ANÁLISIS DE SECUENCIAS DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO DESDE LA PERSPECTIVA DE LA GESTIÓN DE LA PARTICIPACIÓN

Carrillo, José[1], Climent, Nuria[1], Gorgorió, Núria[2], Prat, Montserrat[2] y Rojas, Francisco[2(*)]
[1] Universidad de Huelva
[2] Universitat Autónoma de Barcelona)
carrillo@uhu.es
climent@uhu.es
nuria.gorgorio@uab.es
montserrat.prat@uab.es
franciscojavier.rojas@uab.es

Resumen. El aula de matemáticas puede ser objeto de análisis desde muy diversas perspectivas. En este artículo se estudia la gestión de la participación de los alumnos en los procesos de aprendizaje relacionados con el contenido matemático. Para ello desarrollamos un instrumento de análisis y mostramos su utilidad aplicándolo a una sesión sobre polígonos. Nos centramos en cómo la maestra promueve procesos de responsabilización, comunicación y validación.

Palabras clave. Gestión de la participación, aprendizaje matemático.

Analysis of mathematics learning sequences from the participation management perspective

Summary. The mathematics classroom can be analysed from many perspectives. In this paper the focus is on the pupils' participation management in the mathematics learning processes. For this we developed an analytical tool and showed its application on a lesson on polygons. We looked at the way the teacher promotes processes of responsibilisation, communication and validation.

Keywords. Participation management, mathematical learning.

1. MARCO DE REFERENCIA

La complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje propicia una gran variedad de perspectivas de análisis. Aquí nos centramos en el estudio de secuencias de aprendizaje matemático, y lo enfocamos desde las estrategias que pone en juego una maestra para promover la participación de sus alumnos en las tareas del aula.

Si bien el término *participación* puede tener muchas interpretaciones, nosotros usamos el enfoque de Wenger (1998) entendiendo que «la participación no sólo se refiere a los eventos locales de compromiso con ciertas actividades y determinadas personas, sino también a un proceso de mayor alcance consistente en participar de una manera activa en las *prácticas* de las comunidades sociales y en construir *identidades* en relación con estas comunidades» (p. 22, énfasis en el original). Por otra parte, consideramos que las interacciones producidas dentro del aula están mediadas por el tipo de práctica que se realiza en ellas, la cual está referida a la matemática escolar. Sin embargo, diferentes comunidades desarrollarán diferentes prácticas, ya que éstas son contextuales y se ven influenciadas por las valoraciones de la práctica matemática del aula que hacen profesor y alumnos.

La participación se considera la manera en que nos proyectamos en el mundo, y se caracteriza por la posibilidad de reconocimiento mutuo. Nos preguntamos cómo se concreta esto en el aula de matemáticas. Entendemos la participación matemática como las contribuciones que el alumno realiza cuando se propone una actividad, que se discute o resuelve colectivamente, en busca de significados matemáticos, siempre que exista una implicación cognitiva del alumno en esa tarea matemática y una mínima capacidad comunicativa (Gorgorió y Prat, en prensa, 2008). Las autoras añaden que estar implicado cognitivamente y ser competente en el lenguaje son condiciones necesarias, pero no suficientes. El profesor y los demás estudiantes del grupo deben abrir espacios para que se den las contribuciones.

Nuestro interés en el estudio de la gestión de la participación está motivado por nuestro posicionamiento en relación con el aprendizaje. Entendemos que el aprendizaje está caracterizado por la existencia de procesos sociales, internos y externos al aula, por lo que la negociación de significados matemáticos se realiza en el contexto de la actividad, desempeñando un papel esencial la participación del alumno en las actividades del grupo y la actividad discursiva (Van Oers, 1996). Asimismo, concebimos el aprendizaje como un aspecto inseparable de la práctica social (Lave y Wenger, 1991), como una participación social (Wenger 1998).

Sin embargo, en un reciente estudio respecto del aula de matemáticas como comunidad de práctica (Prat, 2007) hemos encontrado que bajo esta idea no se explicitan como requisito los aspectos reflexivos sobre las prácticas. Wells (2001) distingue las comunidades de práctica de las de indagación, enfatizando en éstas el «metaconocer mediante la reflexión sobre lo que se construye […] y sobre los instrumentos y las prácticas implicadas en el proceso» (p. 139). Por su parte, Jaworski (2006) añade a esta noción el hecho de que las prácticas están definidas por actividades de indagación. La comunidad de indagación implica reciprocidad entre la comunidad de práctica y sus actividades de indagación como parte de la práctica y del desarrollo de la práctica.

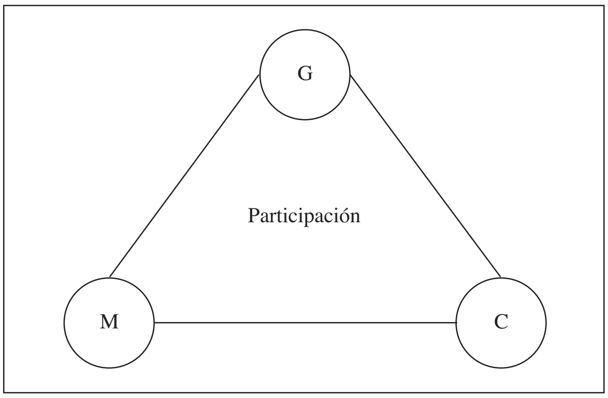
Para Elbers (2003), la indagación en el aula de matemáticas inicia al estudiante en el discurso matemático, aprendiendo qué es lo importante en matemáticas y qué significa matematizar, y en el desarrollo de una comprensión inicial de cómo se construyen las hipótesis matemáticas y qué argumentos son apropiados en este contexto. Las nociones de indagación y comunidad de indagación describen el aprendizaje en términos de una construcción «activa» del conocimiento matemático, lo cual requiere de una implicación personal, priorizando así la participación, la construcción del conocimiento y la integración del alumno en la comunidad.

Elementos constitutivos de la participación

Para el estudio de la noción de *participación* dentro del aula, distinguimos tres aspectos íntimamente ligados: su contenido, su modo y su gestión por parte del profesor. Aclaramos su significado con un ejemplo: un alumno puede participar en la actividad matemática del aula proponiendo una solución a un problema. Dicha solución sería el contenido de la participación. Ahora bien, el alumno, al proponer una solución al problema, puede hacerlo a instancias del profesor, o tras levantar la mano y darle éste la oportunidad, o haberlo hecho dentro de su grupo. Es decir, el alumno puede participar de diversos modos o formas. La gestión de la participación consiste en la organización de los distintos modos que toman las contribuciones.

