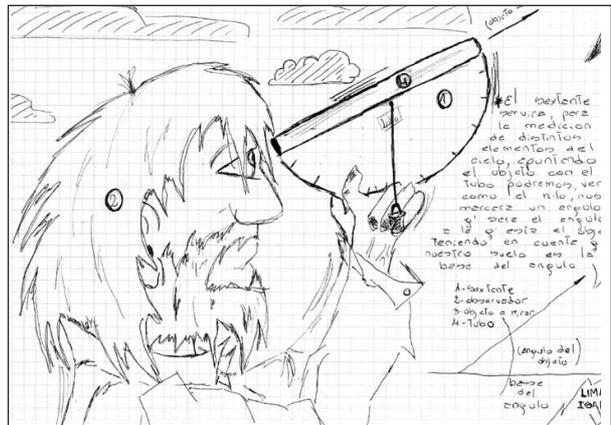
Dibujos de Simona (24) para explicar sus observaciones.

Proceso de generación de los ángulos en el cielo (CAN 1, utilizando el sextante)

Cada estudiante construyó un sencillo sextante de 180° ($\pm 1^\circ$) en cartón, con una plomada como referencia (materialización) de la vertical astronómica. Manipulando este instrumento es posible medir tanto la altura como el acimut, de cualquier objeto en el cielo, aunque con baja precisión. Las observaciones de los chicos de Canopus fueron sobre la Luna, Míntaka, Antares, algunos planetas y la Cruz del Sur.

Con respecto al procedimiento para determinar la altura, los estudiantes indicaron lo siguiente:

- La mayoría indica que sólo se mide hasta 90°, sin considerar que en astronomía las alturas negativas indican posiciones que se ubican por debajo del plano del horizonte.
- Todos coinciden en que «El sextante debe estar vertical, es decir en un plano vertical».
- «Hay que considerar los errores en la lectura del ángulo» (Rodrigo y Ariel).
- «La altura sobre el horizonte es de la línea que va a la estrella» (Matías).
- Algunos dibujan la línea de la plomada no vertical (Betiana).
- La mayoría declaran y remarcan como importante la posición topocéntrica. Asimismo, en todos los dibujos se representaba consecuentemente el paisaje local, lo que podía causar cierta confusión sobre la referencia desde la cual medir la altura.

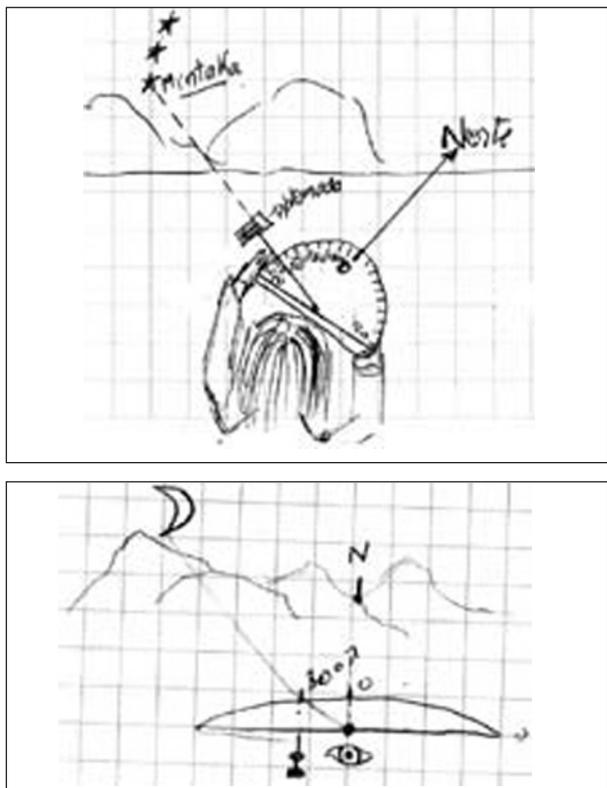


Isaías (arriba) y Rodrigo (abajo) explican de qué manera se mide la altura de un objeto mediante el sextante.

Nótese que en los dibujos anteriores se evidencian, al mismo tiempo, el micro espacio del sextante con muchos detalles, el meso espacio hasta el horizonte y el mega espacio de los astros.