En la imagen 1 presentamos el triángulo de participación (TP) que muestra los aspectos anteriores. G indica gestión, M, modos, y C, el contenido de la participación.

Imagen 1
Triángulo de Participación (TP).



Consideramos el triángulo equilátero para poner de manifiesto que damos igual importancia a los tres vértices; sin embargo, al elegir una determinada presentación (en este caso, el vértice G arriba), orientamos su descripción. Del mismo modo podemos referirnos a los lados del triángulo, ya que hacen referencia a las relaciones entre los distintos aspectos. MC representa la interacción entre cómo el alumno participa y las contribuciones que él pone en juego. GM da cuenta de la interrelación entre la gestión por parte del profesor y las formas en que los alumnos contribuyen. Finalmente, GC refleja cómo la gestión incide en el contenido de la participación de los alumnos y cómo, a su vez, se adapta a éste.

El TP resulta interesante en tanto que facilita la visualización de un sistema complejo que nos permite analizar las interacciones entre contenido, modo y gestión, es decir entre individuos, sus contribuciones y las formas en que se producen y se facilitan. En particular, en este artículo el TP adopta la estructura presentada pues emerge del interés por estudiar la gestión de la participación por parte del profesor en función de la interacción entre modo y contenido. En otras palabras, nos interesa analizar la influencia de la gestión de la participación en el aprendizaje del contenido matemático en los alumnos.

Dimensiones para el análisis de la gestión

Para hacer manejable el análisis de la gestión de la participación matemática, consideraremos tres dimensiones que se interrelacionan: responsabilización del aprendizaje, comunicación promovida y validación del conocimiento. Nos interesa observar la responsabilización del aprendizaje, en tanto que la participación requiere una implicación cognitiva por parte del alumno en el momento de «depositar» sus argumentaciones en la conversación colectiva. Estudiamos estos momentos a partir de la idea de *comunicación promovida*, que está íntimamente ligada a la apertura de espacios para hacer posibles las contribuciones y que los significados sean compartidos. A su vez, la validación del conocimiento es necesaria para que los significados matemáticos construidos sean los pertinentes. La validación es inseparable del proceso de negociación. A demanda del profesor, la implicación cognitiva, manifestada a través de la expresión pública de las argumentaciones personales, pasa del nivel individual al colectivo en un proceso que entraña una determinada responsabilización del aprendizaje. La gestión de la participación ha de facilitar los procesos que van desde una comunicación unidireccional hasta una en que los procesos reflexivos se hagan evidentes. Del mismo modo, será la gestión del profesor lo que dé el protagonismo de la validación del conocimiento.

Cada una de estas dimensiones presenta ciertos niveles que nos permitirán hacer matizaciones en el análisis de la gestión de la participación. En relación con la responsabilización, la implicación cognitiva del estudiante en las actividades matemáticas puede presentar distintos grados (transmisión, cesión de responsabilidad, corresponsabilización), ligados a diferentes demandas por parte del profesor a sus alumnos. En las situaciones de mera transmisión, el alumno es un receptor pasivo del contenido aunque esté implicado cognitivamente. En las situaciones de cesión de la responsabilidad del profesor hacia el alumno, aquél hace que éste se cuestione sus respuestas, por ejemplo, partiendo de sus ideas previas y confrontándolas con el contenido expuesto. Se espera que el alumno explicite su implicación, comunicando sus significados. Cuando el profesor promueve un ambiente de corresponsabilización entre los estudiantes, los alumnos se cuestionan y responden entre sí, generando conjuntamente conocimiento compartido. De esta forma, los significados no son únicamente públicos, sino que circulan y se comparten. Es en estos momentos cuando cobra más sentido hablar de participación.

Obsérvese que codificaremos el primer tipo de responsabilización como *transmisión* (acción del profesor), en lugar de *receptor pasivo* (papel del alumno), debido a que el propósito es analizar la gestión, es decir, al profesor. Procederemos del mismo modo con las otras dimensiones.

La segunda dimensión que se establece para el análisis de la gestión de la participación matemática es la comunicación promovida. Ésta puede ser, según Brendefur y Frykholm (2000), unidireccional, contributiva, reflexiva e instructiva. La comunicación unidireccional es la existente cuando el profesor explica y formula preguntas cerradas, sin dar lugar a que los alumnos comuniquen sus ideas. La contributiva, en cambio, consiste en interacciones entre alumnos o entre éstos y el profesor de modo que se preste ayuda o se comparta algo, habitualmente sin entrar en profundizar y teniendo un interés de naturaleza correctiva. La comunicación reflexiva añade a las interacciones de la contributiva el empleo de las conversaciones matemáticas como detonantes de exploraciones e investigaciones posteriores. Finalmente, la instructiva, además de lo anterior, pretende modificar la comprensión matemática de los alumnos, así como informar la instrucción subsiguiente. El análisis que sugieren Brendefur y Frykholm posibilita relacionar lo social (las interacciones) con lo cognitivo (contenido de la interacción) en función de las decisiones del profesor (su gestión). En nuestro caso, en sintonía con la caracterización de comunidad de indagación adoptada, asociamos la reflexión a la naturaleza de las investigaciones y exploraciones consideradas en la comunicación reflexiva. Asimismo, consideramos que la modificación de la comprensión es propia de las actividades de investigación. La comunicación instructiva sólo añadiría la posibilidad de informar la instrucción subsiguiente.

La tercera dimensión establecida para el análisis es la validación del conocimiento. Existen tres posibilidades, no necesariamente excluyentes, que guardan relación con quién ejerce la autoridad: que sea el profesor el único que valida lo aprendido; que sean el profesor y los alumnos; o bien que sean los propios alumnos. Esto no significa que el profesor pueda prescindir de la validación, sino que da el protagonismo a los alumnos. Distinguimos entre la validación del conocimiento y su institucionalización. Según Brousseau (1994), la institucionalización se refiere al establecimiento de alguna convención social en el sentido de alcanzar un significado institucional. Entendemos *validar* como admitir o consensuar algo de modo que permita progresar en el aprendizaje, por lo que incluye la negociación de significados en el proceso de aprendizaje, no su negociación como productos finales. El significado final producto de la negociación debe necesariamente ajustarse al significado institucional en el sentido de la existencia de un doble reconocimiento: el alumno reconoce la oficialidad de lo enseñado, y el profesor reconoce el aprendizaje del alumno. Validar es aceptar contribuciones que permiten avanzar hacia la institucionalización, independientemente de si son erróneas o no. El profesor puede validar algo de modo provisional en el caso de que sea erróneo. La validación, por tanto, se relaciona con el papel del error y el acierto. Nos interesa considerar también quién valida, dado que tiene que ver con la asignación de responsabilidades.

Cuando son los propios alumnos los que validan, la interacción que se establece entre profesor y alumnos es la que Tharp y Gallimore (1988) llaman conversación instructiva («discurso del aula que permite la co-construcción de significado entre profesores y estudiantes» (Forman, 1996, p. 118). Aunque las ideas de conversación instructiva de Tharp y Gallimore y la de comunicación instructiva de Brendefur y Frykholm hacen referencia a dimensiones distintas, ambas corresponden al nivel máximo de protagonismo por parte del estudiante dentro de la conversación matemática.

En la tabla 1 se muestra cada dimensión con sus respectivos niveles, a la vez que se presentan los códigos utilizados en el análisis.

Tabla 1
Dimensiones y códigos para el análisis de la gestión de la participación.

DIMENSIONES	NIVELES O TIPOS	CÓDIGO
Responsabilización del aprendizaje	Transmisión	RT
	Cesión de responsabilidad del profesor hacia el alumno	RPA
	Corresponsabilización	RC
Comunicación promovida	Unidireccional	CU
	Contributiva	CC
	Reflexiva	CR
	Instructiva	CI
Validación del conocimiento	El profesor	VP
	El profesor y los alumnos	VPA
	Los alumnos	VA

2. DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO Y RECOGIDA DE DATOS

Ana, la maestra de la sesión que analizaremos, tiene una experiencia de veinte años como maestra de primaria, si bien su formación inicial ha sido como maestra especialista en lengua española y francesa. Desde hace once años, trabaja en un colegio público, situado en Huelva capital en un barrio de nivel socioeconómico medio-bajo, en el que se siente a gusto. Ana es una maestra preocupada por buscar métodos alternativos para trabajar las matemáticas en el aula, en particular, por la enseñanza y el aprendizaje basados en la resolución de problemas. Enfoca la enseñanza de la matemática desde la perspectiva de la formación integral del alumno, preocupándose, entre otros aspectos, por su formación en valores, sin que esto le reste importancia al aprendizaje de los contenidos.

Éste es el tercer curso en que Ana es tutora de este grupo de alumnos de 4º grado de primaria. El grupo, en las sesiones de matemáticas, está compuesto por quince alumnos. Parece en general cohesionado a pesar de las diferencias significativas entre capacidades, conocimientos, hábitos y contextos de los alumnos. En las relaciones de aula se observa un clima de confianza, respeto y trabajo.

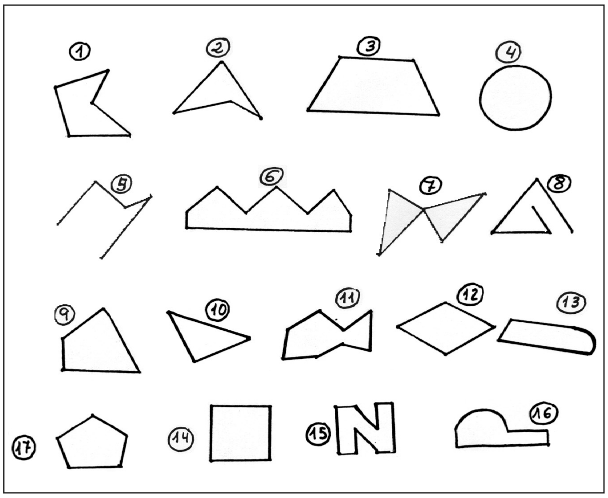
Las sesiones han sido observadas, y grabadas en vídeo, desde la parte trasera del aula, con el fin de poder captar la totalidad del escenario: los niños, dispuestos en forma de «U», y la maestra, que se mueve de forma permanente a través del espacio de aula. Además, se han recogido por medio de notas de campo aquellas observaciones sobre aspectos destacables que podrían no apreciarse en la grabación. Tras la grabación y visionado posterior, las sesiones son transcritas por la observadora, integrando comentarios de forma diferenciada de las notas de campo. Además de estas fuentes de información, hemos usado la planificación de la unidad y de las sesiones realizada por la maestra, así como las fichas preparadas para los alumnos y declaraciones de Ana tras la sesión. El aula de esta maestra ha sido observada a lo largo de todo el curso académico, lo que contribuyó a minimizar la interferencia de la investigadora en el desarrollo de la clase que presentamos.

La sesión que aquí analizamos forma parte de la última unidad didáctica del curso. En particular analizaremos la primera sesión de la unidad dedicada a los polígonos. Aunque en principio Ana tenía previsto dedicar sólo una sesión de matemáticas a este contenido (50 minutos), lo que surge en el aula le lleva a decidir continuar la discusión y el trabajo en sesiones posteriores.

3. DESCRIPCIÓN DE LA SESIÓN

La sesión se inicia con la explicación de la maestra acerca del objetivo del trabajo que realizarán: recordar qué es un polígono. Este contenido se trabajó el curso anterior siguiendo la estructura del libro de texto. Ahora, Ana tiene por objetivo retomar las ideas previas de los alumnos. A continuación, entrega a cada alumno una ficha con varias figuras dibujadas, de la cuales, según Ana, «*hay unas que son polígonos pero otras que no lo son*».

Imagen 2
Ficha de Polígonos.



Seguidamente, se explica la estructura del trabajo a realizar. En primer lugar, cada alumno individualmente ha de pensar si cada figura es o no polígono, anotando sus justificaciones. Luego, reunidos los alumnos en pequeño grupo, se han de compartir y discutir las anotaciones anteriores. En este proceso el alumno tendrá que intentar convencer de lo que piensa a sus compañeros de grupo, o aceptar ser convencido si los argumentos de éstos le hacen caer en la cuenta de que tienen razón. Finalmente se pondrá en común lo que cada grupo ha pensado y discutido.