En la discusión acerca del procedimiento para determinar el acimut, los estudiantes indicaron lo siguiente:

- «El sextante debe estar paralelo al suelo» (Carolina), sin diferenciar la condición de plano horizontal de suelo, algo accidental propio de la realidad física, y no un plano matemático ideal. De similar modo, hablaban de «la horizontal» en vez de referirse a «el horizonte» (Maximiliano), sin intentar hacer coincidir la horizontal con el horizonte.
- Al utilizar el sextante, no indicaban el sentido en que debían leer el acimut (NESO, o bien horario o antihorario según el hemisferio), sino que hablaban de «hacia la izquierda» (Gabriela). Esto puede haber sido causado por la calibración de los sextantes utilizados, con el 0° en el centro y los $\pm 90^\circ$ en los extremos.
- Aunque en general todos los estudiantes ubican el origen del acimut en el punto cardinal norte (Emilce), algunos indican que es posible asignar tal condición a cualquier punto arbitrario (Rodrigo). Esta aclaración es muy importante ya que pone en evidencia el carácter arbitrario de la dirección de referencia, es decir: la isotropía del espacio R^2 del plano horizontal.



Emilce (arriba) y Maximiliano (abajo) explican de qué manera se mide el acimut de un objeto mediante el sextante.

DISCUSIÓN

Existen distintas dificultades, frecuentemente no vistas y no consideradas, que conciernen a la conceptualización y a la medición de los ángulos utilizados para dar posiciones de objetos en el cielo. Sin embargo, existen ciertas diferencias entre las distintas mediciones según el subespacio utilizado. Si bien el concepto de *ángulo* es único y las coordenadas definidas son unívocas, el proceso de medición depende de la naturaleza física de la propia posición topocéntrica y de su ubicación geográfica, en particular de su latitud.

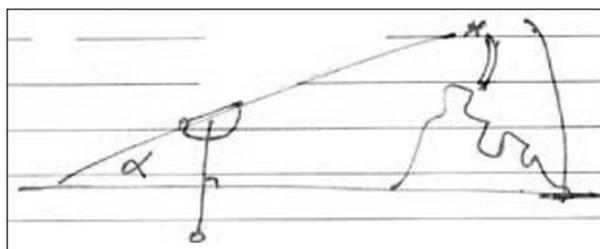
La determinación de la altura es, de alguna manera, más sencilla que la determinación del acimut. Biológicamente el ser humano, y el resto de los seres vivos, detectan (indirectamente) la dirección local de la gravedad, en particular con los sensores de equilibrio dentro del cráneo. Esto permite «sentir» un plano de referencia perpendicular a la dirección vertical de la gravedad local, materializada a su vez por la dirección de la plomada y, lo más cotidiano, por la dirección de caída de los cuerpos. Por esta razón, en general el plano horizontal es «dado por hecho» y no se es consciente de que tal origen es también una condición necesaria para la determinación del ángulo que denominamos altura.

Al utilizar el sextante para la determinación de la altura, la plomada permite definir absoluta y objetivamente el

0° de esta coordenada, eliminando de algún modo los posibles obstáculos y relieves que se interpongan entre el observador y el cielo (tal como lo muestra Claudio en la Figura 1). Es decir, la determinación del ángulo que da la coordenada altura lleva implícito una base física que facilita la configuración geométrica requerida.

Figura 1

Claudio indica cómo la altura de una estrella puede ser determinada a pesar del relieve existente alrededor del observador.



Podríamos afirmar entonces que el espacio físico 3D no es isótropo, ya que como la gravedad tiene direcciones distintas al recorrer la superficie terrestre, existen puntos a puntos distintas direcciones privilegiadas y por esto la proyección en el cielo de la dirección de la gravedad, que determina la vertical astronómica (en el mega espacio), que es a su vez lo que determina el acimut y la altura de un astro en cada lugar geográfico, es diferente punto a punto sobre el planeta.