Los alumnos comienzan a trabajar individualmente, tras recibir la instrucción de la profesora de seleccionar aquellas figuras de la ficha (Imagen 2) que crean que son polígonos. Mientras la profesora observa qué va haciendo cada uno de ellos, se percata de que son varios niños los que no recuerdan lo que es un polígono, por lo que evoca para todos la actividad realizada cuando clasificaron (en este curso) cuerpos geométricos, ya que uno de los criterios que usaron era que sus caras fueran polígonos. Cuando los alumnos finalizan el trabajo individual, Ana los dispone por parejas, enfatizando que la tarea a realizar en este periodo es «*comparar con el compañero cuáles son polígonos y cuáles no, comparando los argumentos. En el caso de que te convenza de alguno que no tenías antes, dejar marcadas ambas respuestas*».

Cuando todas las parejas dicen haber finalizado, se inicia la puesta en común de la actividad donde Ana comienza preguntando cuáles son las figuras en las que no ha habido acuerdo y se discuten las razones del desacuerdo en el gran grupo. Es ésta la parte de la sesión que más nos interesa desde nuestra perspectiva de análisis, pues en ella se puede observar cómo la profesora gestiona la participación de los alumnos, por lo que será en la que nos centremos en los apartados que siguen.

La estructura de la sesión obedece al objetivo fundamental de Ana (extraído de su planificación de la sesión) que es de orden conceptual. Pretende que, a partir del conocimiento que tienen, los alumnos construyan una definición de polígono. Sin embargo, también explicita en sus objetivos su interés por el propio proceso de construcción de la definición y los procesos que lleva asociada la construcción conjunta de significado matemático (construir justificaciones, argumentar, analizar argumentos, contrastarlos con los propios, consensuar ideas, etc.).

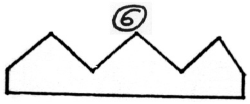
4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este apartado analizamos la puesta en común. Dividimos la sesión en episodios que nos permiten interpretar la gestión de la participación, en función de las dimensiones presentadas en el apartado 1. Para esto, presentamos la transcripción de cada episodio y posteriormente nuestro análisis, además de las contextualizaciones necesarias, para continuar con el episodio siguiente.

Tras el trabajo individual y en parejas, Ana comienza preguntando a los alumnos cuáles son las figuras en las que no se han puesto de acuerdo o presentan dudas. En los episodios 1 y 2 se discuten colectivamente las figuras 6 y 13 y 16, respectivamente, pues han resultado problemáticas para los alumnos. Por acuerdo entre los grupos se acepta la primera como polígono pero no las demás. Se discuten las características para que una figura sea polígono: tener lados, vértices y ángulos; ser cerrada; no tener «partes redondas». En el episodio 3 se realiza un repaso general de todas las figuras presentes en la ficha de trabajo.

Episodio 1:

Ana: *Entonces vamos a empezar directamente por ésas. Vamos a empezar primero por la 6. ¿Cuál es el grupo que tiene problemas con la seis?* [El grupo correspondiente levanta la mano]. *Vosotros, ¿quién ha puesto que es un polígono? Uno nos tiene que convencer de por qué no y otro nos tiene que convencer de por qué sí, ¿quién va a empezar?*
Ana: *¿Empiezas tú, Jesús?* [que tenía levantada la mano]. *Dinos a todos por qué piensas tú que es un polígono. Ahora escuchad* [mirando a unos niños que estaban hablando].



Jesús: *Yo pienso que sí porque tiene ángulos y está formada la figura, que no tiene ninguna parte que no esté pegando con la figura.* [Ana asiente con la cabeza].
Ana: *O sea porque está cerrada, porque tiene ángulos y...* [el niño indica con la cabeza que sólo por eso] *y ya está.* [A otro niño, que no es el otro del grupo, que parece no estar de acuerdo y empieza a decir algo]. *Bueno, déjalo, eso es lo que piensa él. ¿Y tú?* [al otro componente del grupo, Estefanía, que defiende que no es polígono].

No permite que un niño interrumpa la dinámica, lo que muestra su interés por que los alumnos expresen libremente sus ideas, que luego serán analizadas, pero primero serán respetadas.

Estefanía: *Yo he puesto que es que algunas líneas tienen un poco de espacio...*
Ana: *No te entiendo, ¿que está abierta, quieres decir?*
Estefanía: [Después de negar con la cabeza] *que la línea ésta* [señalando la de arriba del polígono], *que alguna da para la parte de abajo.*
Ana: *¿Y no puede dar para la parte de abajo? Creo que está diciendo que no son, los ángulos que se forman, no son todos hacia fuera* [y hace la señal con las manos], *sino que algunos son hacia dentro* [y hace la señal], *¿no? ¿eso es lo que tú dices?* [Estefanía asiente]. *Bueno, Jesús, ¿y qué es lo que tú dices?, ¿que sí puede ser o que todos los polígonos tienen que tener los ángulos hacia fuera? Tú crees que sí, ¿no?* [tras decir Jesús que sí]. *Vamos a ver lo que dicen los demás grupos.* [Señalando a un grupo] *¿este grupo qué dice?* [Tras decir las niñas del grupo que sí es polígono] *¿A pesar de lo que ha dicho Estefanía?* [El grupo dice que sí]. *¿Por qué?*

Las aportaciones de los alumnos se usan como detonantes de la reflexión de la clase, comenzando por preguntar a un grupo.

Ana repite las ideas expresadas por los alumnos, refinando su expresión, exponiéndolas de modo más claro o pidiendo a los alumnos que se expresen más claramente.

Lo observamos en su intervención tras la de Estefanía [*Creo que está diciendo que no son, los ángulos que se forman, no son todos hacia fuera…*] y en la unidad anterior tras la intervención de Jesús [*O sea porque está cerrada, porque tiene ángulos…*]. Es un modo de mediar en la conversación entre los alumnos, asegurándose de que se entiende lo que expresa el alumno y se puede seguir la discusión, lo que busca la implicación de todos. De esta forma, la maestra hace que los alumnos se cuestionen sus respuestas.