El acimut en especial tiene un problema de doble naturaleza, ya que para su determinación:

- es necesario medir ángulos a partir de un origen, para lo cual es necesario antes definir tal origen, siendo que a diferencia de la altura no existe aquí ninguna referencia natural (por gravedad, por ejemplo) que privilegie una dirección sobre otra de las infinitas posibles incluidas en el plano horizontal. El origen está ligado a datos electivos, a una elección en definitiva arbitraria o convencional, ya que no existe una preorganización física o geométrica del espacio en el plano horizontal sobre el que se mide el acimut; y

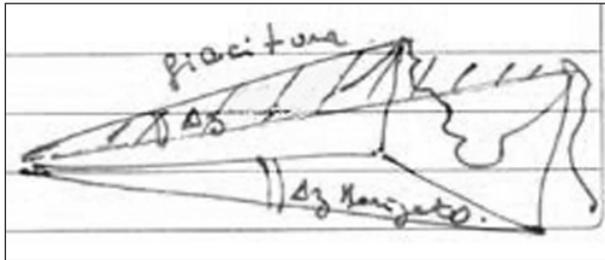
- es necesario medir el ángulo sobre un plano horizontal, o sea que los dos lados del ángulo deben estar sobre el mismo plano y éste debe ser horizontal, siendo que tal condición prácticamente no se da nunca en la realidad, ya que es casi imposible hallar materializaciones horizontales (equipotenciales gravitatorias como la superficie de un líquido), debido a que en general los suelos son accidentados, no planos y no horizontales.

Esta dificultad, empírica, fue indicada en particular por Claudio durante la entrevista personal, explicitada con el dibujo de la figura 2, con el que intentó explicar que en los procesos de medición reales es posible que se determine un acimut «no horizontal», sobre un plano

inclinado (con cierta pendiente) con respecto al acimut que corresponde a la definición astronómica, y ello trae como consecuencia, en general, ciertos errores sistemáticos de medición.

Figura 2

Claudio indica cómo la pendiente del relieve existente alrededor del observador puede dificultar la determinación del acimut.



Con respecto a este último aspecto cabe preguntarse, ¿existe el acimut sin este componente empírica? ¿Es posible no preocuparse de este componente cuando se realiza un proceso de medición real con alumnos, teniendo en cuenta que en las ciudades o en los espacios abiertos siempre existe el relieve?

Boero (1995) afirma que la medida de los ángulos sobre cualquier plano con inclinaciones distintas tiene problemas similares. En lo que concierne a una visión más propia de la matemática es así. Pero, sin embargo, en este trabajo nosotros hemos encontrado que los ángulos más utilizados por la astronomía observacional, al menos en su relación con la educación, tienen problemas de naturaleza distinta según se trate de la determinación del acimut o de la altura.

Podríamos decir que nuestro trabajo, a pesar de estar relacionado con el realizado por Boero, focaliza aspectos más específicos en el proceso de conceptualizar los ángulos, ya que analizamos situaciones más complejas, como lo son los ángulos en un proceso de medición de posiciones astronómicas. Consideramos entonces que la afirmación de Boero es muy adecuada para la determinación de la altura, aunque difiere de nuestras conclusiones en lo que respecta a la determinación del acimut.

Es muy interesante notar que en otras especies animales (ballenas, abejas) existe una cierta «predisposición» biológica (la detección del campo magnético terrestre) que permitiría que esta dificultad en la determinación del acimut no existiera; en el caso de los seres humanos, generalmente sólo contamos con la posibilidad de detectar la dirección local de la gravedad, y de ahí nuestros problemas en la determinación de ángulos sobre planos perpendiculares a esta dirección fundamental para la astronomía de posición.

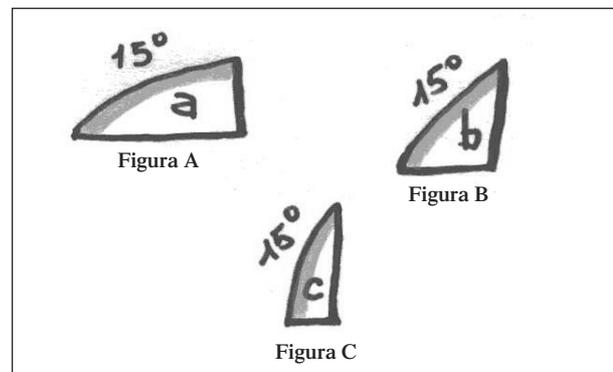
Por esto, es posible afirmar que para los humanos el espacio físico (2D) sobre el plano horizontal es isótropo,

no así el espacio físico (3D) que incluye la vertical al plano horizontal.