Se va incluso más allá al confrontar argumentos de respuestas contrarias. Ana hace que un alumno responda a otro, aunque no consigue el objetivo propio de la RC de que entre ellos generen un conocimiento determinado, al no haber una conversación directa entre los alumnos, sino una mediación continua por parte de la maestra. Es Ana la que confronta los argumentos opuestos, aunque sea el propio alumno quien argumenta en qué sentido su idea es opuesta a la de su compañero (o sea, éste también participa en la confrontación), implicándose en la exposición justificada de sus ideas, considerando las de sus compañeros y comparándolas con las propias. Para asignarle RC se requeriría una discusión entre los alumnos con menos intervención por parte de Ana; es por ello por lo que asignamos RPA.

La conversación matemática hace que el alumno profundice en el concepto implicado (*polígono*) y sus características relevantes, esgrimiendo razones a favor y en contra de los argumentos presentados, posibilitando de este modo que el alumno modifique su comprensión de la situación, características propias de CR. No podemos caracterizarla como CI dado que no poseemos información de la influencia en las siguientes lecciones.

Obsérvese, asimismo, que la maestra está organizando la construcción de la definición de polígono de modo que da algún protagonismo a los alumnos la validación. Podríamos hablar de cierto papel de los alumnos en la validación, al menos en procedimiento, aunque la asiduidad y modo de intervenir de la maestra podría llevar añadido (y/o así interpretarlo el alumno) una validación encubierta (VPA).

Las niñas del grupo: *Porque está cerrado, tiene lados, y rectángulos, y vértices...*
Ana: *¿Tiene que tener rectángulos?* [Las niñas dicen que no]. *Pueden tener los ángulos que sean, ¿no? O sea que vosotras decís que sí es un polígono, ¿y lo que ella ha dicho de los ángulos hacia fuera no importa?* [Las niñas indican que no]. *¿Y vosotros qué decís?* [Al grupo sentado al lado del anterior, que señala que también lo consideran polígono]. *¿Y tenéis alguna razón más de las que han dicho ellas?* [Repiten las razones anteriores y Ana les indica que eso ya lo había dicho el grupo anterior. Ana va preguntando a cada grupo, en el orden en que están colocados, y todos piensan que sí es polígono, por las razones que dijo el primer grupo].

Extiende la reflexión a toda la clase. No se conforma con que sean uno o dos grupos los que construyan la caracterización de polígono.

Ana: *Pues entonces* [dirigiéndose a Estefanía] *hasta ahora es lo que piensan todos, que el que tenga dos lados así* [y representa con las manos un ángulo cóncavo] *no importa para que sea un polígono. Lo importante es que tenga lados, que tenga ángulos, que tenga vértices, ¿no?, y que esté cerrada, han dicho por ahí también, que esté la línea cerrada.* [Los niños asienten]. *Y ésa cumple todas esas condiciones, así que quedamos entonces en que la 6 es un polígono.*

Se concluye que la figura 6 es un polígono dado que todos los alumnos salvo una así lo consideran. Por tanto, parece claro que el alumno tiene un papel importante en la validación. Se pone de manifiesto un proceso de negociación de significados. Los alumnos se ven implicados en una forma de aprender basada en compartir significados que ellos mismos atribuyen a los objetos matemáticos. Por otra parte, la maestra es la que sintetiza todas las aportaciones y cierra la validación, es la que tiene la última palabra, lo que nos lleva a caracterizar esta situación como VPA.

Episodio 2:

Ana: *Bueno, pues entonces pasamos a la problemática, que era la 13, y después a la 16. ¿Cuál era el grupo que tenía problemas con la 13?* [Levantan la mano Jose y Miriam. Ana les pregunta quien es el que piensa quien sí y cuál que no, y les dice que intenten convencer a los demás]. *A ver, por ejemplo Miriam.*

Miriam: *Yo digo que sí es un polígono porque tiene lados y que tenga una parte redonda no importa.*
Ana: *Bueno, pues ya la habéis oído* [y repite el argumento de Miriam].
Miriam: *Si fuera entera redonda entonces no sería polígono.*
Ana: *¡Ah! Si fuera entera no sería polígono pero si tiene una parte de lados y de vértices sí es un polígono. ¿Y Jose qué dice?* [dice que no con la cabeza]. *Y él dice que no por la curva. Vamos a ver qué dicen los demás grupos.* [Va preguntando grupo por grupo y dicen que no puede tener curvas]. *No puede tener curvas, sólo puede tener ángulos, vértices... pero curvas no, ¿no?* [Todos los niños dicen estar de acuerdo en esto, incluso alguno que antes pensaba que lo era pero ahora dice no estar seguro por la parte curva. Un niño señala que este argumento ya sirve para la figura 16].
Ana: *Ya nos sirve para la 16, claro está, porque la 16 también tiene parte curva. Así que quien haya dicho aquí que no es un polígono, ese mismo razonamiento le tiene que servir para la 16, es que ellos tienen dudas en las dos figuras* [el grupo de Jose], *pero los demás grupos no, ¿no?, ¿hay algún grupo que tiene dudas en la 16?, ¿cuál es el grupo?*
David: *Nosotros, pero en el momento que habéis dicho lo del otro ya hemos dicho que no.*
Ana: *Entonces os habéis convencido de que no puede ser que tenga una parte curva y que por otro lado tenga picos y tenga lados, ¿no? No puede ser.* [Los niños dicen que no]. *Pues entonces quedamos en eso.*

Se desarrolla un proceso análogo al de la figura 6, ahora con la figura 13, asociando también la 16. Al igual que antes, se aprecia RPA (cercano a RC, como comentamos en el análisis ligado a la Figura 6), rasgos propios de CR (como también fue comentado anteriormente) y VPA. En cuanto al conocimiento matemático, observamos que la maestra promueve llegar a caracterizaciones de polígono, no a una definición formalmente construida. En realidad, se trata de una reconstrucción de la idea de polígono, pues este contenido se había impartido el curso anterior.

Ana: *Miriam, entonces parece que los demás no están de acuerdo contigo, ¿no te han convencido?* [parece que no está muy convencida] *¿no te están diciendo que un polígono tendrá lados, tendrá ángulos, tendrá vértices, tendrá la parte interior, la superficie* [y señala con la mano como rozando lo de dentro de una figura], *pero que no tiene curvas?* [Una niña indica que si tiene curvas no puede tener ángulos]. *¿Oyes a María?, dice que si tiene curvas no puede tener ángulos ni puede tener vértices, ni lados,* [María dice que como el círculo y Ana asiente]; *¿eh, vale? Bueno, ya en las demás parece que todos estamos de acuerdo, ¿en que sí o en que no?, ¿en qué estamos de acuerdo? Vamos a hacer un repasito.*

El clima promovido por la maestra hace que una niña, tras decir que una figura con curvas no puede tener ángulos, insista en su explicación para que la otra niña lo entienda.