Nuestra sensación de verticalidad está asociada ya no a la dirección local del campo gravitatorio (\vec{g}) (que no detectamos en realidad) sino a que nuestros fluidos céfalo-raquídeos materializan una equipotencial del campo gravitatorio y entonces materializan de alguna manera el plano de referencia horizontal astronómico (al estilo de las cubetas con mercurio utilizadas en algunos instrumentos astronómicos clásicos, como por ejemplo el Astrolabio de Danjon). A este respecto, la gravedad sería un «primitivo», esencial a la experiencia básica y concreta del ser humano, una de las primeras dificultades pedagógicas, en general no tomadas en cuenta en la didáctica de las posiciones astronómicas, dando por hecho el isomorfismo entre espacio geométrico y espacio físico. Este isomorfismo no es percibido como tal por el ser humano y, dado que éste forma parte del instrumento astronómico utilizado, las mediciones de ángulos necesarias para las coordenadas acimut y altura contienen distintas dificultades procedimentales, entre otras, para su determinación.

Si bien es cierto que, como muchos autores lo afirman, consideramos que una de las fuentes más importantes de dificultades es el sentido común (Bachelard, 2000; Brousseau, 1983; entre otros), llamamos la atención aquí a una fuente quizás previa, anterior a la experiencia intelectual de acercamiento y producción de conocimiento: el propio aparato sensorial, perceptivo, del ser humano⁹.

Los dos ángulos del acimut y la altura son distintos y difíciles de percibir y de conceptualizar; ambos, participan en el mismo fenómeno (la determinación de una posición en el cielo) en forma combinada. Por ejemplo, cuando se dice «el Sol se traslada 15° por hora», esto quiere decir que «el Sol se desplaza 15° a lo largo del arco de su trayectoria diurna observada desde la Tierra en un intervalo de una hora». Pero tal desplazamiento angular tiene dos componentes que por lo tanto difieren considerablemente entre sí en los distintos momentos y en las distintas latitudes geográficas. A las latitudes de $\pm 42^\circ$ (aproximadamente las de Roma y Esquel), cerca del mediodía, se da la situación de la figura A, mientras que hacia el alba o la puesta se da la situación de la figura C, pasando en las horas intermedias por la situación de la figura B.



REFLEXIÓN DIDÁCTICO-CULTURAL

Al diseñar una actividad de observación del cielo, tanto diurno con instrumentos como el horinomo o en todo momento del día con instrumentos como el sextante, es importante tener en cuenta que los estudiantes deberán trabajar en un espacio físico en el cual no da lo mismo determinar los distintos ángulos necesarios para dar la posición de un objeto en el cielo. En particular, la determinación de la altura y del acimut lleva implícitas distintas dificultades, relacionadas las más profundas con la no isotropía del espacio debido principalmente a la dirección de la gravedad local y en menor medida con el relieve sobre el cual los estudiantes estarán trabajando.

Esta dificultad es propia no sólo de las características del espacio físico, sino fundamentalmente de la constitución física del cuerpo humano; por esta razón, el problema estudiado en el presente trabajo es independiente de la edad de las personas que midan ángulos en el cielo, tomando sí diferencias quizás sustanciales en la didáctica del proceso educativo que se desarrolle con los distintos grupos etáreos.

Asimismo, no hemos encontrado en nuestro trabajo sesgo alguno debido a las distintas culturas de los dos grupos que participaron de esta investigación, lo que es un resultado esperado por nosotros ya que las dificultades citadas en la determinación de los ángulos (A,h) son propias del ser humano y no de su desarrollo social.

Podemos afirmar, entonces, que los dos grupos de jóvenes que participaron en nuestro estudio (adolescentes de Canopus y jóvenes adultos del grupo italiano) presentan prácticamente las mismas dificultades en el aprendizaje del proceso de medición de los ángulos necesarios para dar posiciones en el cielo, especialmente en la coordenada acimut.

Este resultado llama la atención de los educadores hacia la necesidad de diseñar estrategias didácticas específicas para el trabajo con los sistemas de posicionamiento astronómico, en especial del Sistema Horizontal Astronómico debido a que es el sistema de coordenadas más ligado a la experiencia sensible cotidiana de los observadores del cielo.

Cabe destacar que la necesidad de determinar una dirección arbitraria para recién entonces poder medir el acimut ha sido resuelta de muchas maneras distintas a lo largo de la historia, como por ejemplo en las construcciones megalíticas en las que se ubicaba una apertura o una gran roca para determinar una línea de referencia.

Por otra parte, y como consecuencia de la relación profunda que constituyen espacio y tiempo, existen distintos tipos de relojes de Sol cuyo funcionamiento está determinado «por acimut» (aunque el Sol esté en el cielo, sólo funcionan cuando éste ocupa un cierto intervalo acimutal), como por ejemplo los relojes verticales, o bien los que se diseñan «por altura» (funcionan entre la salida y la puesta del Sol, independientemente del valor del acimut de éste), como los analemáticos, los horizontales,

los ecuatoriales, la esfera armilar y el «globo terráqueo paralelo» (Lanciano, 2002).

Por último, cabe destacar que en general el trazado geométrico de la mayoría de las ciudades modernas, su organización espacial, y el diseño de los edificios y otros lugares públicos se realiza también «por acimut», siendo la dirección de referencia más habitual la línea NE-SO (en forma similar fueron diseñadas algunas ciudades mayas, utilizando la dirección hacia la puesta de Venus como eje de referencia acimutal para la edificación de templos y otros edificios importantes).

COMENTARIO FINAL

¿Cómo puede solucionarse en lo astronómico el problema de que en la definición del acimut el origen de referencia para su determinación sea arbitrario y dependiente, en el proceso de su medición, de lo que percibe el observador?

En general se recurrió a la definición de un sistema de referencia externo, no relativo a la posición topocéntrica, denominado Ecuatorial Absoluto, cuyas coordenadas son la Ascensión Recta (α) y la Declinación (δ). Estas dos coordenadas son también ángulos, conceptualmente idénticos a los anteriores acimut y altura; sin embargo, el problema del acimut se soluciona de alguna manera en este nuevo sistema tomando como dirección privilegiada aquella que se dirige desde el observador hacia el punto Aries (γ), nodo ascendente de la eclíptica (punto de la línea de intersección entre los planos de la eclíptica y el ecuador celeste, en el que la Tierra en su traslación pasa del sur al norte de su órbita), dirección que es común (por externa y propia del mega espacio) a todos los observadores del planeta.

¿Podrá solucionarse este problema desde la didáctica de la astronomía, a los fines del aprendizaje del proceso de determinar posiciones en el cielo?

Para corregir esta situación la condición necesaria es contar con una referencia:

– que puede ser portátil, como por ejemplo la dirección norte-sur magnética dada por la brújula, u otra dirección establecida como referencia, haciendo la salvedad de que la dirección magnética no es de la misma «clase» que las direcciones astronómicas, por lo que es necesario corregir la dirección de referencia por el valor que en cada ubicación geográfica tenga la denominada «declinación magnética»;

– o ligada a la posición topocéntrica del observador que de nómada (que puede hacer cada observación en un lugar diferente) se transforma en sedentario y fija un mismo lugar para todas sus observaciones. En este sentido son trascendentales los métodos que permiten determinar la meridiana (línea norte-sur) en el lugar de observación, métodos que utilizan las sombras de varillas verticales para determinar, por simetrías espacio-temporales, la por-

ción de aquella línea que permite establecer la dirección «privilegiada» para el origen del acimut. Tales métodos, algunos con mayor carga socio-cultural (Círculos Hindúes) o con elementos científicos (método de las alturas iguales), fueron utilizados desde la antigüedad por egipcios, mayas, celtas, etc., en la búsqueda de un sistema de referencia que les permitiera construir pirámides, templos y megalitos con anclaje en los fenómenos astronómicos que tenían para ellos significación religiosa o mítica, hasta nuestros días por astrónomos en observatorios.

Por último, es también importante resaltar que todo fenómeno físico, sin excepción, sucede indisolublemente en el espacio-tiempo. Es decir, aunque siguiendo la concepción newtoniana de espacio y tiempo absolutos ambas dimensiones puedan ser consideradas independientes, es fundamental comprender que su independencia no significa separabilidad, lo que produciría no poder comprender adecuadamente la naturaleza y evolución de los fenómenos bajo estudio, y consecuentemente limitaría significativamente los aprendizajes posibles de construir.