Episodio 3:

[Ana se va a la pizarra y va preguntando por cada figura, escribiendo la respuesta que dan los niños al lado del número de cada una. Indican: 1 sí. En la 2 todos los grupos dicen que sí menos uno. Ana le pregunta al grupo que dice que no].

Ana: *¿Por qué decís que no? Convencednos.* [Se quedan callados y dicen no haber pensado por qué no, simplemente los dos estaban de acuerdo en que no lo era]. *Bueno, ahora pensad por qué no, ¿o ahora cambiáis y decid que sí?*
David: [de ese grupo] *Sí, porque no tiene ninguna parte redonda ni nada.*
Ana: *¿Qué tiene entonces para que sea polígono?*
David: *Tiene vértices, lados, ángulos y eso es lo que tiene, y está cerrado.*
Ana: *¿Entonces sí?* [Afirman que sí]. *Bueno, venga, la número 3...*
[Todos dicen que la 3 sí y la 4 no, pero en la 5 hay discrepancias].
Ana: *¡Uy!, por ahí hay alguien que dice que sí, ¿quién ha dicho que sí?* [levanta la mano una niña y Ana le pregunta por qué. Dice que porque tiene lados. Otra niña le indica que no está cerrado]. *Claro, no está cerrado, y tiene que estar cerrado, ¿no?* [Los niños dicen que sí a coro].
Ana: [Desde la pizarra de nuevo] *Número 6 y le hemos puesto que sí, ¿número 7?*
[No hay acuerdo].

Desde la pizarra, la maestra dirige el resumen de resultados. De nuevo, da cabida a que los niños expresen sus dudas o discrepancias y son los mismos niños los que van diciendo las características de un polígono. Ahora bien, aunque apoyada en las ideas expresadas por los alumnos, es Ana la que valida en último momento en algunas ocasiones (*Claro, no está cerrado, y tiene que estar cerrado, ¿no?*). Por ello, asignamos, en relación con la validación del conocimiento, VPA, a pesar de que en ciertos momentos se observa VA. Téngase en cuenta, además, que se trata de la última fase del proceso de validación (cercano al significado que se institucionalizará).

La comunicación promovida da cabida a que los niños argumenten sus respuestas, apreciándose el interés que pone la maestra en el razonamiento, así como un tipo de comunicación que caracterizamos al menos como CR.

Parece claro que la maestra hace que los alumnos se cuestionen sus ideas, aunque apoyándose en las ideas de otros compañeros. Por tanto, estaría entre RPA y RC. Podríamos pensar en RC pero es la maestra quien lleva las riendas de la interacción entre los alumnos para la generación conjunta de conocimiento. La dinámica que establece en la clase favorece que sean los propios alumnos los que, a veces, argumenten directamente entre ellos como la niña que le explica a otra que la figura ha de estar cerrada. Sin embargo, generalmente, a la intervención de cada alumno sigue una intervención de Ana. Parece que los alumnos, aunque se están dirigiendo a sus compañeros y se refieran a las ideas de éstos, se dirigen en primera instancia a Ana como mediadora clara, por lo que le asignamos RPA.

Ana: *...para el próximo día todo el mundo tiene que traer escrito... y si no, lo vamos a escribir aquí en un momentito cuando volváis del recreo, pero lo hace cada uno individualmente como si estuviera en su casa solo. Va a escribir para contarnos lo que es un polígono, para que nosotros sepamos distinguirlo. Nos dice: «un polígono es...», y ahora lo contamos, ¿de acuerdo?*

Es el final de la lección. La maestra es consciente de la necesidad de que la reflexión compartida se plasme por escrito individualmente, lo cual será de nuevo puesto en común para comprobar si cada niño reconoce las características de un polígono (episodio posterior que no se analiza). Es el momento de la institucionalización de los aprendizajes, como colofón de un proceso de significados compartidos: la reflexión común recoge las respuestas y argumentos individuales, que son detonantes de la discusión y la propia reflexión, hasta construir una definición compartida por toda la clase, luego cada alumno ha de llevar a su cuaderno esa definición, enfrentándose a la tarea de expresar con claridad y precisión los acuerdos de la puesta en común y reflexionando sobre lo aprendido y el proceso seguido en el aula.

En general, se observa que la maestra promueve una comunicación reflexiva, CR, de modo que posibilite la profundización de los alumnos en el contenido. Dicha promoción se realiza pidiendo a los alumnos argumentos, que confronten sus ideas con las de sus compañeros, validen las ideas de éstos, corrijan, y completen sus ideas con las de los demás. Ana hace que el alumno se cuestione sus respuestas y sus ideas en relación con las que se movilizan en el aula, cediéndole parte de la responsabilidad de su aprendizaje, RPA. En algunos momentos se potencia que los alumnos argumenten directamente entre ellos, lo que asociamos a RC, si bien en la mayoría de los casos la maestra desempeña un papel fundamental como mediadora en la construcción de significados.

En la misma línea, aunque se da cierto protagonismo al alumno en la validación de las ideas que surgen en el aula, la maestra interviene constantemente, dirigiendo las intervenciones de los alumnos y mediando entre ellas, como antes señalábamos, también con matices correctivos. Los alumnos son cuestionados continuamente sobre su valoración de la situación y las apreciaciones hechas. En ocasiones parece que se les da la última palabra en la validación, en función de lo que piensa la mayoría. No obstante, la maestra suele decidir el cierre, dando o no como válido lo presentado hasta el momento. Por ese motivo asociamos VPA con algunos momentos que podrían acercarse a VA. Parece que el alumno cobra mayor protagonismo en la validación durante el proceso, pero el punto final lo pone la maestra. No tenemos datos sobre la instrucción subsiguiente, por lo que no podemos asignar CI.

Parece que la maestra se mueve entre distintos niveles de las categorías señaladas (RPA-RC, VPA-VA), quizás mostrando hacia dónde quiere tender o lo que pretendería hacer. La discusión con ella acerca de la asignación de categorías del instrumento de análisis ha sido un elemento relevante en el cuestionamiento de su práctica.