En el caso estudiado, la determinación de altura y acimut, si se pierde la conexión espacio-temporal se hace difícil la comprensión de la noción de ángulo, más cuando los ángulos están en un contexto físico que implica planos distintos del espacio 3D.

Podríamos afirmar entonces que en el estudio del cielo el ángulo es un elemento fundamental de conexión entre la dimensión espacial y la temporal, y se materializa en el mega espacio astronómico con la necesidad de un importante esfuerzo de imaginación y abstracción por parte de los estudiantes, por lo que entonces este concepto debe ser trabajado desde la didáctica de la astronomía con mayor atención que si sólo fuera un elemento de la geometría euclídea en el micro espacio de la hoja de papel.

AGRADECIMIENTOS

Los autores queremos agradecer a los muchos estudiantes argentinos e italianos que hicieron posible la presente investigación, y especialmente a la Dra. Enrica Giordano por su lectura crítica y sus valiosos comentarios a las distintas versiones de este artículo.

Asimismo, queremos agradecer a Cristina Terminiello por su ayuda al tomar las fotos de este trabajo.

NOTAS

¹ La tercera coordenada, la distancia al objeto, no puede determinarse por medios sencillos (directos), por lo que todos los objetos son posicionados a partir de su proyección sobre el «telón de fondo» del cielo. Se define entonces la «esfera celeste», en forma arbitraria, como una esfera imaginaria de radio $r=1$, sobre cuya superficie interior se proyectan los astros visibles a simple vista (y por extensión todo objeto astronómico). Esta proyección produce, en particular, la aparición de «figuras», las constelaciones, imaginadas como si las estrellas que las forman estuvieran una al lado de la otra y no a enormes distancias entre sí.

² En esta definición «de primer orden» se considera a la Tierra como una esfera perfecta y homogénea, y se desprecia la desviación de la línea de la plomada producida por la rotación terrestre. Si así fuera, la vertical astronómica de una cierta posición topocéntrica pasaría por el centro de la Tierra, lo que en realidad no sucede.

³ Podríamos decir que la única dirección en el espacio 3D que es, de alguna manera, percibida por el observador es aquella que une al objeto en el cielo con el ojo de la persona: el rayo de luz, en el instante de la observación. Tal dirección, matemática también aunque con cierta «materialidad», ayuda directamente a la determinación de la altura pero no a la determinación del acimut.

⁴ Yendo aún más lejos, se podría decir que si un espacio se considera homogéneo cuando todos sus puntos tienen las mismas propiedades, un espacio centrado en el sujeto, como lo es en el que suceden los fenómenos percibidos por el ser humano, no sería homogéneo, ya no por tener direcciones privilegiadas sino por estar referido antropocéntricamente (similar al espacio no homogéneo del antiguo modelo de universo aristotélico).

⁵ Debe quedar claro que, en el presente trabajo, uno de los aspectos del contexto educativo sobre que estamos llamando la atención es aquello que diferencia a un observador para la física (un concepto abstracto, una terna de ejes espaciales y un reloj) de una persona que observa, quien en definitiva es el protagonista de los trabajos de naturaleza didáctica en las aulas: el primero es puramente instrumental, no humano; el segundo es un humano que percibe y está involucrado en lo que mide. Comprender cómo pasar de uno al otro es quizás recorrer la historia de la física y de la epistemología, pero en ningún caso debe darse por supuesto que son equivalentes ni dar por hecho de qué observador se habla cuando se realizan mediciones en un contexto de enseñanza.

⁶ Aquí nuevamente cobra importancia el concepto de *esfera celeste*: podría ser definida como el referencial más externo posible de ser imaginado. Así, y aún sabiendo que todo en el Universo está en movimiento con respecto a algún sistema de referencia, podríamos considerar que siempre será posible encontrar algunos objetos, para los intervalos de tiempo de los fenómenos astronómicos bajo estudio, que podrían ser considerados «fijos» con respecto a la esfera celeste.

⁷ Es interesante notar que lo anterior incluye, tácitamente, una definición de ángulo con la acepción de «cantidad de giro» (Casas García, Luengo González, 2005), lo que pone en evidencia que una de aquellas dificultades antes citadas es la capacidad de abstracción para imaginar ángulos en el mega espacio, cuyos lados son muy largos, casi infinitos (tal como lo son en la definición matemática) pero muy distintos de aquellos con los que se trabaja habitualmente en el micro espacio de la hoja de papel.