5. DISCUSIÓN

Al llevar a cabo las tareas propuestas por la maestra, los alumnos han de comunicar sus ideas al grupo de modo que sean inteligibles y han de aprender a escuchar las ideas de los compañeros, incluso cuando no coinciden con su perspectiva. En este contexto, aprender significa comunicarse, explicar las ideas propias, contrastarlas con las de los demás. De este modo, como afirma Forman (1996) para las clases que implementan reformas educativas, los estudiantes «poseen más oportunidades de usar el registro matemático tanto como una herramienta para su propio pensamiento como un objeto para la reflexión» (p. 121).

Por otra parte, la gestión efectuada por la maestra acerca de la participación de los alumnos promueve que éstos se consideren entre sí como «recursos intelectuales, en lugar de localizar exclusivamente la autoridad en la maestra y el libro de texto» (ibd). Esta forma de entender el aprendizaje coincide con el propósito de establecer una comunidad de aprendices como la que destacan Tharp y Gallimore (1988), en la que los «miembros tienen diferentes e importantes papeles que desempeñar al colaborar unos en el aprendizaje de otros» (Forman, 1996, p. 121). Es en este sentido como las estructuras de participación en las comunidades de indagación se basan en la interacción, argumentación y discusión en los procesos de construcción de significados (Elbers, 2003).

Observamos que la maestra promueve la participación de los alumnos, haciendo que confronten sus argumentos y dándoles cierto protagonismo en cuanto a la construcción de los significados, que acaban siendo compartidos por toda la clase a través de la dirección de la maestra. La relevancia del discurso propio y de la cercanía del discurso del compañero en la construcción de significados pone de relieve las ideas del constructivismo social (Vigotsky, 1978; Wood, Cobb y Yackel, 1995), entendiendo tal discurso como el medio y el contenido de la mencionada construcción.

La promoción de determinadas formas de responsabilización, comunicación y validación alimenta una determinada cultura de aula que, a su vez, condiciona a aquellas, en una permanente y mutua interrelación. En una clase caracterizada por la transmisión, en la que quien valida es el profesor y en la que la comunicación es unidireccional o contributiva, el profesor posee un estatus en el que él detenta la autoridad y la verdad. En esta situación, la validación consiste en el contraste con esta verdad, es una mera verificación, y el papel del alumno es acercarse a dicha verdad del modo único mostrado por el profesor; no se discute ni el proceso ni el resultado. Lo único que espera el profesor del alumno es que finalmente responda correctamente a sus preguntas. Las preguntas son cerradas y el profesor conoce de antemano su respuesta correcta; no hay lugar para ningún tipo de especulación proveniente de los alumnos, quienes, por otro lado, conocen cuáles son las expectativas del profesor al respecto. El error es algo indeseable y debe penalizarse y erradicarse cuanto antes.

Sin embargo, la clase que hemos analizado nos ha hecho ver cómo influyen otros tipos de responsabilización, comunicación y validación en el desarrollo de otra cultura de aula. La cesión de responsabilidad del profesor hacia el alumno hace que los alumnos se cuestionen y confronten sus argumentos. La corresponsabilización procuraría la exposición justificada, la interpretación de los compañeros y la comparación, así como la argumentación. Puede influir en la comprensión con significado de los alumnos, induciendo, en su caso, la evolución o cambio de significados anteriores. En esta aula el error parece ser aceptado, tanto por la maestra como por los alumnos, mostrándose como algo natural o, al menos, no provocando rechazo.

Evidentemente, podemos afirmar que en ambas clases los alumnos «aprenderían polígonos», pero en la clase analizada se fomenta además el aprendizaje de habilidades comunicativas y argumentativas. Los alumnos de ambas clases podrán dar la definición de polígono, pero quizás los alumnos de la primera no reconozcan la importancia y la necesidad de argumentar sus decisiones o planteamientos, así como el papel que desempeñan los ejemplos y los contraejemplos en la construcción de un concepto y su definición. De esta forma, la maestra de la clase analizada no sólo se preocupa por que sus alumnos adquieran conocimiento *de* matemáticas (Ball y McDiarmird, 1990), como puede ser la definición de polígono, sino que se interesa por que sus alumnos conozcan aspectos del conocimiento *sobre* matemáticas (ibd), dentro del cual se considera el papel de los ejemplos y contraejemplos.

Por otra parte, la participación de los alumnos en los procesos de aprendizaje matemático trasciende el contenido concreto, generando actitudes que pueden variar desde una disposición favorable y comprometida hacia el aprendizaje matemático, hasta una actitud pasiva en la que siempre se esperará que sea otro quien produzca ese conocimiento para luego adquirirlo. En la primera clase, aquellos alumnos que se sienten inseguros a la hora de intervenir dejan de participar pues temen que su respuesta sea errónea. Aunque experiencias de no participación son inevitables en cualquier clase y no se convierten necesariamente en identidades de no-participación, estas experiencias son significativas para aquellos alumnos que son mantenidos en una posición marginal, dado que, cuando el mantenimiento de esta posición acaba integrándose en la práctica, cierra las posibilidades de participación (Wenger, 1998).

Confiamos haber puesto de manifiesto la potencialidad de las categorías de análisis presentadas, que nos han permitido profundizar en los procesos de enseñanza desde el punto de vista de cómo el profesor gestiona la participación de los alumnos en las actividades matemáticas. La sesión presentada ha pretendido exclusivamente mostrar la aplicación de dichas categorías.

NOTAS

* Son miembros del proyecto Multiculturalidad y Matemáticas: El profesor como mediador en la construcción de identidades y significados sociales, culturales y matemáticos (MUyMA). SEJ2004-02462/EDU Dir. Gral. Investigación, Ministerio de Educación y Cultura; y forman parte del Grup de Recerca Consolidat de la Dir. Gral. de Recerca de la Generalitat de Catalunya, Educació Matemàtica i Context Sociocultural (EMiCS) 2005SGR 00211.
Carrillo y Climent son miembros del proyecto de investigación educativa Desarrollo profesional a través de la investigación colaborativa. Consejería de Educación y Ciencia, Junta de Andalucía, 2007-2008. PIV-056/06.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALL, D.L. y McDIARMIRD, G. (1990). The subject matter preparation of teachers, en Houston, W.R. (ed.). *Handbook of Research on Teacher Education*. Nueva York: Macmillan, pp. 437-449.