⁸ Cabe destacar que, en general, la utilización del Sistema de Coordenadas Polares como así también el trabajo geométrico en el espacio R^2 , especialmente con figuras no rectilíneas como el círculo, y en el espacio R^3 , especialmente con la esfera, han sido prácticamente eliminados en el desarrollo de contenidos en la escolarización básica.

⁹ Un ejemplo aún más evidente a este respecto podría ser el siguiente: cuando tratamos en nuestras clases de física el concepto de *luz polarizada*, nos encontramos con serias dificultades para que los estudiantes comprendan sus características, formas de producción, aplicaciones, etc. Es muy difícil de imaginar que existe a nuestro alrededor más luz de la que vemos. Sin embargo, una abeja no tendría dificultad en «imaginar» el fenómeno en cuestión ya que su sistema de percepción detecta luz polarizada y, si fuera a la escuela, «sólo» debería enfrentar dificultades específicas relacionadas con el aprendizaje de las características físicas y tecnológicas de la luz polarizada. A estos insectos la determinación del acimut no les representa mayores dificultades, al menos en relación con la determinación de la altura, por ejemplo del Sol.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BACHELARD, G. (2000). *La formación del espíritu científico*, México: Siglo XXI Eds., 23ª ed.
- BERTHELOT, R. y SALIN, M.H. (1992). «L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire», Thèse Université Bordeaux 1.
- BOERO, P. et al. (1995). Some aspects of the construction of the geometrical conceptions of the phenomenon of the Sun's shadows. *PME*, 19(3), pp. 3-10.
- BROUSSEAU, G. (1983). *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématique, Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4-2, pp. 165-198. Una traducción al español puede encontrarse en <<http://fractus.mat.uson.mx/Papers/Brousseau/ObstaculosBrousseau.htm>> y en <<http://www.sectormatematica.cl/articulos.htm>>.
- CAIANI, C., LANCIANO, N. y RAPPOSELLI, G. (1994). Spazi grande e tempi lunghi: l'Astronomia nella scuola elementare, en *Le chiavi di Vetro: per una formazione scientifica di base*. Florencia: Quaderni di Cooperazione Educativa, La Nuova Italia Ed.
- CAMINO, N. (2004). *Resultados del Proyecto Canopus*: <<http://www.plaza-del-cielo.org/inveseducatiproyeEGBcanopus.htm>>.
- CASAS GARCÍA, L. y LUENGO GONZÁLEZ, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo, *Enseñanza de las Ciencias*, 23(2), pp. 201-216.
- DOUEK, N. (1998). Analysis of a long term construction of the angle concept in the field of experience of sun shadows». *PME*, 22(2), pp. 264-271.
- FEINSTEIN, A. y TIGNANELLI, H. (1999). *Objetivo Univer-so*. Buenos Aires: Ediciones Colihue.
- GARCÍA CRUZ, C.M. (1998). De las dificultades epistemológicas a los conceptos estructurantes: una aproximación a la enseñanza-aprendizaje de la Geología, *Enseñanza de las Ciencias*, 16(2), pp. 323-330.
- LANCIANO, N. (1996). Revisión de la tesis de doctorado, «Análisis de las concepciones y de las observaciones en clase: instrumentos para la definición de los objetivos educativos y de las estrategias pedagógicas para la enseñanza de la Astronomía en la Escuela Elemental en Italia». Universidad de Ginebra.
- LANCIANO, N. (2002). *Strumenti per i giardini del cielo*, Italia: Ed. Junior, Quaderni di Cooperazione Educativa.
- LANCIANO, N. (2006). Problemi di linguaggio verbale, grafico e gestuale nelle rappresentazioni geometriche di fenomeni naturali, *Progetto Alice*, VII (20), pp. 287-313.
- MAIZTEGUI, A. y GLEISER, R. (1980). *Introducción a las Mediciones de Laboratorio*, Buenos Aires: Editorial Kapelusz.
- MERLE, N. (1994). «Utilisation d'un mini-planetarium dans l'acquisition du concept de mouvement diurne au cours moyen», DEA de didactique des disciplines scientifiques, Université Montpellier II.
- MORIN, E. (1994). *Complejidad humana*, Edit. Flammarion.
- NUSSBAUM, J. (1990). Astronomy teaching: challenges and problems, *Actas IV International Conference Teaching Astronomy*, España, pp. 25-36.
- PIAGET, J. (1971). *La epistemología del espacio*. Buenos Aires: Ed. El Ateneo.
- ROEDERER, J. (2002). *Mecánica Elemental*, Buenos Aires: EUDEBA.
- VIVES, T. (1971). *Astronomía de posición. Espacio y Tiempo*. Madrid: Editorial Alambra S.A.

From the angle of geometry to angles in the sky. Obstacles for the conceptualization of astronomical coordinates.

LANCIANO, NICOLETTA¹ y CAMINO, NÉSTOR²

¹ Dipartimento di Matematica, Università La Sapienza, Roma, Italia

² Complejo Plaza del Cielo. Departamento de Física. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Esquel, Chubut, Argentina
nicoletta.lanciano@uniroma1.it
ncamino@ciudad.com.ar

Abstract

In this paper we report a discussion about the learning difficulties related to the definition and measurement of angles in physical (3D) space, which determination is required to give positions on the celestial sphere.

Azimuth and Altitude are both angles required to fix a celestial body's position in the sky (the third coordinate, Radius, is defined as 1 in the Celestial Sphere and is not considered here).

Both coordinates have an intrinsic difference in their physical nature: Altitude refers to the horizontal plane, which is a materialization perpendicular to local gravity; Azimuth refers to a conventional origin, an arbitrary direction in the horizontal plane without any relationship to gravity or any other physical property of space-time.

Human beings can indirectly detect local gravity direction by means of equilibrium sensors in our head, but we don't have any means, direct or indirect, of determining a referential direction in horizontal plane, unlike, for instance, bees (polarized light) or whales (Earth magnetic field).

So, the «human» (not mathematical) requirements to measure a star's Altitude are simpler than the requirements to measure its Azimuth. In the former, the fundamental reference is given by our physiology, in the latter, it is not.

For these reasons, we discuss in this paper in particular, the didactical and conceptual difficulties associated with the determination of both coordinates. We analyze data obtained from personal interviews, group classes and personal drawings developed by students from Argentina and Italy, of various ages: 15-17 years old and 19-24 years old, young adults from the university and future teachers.

In this research we have found that:

– A simple sextant as the instrument for the determination of both coordinates has shown its simplicity and didactical usefulness, allowing our students to comprehend the physical and conceptual sense of Altitude and Azimuth. An even simpler instrument, the «Horinomo» (the own

body and the longitude of its shadows measured in feet units), showed similar usefulness.

– There're no specific obstacles in learning how to measure Altitude; furthermore, it is very simple for most of the students, with the exception of the condition of verticality of the plane in which Altitude is defined, which was difficult to imagine for some young students.

– Many students had related difficulties in imagining the visual between the eye and the celestial object.

– The measuring process, in general, not only of astronomical magnitudes, is an obstacle in any activity developed in order to quantify space and time variables.

– The main difficulty in measuring Azimuth is the lack of an external, «absolute», direction in 3D space.

– The imagination and materialization of the 360° visible horizon as a mathematical plane, as required for the measuring process of both coordinates, was a difficulty as well.

– We can conclude that it is possible, in a teaching context, to affirm that the 3D space is not isotropic (because of the direction of local gravity) as is required by Euclidean geometry and for the definition of the angles utilized in the Local Horizontal System of Astronomical Coordinates Azimuth and Altitude. This anisotropy is the main source of difficulties in the learning of Azimuth.

– There's no cultural or age related bias in the difficulties of learning the measuring process of both coordinates, Altitude and Azimuth.

We recommend that one of the best ways to improve the learning of the measuring process, in a teaching context, to fix a celestial object in the sky by means of the local coordinates Azimuth and Altitude is the discussion in the classroom of the results we have presented above, and to develop an actual and systematic measuring process of both coordinates, in real time, night by night, by small teams of students. So, the conceptualization of Azimuth and Altitude could be a process not only developed by individuals but by group of peers, who will be able to discuss the adequateness of mathematical definitions to the actual experiences in 3D space and time.