BOYLAN, M., LAWTON, P. y POVEY, H. (2001). «I'd be more likely to talk in class if…»: some students' ideas about strategies to increase mathematical participation in whole class interactions, en van den Heuvel-Panhuizen, M. (ed.). *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Freudenthal Institute, Utrecht University, 2, pp. 201-208.

BRENDEFUR, J. y FRYKHOLM, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, pp. 125-153.

BROUSSEAU, G. (1994). Los diferentes roles del maestro, en Parra, C. y Saiz, I. (comp.). *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós.

ELBERS, E. (2003). Classroom interaction as reflection: learning and teaching mathematics in a community of inquiry. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), pp. 77-99.

FORMAN, E.A. (1996). Learning mathematics as participation in classroom practice: implications of sociocultural theory for educational reform, en Steffe, L.P., Nesher, P., Cobb, P., Goldin, J.A. y Greer, B. (eds.). *Theories of mathematical learning*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, pp. 115-130.

GORGORIÓ, N. y PRAT, M. (en prensa, 2008). *Jeopardizing learning opportunities in multicultural mathematical classrooms*. Kumpulainen, K. y Cesar, M. (eds.). Teaching and Learning Mathematics in Multicultural Settings. Sense Publishers.

JAWORSKI, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 9, pp. 187-211.

LAVE, J. y WENGER, E. (1991). *Situated learning: legitimate peripheral participation*. Nueva York: Cambridge University Press.

PRAT, M. (2007). «Una aproximació a l'aula de matemàtiques com a comunitat de pràctica». Treball de recerca. Universitat Autònoma de Barcelona.

ROJAS, F. (2007). «Estudio emergente para el inicio de una conceptualización de participación matemática». Treball de recerca. Universitat Autònoma de Barcelona.

THARP, R.G. y GALLIMORE, R.G. (1988). *Rousing minds to life: teaching, learning, and schooling in social context*. Nueva York: Cambridge University Press.

VAN OERS, B. (1996). Learning mathematics as a meaningful activity, en Steffe, L.P., Nesher, P., Cobb, P., Goldin, J.A. y Greer, B. (eds.). *Theories of mathematical learning*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, pp. 159-174.

VIGOTSKY, L.S. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

WELLS, G. (2001). *Indagación dialógica. Hacia una teoría y una práctica socioculturales de la educación.* Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica.

WENGER, E. (1998). *Communities of practice. Learning, Meaning and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

WOOD, T., COBB, P. y YACKEL, E. (1995). Reflections on learning and teaching mathematics in elementary school, en Steffe, L. y Gale, J. (eds.). *Constructivism in education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, pp. 401-422.

YACKEL, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms, en van den Heuvel-Panhuizen, M. (ed.). *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Freudenthal Institute, Utrecht University, 1, pp. 9-24.

Analysing mathematics learning sequences from the perspective of teacher-led participation

Carrillo, José[1], Climent, Nuria[1], Gorgorió, Núria[2], Prat, Montserrat[2] y Rojas, Francisco[2(*)]
[1] Universidad de Huelva
[2] Universitat Autónoma de Barcelona)
carrillo@uhu.es
climent@uhu.es
nuria.gorgorio@uab.es
montserrat.prat@uab.es
franciscojavier.rojas@uab.es

Abstract

A mathematics classroom may be studied from various different perspectives. In this paper, we focus on the analysis of learning sequences from the perspective of the strategies that a teacher resorts to in order to promote her students' participation in the mathematical tasks.

Like Wenger (1998), we consider that participation has to do not only with commitment to certain activities and people, but also to a process consisting of actively participating in the practices of social communities and developing identities in relationship to those communities.

As in Gorgorió and Prat (2008), we refer to a student's mathematical participation as his/her contributing to the mathematical discussion that takes place when a problem or question is posed, discussed or solved collectively, in search of making sense of a particular mathematical topic. As these authors point out, mathematical participation requires on the part of the student cognitive involvement and a certain communicative competence. However, these are necessary but not sufficient conditions for participation. The teacher and the other students in the classroom must open spaces for contributions to take place.

Our understanding of learning as a social process leads us to consider negotiation of meanings as a central aspect, being at the basis of a classroom discourse that facilitates students' participation in the activities of the group. On the other hand, we would like the mathematics classroom to be a community of inquiry (Wells, 2001; Jaworski, 2006) where learning can be described in terms of an active construction of mathematical knowledge, which requires the involvement of each and every student, the priorities being participation, construction of knowledge and integration within the community.

To study participation, we distinguish three intertwined aspects: its content, its mode and its leading by the teacher. These three aspects form a complex system where individuals, their contributions, and the way they are facilitated and take place, are interacting. To study how the teacher leads participation we consider three interrelated dimensions: learning accountability, promoted communication and knowledge validation. Each of them has different elements that allow us to analyse how the teacher leads participation.

As far as accountability is concerned, the student's cognitive involvement with the mathematical task may have different degrees (transmission, responsibility transfer and co-responsibility), linked to different kinds of requests from the teacher to the students. Regarding promoted communication, following Brendefur and Frykholm (2000), we distinguish unidirectional, contributive, reflexive and instructive communication. Finally, we suggest three possibilities in relation to knowledge validation that may coexist and are linked to who denotes the authority: the teacher is the only one that validates knowledge; the teacher and the students validate knowledge; the students themselves validate knowledge. We may say that we distinguish between knowledge validation and its institutionalisation.

To show the potentialities of the above categories and how they allow us to understand the teaching processes from the perspective of the teacher leading the students' participation in the mathematical tasks, we give a detailed account of the analysis of a fragment of a mathematics lesson about polygons with a group of students aged 9-10.

After the analysis we see that the teacher seems to be moving between different levels of the above categories (*responsibility transfer to the students – co-responsibility; knowledge validation by the teacher – by the students*) perhaps showing in what direction she is going, or what she intends to do. Discussing with her how we have assigned the different categories has been a relevant element in the questionnaire about her practice. Generally speaking, we may say that the teacher promotes *reflective communication* to facilitate the students going deeply into the content.

We discuss how different types of accountability, communication and validation have an influence on the classroom culture. In particular, aspects such as co-responsibility give a deeper meaning to the idea of mathematical participation since understanding is not only made public, but it circulates and is shared. Moreover, we show that how the teacher leads participation influences what students learn and their attitudes towards mathematics learning.